

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Hans Oppitz

06.03.2025

Versuch 233: Fourieroptik



Abbildung 1: Versuchsaufbau

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.2 Versuchsdurchführung	9
2 Messprotokoll	11
3 Auswertung	14
3.1 Eichung der Abszisse	14
3.2 Quantitative Untersuchung der Beugung am Einzelspalt	16
3.3 Quantitative Untersuchung der Beugung am Doppelspalt	22
3.4 Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes am Beispiel des Einfachspalts	26
3.5 Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes am Beispiel des Doppelspalts	34
4 Zusammenfassung und Diskussion	39

1 Einleitung

Während die Fresnelsche und die Fraunhofersche Beugung die zwei „klassischen“ Zugänge zur Theorie der Beugung bilden, ist die Fourieroptik ein weiterer Ansatz zu diesem Gebiet, welcher sich die mathematischen Werkzeuge der Fourieranalyse zunutze macht. Im Versuch 233 (bzw. 333) werden wir die Beugung von Licht am Einzel- und Doppelspalt vor dem Hintergrund der Fourieroptik betrachten.

1.1 Physikalische Grundlagen

Die Fraunhofersche Beugung

Die Fresnelsche Beugung geht von endlichen Abständen zwischen Lichtquelle, Beugungsobjekt und Beobachtungsebene aus. Es treffen hierbei also Lichtstrahlen in verschiedenen Winkeln auf das Beugungsobjekt, entsprechend welcher sie gebeugt werden. Da die mathematische Beschreibung dieses Prinzips augenscheinlich sehr kompliziert ist, beschränken wir uns in diesem ersten Teil auf die Fraunhofersche Beugung.

Wie in Abbildung (2) dargestellt, geht die Fraunhofersche Betrachtung der Beugung von unendlich großen Abständen zwischen Lichtquelle, Beugungsobjekt und Beobachtungsebene aus. In dieser Annäherung (*bzw. Distanzierung lol*) treffen die Lichtstrahlen von der Quelle daher parallel und senkrecht auf das Beugungsobjekt. Da die gebrochenen Lichtbündel daher ebenfalls parallel sind, würden diese erst im Unendlichen interferieren (2, links). Durch die Positionierung einer Sammellinse zwischen Beugungsobjekt und Beobachtungsebene (2, rechts) lassen sich die Interferenzmuster bereits in der Entfernung der Brennweite der verwendeten Linse beobachten.

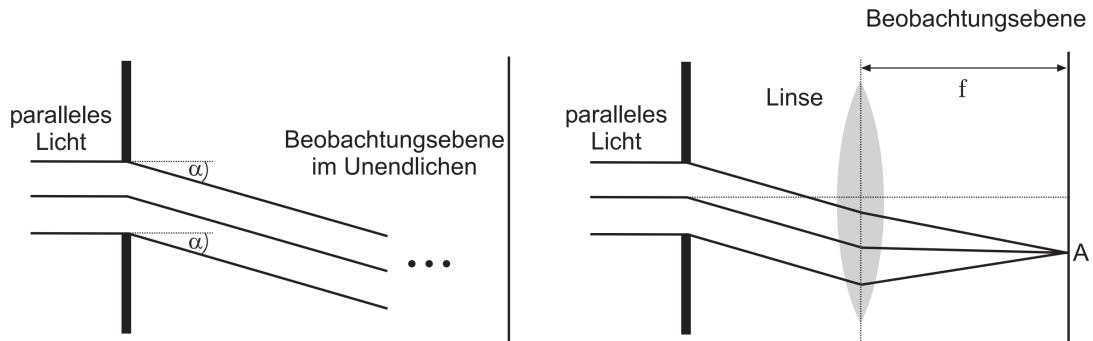


Abbildung 2: Fraunhofersche Beugung mit Beobachtungsebene im Unendlichen (links) und in endlichem Abstand durch Verwendung einer Linse (rechts).

Wir gehen nun von einem Spalt der Breite d in y -Richtung, und einer Länge deutlich größer als d aus. Alle Punkte des Spalts werden mit gleicher Amplitude E_0 und Phase $\varphi = \omega t$ von einem parallelen monochromatischen Lichtstrahl der Wellenlänge λ erregt. Es gilt also

$$E(y) = E_0 e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Das Huygens-Fermat'sche Prinzip besagt nun, dass von jedem dieser Punkte eine Elementarwelle ausgeht. Das Interferenzmuster dieser Wellen können wir bestimmen, indem wir die Überlagerung aller in einen bestimmten Winkel α ausgehenden Wellen betrachten. Mathematisch entspricht dies dem Integral

$$E_\infty(\alpha) = \int_{-d/2}^{+d/2} E_0 e^{i(\omega t - kl)} dy \quad (2)$$

mit dem Betrag des Wellenvektors $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Der Gangunterschied zwischen einem Lichtbündel aus dem Mittelpunkt ($y = 0$) des Spalts und einem Lichtbündel abseits von diesem entspricht gerade $y \sin(\alpha)$. Somit gilt für die Weglänge des äußeren Bündels

$$l = R + \sin(\alpha) \quad (3)$$

mit R als Weglänge des Bündels aus dem Mittelpunkt.

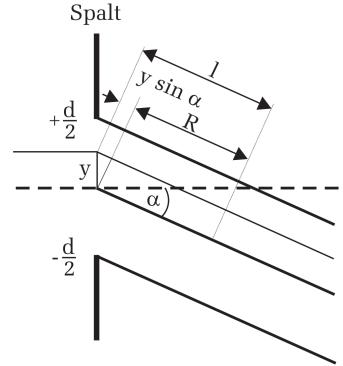


Abbildung 3:
Gangunterschied
der
ausgehenden
Lichtbündel
am Einzelspalt.

Setzen wir diese Definition in das Integral ein, führen dieses aus und benutzen die Euler-sche Formel für die e-Funktion, so ergibt sich

$$E_\infty(\alpha) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin\left(\frac{\pi d \sin(\alpha)}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \sin(\alpha)}{\lambda}}. \quad (4)$$

Wir identifizieren $x = \frac{d}{\lambda} \pi \sin(\alpha)$ und erhalten so

$$E_\infty(x) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin(x)}{x} d. \quad (5)$$

Durch das Quadrieren dieser Formel können wir die Intensität

$$I_\infty(x) \propto \frac{\sin^2(x)}{x^2} d^2 \propto I_0 \frac{\sin^2(x)}{x} \quad (6)$$

mit $I_0 \propto d^2$ bestimmen. Diese ist dargestellt in Abbildung (4).

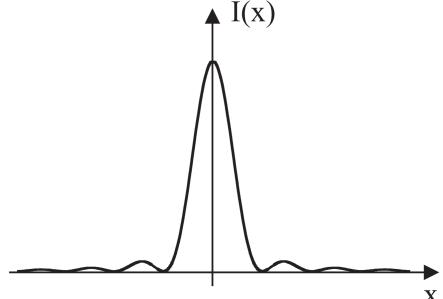


Abbildung 4: Intensitätsverteilung
der Beugungsstruktur des Einzel-spalts.

Fourierreihen und Fourierintegrale

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn ein $L \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine L -periodische und integrierbare Funktion lässt sich mit den trigonometrischen Funktionen

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

als Basisvektoren entwickeln. Das heißt, es existieren $a_n, b_n \forall n \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right). \quad (8)$$

Die sogenannten Fourierkoeffizienten a_n und b_n sind definiert durch

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx, \quad (9)$$

bzw.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx. \quad (10)$$

Zur Veranschaulichung können wir die Fourierkoeffizienten am Beispiel der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -l/2 < x < l/2 \\ 0, & l/2 > |x| < L/2 \end{cases}, \quad (11)$$

dargestellt in Abbildung (??), ausrechnen.

Aus Symmetriegründen verfallen alle Koeffizienten b_n . Für a_0 gilt

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} dx = \frac{2l}{L}. \quad (12)$$

Für alle weiteren a_n gilt

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\pi n \frac{l}{L}\right). \quad (13)$$

Setzen wir das Verhältnis $L : l = 2 : 1$, so erhalten wir die folgenden Summanden als erste Glieder der zugehörigen Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{10\pi}{L}x\right) - \dots \quad (14)$$

Abbildung (5) zeigt die Fourierentwicklung der Funktion für verschiedene, aufsteigende n bis zu einem Wert von $n = 27$. Es ist zu sehen, dass die Linearkombination aus trigonometrischen Funktionen sich immer weiter der rechteckigen Form der Ausgangsfunktion annähert.

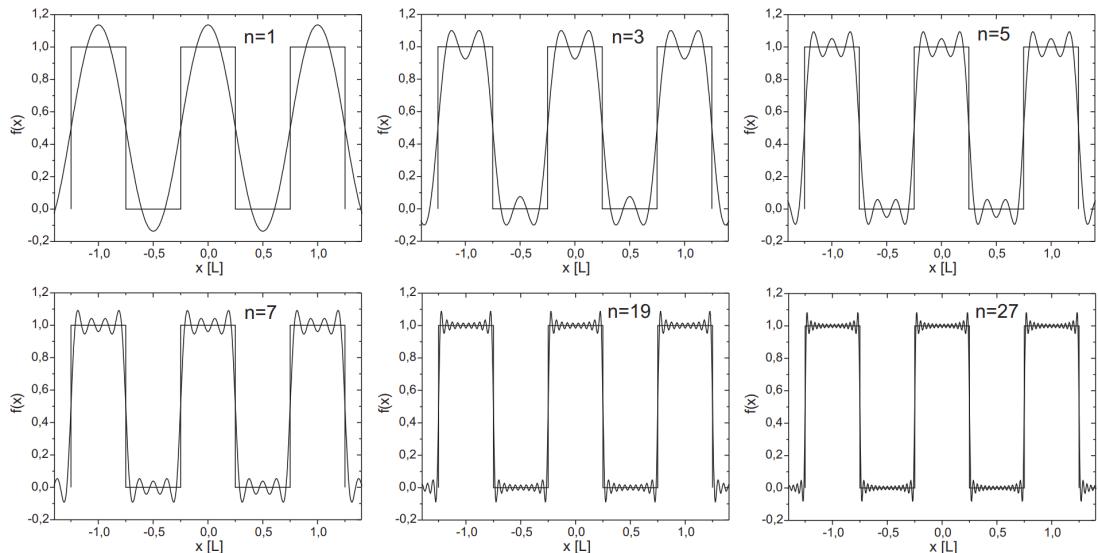


Abbildung 5: Fourierentwicklungen der gezeigten Rechtecksfunktion für verschiedene n .

Die Gleichung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (15)$$

zeigt einen besonderen Anwendungsfall der Fourierentwicklung. Hier wurde x durch die Zeit t und die Periode L durch die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ mit der Frequenz ω ersetzt. In dieser Variante kann die Fourierreihe genutzt werden, um die verschiedenen anteiligen Frequenzen und Amplituden eines zeitperiodischen Signals zu ermitteln.

Während sie zwar nicht als *Fourierreihe* dargestellt werden können, können wir auch nichtperiodische Funktionen dennoch mithilfe von trigonometrischen Funktionen darstellen. Für den Fall $L \rightarrow \infty$ geht die Fourierreihe in ein Integral und die Koeffizienten zu kontinuierlichen Funktionen über. Die kontinuierlichen Fouriertransformation ist dann definiert durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (16)$$

Dabei ist F die Fouriertransformierte von f . Diese erhalten wir durch die Rücktransformation

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (17)$$

Falls x eine Ortsvariable ist, so nennen wir k die Raum- oder Ortsfrequenz.

Die Fourierdarstellung der Fraunhoferbeugung

Zu Herleitung der Fraunhoferschen Beugung aus der Fouriertheorie betrachten wir zunächst eine beliebige Öffnung S , wie sie in Abbildung (6) dargestellt ist. Wir gehen davon aus, dass die Öffnung mit monochromatischem Licht bestrahlt wird, somit geht von jedem Flächenelement dS ($x = 0, y, z$) eine Kugelwelle der Form

$$\frac{e^{ikr}}{r} \quad (18)$$

mit der Quellstärke ϵ pro Einheitsfläche aus. Für das Feld am Ort P in den Koordinaten X, Y, Z gilt dann

$$dE = \epsilon \frac{e^{ikr}}{r} dS. \quad (19)$$

Der Abstand von dS zu diesem Punkt $P(X, Y, Z)$ beträgt gerade

$$r = \sqrt{X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}. \quad (20)$$

Der Abstand R vom Mittelpunkt der Öffnung zum Punkt $P(X, Y, Z)$ beträgt

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (21)$$

Damit können wir den Abstand r umformen zu

$$r = R \sqrt{1 + \frac{(y^2 + z^2)}{R^2} - \frac{2(Yy + Zz)}{R^2}}. \quad (22)$$

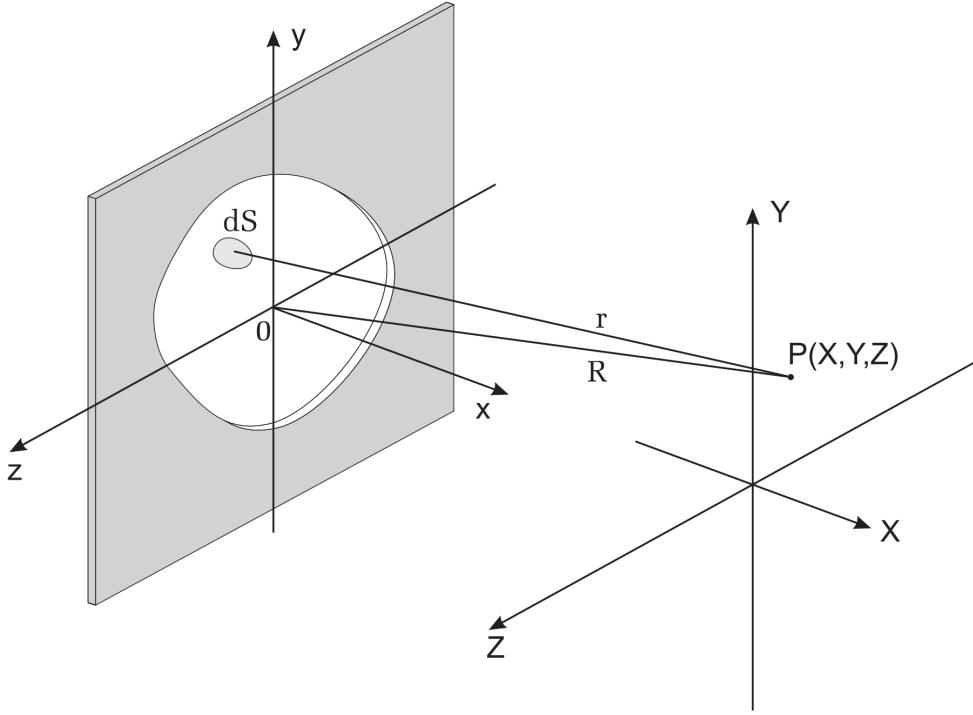


Abbildung 6: Geometrie des Spalts zur Herleitung der Fraunhoferbeugung aus der Fouriertheorie.

Nun können wir annehmen, dass der Abstand \overline{OP} deutlich größer gegenüber der Spaltöffnung ist. Dadurch gilt zum einen, dass wir r im Amplitudenterm (19) durch R ersetzen können. Zum anderen gilt die Abschätzung

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} \ll 1 \quad (23)$$

und somit

$$r = R \sqrt{1 - \frac{2(Yy + Zz)}{R^2}} \quad (24)$$

Gehen wir weiter davon aus, dass der Term in der Wurzel deutlich kleiner als 1 ist, so können wir den Ausdruck weiter zu

$$r = R \left(1 - \frac{Yy + Zz}{R^2} \right) \quad (25)$$

vereinfachen. Diese Definition können wir nun ein Gleichung (19) einsetzen und diese über die Gesamte Öffnung S integrieren. So erhalten wir zunächst

$$E(R) = \epsilon \frac{e^{ikR}}{R} \int \int e^{-\frac{ik}{R}(Yy + Zz)} dy dz. \quad (26)$$

Nun nehmen wir zuerst die Annäherung vor, dass wir uns auf einen kleinen Bereich um R beschränken und somit den Term e^{ikR}/R als Konstant annehmen können. Weiter erweitern wir die Quellstärke ϵ um eine Abhängigkeit von y und z , also

$$\epsilon \rightarrow \epsilon(y, z) = A(y, z) = A_0(y, z)e^{i\varphi(y, z)}. \quad (27)$$

Die *Öffnungsfunktion* $A(y, z) dy dz$ ist proportional zum Feld der vom Flächenelement $dy dz$ ausgehenden Welle. Mit dieser Definition ergibt sich das Integral

$$E(Y, Z) = \int \int_S A(y, z) e^{-\frac{ik}{r}(Yy+Zz)} dy dz. \quad (28)$$

Nun können wir die Raumfrequenzen durch

$$k_y = k \frac{Y}{R}, \quad k_z = k \frac{Z}{R} \quad (29)$$

definieren. Setzen wir diese in das Integral

$$E(k_y, k_z) = \int \int_S A(y, z) e^{-i(k_y y + k_z z)} dy dz \quad (30)$$

ein, so erhalten wir gerade die **zweidimensionale Fouriertransformation** der Öffnungsfunktion $A(y, z)$.

