

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Dimitrij Bathauer

10.12.2024

Versuch 223: Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung

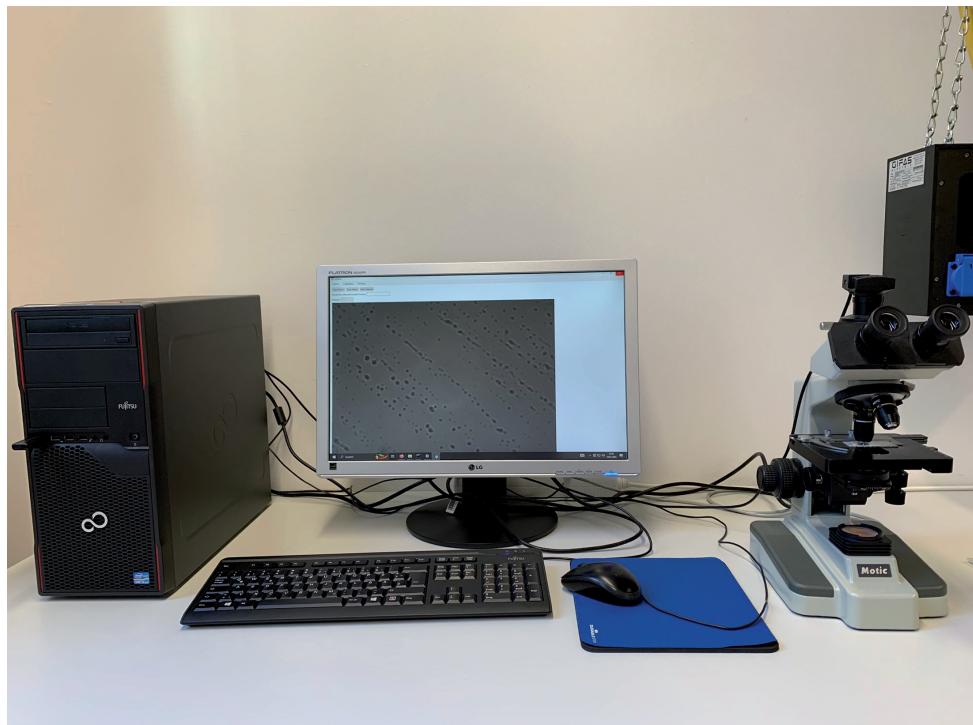


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.2 Versuchsdurchführung	4
2 Messprotokoll	5
3 Auswertung	6
4 Zusammenfassung und Diskussion	7

1 Einleitung

Bereits im Jahr 1827 war dem schottischen Botaniker Robert Brown aufgefallen, dass Blütenpollen in einem Glas Wasser eigenartige Zickzackbewegungen ausführen. Erst nahezu 100 Jahre später erkannte Albert Einstein, dass die Bewegungen auf fortwährende Stöße der Wassermoleküle zurückzuführen sind. Während Einstein damit ein weiteres Argument für die Existenz von Atomen und Molekülen lieferte, war seine Beobachtung auch eine Evidenz für die molekulare Theorie der Wärme. Die mittlere Geschwindigkeit der Wassermoleküle hängt demnach von der Temperatur des Wassers ab. Erst im Jahre 1926 konnte der französische Physiker Jean-Baptiste Perrin die Brown'sche Molekularbewegung experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigen, wofür er auch den Physik-Nobelpreis erhielt.

In Versuch 223 beobachten wir mit einem Mikroskop die Brown'sche Bewegung von in Wasser suspendierten Partikeln. Wir werden die statistische Bewegung untersuchen und anhand der Bahn eines einzelnen Teilchens die Boltzmannkonstante bestimmen.

