

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Kristian Köhler

17.12.2024 & 13.01.2025

Versuch 241: Wechselstromeigenschaften von RLC-Gliedern

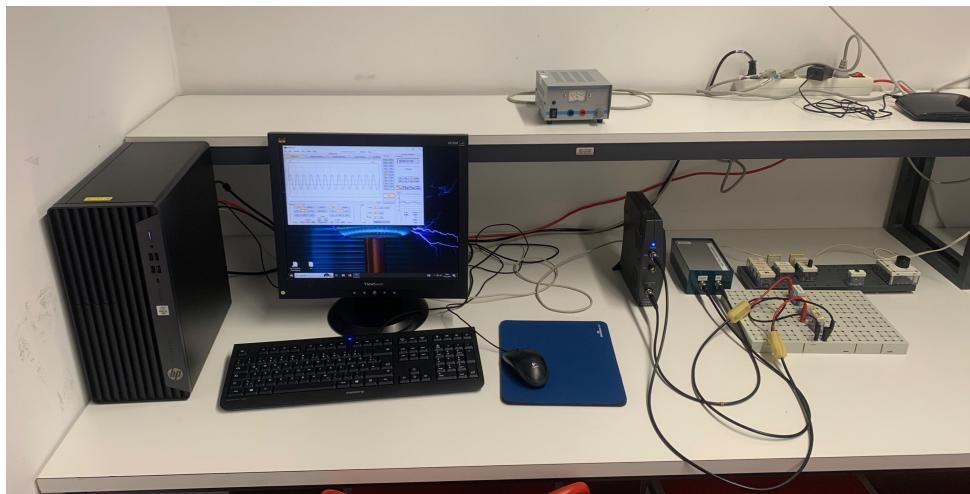


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.2 Versuchsdurchführung	13
2 Messprotokoll	16
3 Auswertung	23
3.1 Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Glieds	23
3.2 RC-Glied als Integrator und Differentiator	23
3.3 Frequenz- und Phasengang eines RC-Glied	25
3.4 Frequenzgang eines Serienschwingkreises	27
3.5 Bestimmung der Dämpfungskonstanten eines freien, gedämpften Schwing- kreises	29
3.6 Resonanzüberhöhung	30
3.7 Parallelschwingkreis-Bandsperre	32
3.8 Signalformung	33
4 Zusammenfassung und Diskussion	39

1 Einleitung

In Versuch 241 setzen wir uns mit sogenannten RLC-Schaltungen, also elektrische Schaltungen, welche Widerstände (R), Spulen (L) und Kondensatoren (C) verbinden. In Wissenschaft und Technik haben diese Schaltungen eine vielfältige und weitreichende Menge an Anwendungsfällen. Hierzu gehört zum Beispiel die Erzeugung von Schwingungen in Funktionsgeneratoren, wie sie auch im Praktikum oft zur Anwendung kommen. Die Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstandes, der sogenannten Impedanz, kann dazu verwendet werden, um Filterschaltungen zu realisieren. Weiter finden RLC-Glieder in der Signalverarbeitung und Störunterdrückung Anwendung, um beispielsweise Messsignale aufzubereiten und präzisere Messungen zu ermöglichen. Effekte von Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten treten auch in anderen Bauelementen und Kabeln auf. Das Verständnis der Effekte dieser hilft uns, Schaltungen entsprechend zu optimieren, sowie Fehler und Verfälschungen besser Interpretieren zu können.

1.1 Physikalische Grundlagen

Verhalten eines RC-Gliedes im Zeitbereich

Zunächst betrachten wir das Verhalten eines RC-Gliedes, also einer Schaltung aus einem Widerstand und einem Kondensator in einer Schaltung mit einer Gleichspannungsquelle, wie in Abbildung (4) dargestellt.

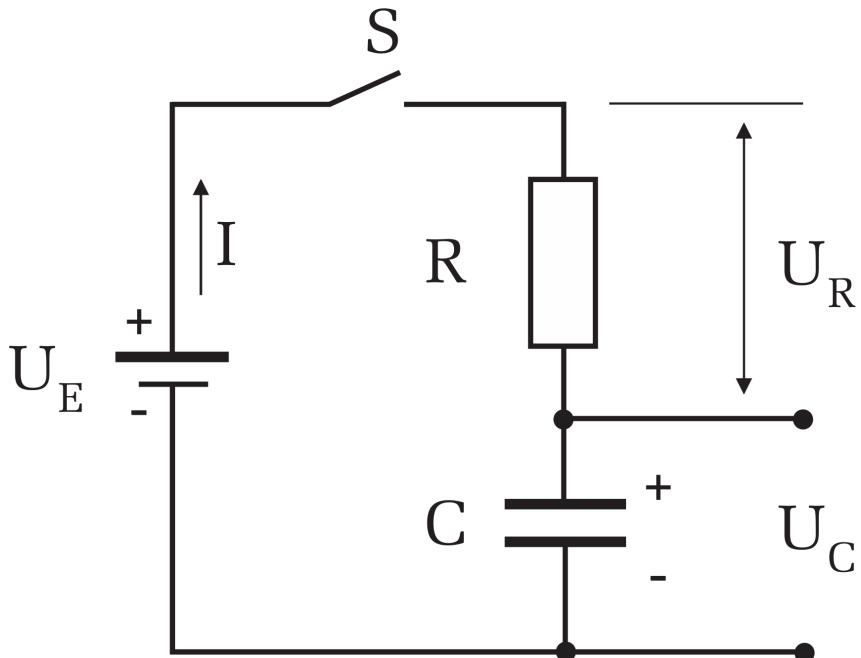


Abbildung 2: Schaltplan eines RC-Gliedes mit Gleichspannungsquelle

Wird der Stromkreis geschlossen, so beginnt der Kondensator sich aufzuladen. Der Aufladevorgang ist abgeschlossen, sobald die Spannung am Kondensator die Eingangsspannung U_E erreicht. Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt, dass die Eingangsspannung U_E gleich der Summe der Spannung am Kondensator U_C und am Widerstand U_R entspricht, also

$$U_E = U_C + U_R = U_C + RI. \quad (1)$$

Der Strom I entspricht gerade der zeitlichen Änderung der Kondensatorladung $I = \dot{Q} = C\dot{U}_C$, wodurch wir die Differentialgleichung

$$U_E = U_C + RC\dot{U}_C \quad (2)$$

erhalten. Als Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir

$$U_C(t) = U_E(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3)$$

Hierbei haben wir mit $\tau = RC$ die Zeitkonstante eingeführt. Erneut nach der Maschenregel können wir aus diesem Ergebnis den Verlauf der Spannung am Widerstand

$$U_R(t) = U_E e^{-t/\tau}, \quad (4)$$

sowie nach dem Ohm'schen Gesetz den Strom

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = I_0 e^{-t/\tau} \quad (5)$$

herleiten. Wir sehen nun, dass die Kondensatorladung exponentiell bis U_E ansteigt, während der Strom von $I_0 = \frac{U_E}{R}$ gegenläufig exponentiell bis 0 abfällt. Die ausschlaggebende Größe ist bei diesem Prozess die soeben eingeführte Zeitkonstante τ . Diese lässt sich durch die Messung der Halbwertszeit des $T_{1/2}$ der Kondensatorladung nach

$$\frac{U_E}{2} = U_E \left(1 - e^{T_{1/2}/\tau}\right) \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \quad (7)$$

bestimmen.

Liegt am RC-Glied eine Rechtecksspannung mit der Periodendauer T an, so wird der Kondensator abwechselnd, abhängig von τ be- und entladen, wie es in Abbildung (3) dargestellt ist.

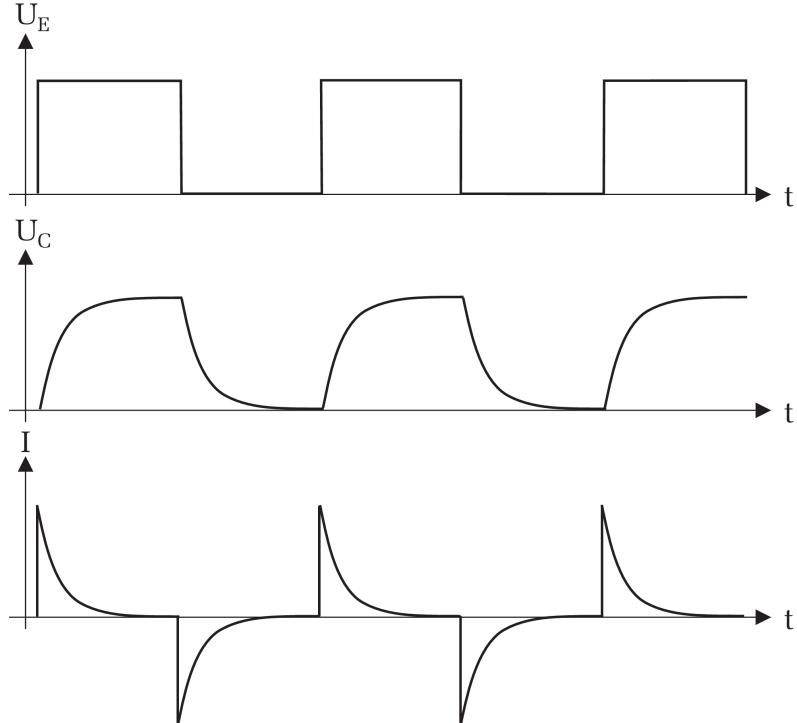


Abbildung 3: Spannungs- und Stromverlauf am Kondensator im RC-Glied bei eingehendem Rechteckssignal

Impedanz

Die Impedanz $Z = U/I$ bezeichnet den Wechselstromwiderstand, welchen die Bauelemente in einem Wechselstromkreis aufweisen. Die Wechselspannung sei nun beschrieben durch $U_E(t) = U_0 e^{i\omega t}$ mit Amplitude U_0 und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$. Für einen ohmschen Widerstand in einem Wechselstromkreis gilt

$$Z_R = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} = R. \quad (8)$$

Die Impedanz ist also identisch mit dem Gleichstromwiderstand.

Für einen Kondensator in einem Wechselstromkreis gilt

$$U_E(t) = \frac{Q}{C} \implies \dot{U}_E = \frac{I(t)}{C} \implies i\omega U_E(t) = \frac{I(t)}{C}. \quad (9)$$

Hierdurch können wir dessen Impedanz herleiten zu

$$Z_C = \frac{U_E(t)}{I(t)} = \frac{1}{i\omega C}. \quad (10)$$

Eine solche rein imaginäre Impedanz wird auch Blindwiderstand genannt, da dieser Widerstand keine elektrische Leistung verbraucht. Wir stellen außerdem fest, dass die Impedanz frequenzabhängig ist. Für $\omega \rightarrow 0$ ist sie unendlich groß, für $\omega \rightarrow \infty$ verschwindet sie. Das Auftreten der imaginären Einheit $\frac{1}{i} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ zeigt außerdem eine Phasenverschiebung des Stromes um $-\frac{\pi}{2}$ gegenüber der Spannung auf.

Für eine Spule mit Induktivität L gilt der Zusammenhang

$$U_E(t) = L\dot{I}(t) = i\omega LI(t) \quad (11)$$

$$\implies Z_E = i\omega L. \quad (12)$$

Diese ist also ebenfalls rein imaginär und frequenzabhängig. Auch hier zeigt sich das Auftreten der imaginären Einheit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ in einer Phasenverschiebung des Stroms um $+\frac{\pi}{2}$ gegenüber der Spannung auf.

Frequenzverhalten von RC-Gliedern

Die soeben festgestellte Frequenzabhängigkeit der Impedanz von Kondensatoren erlaubt es uns, Filterschaltungen zu bauen. Hierzu betrachten wir erneut RC-Glieder, wie sie bereits im ersten Teil zum Einsatz kamen. Wir betrachten eine Schaltung, wie sie in Abbildung (4) dargestellt ist.