Das Beugungsbild des Spalts als Fouriertransformierte der Spaltöffnung

Als erste Anwendung der gerade erlangten Erkenntnisse betrachten wir die Öffnungsfunktion

$$A(y, z) = f(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq d/2, \\ 0, & |y| > d/2. \end{cases} \quad (31)$$

Die Fouriertransformation dieser Funktion lässt sich wie folgt ausrechnen:

$$F(k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy \quad (32)$$

$$= \int_{-d/2}^{d/2} f(y) e^{-ik_y y} dy \quad (33)$$

$$= -\frac{1}{ik_y} e^{ik_y y} \Big|_{-d/2}^{d/2} \quad (34)$$

$$= \frac{1}{ik_y} (e^{ik_y d/2} - e^{-ik_y d/2}). \quad (35)$$

Unter Verwendung der Eulerschen Formel entspricht dies der Funktion

$$F(k_y) = d \frac{\sin(k_y d/2)}{k_y d/2} = \text{sinc}(k_y d/2) d \quad (36)$$

mit den Nullstellen

$$k_y = \frac{2\pi n}{d}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

Um die Intensitätsverteilung zu erhalten, müssen wir dieses Ergebnis lediglich noch quadrieren.

Aus Symmetriegründen ($F(k_y) = F(-k_y)$) entspricht die Rücktransformierte gerade dem Integral

$$f(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(k_y d/2)}{k_y d/2} \cos(k_y y) dk_y, \quad (38)$$

welches nur numerisch Lösbar ist. Mit der oberen Grenze ∞ erhalten wir damit genau die Rechtecksfunktion des Spalts. In diesem Versuch untersuchen wir durch das Abblenden von Teilstrahlen nur das Aussehen einer rudimentären Spaltfunktion. Mathematisch können wir dies durch Einsetzen der n -ten Nullstelle von $F(k_y)$,

$$k_{y,n} = k_0 \sin(\alpha_n) = \frac{k_0 n \lambda}{d} = \frac{2n\pi}{d} \quad (39)$$

als obere Integrationsgrenze erzielen.

Die Fouriertransformierte des Doppelspalts

Zu Herleitung der Fouriertransformierten des Doppelspalts können wir diesen als zwei nach links, beziehungsweise nach rechts verschobene Einzelspalte betrachten und unsere Resultate aus dem vorherigen Abschnitt anwenden. Es gilt damit

$$F = F(k_y, \text{rechts}) + F(k_y, \text{links}) = 2 \cos(k_y g/2) d \frac{\sin(k_y d/2)}{k_y d/2}. \quad (40)$$

Hierbei ist d erneut die Spaltbreite und g ist der Abstand zwischen den Mittelpunkt der beiden Spalte. Der Vorfaktor, die Gitterfunktion $\cos(\dots)$, ergibt sich dadurch, dass die Integrationsgrenzen der Einzelspalte hier nun nicht um den Nullpunkt zentriert, sondern verschoben sind. Durch Einführen der Substitution $k_y = k_0 \sin(\alpha) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\alpha)$ und quadrieren erhalten wir die Beugungsfigur des Doppelspalts als

$$I = 4 \cos^2(\pi g/\lambda \sin(\alpha)) d^2 \operatorname{sinc}(\pi d/\lambda \sin(\alpha))^2. \quad (41)$$

Auch hieraus können wir wieder die Rücktransformierte unter Einschränkung der betrachteten Beugungsordnungen berechnen

$$F_{mod.}(y) \propto [f_{mod}]^2 = \left[\frac{2d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} \cos(k_y g/2) \frac{\sin(k_y d/2)}{k_y g/2} \cos(k_y y) dk_y \right]^2, \quad (42)$$

um so vom Beugungsbild zurück zum Objekt- bzw. Spaltbild des Doppelspalts zu gelangen.

1.2 Versuchsdurchführung

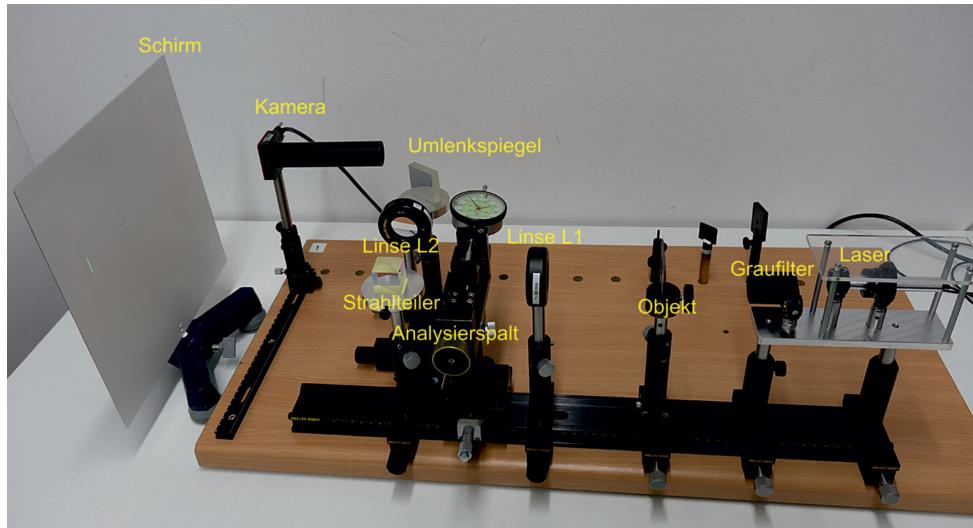


Abbildung 7: Versuchsaufbau mit Beschriftungen.

Die obenstehende Abbildung (7) zeigt den Versuchsaufbau. Als Lichtquelle verwenden wir einen Diodenlaser (523 nm, 1 mW). Um die Kamera nicht zu übersteuern, kann vor den Laser ein Graufilter geschwenkt werden, um dessen Leistung um den Faktor 100 zu reduzieren. Auf diesen folgt im Aufbau der Objekthalter. In diesen können wir, je nach Aufgabenstellung, einen variablen und rotierbaren Einzelspalt oder einen Doppelspalt einspannen. Es folgt darauf die erste Linse L1 und der Analysierspalt. Mit dem Analysierspalt können wir Beugungsmaxima von außen herein ausblenden, seine Breite lässt sich anhand einer Messuhr ablesen. Hinter dem Analysespalt befindet sich ein Strahlteiler. In Laserrichtung sieht man die Abbildung des Spalts. Im seitlich abgelenkten Strahl folgen Linse L2 und ein Umlenkspiegel, der das Beugungsbild in Richtung des Schirms lenkt. Die Bilder sind, wenn der Graufilter nicht eingeschwenkt ist, auf dem Schirm zu sehen. Für die Aufzeichnung der Analysedaten verwenden wir eine Kamera, die in das Objekt- und das Beugungsbild geschoben werden kann. Die Kamera ist am PC mit der Software **Thorcam** verbunden, mit welcher wir die Intensitätprofile beobachten und die Objekt- und das Beugungsbilder als Bilddateien abspeichern können. Mit der Software **Gwyddion** lesen wir aus den abgespeicherten Bildern die Intensitätsprofile als Textdateien aus, um diese im Auswertungsskript einlesen zu können.

Aufgabe 1: Quantitative Beobachtungen am Einfachspalt. In diesem ersten Aufgabenteil untersuchen wir qualitativ die Auswirkungen verschiedener Parameter auf die Abbildung des Einfachspalts und dessen Beugungsbild. Auf dem Schirm stellen wir Beobachtungen zu verschiedenen Spaltbreiten und Winkeln des Einfachspalts und verschiedenen Spaltbreiten des Analysespalts an.

Aufgabe 2: Vermessen der Beugungsstruktur des Einfachspalts. Ab diesem Aufgabenteil verwenden wir die Kamera und **Thorcam** für unsere Aufzeichnungen. Wir stellen den Einfachspalt so ein, dass wir ein Hauptmaximum und mindestens fünf Nebenmaxima beobachten können. Wir variieren die Belichtungszeit der Kamera so, dass wir ein Bild aufnehmen können, auf welchem das Hauptmaximum gerade so nicht in Sättigung ist und eines, auf dem die ersten Nebenmaxima gerade so nicht in Sättigung sind. Abschließend eichen wir noch die Abszisse des Kamerabildes, indem wir die Abstände der Nebenmaxima in **Thorcam** in Pixeln mit der jeweiligen Breite des Analyserspalts assoziieren, bei welcher wir die Maxima zur Hälfte ausblenden.

Aufgabe 3: Vermessen der Beugungsstruktur des Doppelspalts. Wir tauschen für diesen Versuchsteil den variablen Einzelspalt durch den Objekthalter mit einem Dia, auf welchem sich drei verschiedene Doppelspalte befinden. Qualitativ beobachten wir zunächst die Beugungsbilder und skizzieren deren Struktur. Weiter speichern wir auch in diesem Aufgabenteil für einen Doppelspalt ein Bild ab, bei welchem sich das Hauptmaximum gerade nicht in Sättigung befindet.

Aufgabe 4: Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes am Beispiel des Einfachspalts. Zu Beginn dieses Versuchsteils ersetzen wir den Objekthalter wieder durch den variablen Einfachspalt. Ziel ist es, das Spaltbild als Ergebnis einer Fouriersynthese der zugelassenen Beugungsordnungen zu beobachten. Hierfür platzieren wir die Kamera im Objektstrahl und justieren den Aufbau so, dass ein möglichst scharfes Rechteckprofil des Spalts sichtbar wird. Wir nehmen insgesamt vier Bilder des Objektbildes auf, wobei sukzessive mehr Beugungsordnungen durch Öffnen des Analysierspalts zur Abbildung zugelassen werden (0 . Ordnung, ± 1 ., ± 2 ., ± 3 .). Zusätzlich nehmen wir ein weiteres Bild bei vollständig geöffnetem Analysierspalt auf, mit dem wir die vergrößerte Spaltbreite in Pixeln bestimmen. Die Bestimmung der Spaltbreite erfolgt anhand der Pixelauflösung der Kamera und der optischen Vergrößerung durch Linse L1.

Aufgabe 5: Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes am Doppelspalt. In diesem Aufgabenteil untersuchen wir den Doppelspalt analog zum Einzelspalt. Nach dem Einsetzen des Objekthalters mit Doppelspalt justieren wir die Kamera auf eine möglichst steile und symmetrische Darstellung der beiden Spaltprofile. Wir vermessen anschließend mit der Cursorfunktion die Spaltbreite und den Spaltabstand in Pixeln, um daraus mithilfe der bekannten Bildweite und Brennweite die realen Abmessungen zu berechnen. Auch hier beobachten wir die Veränderung des Objektbildes beim sukzessiven Schließen des Analysierspalts. Dabei dokumentieren wir zwei charakteristische Fälle: Der Fall, bei dem nur noch die ersten Beugungsmaxima zur Abbildung beitragen und die rechteckigen Spaltprofile in zwei gaussähnliche Strukturen übergehen, und der Fall, bei dem die Doppelstruktur vollständig verschwindet und ein flaches Intensitätsplateau sichtbar wird. Für beide Fälle nehmen wir je ein Bild auf.

2 Messprotokoll

Messprotokoll 233/333

Marius Pfeiffer

06.03.2025

Robert Grosch

Aufgabe 1

Spaltbreite am Objekt größer

→ Hauptmaximum wird heller

→ Nebenmaxima sind weniger stark geteuft

Rotation um 90°

→ Beugungsmuster vertikal

Analysespalt weit auf

→ Mehr Nebenmaxima zu sehen

Aufgabe 2

Min	Pixel → Pixel	Spaltbreite [mm]
5	338 1263	0.79
4	438 1164	0.59
3	507 1075	0.48
2	609 984	0.30
1	689 890	0.16

Aufgabe 3

Qualitativ

Breiter Doppelspalt

↪ Mittleres Hauptmaximum + Nebenmaxima

↪ Weitere Hauptmaxima + jeweils ein Nebenmax.

Mittlerer Doppelspalt

↪ Hauptmax 1. Ordnung mit weniger Nebenmaxima

↪ Hauptmax höherer Ordnung mit kleineren Nebenmax.

Schmaler Doppelspalt

↪ HM 1. Ord sehr breit

↪ HM größerer Ordnung fast nicht mehr sichtbar

Aufgabe 4

Spaltbreite in Pixeln: 274 → 915

Brennweite: 80 mm

Bildweite: (350 ± 10) mm

Aufgabe 5

Spalt Links

$381 \rightarrow 637$

503

Spalt Rechts

$966 \rightarrow 1212$

px

\rightarrow

1089

a) Nur erste Beugungsmaxima sichtbar

Spaltöffnung: 0.19 mm $\pm 0.01 \text{ mm}$

b) Verschwommenes Plateau

Spaltöffnung: 0.03 mm

H. Oppelt

3 Auswertung

Vorbemerkungen

Sofern nicht anders angegeben, berechnen wir die Fehler zusammengesetzter Werte anhand der standardmäßigen Gauß'schen Fehlerfortpflanzung. Die σ -Abweichung zweier fehlerbehafteter Werte $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ berechnen wir anhand der Formel

$$\sigma = \frac{|x - y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \quad (43)$$

Für die Breite des Analysierspalts, abgelesen von der Messuhr, verwenden wir einen konstanten Fehler von $\pm 0.01\text{mm}$. Für abgelesene Pixelwerte nehmen wir mit einem Fehler von $\pm 4\text{px}$ an.

3.1 Eichung der Abszisse

Wir beginnen die Auswertung der Ergebnisse mit der Eichung der Abszisse, bestimmen also einen Faktor, um im weiteren Verlauf der Rechnungen Pixel in Millimeter umrechnen zu können. Hierzu tragen wir zunächst die Abstände der links- und rechtsseitigen Minima von der fünften bis zur ersten gegen die Breite des Analysierspalts, zu welcher diese gerade noch sichtbar waren, auf.

Tabelle 1: Abstände der Minima 1. bis 5. Ordnung mit zugehöriger Spaltbreite des Analysierspalts

Ordnung	Pixel (l) → Pixel (r) [px]	Abstand [px]	Spaltbreite [mm]
5	$338 \pm 4 \rightarrow 1263 \pm 4$	925 ± 6	0.79 ± 0.01
4	$438 \pm 4 \rightarrow 1164 \pm 4$	726 ± 6	0.59 ± 0.01
3	$507 \pm 4 \rightarrow 1075 \pm 4$	568 ± 6	0.48 ± 0.01
2	$609 \pm 4 \rightarrow 984 \pm 4$	375 ± 6	0.30 ± 0.01
1	$689 \pm 4 \rightarrow 890 \pm 4$	201 ± 6	0.16 ± 0.01

Abbildung (8) zeigt die Breiten des Analysierspalts über den jeweiligen Pixelwerten. An die Messdaten fitten wir eine standardmäßige lineare Funktion der Form

$$f(x; a, b) = ax + b. \quad (44)$$

Die aus dem Fit resultierenden optimierten Werte von a und b lauten

$$a = (8.63 \pm 0.18) \cdot 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{px}}, \quad (45)$$

$$b = -0.018 \pm 0.011\text{mm}. \quad (46)$$

Die Steigung a werden wir fortan als Umrechnungsfaktor verwenden, es gilt also

$$1\text{px} = (8.63 \pm 0.18) \cdot 10^{-4}\text{mm}. \quad (47)$$

Zur Verbesserung der Genauigkeit verwenden wir hierbei nicht den hier angegebenen gerundeten Wert, sondern den ungerundeten, nur durch die Genauigkeit des `float`-Datentyps begrenzten Wert.

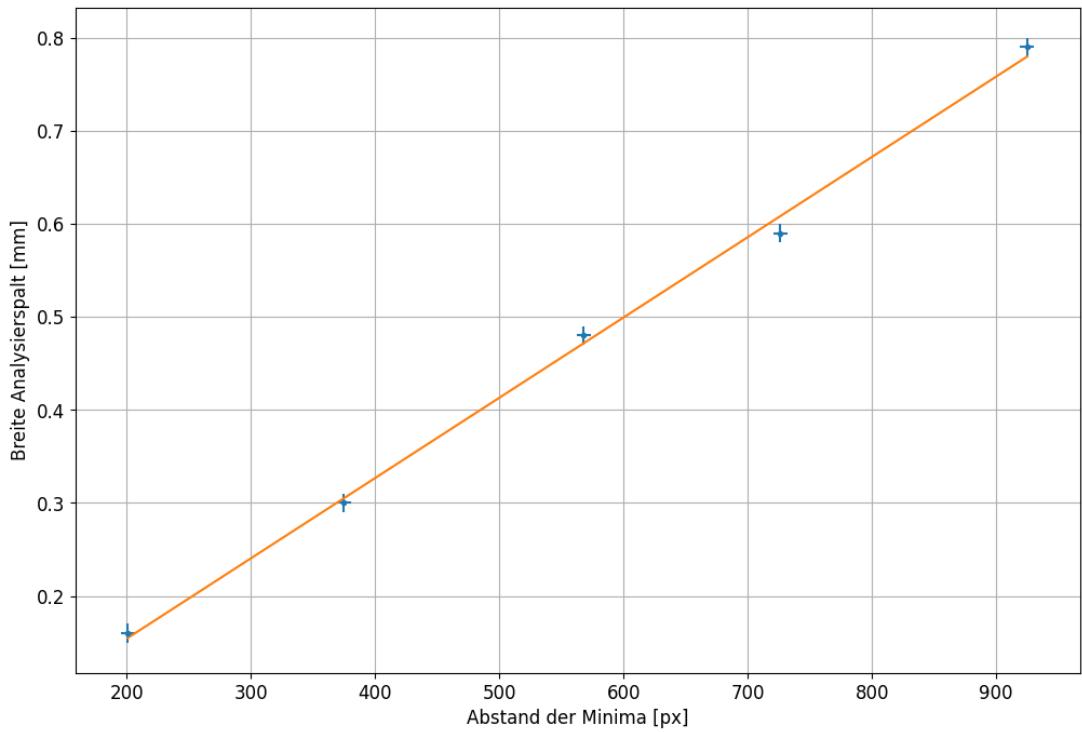


Abbildung 8: Pixel-Abstände über Spaltbreite zur Abszisseneichung

3.2 Quantitative Untersuchung der Beugung am Einzelpunkt

Wir entnehmen zunächst die Positionen der links- und rechtsseitigen Minima erster bis fünfter Ordnung aus den Intensitätsverteilungen. Zunächst aus der, in welcher das Hauptmaximum nicht in Sättigung ist (Abbildung (9)), dann aus der Verteilung, in welcher das Hauptmaximum in Sättigung ist und die weiter außen liegenden Maxima ebenfalls sichtbar sind (Abbildung (10)). Die Positionen sind in Tabelle (2) zusammengefasst. Außerdem ist hier direkt deren Abstand für die weiteren Berechnungen ausgerechnet.