1.1 Physikalische Grundlagen

Als vereinfachtes Modell der Brown'schen Bewegung betrachten wir einen eindimensionalen Random-Walk. Wir stellen uns also ein einzelnes, freies Teilchen vor, welches sich auf einer Linie bewegen kann. Alls τ Sekunden erfährt das Teilchen einen Stoß, also $n = \frac{t}{\tau}$ Stöße in einer Zeit t . Bei jedem Stoß besteht die gleiche Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$, dass das Teilchen um die Distanz δ entweder nach links ($-\delta$) oder nach rechts ($+\delta$) verschoben wird. Um nach n Stößen an der Position $m\delta$ zu sein, muss sich das Teilchen somit $\frac{n+m}{2}$ -mal nach rechts und $\frac{n-m}{2}$ -mal nach links bewegt haben. Um die Position $x = m\delta$ zu erreichen gibt es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} = \frac{n!}{(\frac{1}{2}(n+m))!(\frac{1}{2}(n-m))!} \quad (1)$$

Wege, die das Teilchen gelaufen sein könnte. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen nach n Stößen an der Position $x = m\delta$ befindet ist binomialverteilt nach

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{\frac{n+m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}}. \quad (2)$$

Die Wahrscheinlichkeit p für einen Sprung nach links bzw. nach rechts ist für beide Richtungen $p = \frac{1}{2}$. Somit können wir die Wahrscheinlichkeitsfunktion vereinfachen zu

$$P(m; n) = \frac{n!}{(\frac{1}{2}(n+m))!(\frac{1}{2}(n-m))!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3)$$

Da das Zeitintervall τ zwischen den Stößen sehr klein ist, wird $n = \frac{t}{\tau}$ sehr groß. Somit können $n!$ und $m!$ mit der Stirling'schen Formel

$$n! = (2\pi n)^{\frac{1}{2}} n^n e^{-n} \quad (4)$$

angenähert und die Wahrscheinlichkeitsfunktion zu

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}} \quad (5)$$

umgeformt werden

Wir möchten nun von der diskreten Verteilung der Variablen m und n zu einer kontinuierlichen Verteilung für die leichter messbaren Variablen x und t übergehen. m ist entweder gerade oder ungerade, somit ist $\Delta m = \pm 2$. Betrachtet auf ein Intervall $[x, x + \Delta x]$, kann sich ein Teilchen an $\frac{\Delta x}{\Delta m \delta} = \frac{\Delta x}{2\delta}$ verschiedenen Positionen befinden. Wir können die Variable m also entsprechend

$$P(m; n) \frac{\Delta x}{2\delta} = P(x; n) \Delta x \quad (6)$$

substituieren. Weiter setzen wir $n = t/\tau$, $m = x/\delta$ und führen den Diffusionskoeffizienten

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau} \quad (7)$$

ein. Damit erhalten wir die Funktion

$$P(x; t) \Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (8)$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen nach der Zeit t im Intervall $[x, x + \Delta x]$ befindet. Setzen wir

$$\mu = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x; t) dx = 0, \quad (9)$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x; t) dx = 2Dt, \quad (10)$$

so lässt sich diese mit einer Gaussverteilung

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (11)$$

um $x = 0$ identifizieren. Aus der Definition der Varianz σ ergibt sich sogleich die Einstein-Smoluchowski-Gleichung

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt}. \quad (12)$$

Welche besagt, dass der mittlere Abstand eines Teilchens von dessen Ursprungsort mit \sqrt{t} zunimmt.

Diese Gesetzmäßigkeiten lassen sich leicht von der bisherigen eindimensionalen Betrachtung auf höhere Dimensionen erweitern. Es gilt dann für das mittlere Verschiebungskquadrat

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle. \quad (13)$$

Durch die Isotropie der Brown'schen Bewegung gilt im zweidimensionalen Fall $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{4Dt}$ und im dreidimensionalen Fall $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6Dt}$. Nach Einstein gilt für den zuvor eingeführten Diffusionskoeffizienten

$$D = \frac{kT}{f}. \quad (14)$$

Dieser gibt die Beweglichkeit eines Teilchens, abhängig von der Boltzmannkonstante k , der Temperatur T und dem Reibungskoeffizienten f an. Letzterer lässt sich für kugelförmige

Partikel mit dem Radius a , suspendiert in einer Flüssigkeit mit Viskosität η nach dem Stokes'schen Gesetz

$$f = 6\pi\eta a \quad (15)$$

berechnen. Es gilt also

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \quad (16)$$

Setzen wir dies in die Definition des mittleren Verschiebungsquadrats in zwei Dimensionen ein, so erhalten wir

