2

Var pequeña paso, prob acepta nuevo estado alta, la cadena se mueve lentamente.

Var grande del paso, prob aceptar nuevo estado bajo, la cadena se puede quedar estática.

Ahora un ejemplo en $\mathbb{R}^2$.

Quiero estimar $\mu = E_f[g(x_1,x_2)]$, $f(x_1,x_2) \propto f_u(x_1,x_2) = \begin{cases} e^{-4(x_2-x_1^2)^2+(x_2-1)^2} & x_2 \le 2 \\ 0, & cc \end{cases}$

Donde $g(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$

1

07/12

EJ BIDI, MET-HAST

Nuestro problema $\mu = E_f[g(x_1,x_2)]$.

Donde $f(x_1,x_2) \propto \begin{cases} e^{-4(x_2-x_1^2)^2+(x_2-1)^2}, & \text{si } x \le 2, \\ 0, & cc \end{cases}$

densidad — lo que hemos definido

$g(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$

- Hemos construido una cadena
- Ahora tengo que aplicarle g

cadena: (x_1^1,x_2^1) (x_1^2,x_2^2) (x_1^3,x_2^3) ESTADOS

quiero aplicar g:

$g(x_1^1,x_2^1)$ $g(x_1^2,x_2^2)$

y luego aplicar el método de medias por lotes para la estimación

→ graf autocorrelación dp de aplicar g.

Ahora sólo un gráfico, pq $g(x_1,x_2)$ es un único número para cada estado por la definición de g.

Se alcanza la independencia aprox en 40 y pico, pongo un valor un poco mayor para asegurar la independencia

---

Pasamos al siguiente algoritmo. <u>Muestreador de Gibbs (Gibbs sampling)</u>

PROBLEMA: estimar $\mu = E_f(g(\vec{x}))$

Estados: son vectores de números

EST. ACTUAL: $\vec{X_t} = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{dt})$ dim t

$\vec{X}_{t+1} = (X_{1t+1}, X_{2t+1}, \dots, X_{dt+1})$ → es lo que yo quiero generar

El algoritmo lo hace componente a componente, el resto se queda igual

ALGORITMO

$X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}, \dots, X_{dt})$ → Fdd condicional

Nuevo valor de X_1

↓ X_{1t+1} lo genero a partir de $X_{1t+1} \sim f_1(\cdot \mid \underbrace{X_{2t}, X_{3t}, \dots, X_{dt}}_{\text{condicionado al resto de valores (FIJOS)}})$

$(X_{1t+1}, X_{2t}, X_{3t}, \dots, X_{dt})$

Para el nuevo valor de X_2, si ya lo tengo generado, uso ese nuevo valor

↓ $X_{2t+1} \sim f_2(\cdot / X_{1t+1}, X_{3t}, \dots, X_{dt})$

$(X_{1t+1}, X_{2t+1}, X_{3t}, \dots, X_{dt})$

Para el nuevo valor de X_3

↓ $X_{3t+1} \sim f_3(\cdot / X_{1t+1}, X_{2t+1}, X_{4t}, \dots, X_{dt})$

$(X_{1t+1}, X_{2t+1}, X_{3t+1}, \dots, X_{dt})$

↓

⋮

↓ $X_{dt+1} \sim f_d(\cdot / X_{1t+1}, X_{2t+1}, \dots, X_{d-1\,t+1})$

d pasos.

Si ya he calculado el nuevo valor, lo uso.

$\vec{X}_{t+1} = (X_{1t+1}, X_{2t+1}, X_{3t+1}, \dots, X_{dt+1})$

- Las f_i son las densidades condicionales completas que se obtienen de la densidad objetivo $f(X_1, \dots, X_d)$

- Necesito poder generar valores según esas dens cond compl., más que poder calcularlos y estimarlos.

- Para poder aplicar el algoritmo debería ser sencillo generar valores según las f_i

En la práctica, las dens cond completas los obtengo por proporcionalidad a una $\underbrace{\text{distribución } \sim\!\sim\text{conocida}\sim\!\sim \text{ estandar conocida}}_{\text{Normal, gamma, beta}}$, salvo una cte de normalización.

Busco quitar la cte y quedarme con el núcleo de la función para poder compararla ~~que~~ con el de una distribución estandar

Ejemplo: Estimación de $\mu = E_f[(X_1 X_2)]$ donde $f(X_1, X_2) \propto f_u(X_1, X_2) =$

$$= \begin{cases} e^{-X_1X_2 - X_1 - X_2}, & \text{si } X_1 \geq 0 \text{ y } X_2 \geq 0 \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

$(X_1 \geq 0)$

es la uble, Fijo cte → Función de una única uble

Densidad cjta, es bivariante X_1 y X_2 son ubles

Aquí → $f_1(X_1 / X_2) \propto f_u(X_1, X_2) = \begin{cases} e^{-X_1X_2 - X_1 - X_2}, & X_1 \geq 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases} = \begin{cases} e^{-X_1X_2 - X_1}\, e^{-X_2} & X_1 \geq 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \propto$

es cte en esta función por lo que me sobra

tengo que calcular

$f_2(X_2 / X_1)$

salvo cte es la densidad de la exp

$$\propto \begin{cases} e^{-(x_2+1)x_1} & \text{si } x_1 \geq 0 \\ 0, & cc \end{cases}$$

Entonces f_1 tiene que ser la densidad de una exponencial, solo le falta una constante

· Por tanto $f_1(x_1/x_2) \sim Exp(x_2+1)$

Para el otro

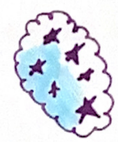
es la vble de la función, f_2 es de una única vble

cte

cte aquí

$$(x_1 \geq 0)\quad f_2(x_2/x_1) \propto f_U(x_1,x_2) = \begin{cases} \exp\{-x_1x_2 - x_1 - x_2\} = \exp\{-x_1x_2 - x_2\}\exp\{-x_1\} & x_2 \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$\propto \begin{cases} \exp\{-(x_1+1)x_2\} & x_2 \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$



· Por tanto, $f_2(x_2/x_1) \sim Exp(x_1+1)$

Para aplicar el muestreador de Gibbs en este caso, el algoritmo es el siguiente

$\vec{X_t} = (x_{1t}, x_{2t})$ estado actual de la cadena de Markov.

$$\downarrow\ x_{1t+1} \sim f_1(\cdot/x_{2t}) \sim Exp(x_{2t}+1)$$

$$(x_{1t+1}, x_{2t})$$

$$\downarrow\ x_{2t+1} \sim f_2(\cdot/x_{1t+1}) \sim Exp(x_{1t+1}+1)$$

$\vec{X}_{t+1} = (x_{1t+1}, x_{2t+1})$

nuevo estado de la cadena de Markov

Vámonos al ejercicio en R.