

CADENAS DE MARKOV:  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  verificando la propiedad de Markov

$$P(X_{t+1}|X_0, \dots, X_t) = P(X_{t+1}|X_t)$$

HOMOGÉNEA EN EL TIEMPO:  $P(X_{t+1}|X_t) = P(X_1|X_0)$

$\Rightarrow P(X_t)$  determinada por  $P(X_0)$  y  $P(X_1|X_0)$  NO DEPENDE DEL INSTANTE DE TIEMPO!

ESPACIO DE ESTADOS:  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  finito:  $P(X_0)$  vector  $\pi = (p_1, \dots, p_n)$   
 $P(X_1|X_0)$  MATRIZ  $P = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

TRANSICION EN  $t$  PASOS:  $p_{ij}^{(t)} = P(X_t = j | X_0 = i)$

ECUACIONES DE CHAPMAN - KOLMOGOROV:  $p_{ij}^{(t+t')} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(t)} p_{kj}^{(t')} \quad \forall i, j \in E, \forall t, t' \geq 0$

$$P(X_{t+t'} = j | X_t = i) = P(X_{t'} = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(t')} \rightarrow p^{(t')}$$

ESPACIO DE ESTADOS  $E = \{x_1, \dots\}$  INF. NUMERABLE:  $P(X_0)$  VECTOR INFINITO  
 $P(X_1|X_0)$  ES MATRIZ INFINITA

ESPACIO DE ESTADOS CONTINUO:  $P(X_0)$  DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD  
 $P(X_1|X_0)$  DISTRIBUCION CONDICIONAL

# Tiempo meteorológico

Spongamos un modelo muy simplificado de tiempo meteorológico que considera que los días solo pueden estar soleados, nublados o lluviosos y que asume que el tiempo que hace cada día solo depende del que hizo el día anterior.

Es decir, el modelo viene dado por una cadena de Markov con el siguiente conjunto de estados

```
estados_tiempo <- c("Soleado", "Nublado", "Lluvioso")
```

y la siguiente matriz de transición

```
transicion_tiempo <- matrix(c(.7, .2, .1,
                              .3, .4, .3,
                              .2, .45, .35),
                             nrow = 3, byrow = TRUE,
                             dimnames = list(estados_tiempo,
                                              estados_tiempo))
```

La cadena de Markov se construye entonces como sigue:

```
library(markovchain)

modelo_tiempo <- new("markovchain",
                     states = estados_tiempo,
                     transitionMatrix = transicion_tiempo,
                     name = "Modelo de tiempo meteorológico")

modelo_tiempo
```

```
## Modelo de tiempo meteorológico
## A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
## Soleado, Nublado, Lluvioso
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:
##      Soleado Nublado Lluvioso
## Soleado    0.7    0.20   0.10
## Nublado     0.3    0.40   0.30
## Lluvioso   0.2    0.45   0.35
```

Las probabilidades de transición se pueden obtener directamente del modelo.

```
modelo_tiempo["Soleado", "Soleado"]
```

```
## [1] 0.7
```

```
modelo_tiempo["Soleado", "Nublado"]
```

```
## [1] 0.2
```

```
modelo_tiempo["Soleado", "Lluvioso"]
```

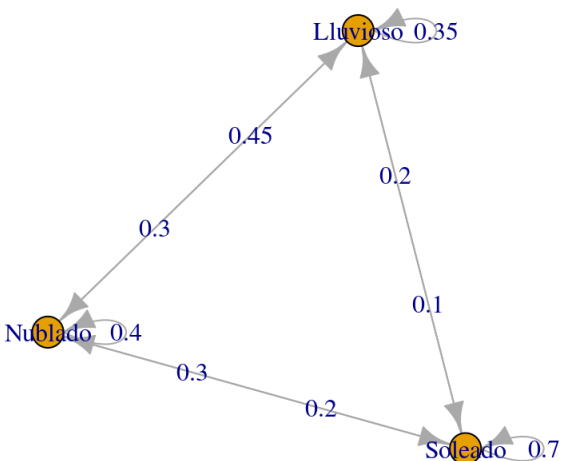
```
## [1] 0.1
```

```
conditionalDistribution(modelo_tiempo, "Soleado")
```

```
##      Soleado Nublado Lluvioso
##      0.7      0.2      0.1
```

Es habitual representar las cadenas de Markov con espacio de estados finito mediante un grafo que muestre las posibles transiciones entre estados, junto con las correspondientes probabilidades.

```
plot(modelo_tiempo, layout = igraph::layout.graphopt)
```