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kT}{6\pi\eta a} t \quad (17)$$

und schließlich

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle \quad (18)$$

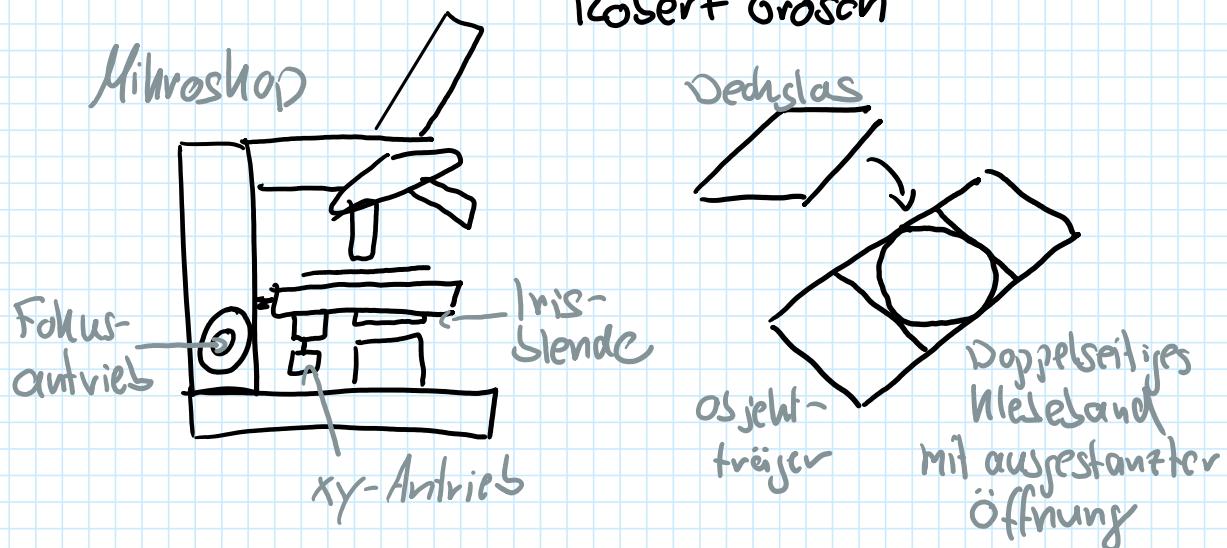
zur experimentellen Bestimmung der Boltzmannkonstante k .

1.2 Versuchsdurchführung

2 Messprotokoll

Messprotokoll 223

Marius Pfeiffer 10.12.2024
Robert Grosch



Durchmesser Teilchen: $(755 \pm 30) \text{ nm}$ Fehlerangabe auf Flasche

Zimmertemperatur: $(22.2 \pm 0.1)^\circ\text{C}$ Skalenfehler

Kalibrationsmaßstab: $0.09434 \mu\text{m}/\text{px}$

Berdhauer

3 Auswertung

4 Zusammenfassung und Diskussion

$$x = 3 \frac{1}{|\text{cm}|} \quad (19)$$

$$x = 3 \text{ cm} \quad (20)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\vec{q} \quad (21)$$

$$\vec{p}^2 = \delta_{ij}p_ip_j \quad (22)$$

$$\vec{q}^2 = \delta_{kl}q_kq_l \quad (23)$$

$$\{L_i, H\} = \left\{ \varepsilon_{abc}q_bp_c, \frac{\delta_{ij}p_ip_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\delta_{kl}q_kq_l \right\} \quad (24)$$

$$= \varepsilon_{abc} \left\{ q_bp_c, \frac{\delta_{ij}p_ip_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\delta_{kl}q_kq_l \right\} \quad (25)$$

$$= \varepsilon_{abc} \left(\frac{1}{2m} \{q_bp_c, \delta_{ij}p_ip_j\} + \frac{m}{2}\omega^2 \{q_bp_c, \delta_{kl}q_kq_l\} \right) \quad (26)$$

$$(27)$$