Método de las variables antitéticas

Problema: Estimar my=E(x)

La idea del método de las variables antitéticas consiste en aplicar el método de Montecarlo a partir de un par de variables aleatorias, X e Y, tales que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mu$, pero con X e Y negativamente correladas. De esta manera, la dependencia negativa tendrá el efecto de cancelar las desviaciones de las variables respecto al valor de la esperanza.

El estimador

Estos puntos están más cerca de mu

$$\hat{\mu}_{\text{ant},n}(X,Y) = \frac{1}{n/2}\sum_{i=1}^{n/2}\frac{x_i+y_i}{2}$$

X e Y son variables dependientes, con correlación negativa pero la misma esperanza matemática

donde $x_i \overset{\text{i. i. d.}}{\sim} X$ e y_i está negativamente correlado con x_i, es un estimador insesgado de μ. En efecto, $\hat{\mu}_{\text{ant},n}(X,Y) = \hat{\mu}_{n/2}\left(\frac{X+Y}{2}\right)$ y es fácil comprobar que $\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{2}\right] = \mu$.

Asumiendo que $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2$,

Consideramos esa nueva variable (X+Y)/2

De ahí tengo que cada (xi+yi)/2 es indepe de (xj+yj)/2.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\mu}_{\text{ant},n}(X,Y)) &= \frac{1}{n/2}\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\big(\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)+2\text{Cov}(X,Y)\big)\\ &= \frac{\sigma^2}{n}+\frac{1}{n}\text{Cov}(X,Y)\\ &= \frac{\sigma^2}{n}\big(1+\rho(X,Y)\big)\end{aligned}$$

donde $\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma^2}$.

Por tanto, ya que estamos asumiendo que $\text{Cov}(X,Y) < 0$, se tiene que $-1 \le \rho(X,Y) < 0$ y, por tanto,

$$\text{Var\_\{método vle antitética\}} = \text{Var}(\hat{\mu}_{\text{ant},n}(X,Y)) < \frac{\sigma^2}{n} = \text{Var}(\hat{\mu}_n(X))$$

Además, la reducción de varianza será tanto mayor cuanto más cercano a -1 sea $\rho(X,Y)$ (pudiendo incluso llegar a varianza 0).

Para la construcción de intervalos de confianza, puesto que los pares (x_i, y_i) son independientes, se tiene que

$$\text{Var}(\hat{\mu}_{\text{ant},n}(X,Y)) = \frac{\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right)}{n/2}$$

por lo que podemos estimar esa varianza mediante

$$\hat{\sigma}_{\text{ant},n}(X,Y)^2 = \frac{\frac{1}{(n/2-1)}\sum_{i=1}^{n/2}\left(\frac{x_i+y_i}{2}-\hat{\mu}_{\text{ant},n}(X,Y)\right)^2}{n/2}$$

¿Cómo construir un par de variables antitéticas? Consideremos un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^d$ simétrico respecto a un punto central $\boldsymbol{c} \in D$. Dado un punto $\boldsymbol{x} \in D$, su reflejo con respecto a $\boldsymbol{c}$ es el punto $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in D$ tal que $\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$. Esto es, $\widetilde{\boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}$. Si $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria que sigue una distribución dada por una función de densidad simétrica f sobre D, es decir, tal que $f(\boldsymbol{x}) = f(\widetilde{\boldsymbol{x}})$, entonces podemos considerar $\boldsymbol{X}$ y $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ como par candidato de variables antitéticas. Por ejemplo:

- Si $D = (0,1)^d$ y $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{U}\big((0,1)^d\big)$, entonces $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{X}$ (la resta es componente a componente).
- Si $D = \mathbb{R}^d$ y $X \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \Sigma)$, entonces $\widetilde{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{X}$.

En general, las variables a considerar tienen la forma $g(\boldsymbol{X})$ y $g(\widetilde{\boldsymbol{X}})$. El siguiente resultado proporciona una condición suficiente para obtener un par de variables antitéticas con esa forma.

Teorema 1 *Sea $g\colon (0,1)^d \to \mathbb{R}$ una función monótona en cada uno de sus argumentos. Sean $\boldsymbol{U} = \big(U_1, \dots, U_d\big) \sim \mathrm{U}\big((0,1)^d\big)$ y $\widetilde{\boldsymbol{U}} = \big(1 - U_1, \dots, 1 - U_d\big)$. Entonces se verifica que $\mathrm{Cov}\big(g(\boldsymbol{U}), g(\widetilde{\boldsymbol{U}})\big) < 0$.*

No obstante, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede construir una función creciente $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que $-\varepsilon < \mathrm{Cov}\big(g(\boldsymbol{U}), g(\widetilde{\boldsymbol{U}})\big) < 0$. En otras palabras, el resultado anterior no garantiza una reducción de varianza mínima.

Por otra parte, la eficiencia del método depende no solo de la reducción de varianza alcanzada, sino del coste de aplicarlo. Es habitual, por ejemplo, que, comparado con el coste de calcular g sea costoso generar $\boldsymbol{X}$ y barato generar $\widetilde{\boldsymbol{X}}$. En ese caso, el método de las variables antitéticas tendría un coste menor que el método directo.

Genero X (esto ya tiene un coste c1) ->
Calculo el Simétrico ~X (ha tenido un coste c2) ->
aplico g a esos argumentos y obtengo g(x) y g(~x) (esto tiene unos costes, que son iguales c3)
c1+c2+c3+c3

Generar un nuevo valor independiente:
Genero x1 (c1) -> aplico g obtengo g(x1) , con c3
Genero x2 (c1) -> aplico g obtengo g(x2) , con c3
c1+c1+c3+c3

Si calcular el antitético tiene un menor coste que generar un nuevo valor, es decir, si c2<c1,
entonces el coste de las variables antitéticas es menor que el método directo.