Tabelle 2: Abstände der linksseitigen (l) und rechtsseitigen (r) Minima 1. bis 5. Ordnung

Ordnung	Pixel (l) → Pixel (r) [px]	Abstand [px]
5	$324 \pm 4 \rightarrow 1264 \pm 4$	940 ± 6
4	$415 \pm 4 \rightarrow 1169 \pm 4$	754 ± 6
3	$510 \pm 4 \rightarrow 1075 \pm 4$	565 ± 6
2	$603 \pm 4 \rightarrow 979 \pm 4$	376 ± 6
1	$696 \pm 4 \rightarrow 885 \pm 4$	189 ± 6

Zusätzlich entnehmen wir den Daten noch die Positionen der links- und rechtsseitigen Maxima erster bis fünfter Ordnung, gleichermaßen zusammengefasst in Tabelle (3).

Tabelle 3: Abstände der linksseitigen (l) und rechtsseitigen (r) Maxima 1. bis 5. Ordnung

Ordnung	Pixel (l) → Pixel (r) [px]	Abstand [px]
5	$273 \pm 4 \rightarrow 1305 \pm 4$	1032 ± 6
4	$371 \pm 4 \rightarrow 1210 \pm 4$	839 ± 6
3	$464 \pm 4 \rightarrow 1118 \pm 4$	654 ± 6
2	$559 \pm 4 \rightarrow 1021 \pm 4$	462 ± 6
1	$660 \pm 4 \rightarrow 924 \pm 4$	264 ± 6

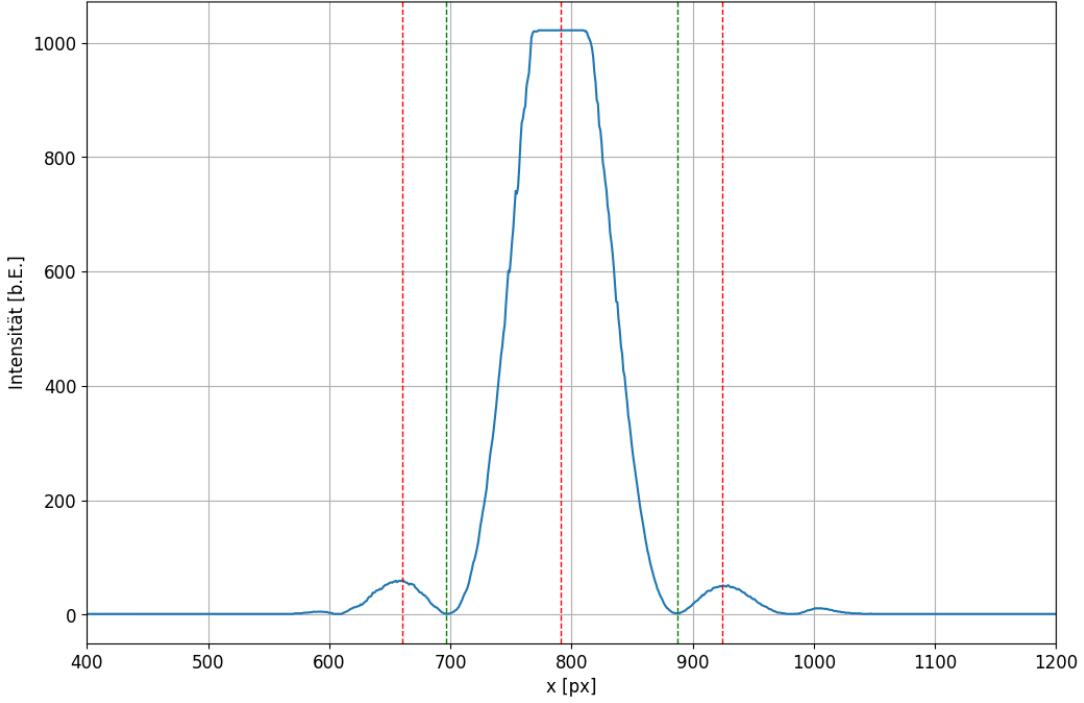


Abbildung 9: Intensitätsverteilung bei Beugung am Einzelspalt mit Hauptmaximum nicht in Sättigung

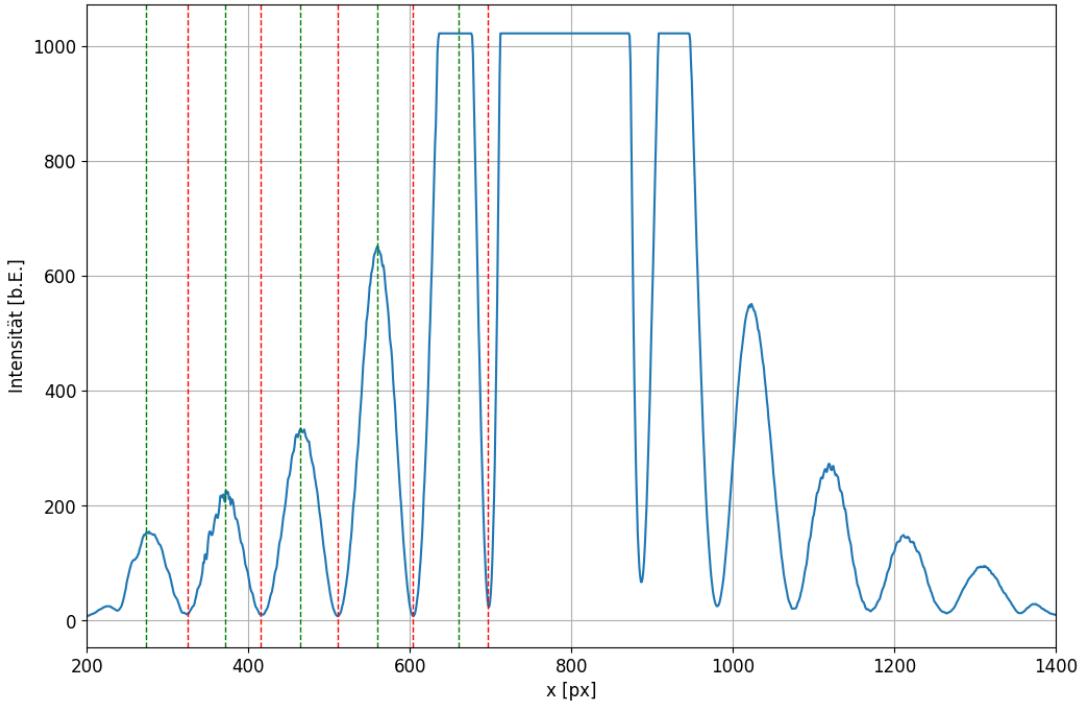


Abbildung 10: Intensitätsverteilung bei Beugung am Einzelspalt mit Hauptmaximum in Sättigung

Die Abstände der Minima tragen wir nun über der jeweiligen Ordnung in ein Diagramm auf, zu sehen in Abbildung (11), und fitten an diese Datenpunkte erneut eine lineare Funktion (diesmal ohne y-Abschnitt, da es sich um eine Ursprungsgerade handelt), um die Steigung zu ermitteln. Hierbei erhalten wir den Wert

$$a = 188.2 \pm 0.8 \text{ mm.} \quad (48)$$

Diesen können wir nun verwenden, um eine zwei weitere Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

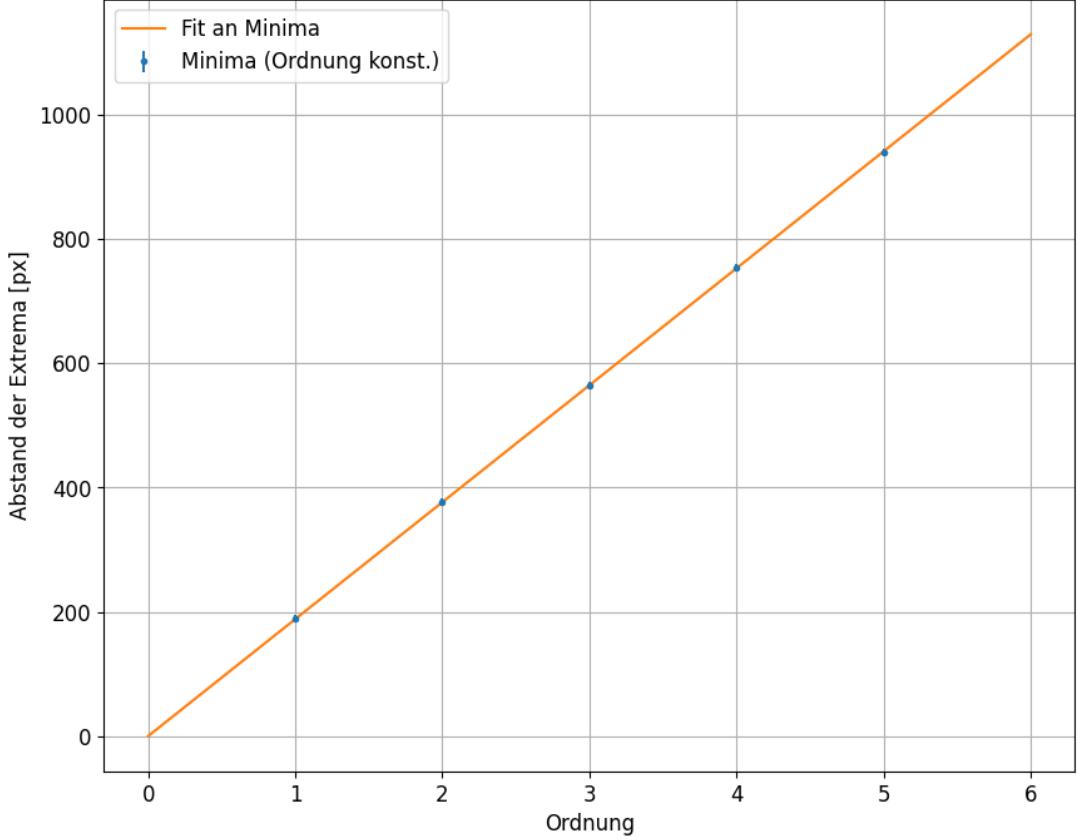


Abbildung 11: Ordnungen gegenüber der Abstände der jeweiligen Minima mit linearem Fit.

Berechnung der Spaltbreite

Aus den Grundlagen der Beugung am Einzelspalt wissen wir, dass für den Winkel α_n eines Minimums n -ter Ordnung der Zusammenhang

$$b \cdot \sin(\alpha_n) = n \cdot \lambda \quad (49)$$

mit der Spaltbreite b und der Wellenlänge λ des einfallenden Lichts gilt. Weiter können wir aus geometrischen Überlegungen des Versuchsaufbaus herleiten, dass für die Position x_n des n -ten Minimums auf dem Schirm in Abstand d

$$\tan(\alpha_n) = \frac{x_n}{d} \quad (50)$$

gilt. Da wir in unserem Aufbau den Schirm genau in der Brennweite f der Sammellinse positioniert haben gilt für uns $d = f$. Für kleine α_n gilt $\sin(\alpha_n) \approx \alpha_n \approx \tan(\alpha_n)$, somit können wir die oberen beiden Gleichungen zusammenfassen zu

$$\frac{n\lambda}{b} = \frac{x_n}{f}, \quad (51)$$

welche wir zur Spaltbreite b umformen können:

$$b = \frac{f\lambda}{\frac{x_n}{n}}. \quad (52)$$

Der Bruch $\frac{x_n}{n}$ entspricht dabei genau der Steigung a der Gerade, welche wir gerade eben an die Abstände der Minima gefittet haben. Somit haben wir mit

$$b = \frac{f\lambda}{a} \quad (53)$$

eine Formel für die Spaltbreite hergeleitet. In diese setzen wir die Wellenlänge des Laserlichts von $\lambda = 532 \cdot 10^{-6}$ mm, die Brennweite $f = 80 \pm 2$ mm, sowie die zuvor bestimmte Steigung, welche wir zuvor mit dem Umrechnungsfaktor in Millimeter umrechnen, ein. Wir erhalten damit eine Spaltbreite von

$$b = (0.262 \pm 0.007) \text{ mm}. \quad (54)$$

Bestimmung der Ordnungen der Nebenmaxima

Das Verhältnis der Ordnungen der Nebenmaxima zu ihren Abständen sollte dem gleichen proportionalen Verhältnis folgen, wie das der Nebenminima. Um dies zu bestätigen, stellen wir das proportionale Verhältnis um, um vom Abstand der links- und rechtsseitigen Maxima auf ihre Ordnung schließen zu können.

$$\text{ord}_{\max} = \frac{\text{Abstand}_{\max}}{\text{Steigung}} \quad (55)$$

Die Resultate der Berechnungen sind in Tabelle (4) zusammengefasst und auch in Abbildung (12) gegen die Abstände aufgetragen. An den Zahlenwerten sehen wir, dass die Ordnungen immer in etwa zwischen den ganzen Zahlen der Ordnungen der Minima liegen, was sich auch grafisch in Abbildung (12) bestätigen lässt.

Um diese Werte noch mit den theoretischen Vorhersagen zu vergleichen, betrachten wir die Maxima der sinc-Funktion. Wir in den theoretischen Grundlagen erklärt, gilt für die Intensitätsverteilung des Beugungsbildes des Einzelspalts

$$I(k_y) = F(k_y)^2 = \text{sinc}\left(\frac{k_y d}{2}\right)^2 d^2 \quad (56)$$

mit Nullstellen bei

$$k_y = \frac{2\pi n}{d}. \quad (57)$$

Setzen wir dies in die Gleichung oben ein, so erhalten wir

$$I(n) = \text{sinc}(n\pi)^2 d^2, \quad (58)$$

wobei wir den Faktor d^2 vernachlässigen können, da es uns nur um die x -Positionen der Extrema geht. Die Maxima bestimmen wir, indem wir die Funktion in den Online-Grafikrechner **Desmos** eingeben und diese ablesen, wie in Abbildung (13) zu sehen. Die Abweichung von den berechneten Werten bestimmen wir anhand der σ -Abweichung mit dem Fehler der berechneten Ordnung.

Tabelle 4: Abstände der linksseitigen (l) und rechtsseitigen (r) Maxima, die berechneten Ordnungen und Vergleich zu den theoretischen Vorhersagen.

Pixel (l) → Pixel (r) [px]	Abstand [px]	Ber. Ord.	Theo. Ord.	Abweichung
$273 \pm 4 \rightarrow 1305 \pm 4$	1032 ± 6	5.48 ± 0.04	5.48	0
$371 \pm 4 \rightarrow 1210 \pm 4$	839 ± 6	4.46 ± 0.04	4.48	0.5σ
$464 \pm 4 \rightarrow 1118 \pm 4$	654 ± 6	3.48 ± 0.04	3.47	0.25σ
$559 \pm 4 \rightarrow 1021 \pm 4$	462 ± 6	2.46 ± 0.04	2.46	0
$660 \pm 4 \rightarrow 924 \pm 4$	264 ± 6	1.40 ± 0.04	1.43	0.75σ

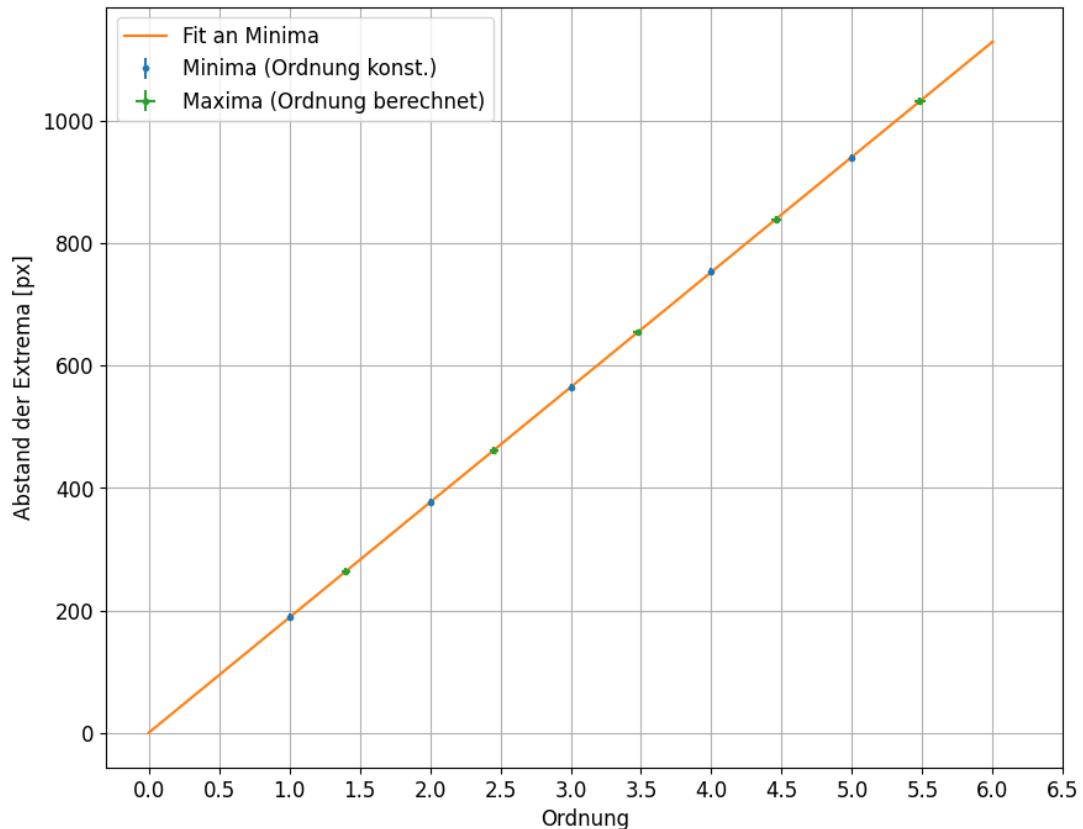


Abbildung 12: Ordnungen gegenüber der Abstände der jeweiligen Minima mit linearem Fit und berechnete Ordnungen der Maxima.