Una realización del modelo a partir de un estado inicial  $i$  es una secuencia de estados que comienza en  $i$  y en la que el resto de estados se ha generado de manera aleatoria según las probabilidades de transición a partir del estado anterior.

```
rmarkovchain(10, modelo_tiempo, t0 = "Soleado", include.t0 = TRUE)
```

→ REALIZACIÓN DE LA CATENA DE MARKOV

```
## [1] "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado"
## [8] "Nublado" "Soleado" "Soleado" "Soleado"
```

```
rmarkovchain(10, modelo_tiempo, t0 = "Soleado", include.t0 = TRUE)
```

```
## [1] "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado"
## [7] "Nublado" "Nublado" "Lluvioso" "Lluvioso" "Nublado"
```

De las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov se deduce que las probabilidades de transición en  $t$  pasos se pueden obtener multiplicando la matriz de transición de la cadena de Markov consigo misma  $t$  veces. Por tanto,

```
tiempo_10_pasos <- modelo_tiempo ^ 10
tiempo_10_pasos
```

```
## Modelo de tiempo meteorológico^10
## A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
## Soleado, Nublado, Lluvioso
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:
##      Soleado Nublado Lluvioso
## Soleado  0.4638152 0.3180924 0.2180924
## Nublado   0.4635125 0.3182437 0.2182437
## Lluvioso 0.4634369 0.3182816 0.2182816
```

Podemos realizar una comprobación experimental de lo anterior mediante simulaciones.

```
tiempos_dia_10 <- replicate(1e5, {
  rmarkovchain(10, modelo_tiempo, t0 = "Soleado")
})
tiempos_dia_10[, 1:6]
```

```
##      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
## [1,] "Lluvioso" "Nublado" "Soleado" "Nublado" "Soleado" "Soleado"
## [2,] "Lluvioso" "Nublado" "Soleado" "Nublado" "Soleado" "Soleado"
## [3,] "Lluvioso" "Soleado" "Soleado" "Lluvioso" "Nublado" "Soleado"
## [4,] "Nublado" "Lluvioso" "Soleado" "Lluvioso" "Nublado" "Soleado"
## [5,] "Nublado" "Nublado" "Soleado" "Nublado" "Nublado" "Soleado"
## [6,] "Lluvioso" "Nublado" "Soleado" "Soleado" "Nublado" "Nublado"
## [7,] "Lluvioso" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Nublado" "Nublado"
## [8,] "Lluvioso" "Nublado" "Soleado" "Soleado" "Lluvioso" "Nublado"
## [9,] "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Nublado"
## [10,] "Soleado" "Soleado" "Soleado" "Nublado" "Soleado" "Nublado"
```

```
prop.table(table(tiempos_dia_10[10,]))
```

```
##
## Lluvioso Nublado Soleado
## 0.22004 0.31675 0.46321
```

En este modelo de tiempo meteorológico, todos los estados son accesibles entre sí.

```
for (i in estados_tiempo) {
  for (j in estados_tiempo) {
    print(sprintf("%s es accesible desde %s: %s", j, i,
                  is.accessible(modelo_tiempo, from = i, to = j)))
  }
}
```

ESTA FUNCIÓN ME DICE SI EL ESTADO J ES ACCESIBLE DESDE EL ESTADO i (ENTONCES SE PUEDE LLEGAR AL ESTADO J EMPEZANDO DEL ESTADO i)

```
## [1] "Soleado es accesible desde Soleado: TRUE"
## [1] "Nublado es accesible desde Soleado: TRUE"
## [1] "Lluvioso es accesible desde Soleado: TRUE"
## [1] "Soleado es accesible desde Nublado: TRUE"
## [1] "Nublado es accesible desde Nublado: TRUE"
## [1] "Lluvioso es accesible desde Nublado: TRUE"
## [1] "Soleado es accesible desde Lluvioso: TRUE"
## [1] "Nublado es accesible desde Lluvioso: TRUE"
## [1] "Lluvioso es accesible desde Lluvioso: TRUE"
```

COMPROBAR CON  $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, hay una única clase de estados comunicantes y la cadena de Markov es irreducible.

```
communicatingClasses(modelo_tiempo)
```

```
## [[1]]
## [1] "Soleado" "Nublado" "Lluvioso"
```

```
is.irreducible(modelo_tiempo)
```

```
## [1] TRUE
```

La cadena de Markov es aperiódica.

```
period(modelo_tiempo)
```

```
## [1] 1
```