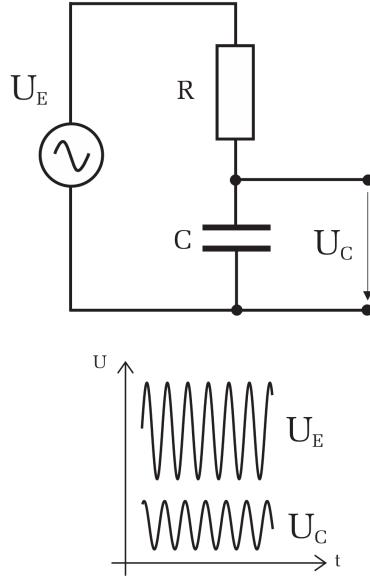


Abbildung 4: Schaltplan eines RC-Gliedes mit Wechselspannungsquelle

Die Spannungsquelle liefert eine zeitabhängige Wechselspannung, beschrieben durch $U_E(t) = U_0 e^{i\omega t}$. Am Kondensator C nehmen wir eine Spannung ab, für welche nach dem Ohm'schen Gesetz gilt

$$U_C(t) = \frac{Z_C}{R + Z_C} U_E(t). \quad (13)$$

Hierbei ist R der ohm'sche Widerstand und $Z_C = \frac{-i}{\omega C}$ die komplexe Impedanz des Kondensators. Setzen wir dies in die obere Gleichung ein, so erhalten wir

$$U_C(t) = \frac{-i/\omega C}{R - i/\omega C} U_0 e^{i\omega t} \quad (14)$$

mit dem Betrag

$$|U_C| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (15)$$

Am Betrag $|U_C|$ lässt sich erkennen, dass es sich hierbei um einen Tiefpassfilter handelt. Denn, für $\omega \rightarrow 0$ geht der Nenner gegen eins und somit $|U_C| \rightarrow |U_E|$. Für $\omega \rightarrow \infty$ geht auch der Nenner $\rightarrow \infty$ und somit $|U_C| \rightarrow 0$. Es können also nur niedrige, bzw. tiefe Frequenzen die Schaltung passieren.

Gerade den umgekehrten Effekt erhält man durch Vertauschen des Widerandes und des Kondensators, wodurch ein Hochpassfilter entsteht. Mit diesem gilt für den Betrag der Spannung am Widerstand

$$|U_R| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}. \quad (16)$$

Der Frequenzgang (vergleich Abbildung (5)) einer solchen Filterschaltung ist definiert als das Verhältnis der Amplituden $|U_A|/|U_E|$ über der Frequenz. Die Grenzfrequenz

$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ ist die Frequenz, an welcher die Ausgangsamplitude $|U_A|$ um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gegenüber der Eingangsspannung $|U_E|$ abgefallen (Tiefpassfilter) bzw. angestiegen (Hochpassfilter) ist. Den Bereich bis zur Grenzfrequenz eines Filters nennt man dessen Bandbreite.

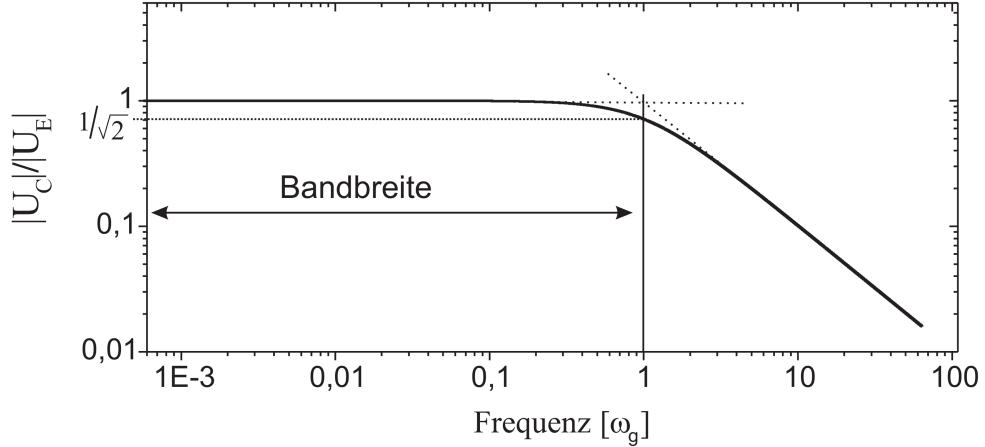


Abbildung 5: Frequenzgang eines Tiefpassfilters

RC-Glied als Differenzier- und Integrierglied

Ein weiterer Anwendungsbereich von Hoch- und Tiefpassfilterschaltungen ist die Anwendung als Differenzier- und Integrierglieder. Betrachten wir zunächst einen Tiefpassfilter. Der Strom I ergibt sich sowohl anhand der zeitlichen Änderung der Kondensatorladung, also auch dem ohm'schen Gesetz, nach

$$I = C \frac{dU_A}{dt} = \frac{U_E - U_A}{R}. \quad (17)$$

Ist nun die Periodendauer T der Eingangsspannung U_E deutlich kleiner als die Zeitkonstante τ , so ist nach (15) $U_A \ll U_E$ und es ergibt sich die Näherung

$$\frac{dU_A}{dt} \approx \frac{U_E}{RC}. \quad (18)$$

Somit entspricht das Ausgangssignal des Tiefpassfilters

$$U_A \approx \frac{1}{RC} \int U_E dt. \quad (19)$$

für die Bedingung $\tau \gg T$ ungefähr dem Integral des Eingangssignals.

Wiederum umgekehrt betrachten wir nun für einen Hochpassfilter die Summe der Teilspannungen. Die Eingangsspannung entspricht der Summe der Spannung am Kondensator

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt \quad (20)$$

und der Spannung am Widerstand, also der Ausgangsspannung U_A . Für den Strom gilt somit

$$\int I dt = C(U_E - U_A) \implies I = C \frac{d}{dt}(U_E - U_A). \quad (21)$$

Unter der Annahme, dass $\tau \ll T$ ist nach (16) $U_A \ll U_E$. Es gilt somit

$$I \approx C \frac{d}{dt} U_E, \quad (22)$$

also

$$IR = U_A \approx RC \frac{d}{dt} U_E. \quad (23)$$

Das Ausgangssignal des Hochpassfilters stellt also unter der Bedingung, dass $\tau \ll T$ ist, ungefähr die Differentiation des Eingangssignals dar.

Elektrischer Schwingkreis (RLC-Glied)

Wir betrachten zunächst einen idealisierten Schaltkreis mit einem Kondensator und einer parallel geschalteten Spule. Entlädt sich der Kondensator, so wird durch den Entladestrom ein Magnetfeld in der Spule erzeugt. Die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie wird also allmählich in magnetische Energie umgewandelt. Sobald der Kondensator gänzlich entladen ist, beginnt der Strom abzunehmen und als Konsequenz des Induktionsgesetzes und der Lenz'schen Regel wird in der Spule ein entgegengesetzter Strom erzeugt. Dieser lädt den Kondensator mit umgekehrter Polung wieder auf, die magnetische Energie wird also wieder in elektrische Energie umgewandelt. Dieses wechselwirkende Verhalten gibt den Schwingkreisen ihren Namen. In der Realität sorgen Widerstände in den Bauteilen, sowie dielektrische wie magnetische Verluste dafür, dass die Schwingung nicht ewig anhält, sondern gedämpft ist, soweit sie nicht durch ein kontinuierliches Eingangssignal angeregt ist. Daher betrachten wir nun RLC-Glieder, welche neben der Spule (L) und dem Kondensator (C) auch einen Widerstand (R) enthalten.

In einem RLC-Serienschwingkreis sind die drei Bauteile in Reihe geschaltet. Die Einzelspannungen, die an den einzelnen Bauteilen abfallen sind

$$U_R = \frac{R}{I}, \quad U_C = \frac{Q}{C}, \quad U_L = -L \frac{d}{dt} I. \quad (24)$$

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt weiter

$$U_R + U_C - U_L = 0, \quad (25)$$

die Summe der Teilspannungen muss also verschwinden. Durch Einsetzen und differenzieren erhalten wir hieraus die folgende Gleichung

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + R \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C} I = 0. \quad (26)$$

Dies entspricht der allgemeinen Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillatoren. Unter der Annahme, dass der Widerstand verschwindet erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} I + \omega_0^2 I = 0 \quad (27)$$

eines ungedämpften harmonischen Oszillators mit der Lösung

$$I = I_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (28)$$

Hierbei wurden Induktivität und Kapazität zur Eigenfrequenz, definiert durch die Thomson'sche Schwingungsformel,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (29)$$

zusammengefasst.

Die allgemeine Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left(c_1 e^{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} \right). \quad (30)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen dabei von den Anfangsbedingungen ab. Unter der Voraussetzung

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}, \quad (31)$$

also einer entsprechend schwachen Dämpfung, spricht man vom sogenannten *Schwingfall*. Nur in diesem Fall kommt es auch tatsächlich zu einer periodischen, exponentiell gedämpften Oszillation des Stroms nach

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{i(\omega_f t + \varphi)} \quad (32)$$

mit

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (33)$$

Wie aus dem Term abzulesen ist, nimmt die Amplitude proportional zu $e^{-\delta t}$ ab. Hierbei ist die Dämpfungskonstante δ definiert als

$$\delta = \frac{R}{2L}. \quad (34)$$

Ihr Kehrwert $1/\delta$ ist die Relaxationszeit oder Abklingzeit τ_r . Empirisch kann die Dämpfungskonstante durch das Vermessen der Amplituden und der Periodendauer bestimmt werden. Das logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right) = \delta T \quad (35)$$

stellt den zugehörigen mathematischen Zusammenhang her.

Frequenzabhängigkeit eines Schwingkreises - Resonanz

Wird ein Schwingkreis durch ein extern anliegendes Sinussignal angeregt, oszilliert dieser mit derselben Frequenz wie das angelegte Signal. Wie bereits im Abschnitt zu Impedanzen betrachtet, hängt jedoch die Amplitude des Ausgangssignals von der eingehenden Frequenz ab. Für die Gesamtempedanz Z_g in einem Serienschwingkreis gilt

$$Z_g = Z_R + Z_C + Z_L = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (36)$$

Hieraus folgt für den Strom im Schwingkreis nach dem ohm'schen Gesetz

$$I = \frac{U_E}{Z_g} = \frac{1}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} U_0 e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad (37)$$

wobei $U_E(t) = U_0 e^{i(\omega t)}$ das Eingangssignal darstellt. Dessen Betrag

$$I_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C}))^2}} \quad (38)$$

ist abhängig von der Anregungsfrequenz ω und nimmt bei der Resonanzfrequenz ω_R

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (39)$$

das Maximum von $I_0(\omega_R) = U_0/R$ an. Es wirkt im Resonanzfall nur der ohm'sche Widerstand, die Schaltung stellt hier also einen Kurzschluss dar. Für die Phasenverschiebung gilt

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}, \quad (40)$$

im Resonanzfall sind Strom und Spannung also in Phase.

Für die Amplituden der Spannungen an den einzelnen Bauteilen gelten die Zusammenhänge

$$|U_R| = \frac{R}{\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{1/2}} U_0, \quad (41)$$

$$|U_C| = \frac{1/(\omega C)}{\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{1/2}} U_0, \quad (42)$$

$$|U_L| = \frac{\omega L}{\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{1/2}} U_0. \quad (43)$$

Betrachten wir die Amplitude $|U_R|$ der Spannung am Widerstand so zeigt sich für verschiedene Werte des Widerstandes das in Abbildung (6) abgebildete Verhalten.