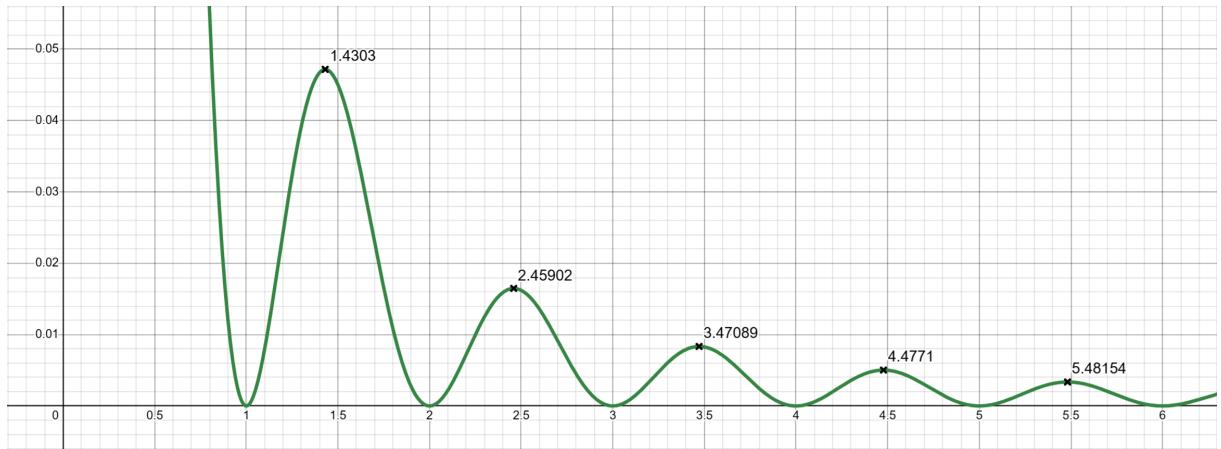


Abbildung 13: Maxima der normierten sinc-Funktion.

Vergleich der Intensitäten

An dieser Stelle der Auswertung würden wir die Intensitäten der Maxima in den aufgezeichneten Beugungsbildern mit den theoretisch erwarteten Beugungsbildern vergleichen. Wie allerdings bereits auf den Abbildungen 9 und 10 zu sehen ist, ist uns bei der Aufzeichnung der Intensitätsverteilungen ein Fehler unterlaufen, sodass die Maxima 0. und 1. Ordnung bereits sehr stark in Sättigung sind. Möglicherweise war hier die Belichtungszeit bereits bei der Aufnahme mit der Kamera zu hoch eingestellt, oder wir hatten beim Export über **Gwyddion** eine falsche Einstellung gewählt.

Theoretisch würden wir wie folgt vorgehen: Anhand der Intensität 0. Maximums und der Beachtung der verschiedenen Belichtungszeiten können wir die beiden Intensitätsverteilungen normieren, sodass wir einen verhältnismäßigen Abstieg der Maxima 1. bis 5. Ordnung im Vergleich zum Maximum 0. Ordnung erhalten.

Dann generieren wir ein theoretisches Beugungsbild anhand des in der Praktikumsanleitung bereitgestellten Skripts, wie sie in Abbildung (14) zu sehen ist.

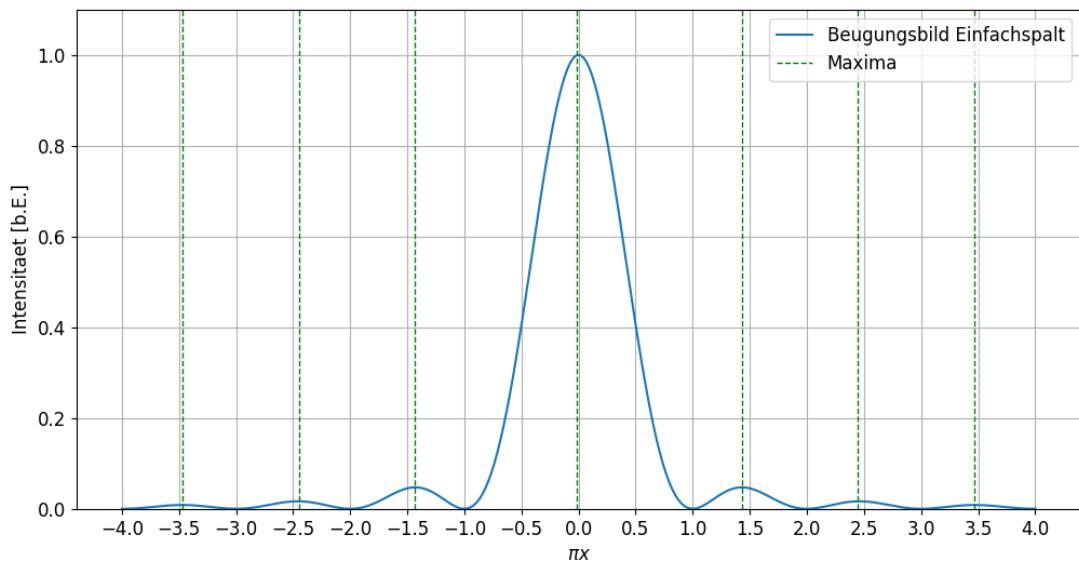


Abbildung 14: Theoretisches Beugungsbild des Einzelspalts.

In diesem Beugungsmuster sind die Intensitäten ebenfalls anhand der Intensität des Ma-

ximums 0. Ordnung normiert. Nun können wir diese auslesen, entweder mit numerischen Methoden in Python oder wieder anhand von einem Online-Grafikrechner, und anschließend mit den gemessenen, normierten Intensitäten vergleichen.

3.3 Quantitative Untersuchung der Beugung am Doppelspalt

Einleitend zu dieser Aufgabe haben wir qualitativ die Auswirkungen verschiedener Geometrien des Doppelspalts betrachtet. Dazu waren auf dem Dia drei verschiedene Doppelspalte, in drei verschiedenen Breiten, angebracht.

Auf dem Beugungsbild des breitesten Doppelspalts, zu sehen in Abbildung (15) konnten wir deutlich das mittlere Hauptmaximum mit drei bis vier Nebenmaxima, sowie viele weitere Hauptmaxima mit jeweils etwa ein bis zwei Nebenmaxima beobachten.

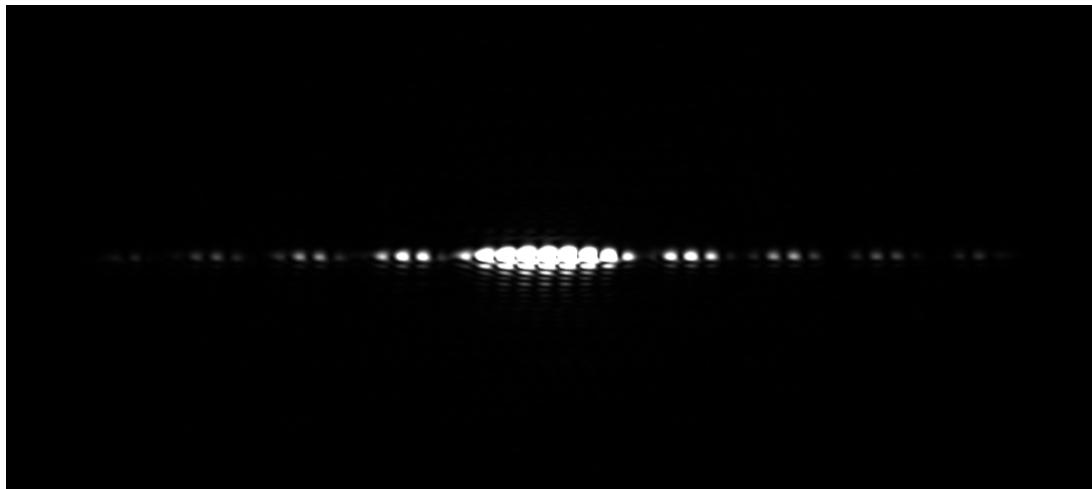


Abbildung 15: Beugungsbild des breiten Doppelspalts.

Das Beugungsbild des schmalen Doppelspalts (Abbildung (16)) zeigte ein sehr breites Hauptmaximum 0. Ordnung, ebenfalls mit etwa drei bis vier Nebenmaxima. Allerdings waren hier fast keine weiteren Hauptmaxima höherer Ordnung zu sehen.

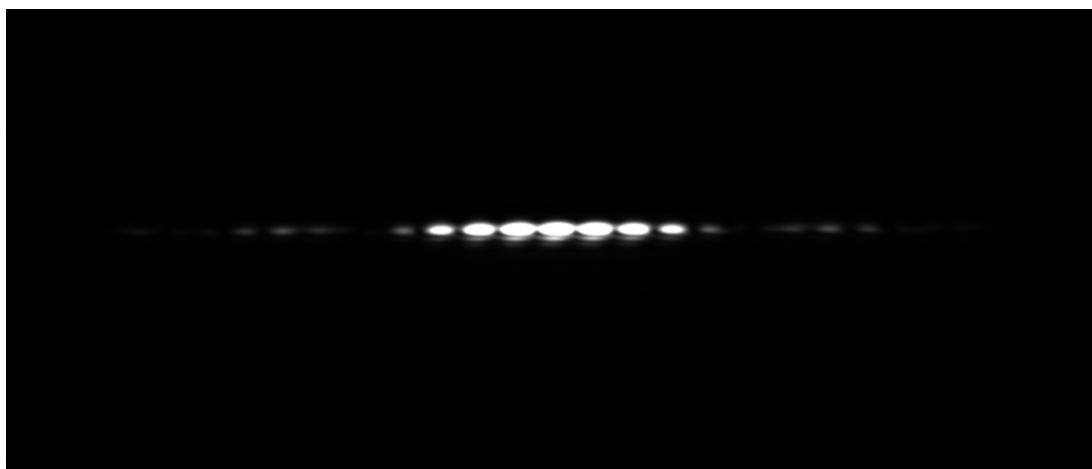


Abbildung 16: Beugungsbild des schmalen Doppelspalts.

Das Beugungsbild des mittelgroßen Doppelspalts (Abbildung (17)), bestand aus einem etwas schmäleren Hauptmaximum 0. Ordnung mit etwa drei Nebenmaxima und weiteren weniger gut sichtbaren Hauptmaxima mit etwa einem Nebenmaximum.

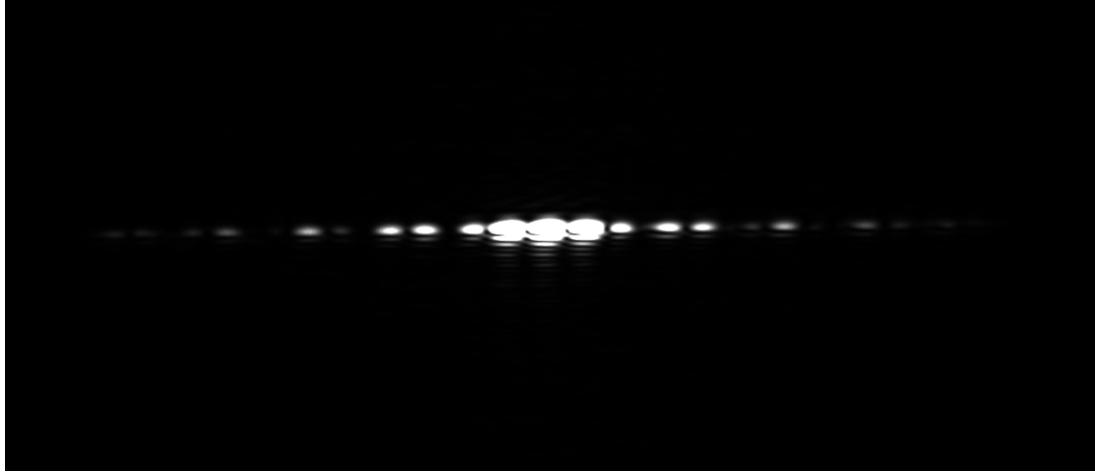


Abbildung 17: Beugungsbild des mittleren Doppelspalts.

Mit dem mittelgroßen Doppelspalt haben wir auch die weiteren Messungen für diese Aufgabe durchgeführt.

Abbildung (18) zeigt das theoretische Beugungsbild des Doppelspalts, generiert mit dem in der Praktikumsanleitung gegebenen Python-Skript.

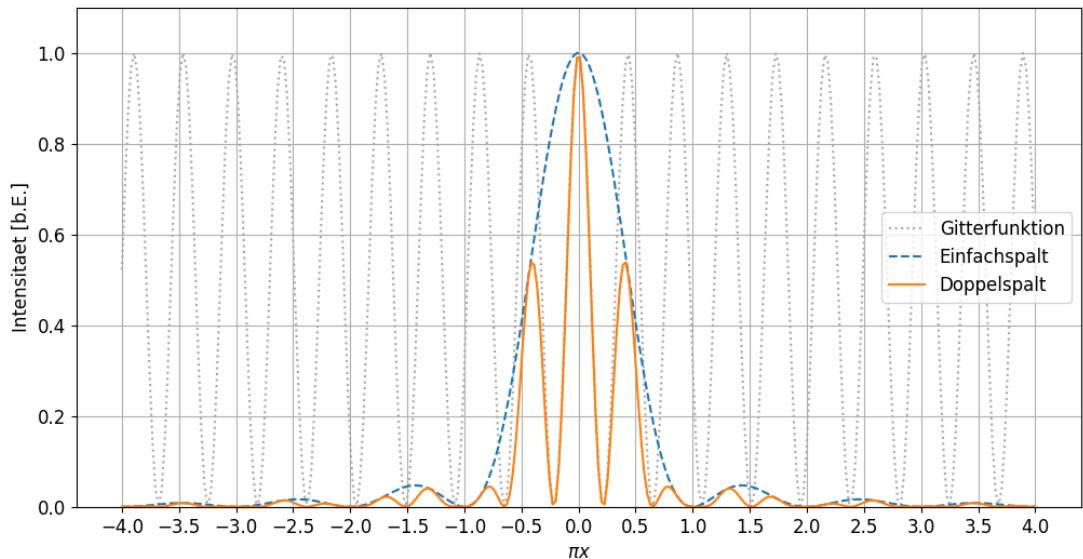


Abbildung 18: Theoretisches Beugungsbild des Doppelspalts mit Funktion des Einzelspalts und Gitterfunktion.

Die dafür verwendete Funktion lautet

$$I(x) = \text{sinc}(x)^2 \cos(vx)^2. \quad (59)$$

Der Faktor v im Cosinus, der Gitterfunktion, stellt das Verhältnis zwischen Spaltabstand und Spaltbreite dar. Hierfür verwenden wir die Werte, welche wir im Messprotokoll für Aufgabe 5 notiert haben. Den Spaltabstand ermitteln wir als Differenz der beiden Spaltmittelpunkte

$$g = s_{2,m} - s_{1,m}, \quad (60)$$

die Spaltbreite als Durchschnitt der Spaltbreite der beiden einzelnen Spalten, berechnet aus Anfangs- und Endpunkt der Spalte

$$d = \frac{(s_{1,e} - s_{1,a}) + (s_{2,e} - s_{2,a})}{2}. \quad (61)$$

Es ist hier deutlich zu sehen, wie die einhüllende Funktion des Einzelspalts maßgeblich die Form des Beugungsbildes des Doppelspalts beeinflusst. Die Übergänge zwischen den Hauptmaxima bilden sich immer dort, wo sowohl die Gitterfunktion, als auch die Einzelspaltfunktion eine Nullstelle besitzen. Minima innerhalb der Hauptmaxima bilden sich durch Nullstellen der Gitterfunktion, während die Einzelspaltfunktion größer Null ist.

Im Vergleich mit dem gemessenen Beugungsbild zeigen sich, wie zu erwarten, sehr ähnliche Strukturen. Dieses ist in Abbildung (19) zu sehen.

