Para cada uno de los problemas que se proponen, calcular la estimación requerida mediante el método de Montecarlo. Construir el mejor (de menor longitud) intervalo de confianza con probabilidad de cobertura $99.7\,\%$ que se pueda. Para tratar de mejorar los intervalos construidos pueden aplicarse las siguientes técnicas:

- Generar una mayor cantidad de valores aleatorios (considerar un n mayor).
- Aplicar técnicas de reducción de varianza: variables antitéticas, muestreo estratificado, muestreo por importancia.

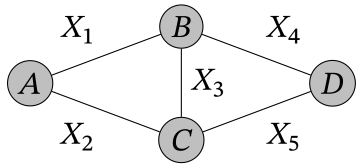
Documentar en *RMarkdown* (de manera reproducible y con parámetros, en su caso) todo el proceso de construcción y mejora del intervalo de confianza.

Puede ser de utilidad considerar esta página de *Wikipedia*, en la que puede encontrarse un listado de distintas distribuciones de probabilidad, y este paquete de *R*, que permite manejar distribuciones de probabilidad adicionales a las estándar.

Los problemas propuestos son los siguientes:

1. Estimar el valor de $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.
2. Estimar el valor de $\displaystyle\int_0^1 -30\cos(\pi x)x^4\left(1-x^4\right)dx$.
3. Estimar el valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.
4. Estimar el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\,dx$.
5. Estimar el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-x}\,dx$.
6. Estimar el valor de $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{3+\cos(x)+\operatorname{sen}(y)}\,dx\,dy$.
7. Estimar el valor de $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \mathrm{e}^{(x+y)^2}\,dx\,dy$.
8. Estimar el valor de $\displaystyle\int_0^1\int_{-2}^2 x^2\cos(xy)\,dx\,dy$.
9. Estimar el valor de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\int_3^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{(1-x^2)y^2}\,dx\,dy$.
10. Estimar el valor de $\displaystyle\int_2^3\int_0^1\int_1^2\int_0^2\int_0^1 \left(xy^2+xzv+yu^2\right)dx\,dy\,dz\,du\,dv$.

11. Consideremos el siguiente grafo no dirigido:



donde las longitudes $X_i \sim \mathrm{U}(0, a_i)$, con $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 1$ y $a_5 = 2$, son independientes. Si denotamos $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_5)$, entonces el valor $l = \mathbb{E}[g(\boldsymbol{X})]$, con

$$g(\boldsymbol{X}) = \text{mín}(X_1 + X_4, X_1 + X_3 + X_5, X_2 + X_3 + X_4, X_2 + X_5)$$

es el valor esperado de la longitud del camino más corto entre los nodos A y D.

Estimar el valor de l.

12. Un supermercado compra todas las semanas un lote de q pollos, cada uno de los cuales le cuesta 18 €, más un coste de mantenerlos durante la semana (refrigeración, etc.) que viene dado por la función $30 + 5\sqrt[4]{q^3}$.

    Cada semana vende, a 25 € cada uno, una cierta cantidad de esos pollos que viene dada por una distribución de Poisson de media 60.

    Al final de la semana debe deshacerse de los q' pollos que no ha vendido, con un coste dado por la función $50 + 3\sqrt{q'}$.

    - Estimar el beneficio semanal obtenido por el supermercado si cada semana compra $q = 70$ pollos.
    - Estimar el beneficio semanal para distintos valores de q, tratando de encontrar el valor que maximice ese beneficio.

13. El *modelo de Stienen* es el siguiente modelo de tipo germen-grano:

    - Se eligen aleatoriamente un conjunto de puntos del plano situados en la *ventana* $(0, v) \times (0, v)$. Estos puntos representan gérmenes que crecen transformándose en granos, representados por círculos centrados en esos puntos.
    - La cantidad de gérmenes viene dada por una distribución de Poisson de media λ, llamada parámetro de *intensidad*.
    - Las dos coordenadas de cada germen se eligen de manera aleatoria, independiente y uniforme en el intervalo $(0, v)$.
    - Cada germen crece en un grano de diámetro la distancia desde ese germen hasta el germen más cercano.

    Estimar la superficie ocupada por los granos en un modelo de intensidad 100 sobre una ventana $(0, 10) \times (0, 10)$.

14. Consideremos el siguiente modelo de la cantidad de lluvia recogida durante un mes en una cierta área:

- El número de eventos lluviosos en el mes sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2.9$.
- La cantidad de lluvia recogida a partir de cada evento lluvioso sigue una distribución de Weibull con parámetro de forma $k = 0.8$ y parámetro de escala $\sigma = 3$.
- La cantidad total de lluvia recogida es, por tanto,

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

donde $N \sim$ Poisson(λ) y $L_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Weibull(k, σ). Si $N = 0$, entonces $L = 0$.
- Cuando $L < 5$ se activa una alerta de escasez de agua.

Estimar la probabilidad $\mathbb{P}(L < 5)$.

15. Consideremos el siguiente modelo del tiempo de vida de un cometa:

    - Cada cometa tiene un nivel de energía x.
    - Un cometa con energía $x < 0$ sigue una órbita parabólica que completa en un tiempo $(-x)^{-3/2}$.
    - Un cometa con energía $x > 0$ sigue una órbita hiperbólica y, en consecuencia, abandona el sistema solar.
    - En cada órbita parabólica, las interacciones gravitatorias con los planetas del sistema solar modifican la energía x del cometa a $x + z$, donde $z \sim$ N$(0, 1)$.
    - Un cometa con energía inicial x_0 permanecerá, por tanto, en el sistema solar durante un tiempo

    $$T = \sum_{i=0}^{m-1} (-x_i)^{-3/2}$$

    donde $x_{i+1} = x_i + z_i, z_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ N$(0, 1)$ y $m = \text{mín}\big(i \mid x_i > 0\big)$

    Simulando cometas con energía inicial -1 y hasta un máximo de 10^2 órbitas, estimar la probabilidad $\mathbb{P}(T > 10^3)$.

16. El *proceso de Galton-Watson* es es un proceso estocástico utilizado para modelizar el desarrollo de una población de individuos autorreplicantes. Matemáticamente se define de la siguiente manera:

    $$X_0 = 1$$
    $$X_{t+1} = \sum_{i=1}^{X_t} Y_{t,i}$$

    Es decir,

    - Las variables X_t representan la cantidad de individuos que hay en la población en cada instante $t \geq 0$.

- En el instante inicial $t = 0$ hay un único individuo en la población.
- En cada instante t, cada individuo i de la población produce una cierta cantidad aleatoria $Y_{t,i}$ de descendientes, pasando la población en el instante $t+1$ a estar formada por el conjunto de todos los descendientes.
- Se asume que todas las variables aleatorias $Y_{t,i}$ son independientes e idénticamente distribuidas.

Se sabe que si el promedio de descendientes de los individuos es estrictamente menor que 1, entonces la población se extingue eventualmente. Es decir,

$$\mathbb{E}\left[Y_{t,i}\right] < 1 \Longrightarrow T_{\text{extinción}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{ínf}\{t \mid X_t = 0\} \text{ es finito con probabilidad } 1$$

Estimar el valor de $T_{\text{extinción}}$ en un proceso de Galton-Watson en el que el número de descendientes de cada individuo sigue una distribución de Poisson de promedio 0.9.