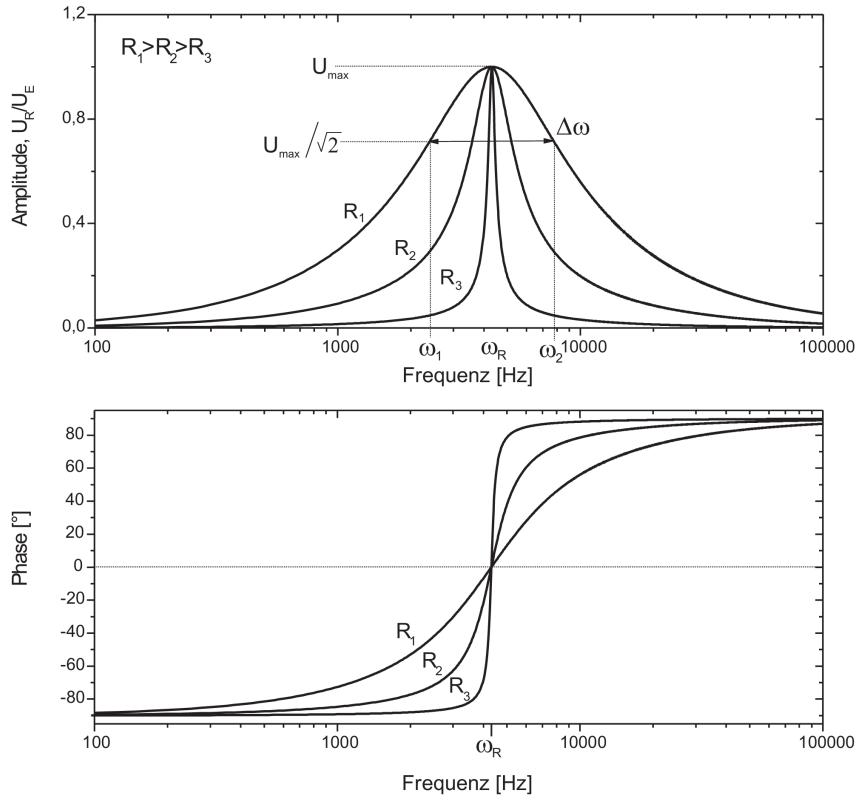


Abbildung 6: Resonanzkurven im RLC-Schwingkreis für verschiedene Werte des Widerstands

Da, wie soeben gezeigt, im Resonanzfall die Gesamtimpedanz von Spule und Kondensator verschwindet, fällt die gesamte Eingangsspannung am Widerstand ab. Die Ausgangsamplitude hier in etwa der Eingangsamplitude. Für von der Resonanzfrequenz abweichende Frequenzen, werden Spule und Kondensator nicht kurzgeschlossen, es fällt also ein Teil der Spannung auch an diesen Bauteilen ab. Nach diesem Wirkungsprinzip stellt der Serien-Schwingkreis einen Bandpass-Filter dar, welcher nur ein bestimmtes Frequenzband um die Resonanzfrequenz passieren lässt. Die Bandbreite ist hier, ähnlich zum Hoch- und Tiefpassfilter, durch die Frequenzen definiert, bei welchen die Amplitude auf das $\sqrt{2}$ -Fache gedämpft wird:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} = 2\delta. \quad (44)$$

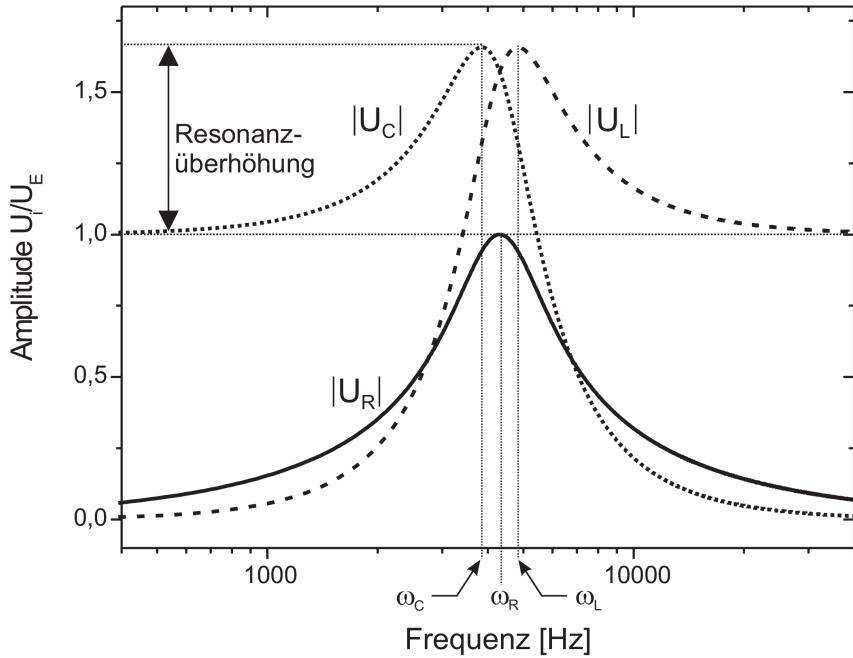


Abbildung 7: Resonanzkurven im RLC-Schwingkreis, abgenommen an den drei verschiedenen Bauteilen

Abbildung (7) zeigt nun die Amplituden der Spannungen an allen drei Bauteilen. Zunächst fällt auf, dass die Resonanzfrequenzen für Spule (ω_L) und Kondensator (ω_C) nach rechts bzw. links zur Resonanzfrequenz des Widerstandes verschoben sind. Für diese gilt

$$\omega_C = \sqrt{\omega_R^2 - 2\delta^2}, \quad (45)$$

$$\omega_L = \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2}. \quad (46)$$

Weiter fällt auf, dass hier die Ausgangsamplituden über den Wert der Eingangsamplitude hinaus steigen. Diese sogenannte Resonanzüberhöhung kommt ohne verstärkendes Bau teil zustande und folgt aufgrund der Phasenverschiebung der Spannungen an Spule und Kondensator immer noch den Vorgaben der Maschenregel. Die Stärke der Resonanzüberhöhung hängt vom ohm'schen Widerstand ab. Bei kleinerem Widerstand beobachten wir eine stärkere Überhöhung, mit zunehmendem Widerstand wird sie immer geringer, bis die Maxima nicht mehr sichtbar sind.

Zum Vergleich betrachten wir nun noch einen Parallelschwingkreis, wie er in Abbildung (8) dargestellt ist. Für die Impedanz in der Parallelschaltung gilt

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \quad (47)$$

$$\iff Z_P = \left| \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \right|. \quad (48)$$

Nähert man sich der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ an, so geht der Nenner gegen 0, die Impedanz also ins Unendliche. An dieser Stelle wirkt der LC-Parallelkreis wie ein Isolator, bildet also eine sogenannte Bandsperre für Frequenz im Bereich um ω_0 .

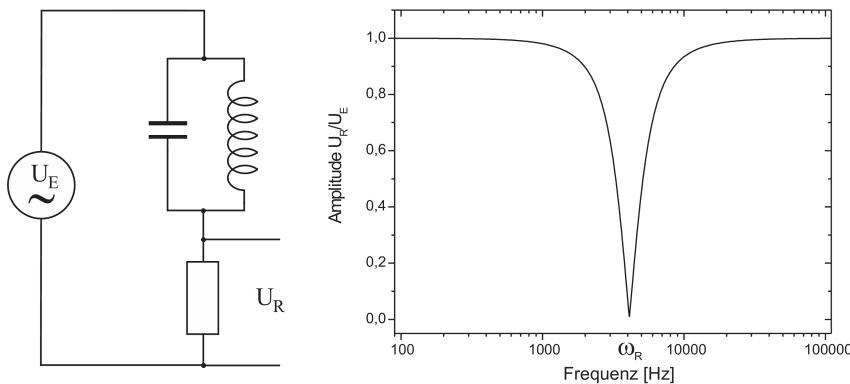


Abbildung 8: Schaltplan des Parallelschwingkreis

Anwendungen von LC-Gliedern: Radioempfänger

Ein Anwendungsbereich von LC-Gliedern als Bandpassfiltern sind Radioempfänger. Bevor ein Signal empfangen werden kann, muss es jedoch zunächst gesendet werden. Radio Sender nutzen die sogenannte Modulation, um ein das niederfrequente Signal, welche Musik und Sprache enthält, im Bereich von 100Hz bis 4kHz einem höherfrequenten Signal aufzuprägen. Dies ist notwendig, da nur so eine effektive Abstrahlung des Signals durch eine Antenne möglich ist. Bei der Amplitudenmodulation wird das hochfrequente Trägersignal mit dem zu übertragenden Signal multipliziert und so dessen Amplitude entsprechend verändert. Das modulierte Signal kann dann mit einer Antenne gesendet und empfangen werden.

Um das empfangene Signal hörbar zu machen, muss es zunächst auf den rein positiven oder rein negativen Teil der Schwingung abgeschnitten werden. Diese Demodulation ist notwendig, da das eingehende symmetrische Signal im Mittelwert verschwindet und somit keine Schwingung der Lautsprechermembran auslöst. Durch einen Kondensator kann dann, aufgrund dessen frequenzabhängiger Impedanz $Z \propto 1/\omega$, das hochfrequente Trägersignal herausgefiltert werden. Dem Ganzen kann ein LC-Schwingkreis vorgeschaltet werden, um die Wahl eines Senders zu ermöglichen. Jeder Sender sendet auf einer anderen Trägerfrequenz und ohne Filterschaltung würde jede dieser Frequenzen gleichermaßen empfangen und am Lautsprecher wiedergegeben werden. Wie zuvor beschrieben, wirkt ein LC-Schwingkreis wie ein Bandpassfilter. Stimmt man nun die Resonanzfrequenz des Schwingkreises genau so ab, dass diese der Trägerfrequenz eines bestimmten Radiosenders entspricht, so kann nur dessen Signal den Filter passieren. Um Sender mit dicht beieinanderliegenden Trägerfrequenzen zu trennen, ist eine hohe Güte und geringe Bandbreite des Schwingkreises erforderlich, weshalb in alten Radioempfängern mehrere verstärkte Kreise in Reihe geschaltet wurden, um die eine steilere Durchlasskurve und bessere Trennschärfe zu gewährleisten.

1.2 Versuchsdurchführung

Der Versuch umfasst insgesamt neun Versuchsteile, von welchen der erste Teil Wechselstromeigenschaften passiver Bauteile und charakteristischen Größen von RC-Filtern und RLC-Schwingkreisen und der zweite Teil mit der praktischen Anwendung von RLC-Schaltungen umfasst. Die grundlegende Schaltung, welche für nahezu alle Versuchsteile zum Einsatz kommt, ist in Abbildung (9) zu sehen.

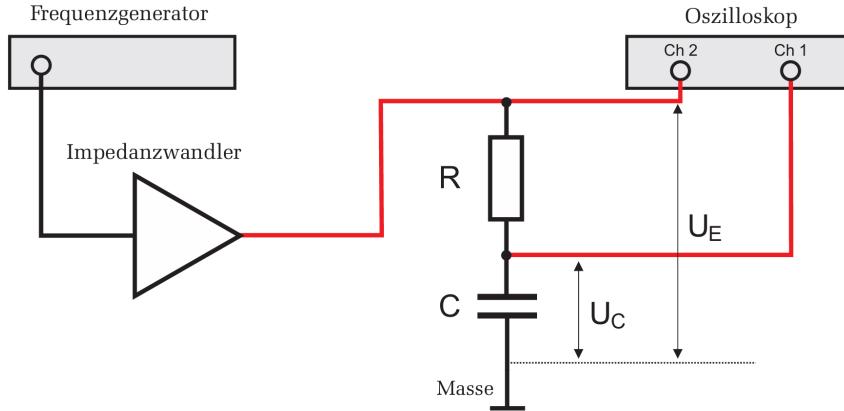


Abbildung 9: Allgemeiner Schaltplan für die Versuchsdurchführung

Aufgabe 1: Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Gliedes. Für ein Rechtecksignal, welches wir mit dem Frequenzgenerator generieren, bestimmen wir in einer RC-Schaltung für verschiedene Werte von Kapazität und Widerstand die Halbwertszeit der Kondensatorentladung. Wir vermessen die Halbwertszeit für die Werte

- a) $C = 470\text{nF}$, $R = 1\text{k}\Omega$
- b) $C = 4.7\text{nF}$, $R = 10\text{k}\Omega$
- c) $C = 47\text{nF}$, $R = 1\text{k}\Omega$

anhand der Spannung am Kondensator. Weiter prüfen wir durch Abnahme der Spannung am Widerstand, dass die Zeitkonstante des Stromverlaufs der des Spannungsverlaufs am Kondensator gleicht.

Aufgabe 2: RC-Glied als Integrator und Differentiator. In eine RC-Schaltung mit einem 47nF Kondensator und einem Potentiometer ($5\text{k}\Omega$) geben wir durch einen Signalgenerator verschiedenförmige Eingangssignale ein. Wir greifen die Spannung am Kondensator ab. Durch Anpassung des Wertes am Potentiometer beobachten wir die Wirkung der Schaltung als Integrator auf das jeweilige Eingangssignal. Im zweiten Teil vertauschen wir Kapazität und Widerstand, greifen die Spannung am Widerstand ab und erhalten so einen Differentiator. Mit diesem führen wir die gleichen Untersuchungen durch.