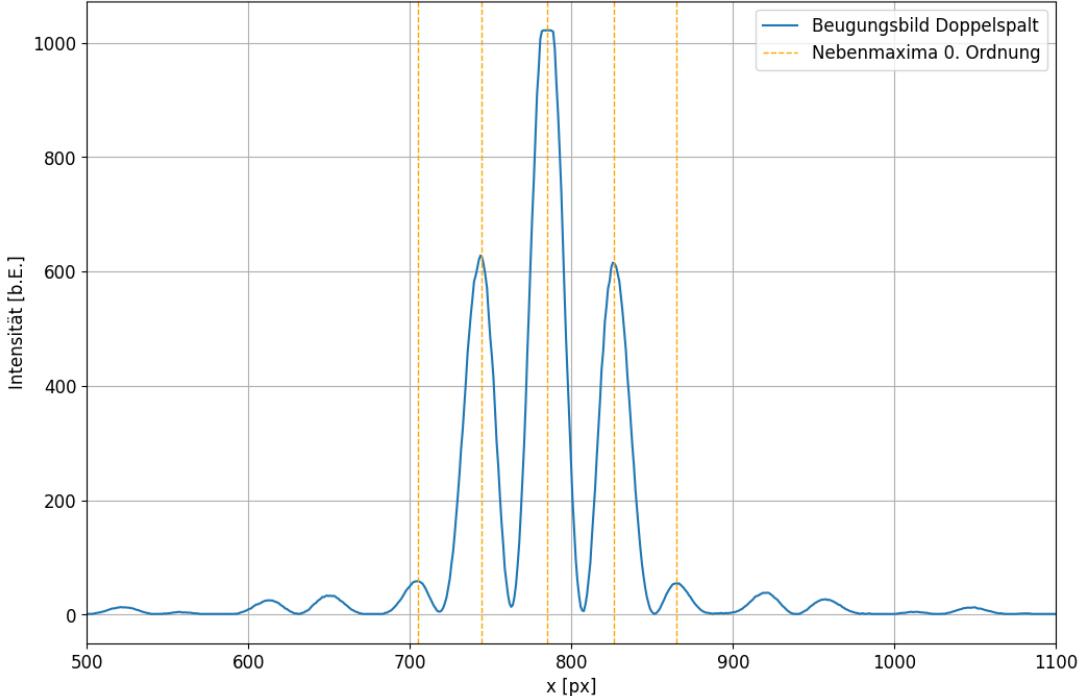


Abbildung 19: Gemessenes Beugungsbild des Doppelspalts.

Auch hier sehen wir die fünf Maxima, welche gemeinsam zum mittleren Hauptmaximum 0. Ordnung gehören. Darauf folgt ein breiteres Minimum, welches den Übergang zum Hauptmaximum 1. Ordnung darstellt. In diesem finden sich, wie im theoretischen Bild, zwei kleinere Nebenmaxima.

Wir möchten nun, so wie bereits in Theorie für den Einzelspalt erklärt, die Intensitäten der Nebenmaxima innerhalb der Einhüllenden des nullten Hauptmaximums mit den theoretischen Werten vergleichen. Die Vergleichswerte ermitteln wir wieder numerisch mit dem Online-Grafikrechner, wie in Abbildung (20) zu sehen.

Um die Intensitäten vergleichen zu können, berechnen wir zunächst den Normierungsfaktor aus der Intensität des 0. Hauptmaximums

$$N = \frac{1}{I_{0,0}} = (9.78500 \pm 0.00957) \cdot 10^{-4}. \quad (62)$$

Mit diesem Wert multiplizieren wir nun die Intensität aller in Abbildung (19) Maxima, um so die auf 1 normierten Intensitäten zu erhalten. Diese können wir dann mit den theoretischen Werten vergleichen. Die Resultate des Vergleichs sind in Tabelle (5) aufgelistet.

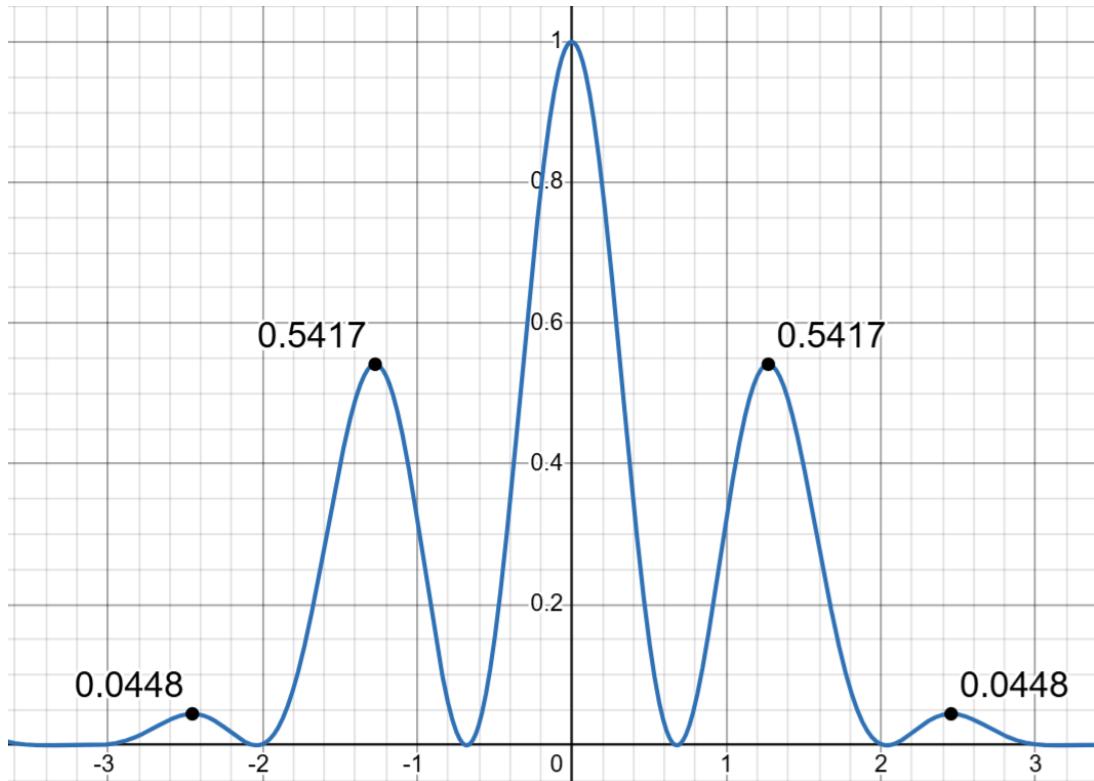


Abbildung 20: Numerische Bestimmung der normierten Intensitäten des 0. Hauptmaximums des Doppelspalts.

Tabelle 5: Vergleich der Intensitäten der Nebenmaxima des 0. Hauptmaximums beim Einzelpalt.

Ordnung	Intensität	Intensität (normiert)	Intensität (theo.)	Abw.
Linksseitige Maxima				
1	628 \pm 2	0.6146 \pm 0.0021	0.5417 \pm 0.0001	35.52 σ
2	58 \pm 2	0.0568 \pm 0.0020	0.0448 \pm 0.0001	6.1 σ
Rechtsseitige Maxima				
1	616 \pm 2	0.6028 \pm 0.0021	0.5417 \pm 0.0001	29.84 σ
2	55 \pm 2	0.0538 \pm 0.0020	0.0448 \pm 0.0001	4.61 σ

3.4 Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes am Beispiel des Einfachspalts

Mit der Betrachtung des Objektbilds untersuchen wir in den folgenden beiden Versuchsteilen nun experimentell die Rücktransformation. Der Maßstab der aufgezeichneten Objektbilder wird durch die Linse L1 im Versuchsaufbau beeinflusst. Um aus der Größe B des Bildes die tatsächliche Größe G des Gegenstandes, in diesem Fall das Spaltbild, zu berechnen, ziehen wir zunächst die Linsengleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f} \quad (63)$$

heran, welche die Bildweite b , die Gegenstandsweite g und die Brennweite f in Verbindung bringt. Mit der Relation

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (64)$$

und der Linsengleichung können wir die Formel

$$\frac{B}{G} = \frac{b-f}{f} = \frac{b}{f} - 1 \quad (65)$$

herleiten. Diese enthält gerade die zwei Werte, Bildweite und Brennweite, welche wir während den Messungen zu diesem Versuchsteil aufgeschrieben haben. Somit können wir einen Umrechnungsfaktor von

$$\frac{B}{G} = 3.38 \pm 0.17 \quad (66)$$

ausrechnen. In unseren Aufzeichnungen geht der Spalt von Pixel 274 bis Pixel 915, was mit einem Fehlerwert von ± 4 Pixeln pro Seite, einer Breite von $641 \pm 6px$ im Bildmaßstab entspricht. Zur Umrechnung von Pixel in Millimeter gibt die Praktikumsanleitung einen Faktor von $3.45 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{px}}$ an. Multiplizieren wir unseren Wert mit diesem Faktor und teilen durch B/G , so erhalten wir eine reale Spaltbreite von

$$d = (0.66 \pm 0.04)\text{mm}. \quad (67)$$

Nun können wir damit fortfahren, die theoretisch erwarteten Objektbilder zu generieren. Hierzu betrachten wir die Funktion

$$f(k_y, y) = \frac{d}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{kd}{2}\right) \cos(yk), \quad (68)$$

welche gerade dem Integranden der Rücktransformation, vorgestellt in der theoretischen Einführung, entspricht. Diese integrieren wir nun numerisch. Dabei setzen wir die untere Integrationsgrenze auf 0, die obere Grenze auf den Wert

$$k_{y,n} = \frac{2\pi n}{d}, \quad (69)$$

wobei n der Ordnung angibt, bis zu welcher wir integrieren möchten. Die Integration führen wir für 400 Werte von y im Bereich von $-d$ bis d durch. Abschließend wird das Ergebnis quadriert und die Gesamtmenge der Ergebnisse so normiert, dass der maximale Wert 1 entspricht.

Wir führen diesen Prozess für die Werte 1, 2, 3, 5 von n durch, um die theoretischen Objektbilder zu allen von uns aufgezeichneten Bildern zum Vergleich zu erhalten. Zusätzlich setzen wir für einen weiteren Durchgang n auf 51, um zu sehen, wie sich das tatsächliche Spaltbild im Grenzverhalten $n \rightarrow \infty$ ergibt. Die theoretischen Bilder sind in den Abbildungen 21 bis 24 zu sehen.

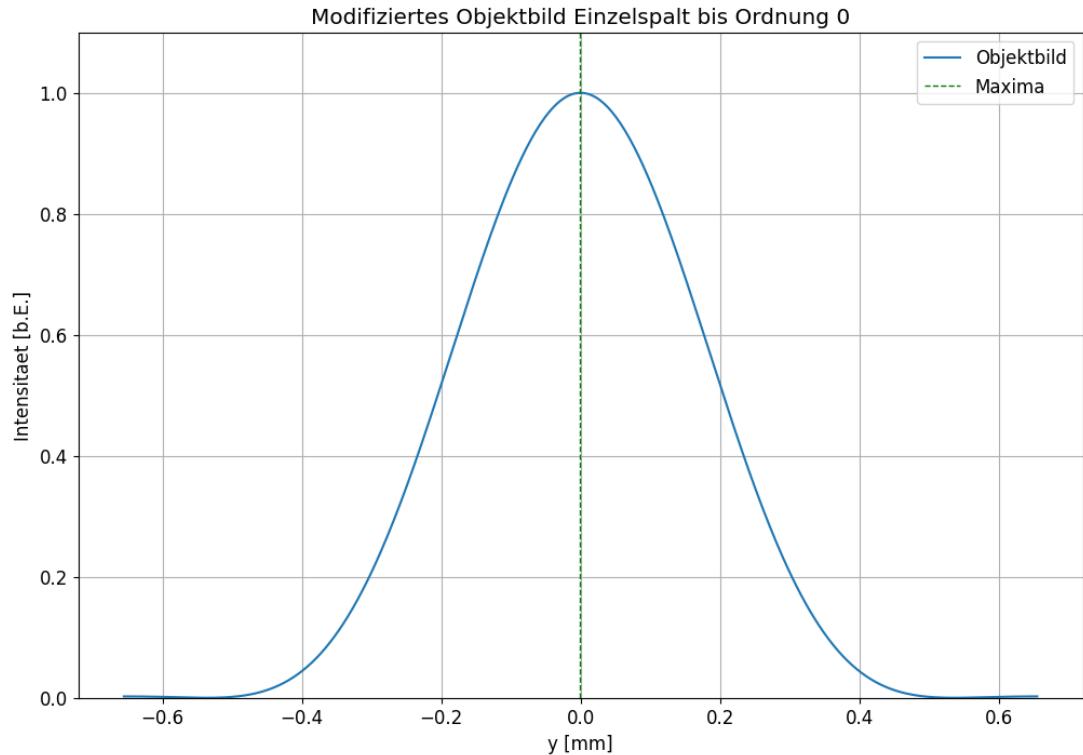


Abbildung 21: Theoretisches Objektbild aus Rücktransformation bis zur 0. Ordnung.

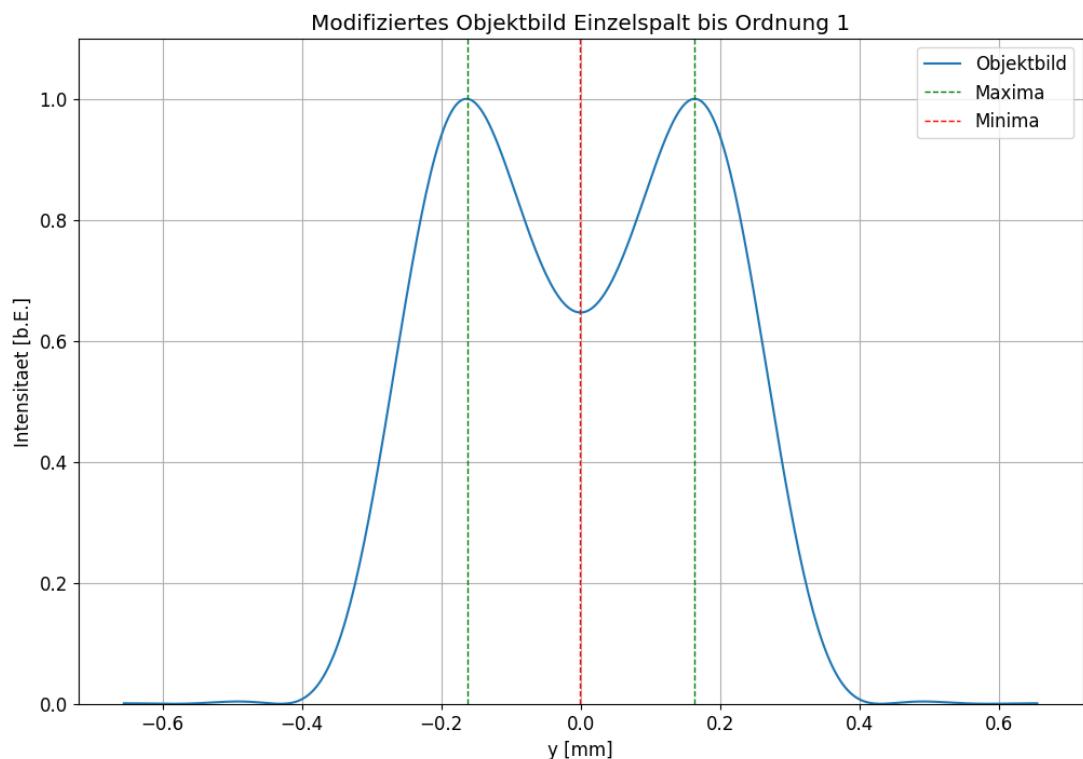


Abbildung 22: Theoretisches Objektbild aus Rücktransformation bis zur 1. Ordnung.

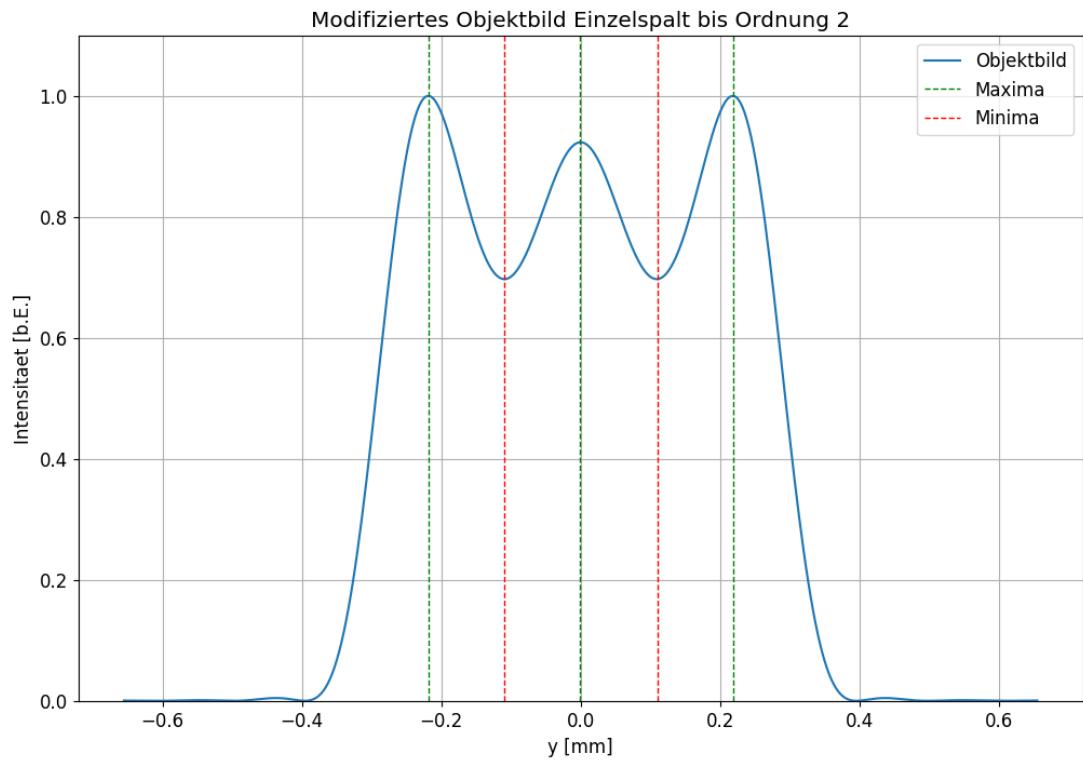


Abbildung 23: Theoretisches Objektbild aus Rücktransformation bis zur 2. Ordnung.