Aufgabe 3: Frequenz- und Phasengang eines RC-Glieds. Für eine Tief- und eine Hochpassfilterschaltung aus einem 47nF Kondensator und einem $1\text{k}\Omega$ Widerstand nehmen wir jeweils den Frequenzgang für einen Bereich von 100Hz bis 100kHz auf. Als Eingangssignal verwenden wir jeweils ein Sinussignal mit 2V peak-to-peak. Aus dem Frequenzgang vermessen wir jeweils die Grenzfrequenz der Filterschaltung. Weiter bestimmen wir durch manuelles Messen der Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangsspannung den Phasengang des Hochpassfilters.

Aufgabe 4: Frequenzgang eines Serienschwingkreis. Wir erweitern den eben untersuchten RC-Schwingkreis mit der Spule L_1 zu einem Serienschwingkreis. Wir verwenden

das gleiche Eingangssignal wie zuvor und zeichnen den Frequenzgang für einen Bereich von 1kHz bis 10kHz, jeweils für die Widerstände $R = 1\text{k}\Omega$, 220Ω und 47Ω auf. Die Ausgangsspannung nehmen wir hierzu am Widerstand ab. Aus dem Frequenzgang bestimmen wir die Resonanzfrequenz f_R , die Bandbreite Δf , sowie die Effektivwerte der Aus- und Eingangsspannung bei der Resonanzfrequenz.

Aufgabe 5: Resonanzüberhöhung. Für einen Serienschwingkreis mit Kapazität 47nF , Widerstand 220Ω und Induktivität L_1 zeichnen wir den Frequenzgang jeweils einmal über jedes Bauteil auf. Aus den Maxima der Verläufe bestimmen wir die Resonanzfrequenzen.

Aufgabe 6: Bestimmung der Dämpfungskonstante eines freien, gedämpften Schwingkreises. Wir betrachten einen Serienschwingkreis mit Kapazität 47nF , Widerstand 47Ω und Induktivität L_1 und greifen die Ausgangsspannung über die Spule ab. Als Eingangssignal generieren wir mit dem Funktionsgenerator ein Rechtecksignal, dessen Frequenz so gewählt ist, dass ein kompletter gedämpfter Schwingungsvorgang pro Ausschlag möglich ist. Um das logarithmische Dekrement bestimmen zu können, vermessen wir die Amplituden von fünf benachbarten Schwingungen. Wir ersetzen dann den Widerstand durch einen Potentiometer, um den Schwingungsvorgang abhängig von der Dämpfung beobachten zu können.

Aufgabe 7: Parallelschwingkreis - Bandsperre. Nun betrachten wir einen Parallelschwingkreis mit Kapazität 47nF , Widerstand $1\text{k}\Omega$ und Induktivität L_1 . Wir zeichnen den Frequenzgang der Schaltung für einen Frequenzbereich von 100Hz bis 100kHz auf und bestimmen aus diesem die Resonanzfrequenz des Schwingkreises.

Aufgabe 8: Signalformung. In diesem Aufgabenteil verwenden wir verschiedene Filterschaltungen, um bestimmte Frequenzanteile aus einer Menge an überlagerten Signalen herauszufiltern. Mithilfe des Signalgenerators erzeugen wir ein Signal, welches aus drei überlagerten Sinussignalen unterschiedlicher Frequenz (100Hz, 4kHz, 8kHz) und Amplitude, sowie jede Menge weiterer hinzuaddierter Störsignale besteht. Mithilfe des *Spectrum Analyzer* der Oszilloskopsoftware vermessen wir für jeden der folgenden verwendeten Filterschaltungen die Amplitude und Frequenz der drei stärksten Signale des Frequenzspektrums:

1. Ohne Filter, $R = 220\Omega$
2. RC- und LC-Schaltungen; Hoch-/Tiefpassfilter
 - a) Hochpass, $R = 220\Omega, C = 470\text{nF}$
 - b) Tiefpass, $R = 220\Omega, C = 470\text{nF}$
 - c) LC-Tiefpass, $L = L_1, C = 47\text{nF}$
3. RLC-Schaltung; Bandpass-Filter
 - a) $|U_A|$ über Kondensator
 - i. $R = 1\text{k}\Omega, L = L_1, C = 47\text{nF}$
 - ii. $R = 47\Omega, L = L_1, C = 47\text{nF}$
 - b) $|U_A|$ über Spule
 - i. $R = 1\text{k}\Omega, L = L_1, C = 47\text{nF}$
 - ii. $R = 47\Omega, L = L_1, C = 47\text{nF}$

Aufgabe 9: Aufbau eines einfachen AM-Empfängers. Wir bauen aus dem Drehkondensator (500pF) und der Spule L_2 einen Parallelschwingkreis als Bandpassfilter auf. Diesen verbinden wir mit der Antennenbuchse. Ziel ist es ein über eine Sendeantenne im Raum gesendetes Sinussignal, zu empfangen und möglichst störungsfrei am Oszilloskop anzeigen. Zunächst greifen wir die Spannung direkt am Drehkondensator mit dem Oszilloskop ab und beobachten die Wirkung des Filters auf das Frequenzspektrum. Hierzu variieren wir die Kapazitäten durch den Drehkondensator und die Induktivität durch einen Eisenkern in der Spule.

Dann fügen wir in die Schaltung eine Diode zur Demodulation und einen hochohmigen Kopfhörer mit ein. Mit diesem einfachen Radioempfänger versuchen wir nun, durch Anpassung des Drehkondensators das von einer Antenne im Raum entsendete Radiosignal hörbar zu machen.

2 Messprotokoll

Messprotokoll 241

Marius Pfeiffer

17.12.2024

Robert Grosch

Aufgabe 1

RC-Schaltung

$$f = 165 \pm 1 \text{ Hz}$$

Halbwertszeiten:

C [nF]	R [kΩ]	T _{1/2}
470	1	0.3 ± 0.1 ms
4.7	10	45 ± 1 μs
47	1	34 ± 1 μs
47	1	32 ± 1 μs

Aufgabe 2

Integrator

Wenn wir den Widerstand durch den Poti höher einstellen, nähert sich die Signalkurve von U_A einer Dreiecksform an, welche sehr genau in die Rechteckige Form von U_E passt.

Das Integral einer Rechtecksfunktion ist die Dreiecksfunktion, dies stimmt mit den Beobachtungen überein.

Aus einem eingehenden Dreidiodensignal ergibt sich durch den Integrator ein Sinussignal.

Aufgabe 3

Tiefpass Filter

Frequenz Schnittpunkt: $(9.46 \pm 0.02) \text{ kHz}$

Hochpass Filter

Freq. Schnittpunkt: $(3.31 \pm 0.02) \text{ kHz}$

Phasenverschiebung Hochpass Filter

$f [\text{kHz}]$	$\Delta t [\text{s}]$	$\varphi [^\circ]$
1	$0.22 \pm 0.02 \text{ ms}$	79 ± 8
2	$86 \pm 2 \mu\text{s}$	61.9 ± 1.5
3	$46 \pm 2 \mu\text{s}$	49.7 ± 2.2
4	$30 \pm 2 \mu\text{s}$	43.2 ± 2.9
5	$20 \pm 2 \mu\text{s}$	36 ± 4
6	$15 \pm 2 \mu\text{s}$	34 ± 5
7	$11 \pm 2 \mu\text{s}$	27 ± 5
8	$9 \pm 2 \mu\text{s}$	26 ± 6
9	$7 \pm 2 \mu\text{s}$	23 ± 7
10	$5 \pm 2 \mu\text{s}$	18 ± 8

Aufgabe 4

Eigenschaften der Frequenzgänge

R	f_R	$V \frac{U_A}{[V_{rms}]}$	$V [V_{rms}]$	$\Delta f [\text{kHz}]$
$1 \text{ k}\Omega$	$4.02 \pm 0.02 \text{ kHz}$	0.64 ± 0.02	0.661 ± 0.001	4.92 ± 0.03
220Ω	$3.80 \pm 0.02 \text{ kHz}$	0.53 ± 0.02	0.650 ± 0.001	1.29 ± 0.03
47Ω	$3.75 \pm 0.02 \text{ kHz}$	0.27 ± 0.02	0.627 ± 0.001	0.56 ± 0.03

Aufgabe 5

Resonanzfrequenzen bei Frequenzüberhöhung

	R (Schwarz)	L (Blau)	C (Rot)
f	$3.91 \pm 0.02 \text{ kHz}$	$4.04 \pm 0.02 \text{ kHz}$	$3.80 \pm 0.02 \text{ kHz}$

Aufgabe 6

$$f = 100.00 \text{ Hz}$$

	$U_p [V]$	$T [\text{ms}]$
A_1	0.74 ± 0.02	0.26 ± 0.02
A_2	0.50 ± 0.02	0.26 ± 0.02
A_3	0.36 ± 0.02	0.26 ± 0.02
A_4	0.26 ± 0.02	0.26 ± 0.02
A_5	0.18 ± 0.02	$\phi 0.26 \pm 0.02$

Mit veränderlichem
Widerstand, Beobachtung

Schwingung wird
geringer mit höherem
Widerstand.

Amplituden und Schwingungsdauer
der gedämpften Schwingung

Aufgabe 7

Resonanzfrequenz: (3.94 ± 0.02) kHz

Aufgabe 8

Die Tabellen zeigen jeweils Frequenz & Amplitude der 100Hz, 4kHz und 8kHz Signalanteile (falls sichtbar)

Teil 1 (ohne Filter, 220Ω)

Signalanteil	U [dBV]	dU [dB]	f [Hz]
1	-3.06 ± 0.02	71.25 ± 0.02	100.71 ± 10
2	-8.06 ± 0.02	65.63 ± 0.02	3600 ± 10
3	-22.13 ± 0.02	51.25 ± 0.02	6780 ± 10

Teil 2 (Hochpass, 220Ω , 470nF)

Signalanteil	U [dBV]	dU [dB]	f [Hz]
1	-26.81 ± 0.02		100.71 ± 10
2	-8.69 ± 0.02		3600 ± 10
3	-22.44 ± 0.02		6780 ± 10

Teil 2 (Tiefpass, 220Ω , 470nF)

Signalanteil	U [dBV]	dU [dB]	f [Hz]
1	-2.75 ± 0.02		100.71 ± 10
2	-15.88 ± 0.02		3600 ± 10
3	-51.19 ± 0.02		6780 ± 10

Teil 2 (LC-Tiefpass, $L_1, 47\text{nF}$)

Signalanteil	$U [\text{dBV}]$	$dU [\text{dB}]$	$f [\text{Hz}]$
1	-2.56 ± 0.02		100.71 ± 10
2	3.34 ± 0.02		3600 ± 10
3	—		—

Teil 3 (Bandpass RLC)

$1\text{k}\Omega, L_1, 47\text{nF}$

Signalanteil	$U [\text{dBV}]$	$f [\text{Hz}]$	
1	-3.19 ± 0.02	100.71 ± 10	Osz. Bild hat für Ch 1: 3V Ch 2: 1V Skalierung
2	-8.81 ± 0.02	3590 ± 10	

$47\Omega, L_1, 47\text{nF}$

Signalanteil	$U [\text{dBV}]$	$f [\text{Hz}]$
1	-2.87 ± 0.02	100.71 ± 10
2	8.06 ± 0.02	3590 ± 10

Teil 3 (Bandpass RCL)

$1k\Omega, L_1, 47nF$

Signalanteil	U [dBV]	f [Hz]
1	-11.50 ± 0.02	3600 ± 10
2	-22.75 ± 0.02	6790 ± 10

Skalierung
Ch1: 1V
Ch2: 1V

$47\Omega, L_1, 47nF$

Signalanteil	U [dBV]	f [Hz]
1	6.81 ± 0.02	3590 ± 10
2	-22.25 ± 0.02	6790 ± 10

→ 100 Hz Peak nicht mehr im Spektrum zu sehen

Teil 3 (Bandpass CLR)

$1k\Omega, L_1, 47nF$

Signalanteil	U [dBV]	f [Hz]
1	-32.44 ± 0.02	100.7 ± 10
2	-8.06 ± 0.02	3590 ± 10
3	-43.38 ± 0.02	6800 ± 10

Skalierung
Ch1: 1V
Ch2: 1V

$47\Omega, L_1, 47nF$

Signalanteil	U [dBV]	f [Hz]
1	-57.56 ± 0.02	100.71 ± 10
2	-18.50 ± 0.02	3590 ± 10

Skalierung
Ch1: 0.3V
Ch2: 1V

→ 6.8 kHz Peak nicht mehr sichtbar

Aufgabe 9

Amplitude bei ca. 1 MHz nahm mit Vergrößerung der Kapazität bis zu einem Maximum zu und bei weiterer Erhöhung der Kapazität wieder ab.

Amplitude nahm bei Entfernung des Eisenkerns aus der Spule ab.

Es konnte im Oszilloskop ein leicht verzerrtes Sinussignal beobachtet werden.

AA
7.!

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Glieds

Wir verwenden die in Aufgabenteil 1 gemessenen Halbwertszeiten, um die Zeitkonstante nach Gleichung (7) zu berechnen. Den theoretischen Wert der Zeitkonstante ermitteln wir anhand der Formel $\tau = RC$ mit dem Widerstand R und der Kapazität C . Die resultante der Berechnungen für alle vier Konfigurationen der RC-Schaltung sind Tabelle (1) zu entnehmen.

Tabelle 1: Messwerte und berechnete Größen der Zeitkonstante τ .

C [nF]	R [k Ω]	f [Hz]	τ_{theo} [s]	τ_{exp} [s]	Abw.
470 ± 47	1.00 ± 0.05	165 ± 1	$(47 \pm 6) \times 10^{-5}$	$(43 \pm 15) \times 10^{-5}$	0.25σ
4.70 ± 0.47	10.00 ± 0.50	165 ± 1	$(4.7 \pm 0.6) \times 10^{-5}$	$(6.49 \pm 0.15) \times 10^{-5}$	3.29σ
47.00 ± 4.70	1.00 ± 0.05	165 ± 1	$(4.7 \pm 0.6) \times 10^{-5}$	$(4.91 \pm 0.15) \times 10^{-5}$	0.38σ

Abbildung (10) zeigt exemplarisch den Spannungsverlauf für die letzte angegebene Schaltungskonfiguration.

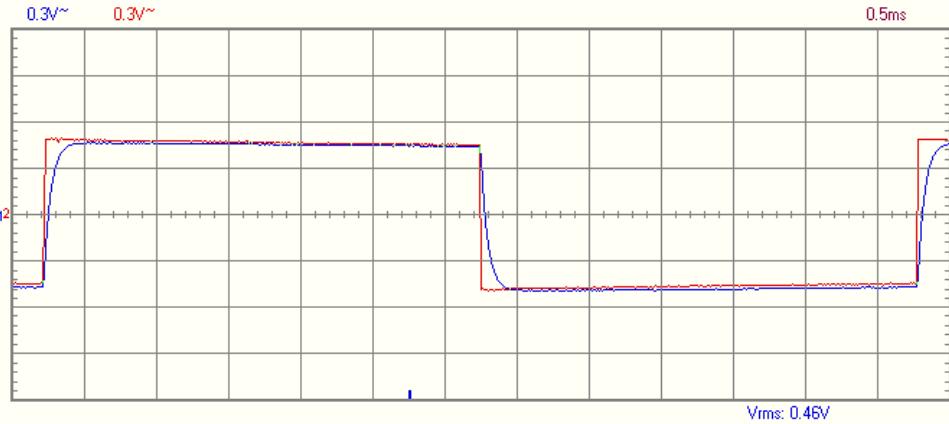


Abbildung 10: Spannungsverlauf am Oszilloskop des RC-Glieds für $C = 47\text{nF}$, $R = 1\text{k}\Omega$. In Rot dargestellt die Eingangsspannung U_E , in Blau die Ausgangsspannung U_C , abgenommen über den Kondensator.

3.2 RC-Glied als Integrator und Differentiator

Wie bereits dem Versuchsprotokoll zu entnehmen können wir beim Aufbau der RC-Schaltung als Integrator beobachten, dass sich das Ausgangssignal bei Erhöhung des Widerstandes immer stärker dem Integral des Eingangssignals annähert. So formt ein eingehendes Rechteckssignal eine Dreiecksfunktion als Ausgangssignal, aus einem eingehenden Dreieckssignal ergibt sich ein Sinussignal, wie in Abbildung (11) zu sehen.

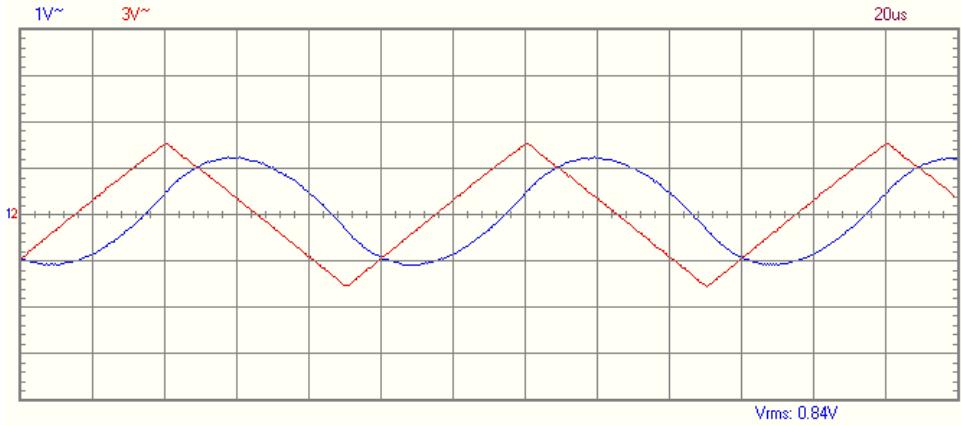


Abbildung 11: Spannungsverlauf beim Betrieb der RC-Schaltung als Integrator. In Rot dargestellt die dreiecksförmige Eingangsspannung U_E , in Blau die Ausgangsspannung U_C , abgenommen über den Kondensator.

Ähnliche Beobachtungen können wir beim Betrieb des RC-Glieds als Differentiator machen. Bei Justierung des Widerstandes ergibt sich hierbei beispielsweise aus einem eingeschalteten Dreieckssignal ein ausgehendes Rechteckssignal, siehe Abbildung (12). Geben wir durch den Funktionsgenerator ein Signal in der Form einer Gauß'schen Normalverteilung ein, so ergibt sich auch hiervon die entsprechende Ableitung, zu sehen in Abbildung (13).

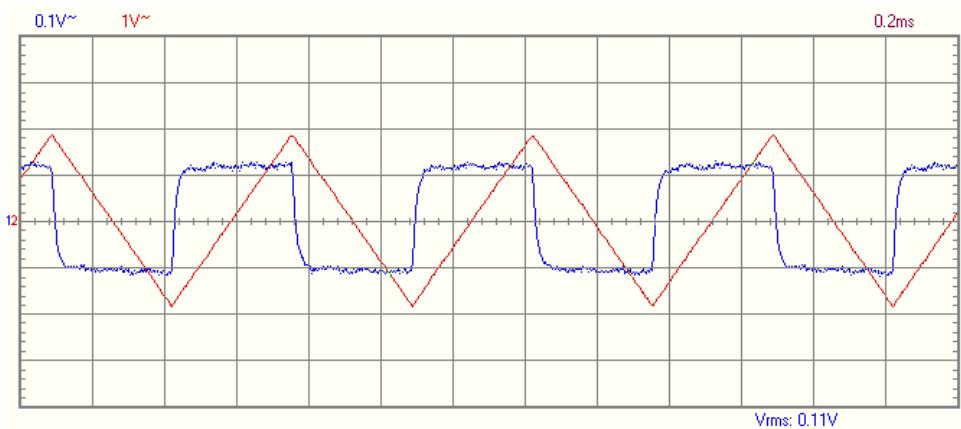


Abbildung 12: Spannungsverlauf beim Betrieb der RC-Schaltung als Differentiator. In Rot dargestellt die dreiecksförmige Eingangsspannung U_E , in Blau die Ausgangsspannung U_R , abgenommen über den Widerstand.

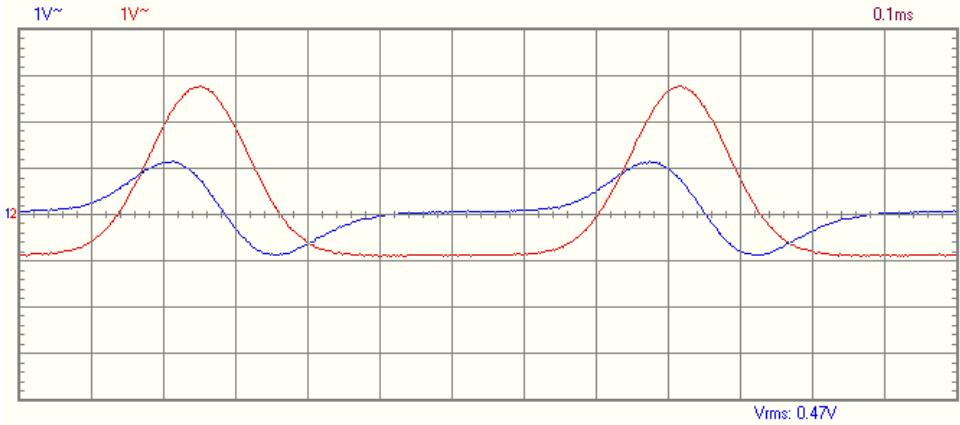


Abbildung 13: Spannungsverlauf beim Betrieb der RC-Schaltung als Differentiator. In Rot dargestellt die Eingangsspannung U_E , in Blau die Ausgangsspannung U_R , abgenommen über den Widerstand.

3.3 Frequenz- und Phasengang eines RC-Glied

Für diesen Aufgabenteil ist anzumerken, dass wir bei der Durchführung leider den Frequenzgang nicht ab 100Hz wie vorgegeben, sondern erst ab 1kHz aufgezeichnet haben. Damit ist die lineare Interpolation, welche in der Auswertung gefordert wird, nicht zielführend und wird im folgenden deshalb ausgelassen. Außerdem ist unsere abgelesene Grenzfrequenz des Tiefpassfilters jenseits von Gut und Böse.

In diesem Teil der Auswertung bestimmen wir aus dem aufgezeichneten Frequenzgängen eines Tief- und Hochpassfilters die Grenzfrequenz bestimmen. Wie in den theoretischen Grundlagen erklärt, ist die Grenzfrequenz der Filterschaltung dadurch zu erkennen, dass bei ihr die Amplitude um den Faktor $1/\sqrt{2}$ abgefallen ist. Mit der Cursor-Funktion des Oszilloskops können wir damit eine Grenzfrequenz von $(9.46 \pm 0.02)\text{kHz}$ für den Tiefpassfilter und eine Grenzfrequenz von $(3.31 \pm 0.02)\text{kHz}$ für den Hochpassfilter ablesen. Die untenstehenden Abbildungen zeigen noch einmal die Frequenzgänge des Tiefpassfilters (14) und Hochpassfilters (15), jeweils mit dem Cursor an der Grenzfrequenz.



Abbildung 14: Frequenzgang des Tiefpassfilters mit Cursor bei Grenzfrequenz

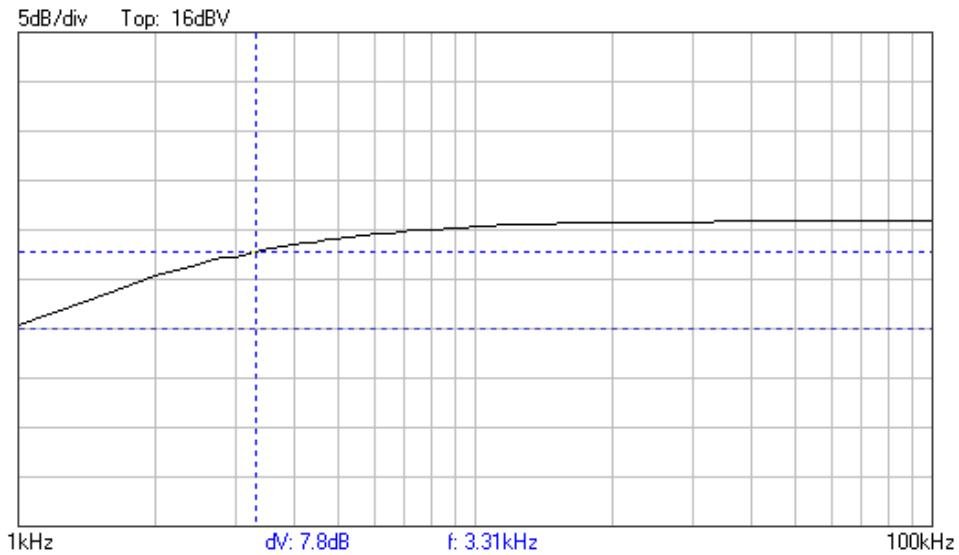


Abbildung 15: Frequenzgang des Hochpassfilters mit Cursor bei Grenzfrequenz

Neben der Aufzeichnung des Frequenzgangs haben wir für den Hochpassfilter zusätzlich den Phasengang manuell vermessen. Die Phase φ ist in Abbildung (16) über der Frequenz aufgetragen. Die Grenzfrequenz bestimmen wir nun durch Ablesen Frequenz bei einer Phase von 45° . Die Phase zeigt, abhängig von der Frequenz, einen logarithmisch abfallenden Verlauf auf. Um den Wert bei 45° interpolieren zu können fitten wir eine abfallende Exponentialfunktion der Form

$$f(x; A, \lambda, c) = A \cdot e^{-\lambda x} + c \quad (49)$$

an die Datenpunkte an. Die optimierten Werte der Parameter sind ebenfalls der Abbildung (16) zu entnehmen.