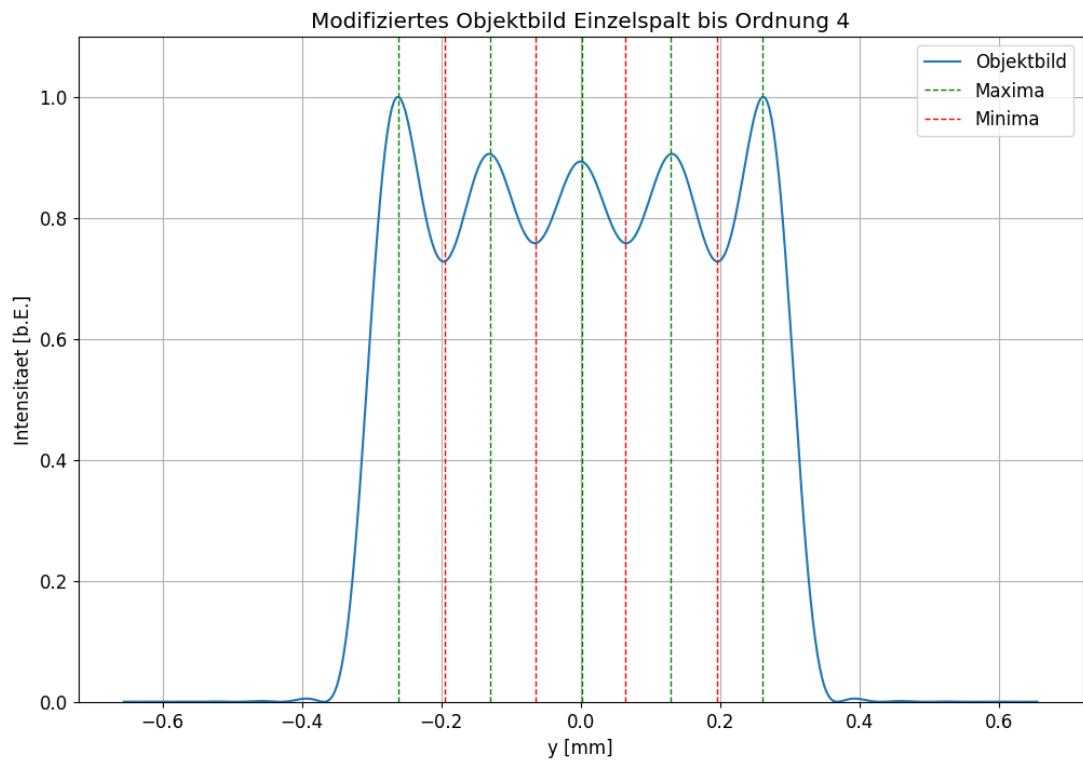


Abbildung 24: Theoretisches Objektbild aus Rücktransformation bis zur 4. Ordnung.

Bereits in dieser Abfolge von Plots ist zu sehen, wie mit steigender Ordnung die Kanten steiler und die „Wiggles“ auf dem Plateaubereich kleiner werden und sich das Bild immer näher der rechteckigen Form des Einzelspalts annähert. Besonders deutlich wird dies auf dem Resultat zur Integration bis zu Ordnung 50 (Abbildung (25)).

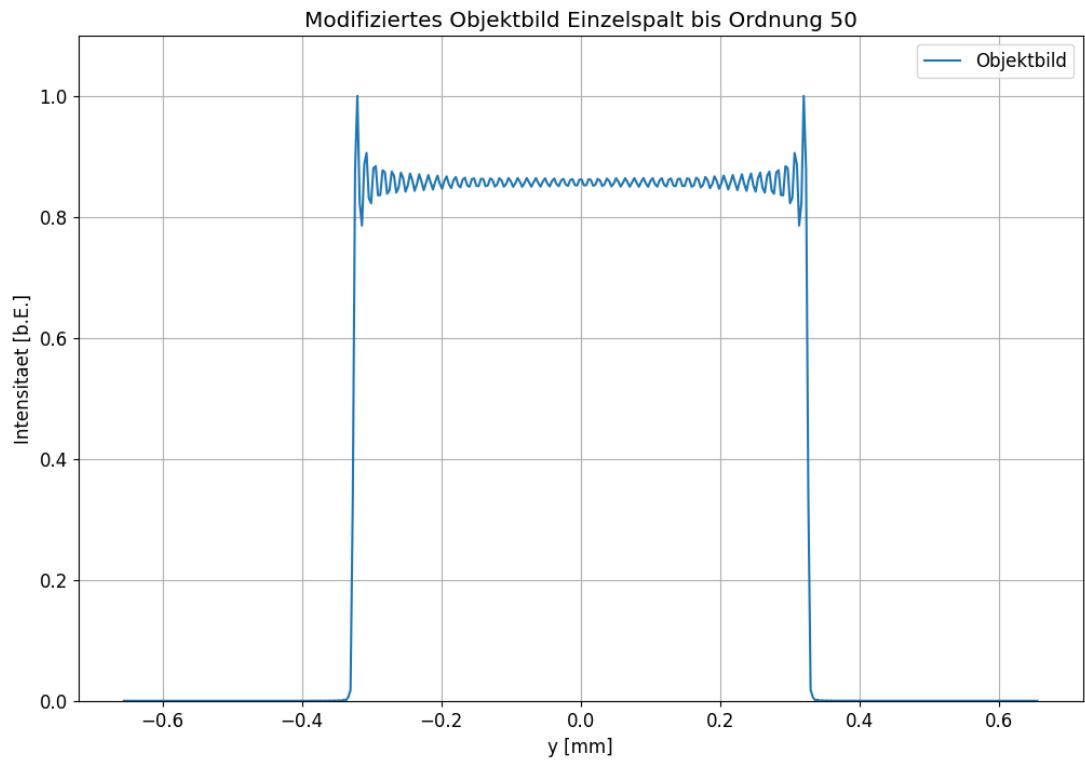


Abbildung 25: Theoretisches Objektbild aus Rücktransformation bis zur 50. Ordnung.

Die Theorie möchten wir nun mit den tatsächlich experimentell aufgezeichneten Objektbildern vergleichen. Diese sind in den Abbildungen 26 bis 29 dargestellt.

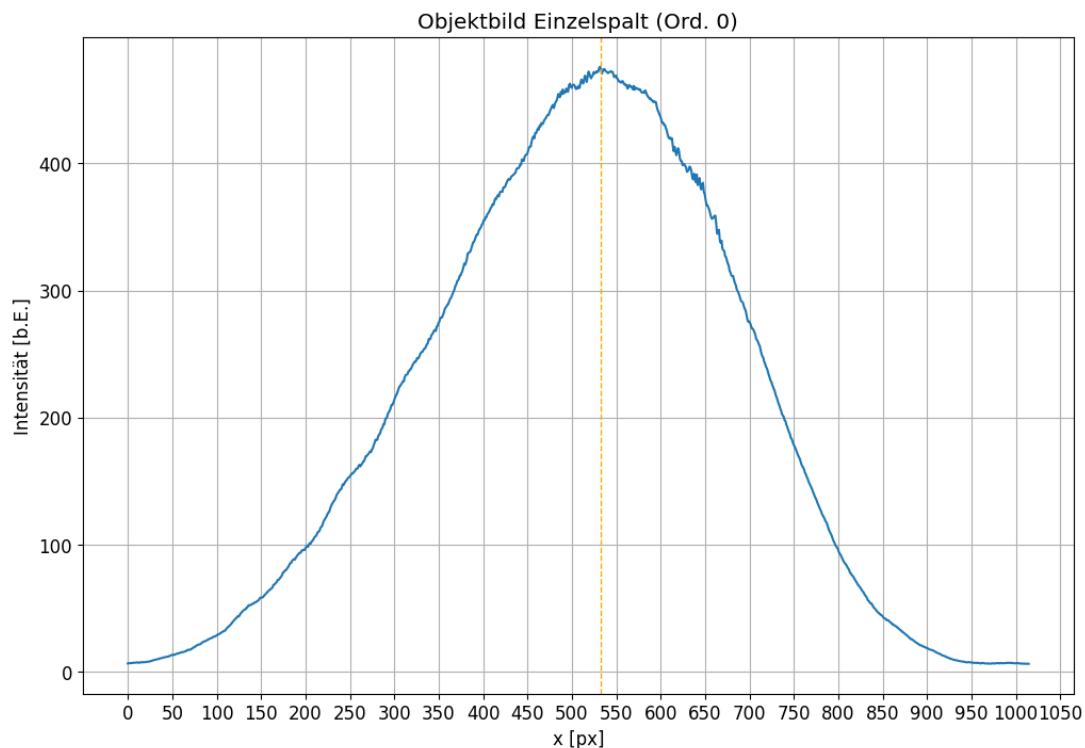


Abbildung 26: Experimentell bestimmtes Objektbild entsprechend der 0. Ordnung.

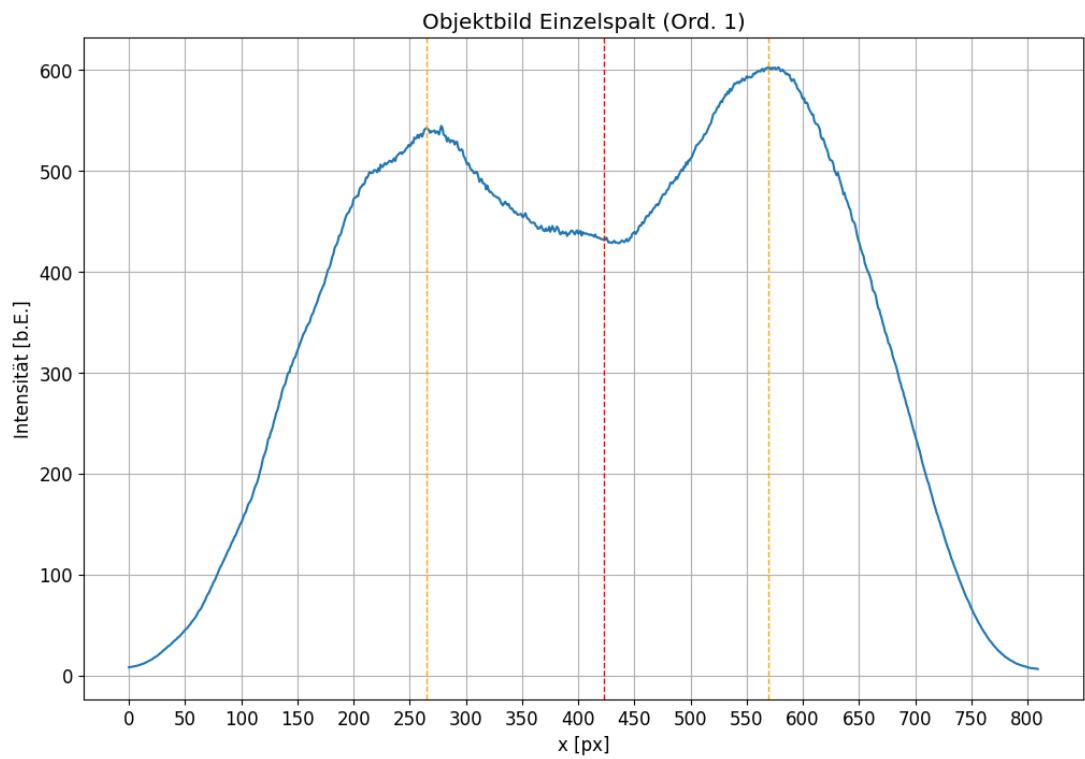


Abbildung 27: Experimentell bestimmtes Objektbild entsprechend der 1. Ordnung.

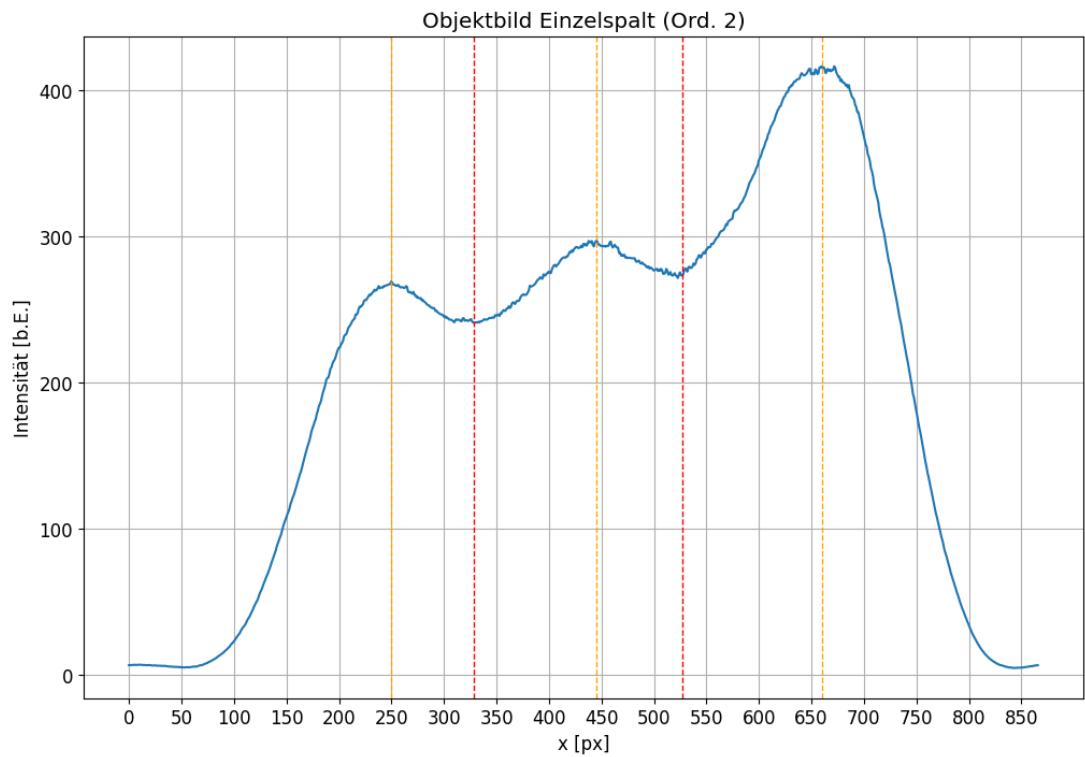


Abbildung 28: Experimentell bestimmtes Objektbild entsprechend der 2. Ordnung.

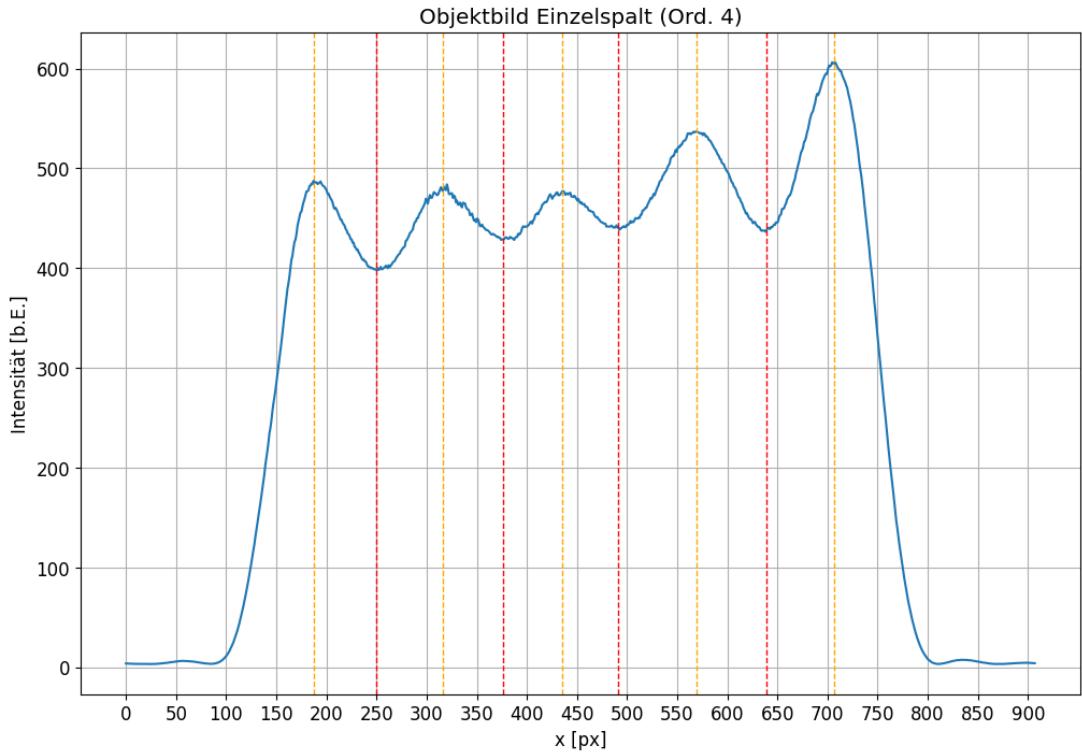


Abbildung 29: Experimentell bestimmtes Objektbild entsprechend der 4. Ordnung.