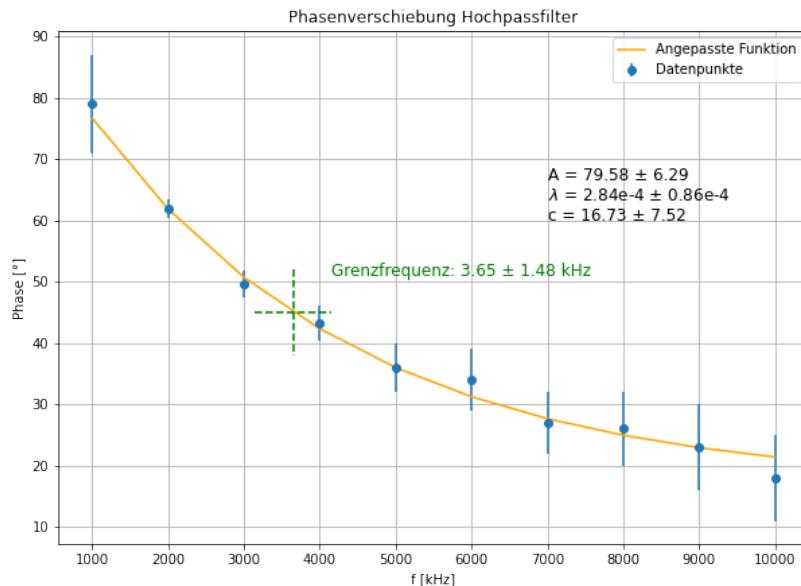


Abbildung 16: Phasengang des Hochpassfilters mit exponentiellem Fit und Grenzfrequenz bei 45° .

Durch elementares Umformen bestimmen wir die Umkehrfunktion von f , um damit die Grenzfrequenz berechnen zu können. Für diese gilt

$$f^{-1}(\varphi; A, \lambda, c) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\varphi - c}{A}\right) = f_{\text{Grenz}}. \quad (50)$$

Nach der gauß'schen Fehlerfortpflanzung gilt für der Fehler des damit berechneten Wertes

$$\Delta f_{\text{Grenz}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda A} \ln\left(\frac{\varphi - c}{A}\right) \cdot \Delta A\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} \ln\left(\frac{\varphi - c}{A}\right) \cdot \Delta \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda(\varphi - c)} \cdot \Delta c\right)^2}. \quad (51)$$

Damit können wir aus der Funktion eine Grenzfrequenz von

$$f_{\text{Grenz}} = (3.65 \pm 1.48)\text{kHz} \quad (52)$$

interpolieren. Diese ist ebenfalls in Grün in Abbildung (16) markiert. Von der zuvor vermessenen Grenzfrequenz weicht diese um etwa 2.47σ ab, was innerhalb des 3σ -Bereichs noch als eine nicht signifikante Abweichung angesehen werden kann.

Nach der Theorie gilt für die Grenzfrequenz des Hoch- bzw. Tiefpassfilter die Gleichung

$$f_G = \frac{1}{CR} \left[\times \frac{1}{2\pi} \right]. \quad (53)$$

Setzen wir für die entsprechenden Werte der Kapazität $C = 47\text{nF}$ und des Widerstands $R = 1\text{k}\Omega$ ein, so erhalten wir dazu einen Wert von

$$f_{Grenz} = (3.4 \pm 0.4)\text{kHz}. \quad (54)$$

Dieser weicht um 0.21σ vom ausgemessenen Wert aus dem ersten Teil und um 2.47σ vom interpolierten Wert ab.

3.4 Frequenzgang eines Serienschwingkreises

Für diesen Aufgabenteil betrachten wir erstmals einen Serienschwingkreis, also eine Schaltung bestehend aus Kondensator, Widerstand und Spule. Im ersten Schritt möchten wir die Induktivität der verbauten Spule berechnen, dazu ziehen wir (39) hinzu und stellen diese um nach

$$L = \frac{1}{\omega_R^2 C} \quad (55)$$

mit der Kapazität C , sowie gemessenen Resonanzfrequenz ω_R , welche wir zuvor durch den Faktor 2π noch in eine Kreisfrequenz umrechnen. In der Durchführung haben wir die Messungen für drei unterschiedliche Widerstände durchgeführt und dafür die Frequenzgänge, zu sehen in Abbildung (17) aufgezeichnet. Aus den Maxima der Frequenzgänge haben wir dann die Resonanzfrequenz abgelesen.

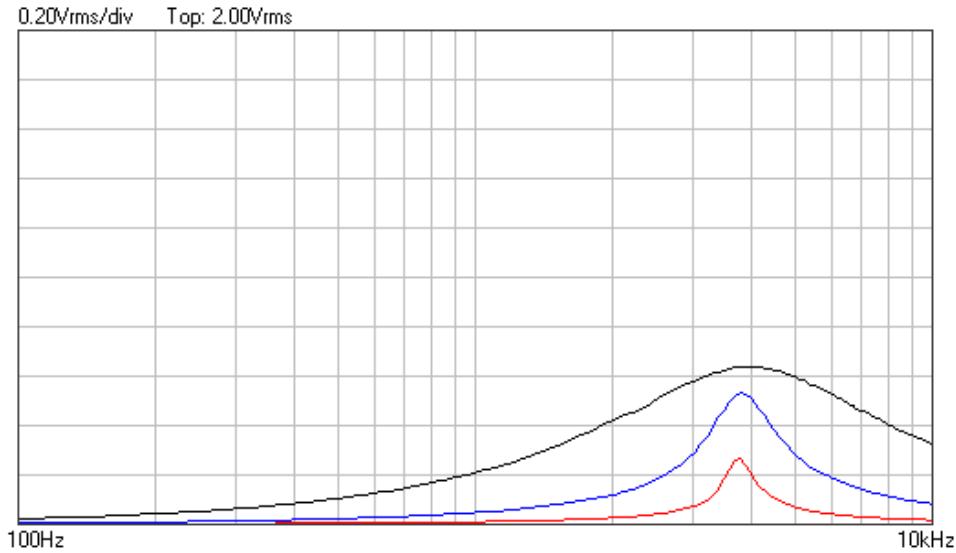


Abbildung 17: Frequenzgang des RLC-Schwingkreises für drei verschiedene Widerstände.

Für die drei Frequenzen berechnen wir jeweils eine Induktivität und nehmen davon den Mittelwert von

$$L = (3.63 \pm 0.22) \cdot 10^{-2} \text{H} \quad (56)$$

als Wert für die Induktivität der Spule.

Als Nächstes betrachten wir die Verluste, welche in der Spule durch ihren eigenen ohmschen Widerstand, magnetische Verluste des Spulenkerns, sowie den Skineffekt entstehen. Um diese Verluste zu quantifizieren, nehmen wir die Existenz eines weiteren Verlustwiderstandes R_V in der Schaltung an. (44) stellt einen Zusammenhang zwischen dem Gesamtwiderstand und der Bandbreite der RLC-Schaltung her, welchen wir entsprechend umstellen zu

$$R + R_V = \Delta\omega \cdot L. \quad (57)$$

Wie im Theorieteil beschrieben stellt das RLC-Glied im Resonanzfall bei ω_R einen Kurzschluss dar, da die Impedanz des LC-Gliedes verschwindet. Für das Verhältnis von Ein- und Ausgangsspannung, letztere abgenommen am Widerstand R , ergibt sich somit der einfache Zusammenhang

$$U_A = \frac{R}{R + R_V} U_E \quad (58)$$

und somit durch

$$R + R_V = R \frac{U_E}{U_A} \quad (59)$$

eine weitere Formel, um den Gesamtwiderstand zu berechnen. Die folgende Tabelle (2) zeigt nun die in den drei Messgängen aufgezeichneten Werte der Ein- und Ausgangsspannung U_E und U_A , der Resonanzfrequenz ω_R , sowie der Bandbreite $\Delta\omega$. Als Induktivität verwenden wir den zuvor berechneten Mittelwert. Weiter enthält die Tabelle die berechneten Werte für $R + R_V$, den verwendeten Widerstand, sowie deren Differenz, also die Verlustleistung R_V .

Tabelle 2: Messwerte und Resultate für die Berechnung des Verlustwiderstandes.

$R [\Omega]$	1000 ± 50	220 ± 11	47.0 ± 2.4
$U_E [V]$	0.661 ± 0.001	0.650 ± 0.001	0.627 ± 0.001
$U_A [V]$	0.640 ± 0.020	0.530 ± 0.020	0.270 ± 0.020
$\Delta\omega [\frac{1}{s} \cdot 10^3]$	30.91 ± 0.19	8.11 ± 0.19	3.52 ± 0.19
Aus Bandbreite	$R + R_V [\Omega]$	1123 ± 650	294 ± 171
	$R_V [\Omega]$	123 ± 652	74 ± 171
Aus Amplituden	$R + R_V [\Omega]$	1033 ± 61	270 ± 17
	$R_V [\Omega]$	33 ± 79	49.811 ± 21
			62.144 ± 11

Ich habe mir herausgenommen, die Aufgaben etwas umzusortieren.

3.5 Bestimmung der Dämpfungskonstanten eines freien, gedämpften Schwingkreises

Anstatt eines kontinuierlichen Signals geben wir nun mit dem Funktionsgenerator ein Rechteckssignal in den Serienschwingkreis ein, um wiederholt einen auslaufenden Schwingungsprozess anzustoßen (vgl. Abbildung (18)).

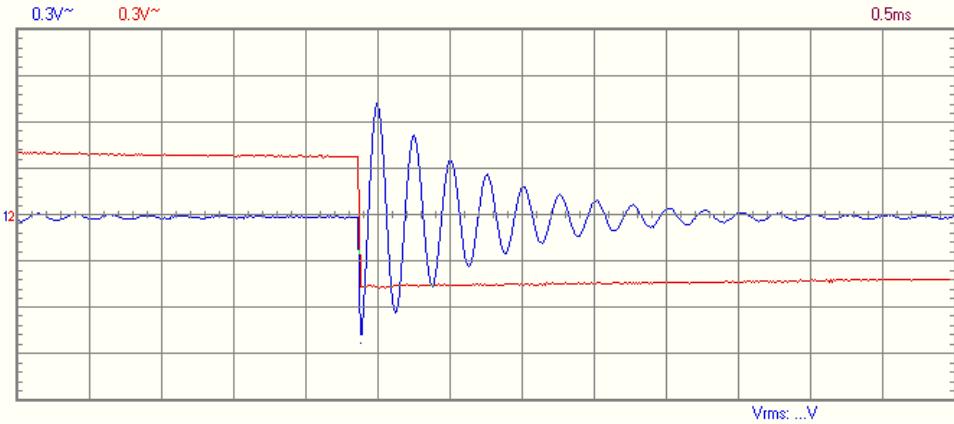


Abbildung 18: Gedämpfte Schwingung

Für je zwei benachbarte Amplituden der Schwingung berechnen wir nun das logarithmische Dekrement nach Formel (35).

Für Periodendauer einer Schwingung haben wir einen Wert von $T = 0.26 \pm 0.02\text{ms}$ gemessen. Diesen verwenden wir nun, um über den zweiten Teil der (35) die Dämpfungskonstante δ beziehungsweise den Gesamtwiderstand nach

$$\Lambda = \delta T = \frac{R}{2L}T \iff R = \frac{2\Lambda L}{T} \quad (60)$$

mit Fehler

$$\Delta R = R \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} \quad (61)$$

Tabelle 3: Logarithmisches Dekrement für je zwei benachbarten Amplituden der gedämpften Schwingung.

A_n [V]	A_{n+1} [V]	Λ
0.74 ± 0.02	0.50 ± 0.02	0.39 ± 0.05
0.50 ± 0.02	0.36 ± 0.02	0.33 ± 0.07
0.36 ± 0.02	0.26 ± 0.02	0.33 ± 0.10
0.26 ± 0.02	0.18 ± 0.02	0.37 ± 0.14
Mittelwert		0.35 ± 0.05

zu berechnen. Unter anderem ziehen wir die berechnete Induktivität L aus dem vorherigen Abschnitt hinzu. Damit erhalten wir einen Wert von

$$R = (99 \pm 60) \Omega. \quad (62)$$

Bei diesem handelt es sich wieder um den Gesamtwiderstand der RLC-Schaltung, also mit dem einberechneten Verlusten R_V durch die Spule. Vergleichen wir den hier berechneten Wert mit dem Wert des vorherigen Abschnitts ($(128 \pm 75) \Omega$), verzeichnen wir eine Abweichung von etwa 0.31σ .

3.6 Resonanzüberhöhung

Wir betrachten nun die Frequenzgänge der einzelnen Bauteile im RLC-Serienschwingkreis genauer. Diese sind gemeinsam in Abbildung (19) geplottet: In Rot der Frequenzgang des Kondensators, in Blau der Frequenzgang der Spule und in Schwarz der Frequenzgang des Widerstandes. Deutlich zu erkennen ist im Plot die Resonanzüberhöhung in den Frequenzgängen des Kondensators und der Spule.

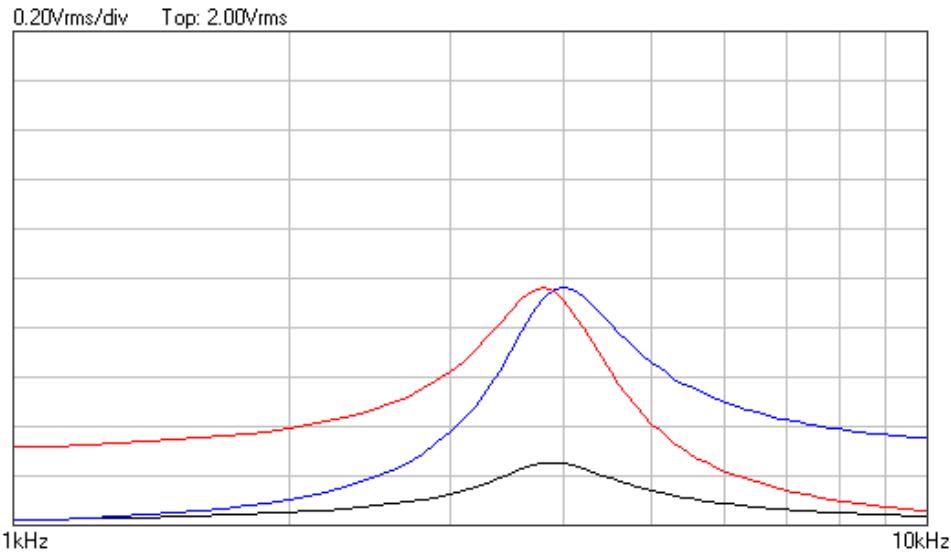


Abbildung 19: Frequenzgänge der einzelnen Bauteile Kondensator (rot), Spule (blau) und Widerstand (schwarz) im RLC-Serienschwingkreis.

Wir möchten nun unsere vermessenen Resonanzfrequenzen mit den entsprechenden theoretischen Werten vergleichen. Dazu berechnen wir zunächst die Dämpfungskonstante nach

der Formel aus dem vorherigen Abschnitt zu

$$\delta = (3028 \pm 1758) \frac{1}{\text{s}}. \quad (63)$$

Weiter berechnen wir die Resonanzfrequenz des Widerstandes nach (39) zu

$$\omega_R = (3910 \pm 20) \frac{1}{\text{s}}. \quad (64)$$

Die Resonanzfrequenz des Kondensators berechnen wir mit der Formel (45). Für den Fehler des Ergebnisses gilt hierbei

$$\Delta\omega_C = \sqrt{\left(\frac{\omega_R \Delta\omega_R}{\omega_C}\right)^2 + \left(\frac{\delta \Delta\delta}{\omega_C}\right)^2}. \quad (65)$$

Die Formel für die Resonanzfrequenz der Spule (46) ist dazu sehr ähnlich. Ihr Fehler berechnet sich nach der gleichen Formel wie beim Kondensator, wir ersetzen lediglich ω_C durch ω_L . Tabelle (4) enthält nun die berechneten Werte, die gemessenen Werte, sowie die berechnete Abweichung.

Tabelle 4: Vergleich der gemessenen und theoretisch vorhergesagten Werte der Resonanzfrequenzen der Bauteile im RLC-Serienschwingkreis.

	$\omega_R [\frac{1}{\text{s}}]$	$\omega_C [\frac{1}{\text{s}}]$	$\omega_L [\frac{1}{\text{s}}]$
Gemessener Wert	3910 ± 20	3800 ± 20	4040 ± 20
Theoretischer Wert	3851 ± 1131	3791 ± 1149	3911 ± 1114
Abweichung	0.06σ	0.009σ	0.12σ

3.7 Parallelschwingkreis-Bandsperre

Bevor wir zum anwendungsbezogenen Teil des Versuchs fortfahren, betrachten wir abschließend einen Parallelschwingkreis. Wir haben die Ausgangsspannung über den Widerstand abgegriffen erneut den Frequenzgang, zu sehen in Abbildung (20), aufgezeichnet.

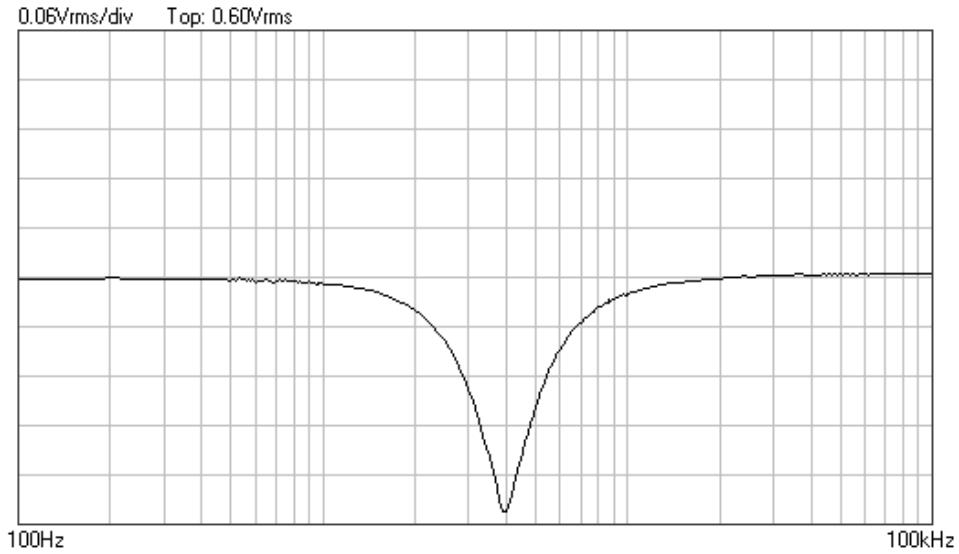


Abbildung 20: Frequenzgang des RLC-Parallelschwingkreis.

Aus dem Grafen können wir ablesen, dass die Bandsperre bei einer Resonanzfrequenz von $(3.94 \pm 0.02)\text{kHz}$ greift. Die Ausgangsamplitude sinkt an dieser Stelle also auf 0V ab. Die Theorie sagt voraus, dass für die Resonanzfrequenz gilt $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Wir setzen die Werte für Kapazität und Induktivität ein und erhalten damit einen Wert von

$$f_0 = (3851 \pm 1131)\text{Hz}. \quad (66)$$

Dieser weicht um 0.078σ von dem von uns gemessenen Wert ab.

3.8 Signalformung

In diesem Aufgabenteil betrachten wir nun die zuvor ausgiebig untersuchten Schaltungen im realitätsnahen Einsatz als Filter. Dafür generieren wir mit dem Frequenzgenerator ein Signal, welches sich aus drei überlagerten Sinussignalen der Frequenzen 100Hz, 4kHz und 8kHz, sowie weiteren weniger starken Störsignalen zusammensetzt.

Ohne Filter

Das zunächst ungefilterte Signal, sowie dessen Spektrum sind in Abbildung (21) zu sehen. Im Spektrum sind bereits jetzt ziemlich eindeutig die drei starken überlagerten Signalanteil bei den oben genannten Frequenzen zu erkennen. Im Oszilloskopbild liegen Aus- und Eingangsspannung ohne Filter genau übereinander, deshalb ist die Ausgabe in Grün dargestellt und es sind keine zwei Signale zu sehen.

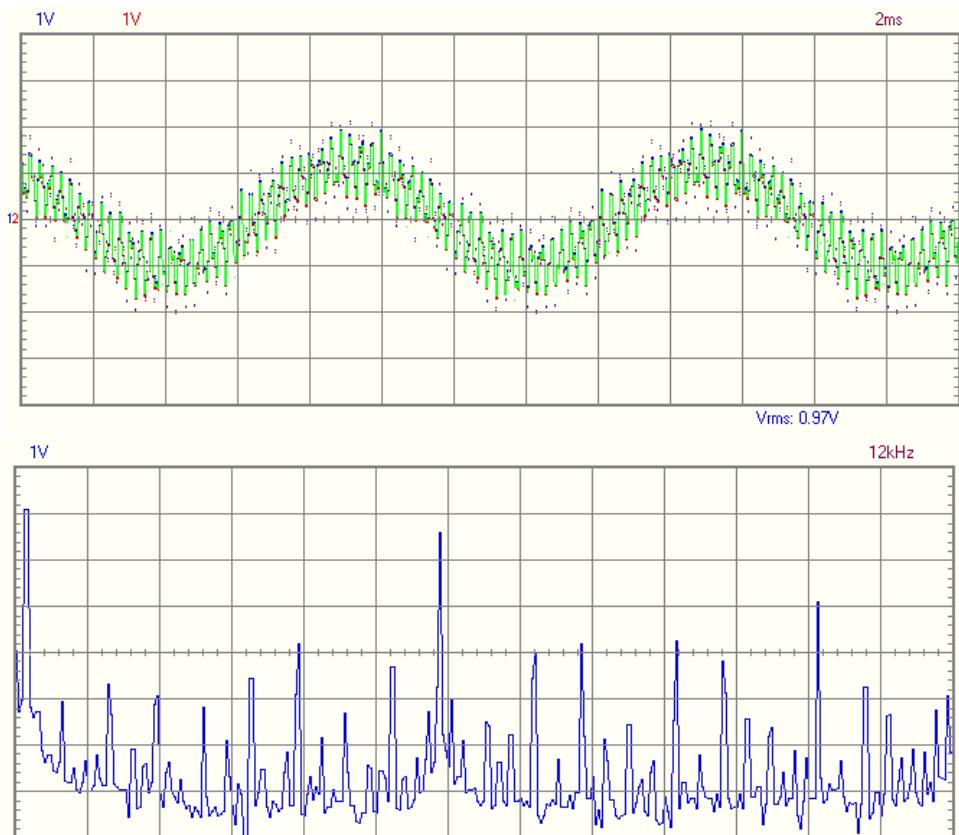


Abbildung 21: Ausgangsspannung und Frequenzspektrum des überlagerten Signals ohne Filter.

Ohne Filterung liegen die Amplituden der Signalanteile bei etwa

$$\begin{aligned} 100\text{Hz: } & -3.06 \pm 0.02 \text{ dBV}, \\ 4\text{kHz: } & -8.06 \pm 0.02 \text{ dBV}, \\ 8\text{kHz: } & -22.13 \pm 0.02 \text{ dBV}. \end{aligned}$$

Wobei die Einheit dBV die gemessene Spannung in Bezug auf den Referenzwert von 1V angibt.