Die experimentell bestimmten Objektbilder zeigen die gleiche Anzahl an Maxima und Minima, wie auch die theoretischen Daten. Während die allerdings die theoretischen Objektbilder in der Intensitätsverteilung immer perfekt Symmetrisch waren, sind bei den experimentell bestimmten Bildern die Maxima verschieden hoch und die Intensität nimmt tendenziell mit aufsteigendem x zu.

Die Abszisse in den Messdaten ist in Pixeln in der Abbildungsebene angegeben. Außerdem sind die Objektbilder hier nicht, wie bei den theoretischen Objektbildern, um den Nullpunkt des Koordinatensystems zentriert. Zum Vergleich der Lage der Maxima und Minima wenden wir deshalb eine relative Betrachtungsweise, bezogen auf das erste Maximum jedes Objektbildes an. Möchten wir beispielsweise die Lage des linken Maximums im Objektbild bis zur ersten Ordnung vergleichen, so gehen wir wie folgt vor:

- 1.) Lese Lage des 1. Maximums aus $\rightarrow x_{0,B}$ (in Pixeln in der Abbildungsebene).
- 2.) Lese Lage des 2. Maximums aus $\rightarrow x_{1,B}$ (in Pixeln in der Abbildungsebene).
- 3.) Berechne Distanz der beiden Werte $x_{\overline{01},B} = |x_1 - x_0|$ (in Pixeln in der Abbildungsebene).
- 4.) Berechne reale Distanz der Maxima $x_{\overline{01},G} = x_{\overline{01},B} \cdot 3.45 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{px}} \Big/ \frac{B}{G}$.
- 5.) Berechne Distanz der beiden Maxima im theoretischen Objektbild (in mm in der Gegenstandsebene).
- 6.) Vergleiche die beiden Werte.

Da diese Methode des Vergleichs immer mindestens zwei Maxima benötigt, können wir damit logischerweise erst beim Objektbild 1. Ordnung beginnen.

Die folgenden Tabellen 6 bis 8 fassen die Ergebnisse zum Vergleich der Lage der Maxima und Minima zusammen.

Tabelle 6: Vergleich der Lage der Maxima und Minima im experimentell bestimmten Objektbild 1. Ordnung mit der Theorie.

#	Praxis			Theorie		Abw.
	Pos. [px]	Δ 1. Max [px]	Δ Umger. [mm]	Pos. [mm]	Δ 1. Max [mm]	
Maxima						
1	265 ± 4	-	-	-0.16	-	-
2	569 ± 4	304 ± 6	0.311 ± 0.006	0.16	0.33	2.5σ
Minima						
1	423 ± 4	158 ± 6	0.162 ± 0.006	0.00	0.16	0.1σ

Tabelle 7: Vergleich der Lage der Maxima und Minima im experimentell bestimmten Objektbild 2. Ordnung mit der Theorie.

#	Praxis			Theorie		Abw.
	Pos. [px]	Δ 1. Max [px]	Δ Umger. [mm]	Pos. [mm]	Δ 1. Max [mm]	
Maxima						
1	250 ± 4	-	-	-0.22	-	-
2	445 ± 4	195 ± 6	0.200 ± 0.006	0.0	0.22	3.02σ
3	660 ± 4	410 ± 6	0.420 ± 0.006	0.22	0.44	3.07σ
Minima						
1	328 ± 4	78 ± 6	0.080 ± 0.006	-0.11	0.11	4.96σ
2	527 ± 4	277 ± 6	0.283 ± 0.006	0.11	0.33	7.84σ

Tabelle 8: Vergleich der Lage der Maxima und Minima im experimentell bestimmten Objektbild 4. Ordnung mit der Theorie.

#	Praxis			Theorie		Abw.
	Pos. [px]	Δ 1. Max [px]	Δ Umger. [mm]	Pos. [mm]	Δ 1. Max [mm]	
Maxima						
1	187 ± 4	-	-	-0.26	-	-
2	316 ± 4	129 ± 6	0.132 ± 0.006	-0.13	0.13	0.09σ
3	435 ± 4	248 ± 6	0.254 ± 0.006	0.00	0.26	1.6σ
4	569 ± 4	382 ± 6	0.391 ± 0.006	0.13	0.40	0.07σ
5	707 ± 4	520 ± 6	0.532 ± 0.006	0.26	0.52	1.62σ
Minima						
1	250 ± 4	63 ± 6	0.064 ± 0.006	-0.20	0.07	0.23σ
2	376 ± 4	189 ± 6	0.193 ± 0.006	-0.06	0.20	0.67σ
3	491 ± 4	304 ± 6	0.311 ± 0.006	0.06	0.33	2.5σ
4	639 ± 4	452 ± 6	0.462 ± 0.006	0.20	0.46	0.96σ

Die nachfolgenden Tabellen 9 bis 11 zeigen die Resultate der Vergleiche der Intensitäten der Maxima und Minima. Um die Intensitäten zu vergleichen, müssen wir nicht mit den Maßstäben der Abszisse herumrechnen. Hier normieren wir aber zur Vergleichbarkeit die Intensitäten so, dass die Intensität des ersten Maximums 1 entspricht.

Tabelle 9: Vergleich der Intensität der Maxima und Minima im experimentell bestimmten Objektbild 1. Ordnung mit der Theorie.

#	Praxis		Theorie	Abw.
	I [b.E.]	I norm. auf 1. Max	I [b.E.]	
Maxima				
1	543 \pm 2	-	1.0	-
2	603 \pm 2	1.111 \pm 0.006	1.0	20.08 σ
Minima				
1	432 \pm 2	0.795 \pm 0.005	0.65	31.48 σ

Tabelle 10: Vergleich der Intensität der Maxima und Minima im experimentell bestimmten Objektbild 2. Ordnung mit der Theorie.

#	Praxis		Theorie	Abw.
	I [b.E.]	I norm. auf 1. Max	I [b.E.]	
Maxima				
1	270 \pm 2	-	1.0	-
2	297 \pm 2	1.103 \pm 0.012	0.92	16.25 σ
3	416 \pm 2	1.547 \pm 0.014	1.0	39.98 σ
Minima				
1	241 \pm 2	0.896 \pm 0.010	0.70	19.90 σ
2	273 \pm 2	1.015 \pm 0.011	0.70	30.05 σ

Tabelle 11: Vergleich der Intensität der Maxima und Minima im experimentell bestimmten Objektbild 4. Ordnung mit der Theorie.

#	Praxis		Theorie	Abw.
	I [b.E.]	I norm. auf 1. Max	I [b.E.]	
Maxima				
1	488 ± 2	-	1.0	-
2	477 ± 2	0.979 ± 0.006	0.91	12.76 σ
3	477 ± 2	0.979 ± 0.006	0.89	14.92 σ
4	537 ± 2	1.102 ± 0.007	0.91	32.10 σ
5	605 ± 2	1.241 ± 0.007	1.0	36.90 σ
Minima				
1	398 ± 2	0.817 ± 0.006	0.73	16.83 σ
2	429 ± 2	0.880 ± 0.006	0.76	22.28 σ
3	441 ± 2	0.904 ± 0.006	0.76	26.33 σ
4	437 ± 2	0.895 ± 0.006	0.73	30.43 σ

Damit ist auch dieser Teil der Analyse abgeschlossen und wir können zum Objektbild des Doppelspalts fortfahren.

3.5 Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes am Beispiel des Doppelspalts

Wir gehen für diese Aufgabe ähnlich vor wie in der vorherigen. Auch hier haben wir zuerst die Dimensionen des verwendeten Doppelspalts in Pixeln in der Bildebene vermessen. Für die Breiten und den Abstand der Spalte in der Bildebene haben wir bereits im Zuge von Aufgabe zum theoretischen Beugungsbild des Doppelspalts die Werte

$$\text{Breite } d = (251 \pm 4) \text{ px} \quad (70)$$

$$\text{Abstand } g = (580 \pm 6) \text{ px} \quad (71)$$

berechnet. Diese müssen wir nun wieder in Millimeter in der Gegenstandsebene umrechnen. Hierzu wenden wir die gleichen Faktoren an, wie wir sie bereits in der vorherigen Aufgabe verwendet haben und erhalten so

$$d = (0.257 \pm 0.014) \text{ mm}, \quad (72)$$

$$g = (0.593 \pm 0.030) \text{ mm}. \quad (73)$$

Diese Parameter setzen wir nun in die Funktion

$$f(k_y, y) = \frac{d}{\pi} \cos\left(\frac{k_y g}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y d}{2}\right) \cos(y k_y) \quad (74)$$

ein, welche dem Integranden der Rücktransformation des Beugungsbildes des Doppelspalts entspricht. Für den ersten Teil dieser Aufgabe führen wir für die Ordnung $n = 1$ erneut eine numerische Integration mit den Grenzen 0 bis $\frac{2\pi n}{d}$ durch. Für y wählen wir den Bereich $-d$ bis d , wieder in 400 Schritte unterteilt. Auch das Quadrieren und Normieren

führen wir wie beim Einzelspalt durch und erhalten so das Objektbild erster Ordnung, zu sehen in Abbildung (30).

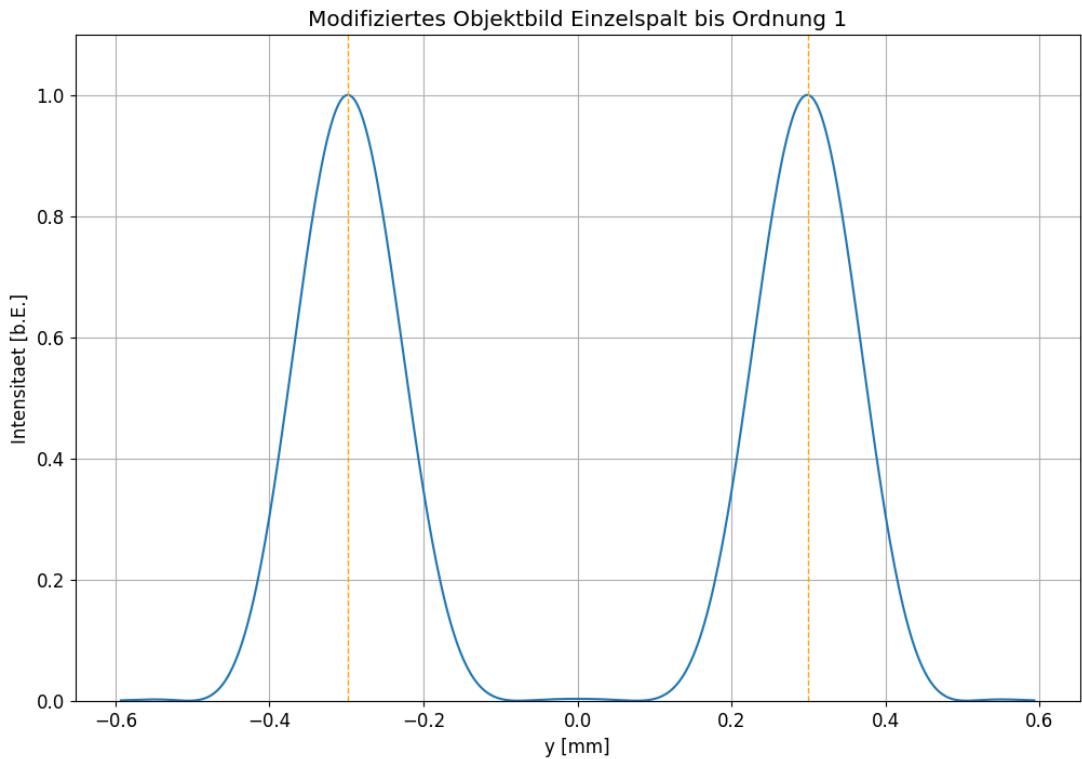


Abbildung 30: Theoretisches Objektbild des Doppelspalts aus Rücktransformation bis zur 1. Ordnung.

Das Objektbild zu dieser Ordnung haben wir auch experimentell Aufgezeichnet. Dieses ist in Abbildung (31) dargestellt. Es ist zu sehen, dass Theorie und Praxis grundsätzlich die gleiche Struktur aufweisen. Allerdings besteht auch hier der Unterschied, dass die Intensitäten der beiden Maxima im experimentell bestimmten Objektbild nicht gleich sind. Genauer ist das rechte Maximum um etwa (1.124 ± 0.004) -Mal höher als das linke.

In der Theorie liegen die beiden Maxima 0.597mm weit auseinander, was auch, passenderweise, in etwa dem zuvor berechneten Spaltabstand entspricht. Entsprechend dem Abbildungsmaßstab und der Umrechnung von Pixeln in Millimeter transformiert, liegen die Maxima im experimentell bestimmten Objektbild (0.583 ± 0.030) mm weit auseinander. Dies entspricht einer Abweichung um etwa 0.51σ von der Theorie.

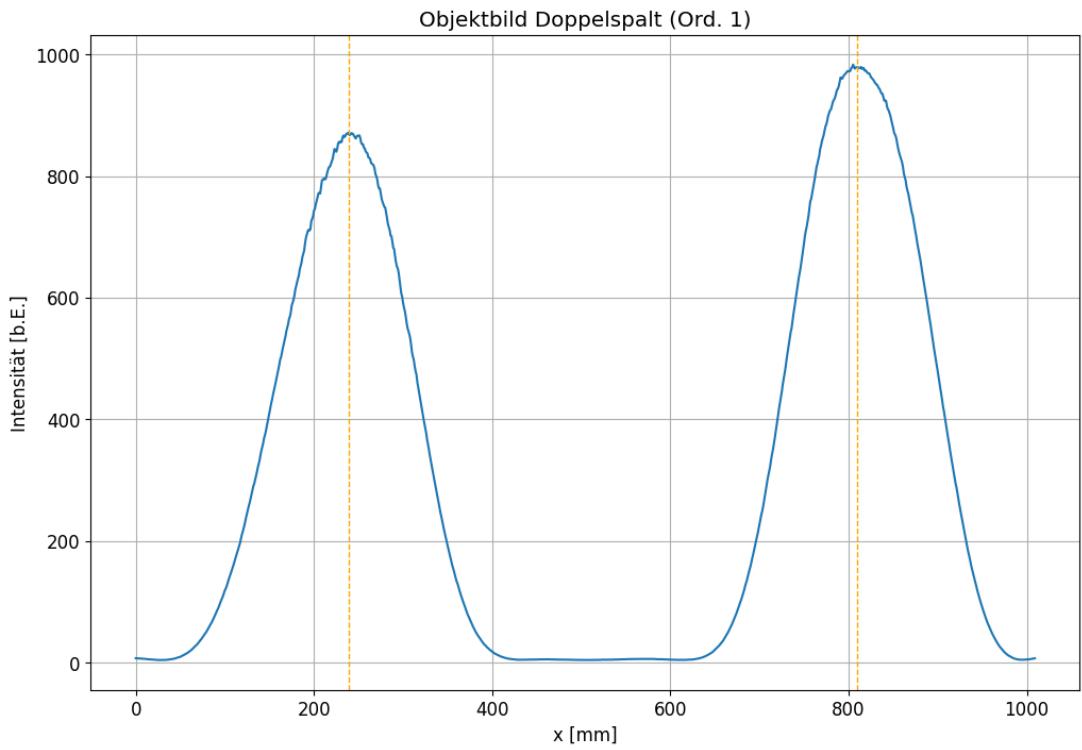


Abbildung 31: Experimentell bestimmtes Objektbild des Doppelspalts entsprechend der 1. Ordnung.

Verringert man die Breite des Analysierspalt weiter, so verschwimmen beim Objektbild mit der Zeit die zwei Maxima zu einer „Gauß-ähnlichen“ Funktion mit einem Plateau, wie ein Abbildung (32) zu sehen.

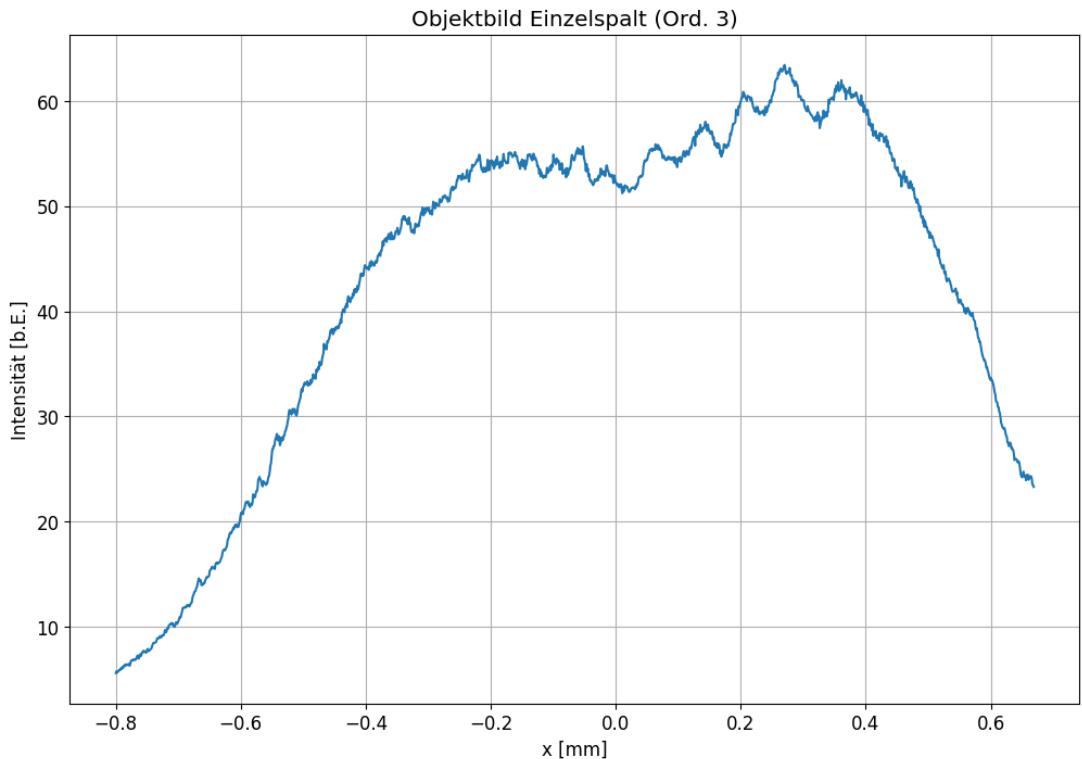


Abbildung 32: Experimentell bestimmtes Objektbild des Doppelspalts bei weiterer Schließung des Analysierspalts.

Auch das theoretische Objektbild lässt sich an diese Form annähern, indem man bei der numerischen Integration das n in der oberen Integrationsgrenze langsam gegen 0 gehen lässt. Abbildung (33) zeigt diese Annäherung, ausgehend vom Wert $n = 0.305$ in absteigenden Schritten von 0.002 bis zum Wert $n = 0.283$.

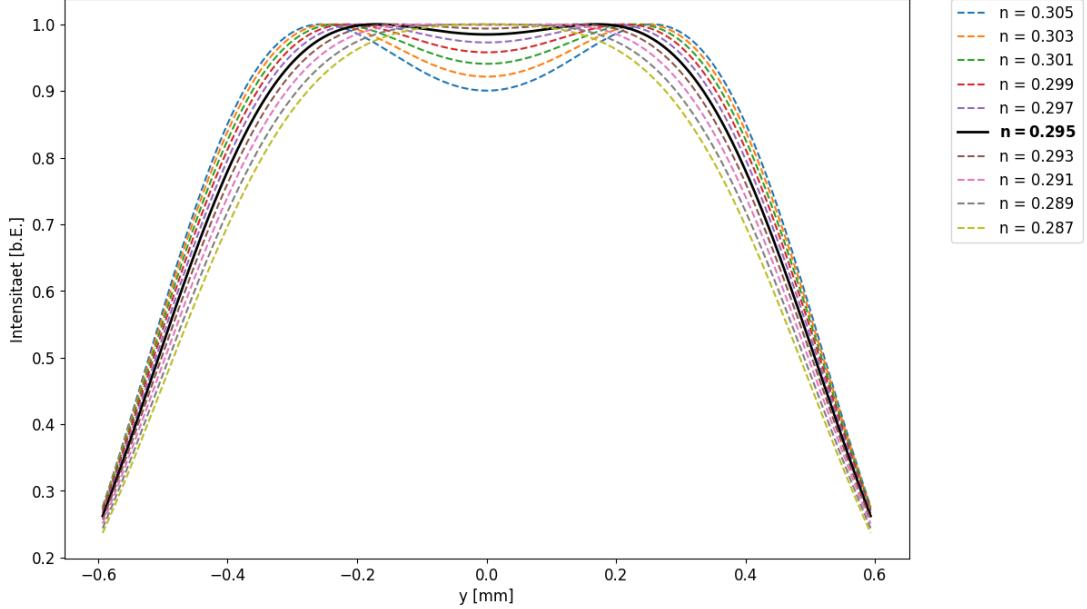


Abbildung 33: Annäherung des theoretischen Objektbilds an das experimentelle Bild.

Da in unserem experimentell bestimmten Bild noch kein perfektes Plateau, sondern noch zwei minimale „Peaks“ zu sehen sind, entscheiden wir uns für den Wert $n = (0.295 \pm 0.002)$, für die beste Beschreibung der experimentellen Daten.

Mit diesem angenäherten Wert von n können wir nun k_y nach der Formel

$$k_y = \frac{2\pi n}{d} \quad (75)$$

mit der Spaltbreite d bestimmen. Wir erhalten hierbei einen Wert von

$$k_{y,\text{ang.}} = (7.2 \pm 0.4) \frac{1}{\text{mm}}. \quad (76)$$

Einen Vergleichswert für $k_{y,n}$ können wir uns aus einigen geometrischen Überlegungen an der Linse L1 herleiten. Für die y -Komponente des Wellenvektors \vec{k}_0 für einen Strahl im Winke α gilt

$$k_{0,y} = |\vec{k}_0| \cdot \sin(\alpha) \quad (77)$$

mit $|\vec{k}_0| = 2\pi/\lambda$. Gleichzeitig gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{f}. \quad (78)$$

Mit der Kleinwinkelnäherung für α können wir hier, wie bereits einmal in dieser Ausarbeitung gemacht, $\sin(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ gleichsetzen. Damit erhalten wir

$$k_{0,y} = \frac{2\pi y}{\lambda f}. \quad (79)$$

Nun setzen wir für y die Breite des Analysierspalts

$$d_A = (0.03 \pm 0.01)\text{mm}, \quad (80)$$

welche wir bei der Aufzeichnung des Objektbildes eingestellt hatten, ein. Damit, und den bekannten Werten für Wellenlänge und Brennweite, erhalten wir einen weiteren Wert für k_y von

$$k_{y,\text{lin.}} = (4.4 \pm 1.5) \frac{1}{\text{mm}}. \quad (81)$$

Von diesem Wert weicht unser zuvor berechnete Wert $k_{y,\text{ang.}}$ um 1.83σ ab.

4 Zusammenfassung und Diskussion

In Versuch 233 beschäftigten wir uns mit der mathematischen Formulierung der Fraunhoferischen Beugung von Licht mit den Werkzeugen der Fourieranalyse. Hierzu betrachteten wir die Beugungs- und Objektbilder eines Einzel- und eines Doppelspalts und verglichen die Lage und Intensitäten der Maxima und Minima der beobachteten Bilder mit den theoretisch vorhergesagten Werten. In der Fourieroptik entspricht das Beugungsbild, welches durch einen Spalt beziehungsweise eine Öffnung, beschrieben durch eine bestimmte Öffnungsfunktion A , erzeugt wird, gerade deren Fouriertransformierten

$$E(k_y, k_z) = \int \int_S A(y, z) e^{-i(k_y y + k_z z)} dy dz,$$

beziehungsweise im eindimensionalen Fall

$$F(k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy.$$

Umgekehrt lässt sich durch die Rücktransformation vom Beugungsbild auf das Objektbild schließen. Somit ergibt sich als Intensitätsverteilung des Beugungsbildes des Einzelspalts mit der Spaltbreite d

$$I = \text{sinc}\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)^2 d^2.$$

Für den Doppelspalt mit Breite d je Spalt und dem Spaltabstand g ergibt sich

$$I = 4 \cos\left(\frac{\pi g}{\lambda} \sin(\alpha)\right)^2 d^2 \text{sinc}\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)^2.$$

Die Versuchsapparatur erlaubte es uns, verschiedene Objekte, also Spalte einzusetzen. Wir verwendeten einen Variablen Einzelspalt, dessen Breite und Rotation sich frei verstetzen ließ. Für die Analyse des Doppelspalts verwendeten wir einen von drei gegebenen festen Doppelspalten. Neben diesen war im Strahlengang der Apparatur ein variabler Analysierspalt angebracht, mit welchem wir die Beugungs- und Objektbilder seitlich abschneiden konnten, um so beispielsweise Beugungsmaxima auszublenden.

Wir begannen die Durchführung des Versuchs mit verschiedenen qualitativen Betrachtungen am Einzelspalt. Hierbei untersuchten wir ganz grob die Auswirkungen der Geometrie des Spalts, wie dessen Breite und Rotation, sowie den Einfluss verschiedener Breiten des Analysierspalts auf das Beugungsbild.

Unsere quantitativen Messungen begannen wir zunächst damit, die Abszisse des Intensitätsprofils zu Eichen. Durch den Export aus der Kamerasoftware war diese zunächst in Pixeln angegeben. Hierfür trugen wir die Abstände der Beugungsminima von der ersten bis zur fünften Ordnung (in Pixeln) gegen die jeweils zugehörige Spaltbreite des Analysierspalts (in Millimetern) auf. An diese Daten optimierten wir eine lineare Funktion, deren Steigung von

$$a = (8.63 \pm 0.18) \cdot 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{px}}$$

wir fortan als Umrechnungsfaktor verwendeten.

Wir fuhren fort mit den quantitativen Untersuchungen des Beugungsbildes des Einzelspalts. Hierzu zeichneten wir zunächst zwei Intensitätsverteilungen mit unterschiedlich starken Belichtungszeiten auf. Das erste so, dass das Maximum 0. gerade nicht in Sättigung war, das zweite so, dass die Maxima 1. Ordnung gerade nicht in Sättigung und weitere Maxima höherer Ordnung sichtbar waren. So konnten wir, unter Beachtung der Korrektur durch die Änderung der Belichtungszeit, die Lage und Intensitäten der ersten fünf Maxima und Minima ablesen.

Zunächst trugen wir die Abstände der links- und rechtsseitigen Minima gleicher Ordnung gegen ihre Ordnung in einem Diagramm auf und bestimmten mittels eines Fits die Steigung der daraus resultierenden Gerade. Anhand geometrischer Überlegungen leiteten wir die Gleichung $b = f\lambda/a$, um mittels der Brennweite f der Sammellinse, der Wellenlänge λ des Lichts und der eben ermittelten Steigung a die Spaltbreite b herzuleiten. Hierbei kamen wir auf einen Wert von

$$b = (0.262 \pm 0.007)\text{mm}. \quad (82)$$

Die tatsächliche Spaltbreite haben wir während den Messungen nicht notiert, daher können wir leider die Abweichung dieses Wertes nicht bestimmen.

Weiter ging es mit der Bestimmung der Ordnungen der Maxima. Da die Abstände der links- und rechtsseitigen Maxima dem gleichen linearen Verhältnis, wie die Minima folgen, konnten wir durch Umkehrung der Proportionalität die Ordnungen der Maxima aus deren Abständen bestimmen. Als Vergleichswerte bestimmten wir numerisch die Positionen der Extrema und zugehörigen Ordnungen anhand der standardmäßigen **sinc**-Funktion. Die berechneten Werte sind noch einmal in Tabelle (12) zusammengefasst.

Tabelle 12: Abstände der linksseitigen (l) und rechtsseitigen (r) Maxima, die berechneten Ordnungen und Vergleich zu den theoretischen Vorhersagen.

Pixel (l) → Pixel (r) [px]	Abstand [px]	Ber. Ord.	Theo. Ord.	Abweichung
$273 \pm 4 \rightarrow 1305 \pm 4$	1032 ± 6	5.48 ± 0.04	5.48	0
$371 \pm 4 \rightarrow 1210 \pm 4$	839 ± 6	4.46 ± 0.04	4.48	0.5σ
$464 \pm 4 \rightarrow 1118 \pm 4$	654 ± 6	3.48 ± 0.04	3.47	0.25σ
$559 \pm 4 \rightarrow 1021 \pm 4$	462 ± 6	2.46 ± 0.04	2.46	0
$660 \pm 4 \rightarrow 924 \pm 4$	264 ± 6	1.40 ± 0.04	1.43	0.75σ

Es ist zu sehen, dass die Ordnungen immer ziemlich genau zwischen den Ordnungen der Minima liegen, so wie es zu erwarten ist und auch von den theoretischen Werten bestätigt wird. Die Abweichungen zur Theorie sind mit unter 1σ als nicht signifikant zu betrachten.

Im abschließenden Teil zur Betrachtung des Einfachspalts hätten noch die Intensitäten der Maxima 1. bis 5. Ordnung mit den theoretischen Vorhersagen verglichen müssen. Wie bereits in der Ausarbeitung dieser Aufgabe erklärt hatten wir keine korrekten Daten, um eine Normierung des Intensitätsprofils für den Vergleich durchführen zu können. Eine dieser sehr ähnlichen Analyse findet sich allerdings Vollständig im folgenden Versuchsteil zum Doppelspalt wieder.

Einleitend zur Untersuchung des Beugungsbildes des Doppelspalts führten wir erneut zunächst eine qualitative Beobachtung der Auswirkungen verschiedener Geometrien auf das Beugungsbild durch. Hierfür hatten wir einen schmaleren, mittelgroßen und breiten

Doppelspalt zur Verfügung. Der schmale Doppelspalt erzeugte ein sehr breites Hauptmaximum mit wenigen Nebenmaxima und kaum sichtbaren weiteren Maxima. Der mittelgroße Doppelspalt zeigte ein etwas schmaleres Hauptmaximum mit etwa drei Nebenmaxima und schwach ausgeprägten weiteren Maxima. Die weiteren quantitativen Untersuchungen führten wir mit dem mittelgroßen Doppelspalt durch.

Das aufgezeichnete Intensitätsprofil des Beugungsbildes, siehe Abbildung (34), verglichen wir zunächst qualitativ mit dem theoretischen, programmatisch erzeugten Beugungsbild und versuchten, die verschiedenen Funktionsanteile, also Gitterfunktion und Spaltfunktion in diesem zu verorten.

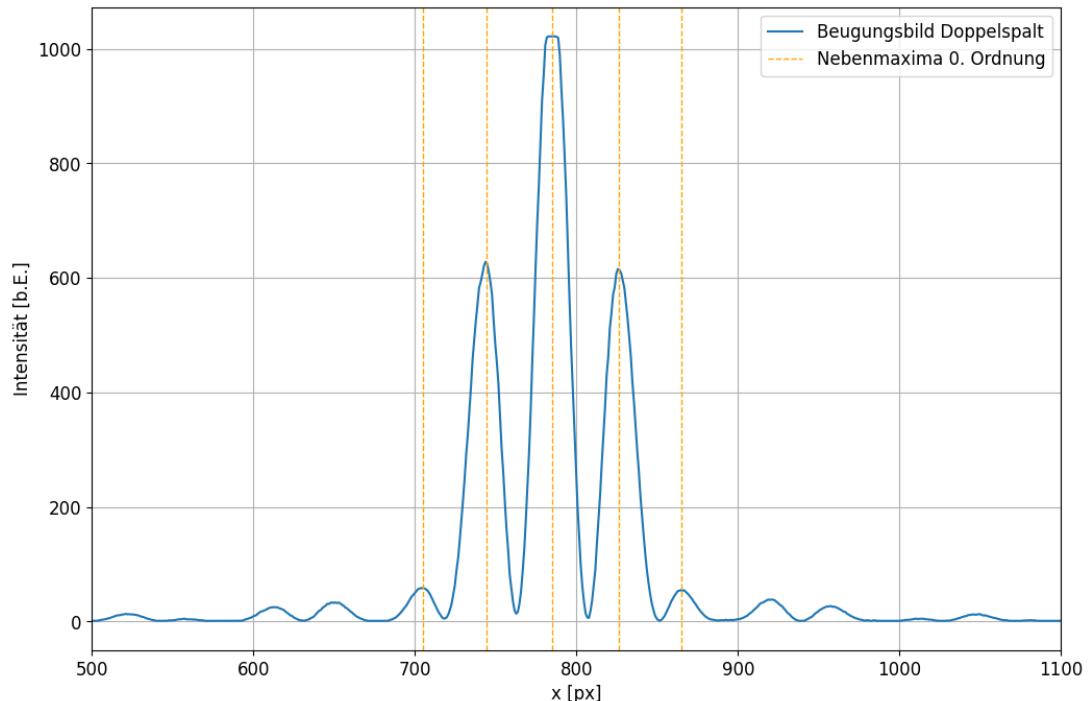


Abbildung 34: Gemessenes Beugungsbild des Doppelspalts.

Im zweiten Teil betrachteten wir die Intensität der Nebenmaxima des 0. Hauptmaximums, in Abbildung (34) markiert, genauer. Wie bereits beim Einzelspalt (*hätten wir gescheit gemessen*), entnahmen wir aus den Daten die Intensitäten der Nebenmaxima und normierten diese auf die Intensität des 0. Hauptmaximum. Erneut numerisch, ermittelten wir dann die theoretisch erwarteten Werte der Intensitäten, ebenfalls auf das Hauptmaximum normiert und verglichen diese mit unseren Messwerten. Die Resultate sind nochmals in Tabelle (13) zusammengefasst.

Tabelle 13: Vergleich der Intensitäten der Nebenmaxima des 0. Hauptmaximums beim Einzelspalt.

Ordnung	Intensität	Intensität (normiert)	Intensität (theo.)	Abw.
Linksseitige Maxima				
1	628 ± 2	0.6146 ± 0.0021	0.5417 ± 0.0001	35.52σ
2	58 ± 2	0.0568 ± 0.0020	0.0448 ± 0.0001	6.1σ
Rechtsseitige Maxima				
1	616 ± 2	0.6028 ± 0.0021	0.5417 ± 0.0001	29.84σ
2	55 ± 2	0.0538 ± 0.0020	0.0448 ± 0.0001	4.61σ

Während die Abweichungen der Intensitäten der Maxima 2. Ordnung noch in einem groben Rahmen halten, verzeichnen wir bei den Maxima erster Ordnung Abweichungen um 30σ von der Theorie.