Hochpassfilter

Als Erstes betrachten wir das Signal gefiltert durch einen Hochpassfilter mit einem 220Ω Widerstand und einem 470nF Kondensator. Im Frequenzspektrum in Abbildung (22) ist zu erkennen, dass der 100Hz-Signalanteil stark gedämpft wurde, während die anderen beiden, höherfrequente Signalanteile weitestgehend unverändert bleiben. Auch in der Signalformung des Ausgangssignals (blau) ist zu erkennen, dass die überliegende niedrigfrequente Sinusform stark abgeschwächt ist.

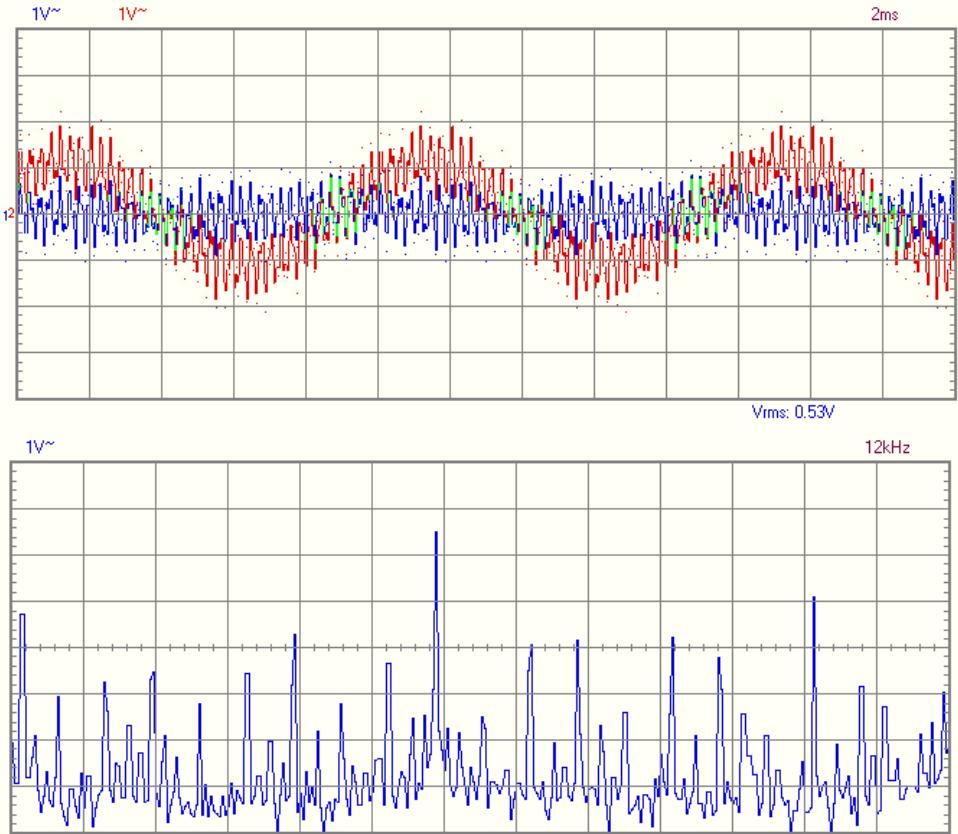


Abbildung 22: Ein- (rot) und Ausgangsspannung (blau) und Frequenzspektrum des überlagerten Signals mit Hochpassfilter.

Um bei den verschiedenen Filterschaltungen die Dämpfungen berechnen und vergleichen zu können betrachten wir das Verhältnis zwischen der ungefilterten und der gefilterten Amplitude. Tabelle (5) fasst die Werte für den Hochpassfilter zusammen.

Tabelle 5: Dämpfung der einzelnen Signalanteile beim *RC*-Hochpassfilter.

Signalanteil	Ungefilterte Amp. [dBV]	Gefilterte Amp. [dBV]	Dämpfung
100 Hz	-3.06 ± 0.02	-26.81 ± 0.02	0.1141 ± 0.0008
4 kHz	-8.06 ± 0.02	-8.69 ± 0.02	0.928 ± 0.004
8 kHz	-22.13 ± 0.02	-22.44 ± 0.02	0.9862 ± 0.0013

Tiefpassfilter

Vertauschen wir Widerstand und Kondensator an der vorherigen Schaltung, so erhalten wir einen Tiefpassfilter. Wie zu erwarten, können wir im Spektrum (vgl. Abbildung (23)) beobachten, dass nun der Signalanteil der niedrigen 100Hz-Frequenz den Filter unverändert passieren kann. Sehr stark gedämpft wird nun das 8kHz und auch das 4kHz-Signal erfährt eine leichte Dämpfung. Es ist außerdem zu sehen, dass der gesamte Untergrund des Spektrums gedämpft ist. Im Oszilloskopbild ist zu sehen, dass das Ausgangssignal (blau) die 100Hz-Schwingung unverändert beibehält, während die Schwingungen darum nur noch sehr klein sind.

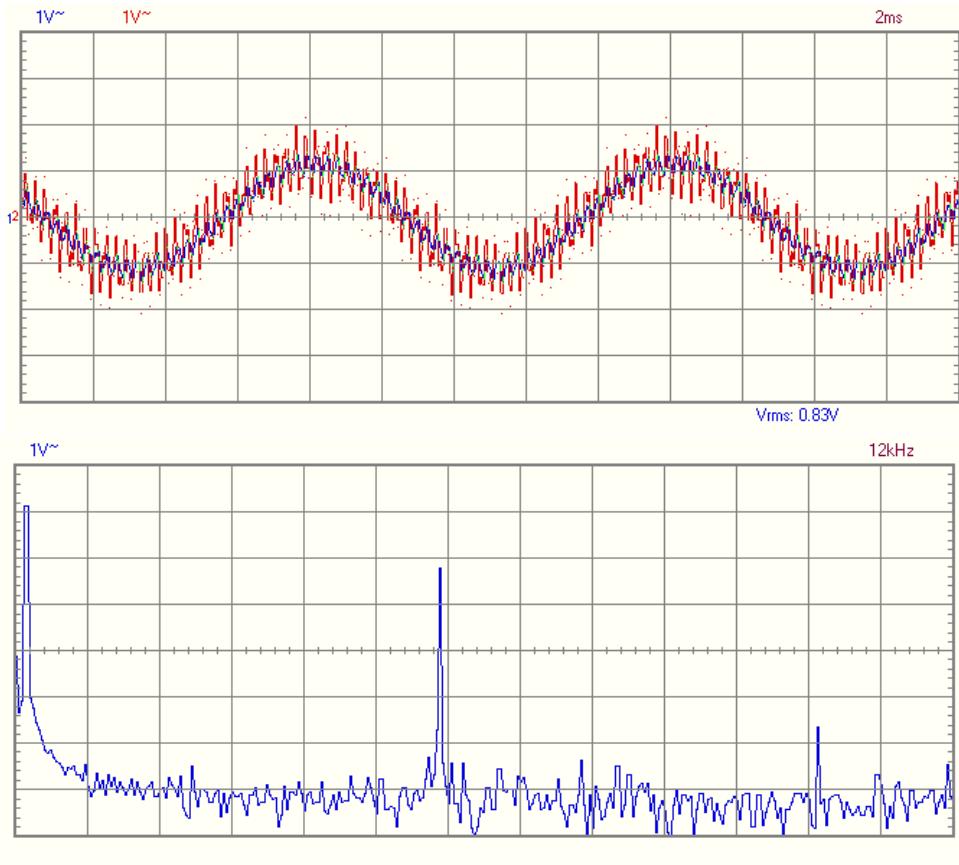


Abbildung 23: Ein- (rot) und Ausgangsspannung (blau) und Frequenzspektrum des überlagerten Signals mit Tiefpassfilter.

Auch hier betrachten wir noch einmal die Dämpfung der einzelnen Signalanteile, zusammengefasst in Tabelle (6).

Tabelle 6: Dämpfung der einzelnen Signalanteile beim *RC*-Tiefpassfilter.

Signalanteil	Ungefilterte Amp. [dBV]	Gefilterte Amp. [dBV]	Dämpfung
100 Hz	-3.06 ± 0.02	-2.75 ± 0.02	1.113 ± 0.011
4 kHz	-8.06 ± 0.02	-15.88 ± 0.02	0.5076 ± 0.0015
8 kHz	-22.13 ± 0.02	-51.19 ± 0.02	0.4323 ± 0.0005

LC-Tiefpassfilter

→ Wir verwenden hier nun einen 47nF Kondensator.

Möchten wir das 8kHz-Signal weitestgehend unabhängig vom 4kHz-Signal dämpfen, benötigen wir einen Filter mit einem stärkeren Dämpfungsverlauf. Tauschen wir den Widerstand durch eine Spule aus, so erhalten wir einen *LC*-Tiefpassfilter, mit welchem genau dies erreicht werden kann. Dies spiegelt sich auch sehr deutlich im Spektrum (vgl. Abbildung (24)) wider. Der 8kHz-Anteil verschwindet nun quasi komplett im Untergrund, während das 4kHz sehr deutlich hervorsticht. Es zeigt sich nun sogar eine Resonanzüberhöhung. Der 100Hz-Signalanteil ist jedoch weiterhin präsent, wie es auch bei einem Tiefpassfilter zu erwarten ist. Die Beobachtungen im Spektrum spiegeln sich auch, wie zuvor, sehr gut in der Signalformung des Ausgangssignals wider.

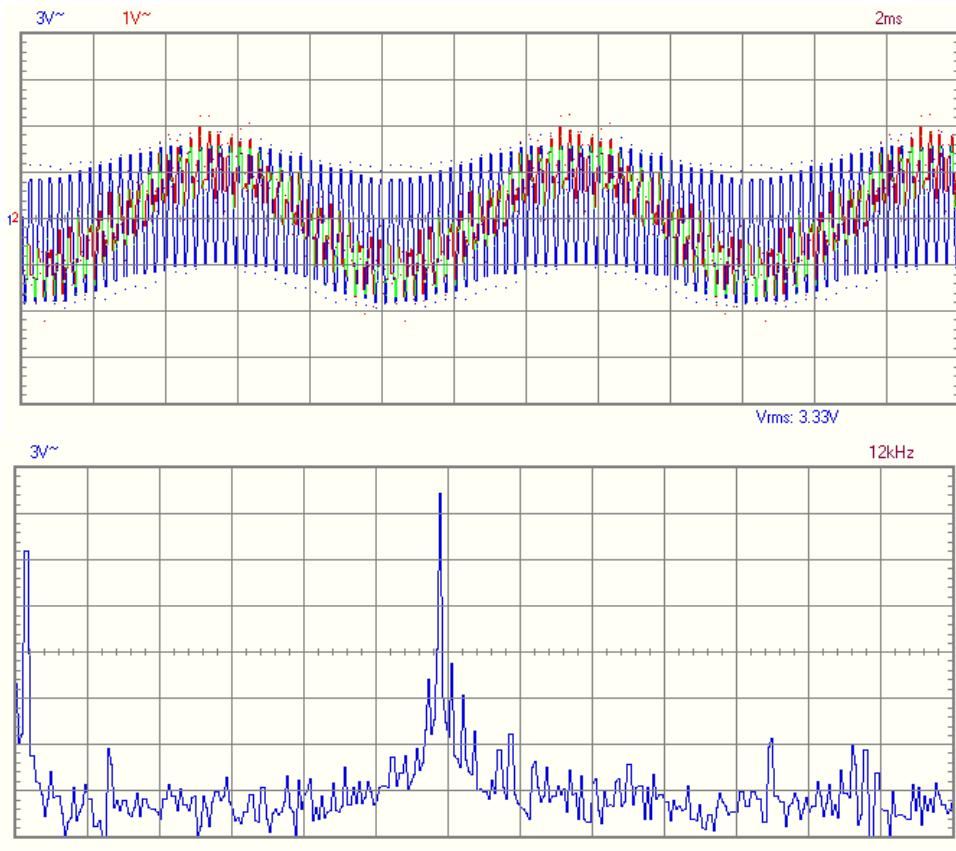


Abbildung 24: Ein- (rot) und Ausgangsspannung (blau) und Frequenzspektrum des überlagerten Signals mit *LC*-Tiefpassfilter.

Bisher haben wir beobachtet, dass wir es mit den verwendeten Filterschaltungen nicht schaffen, das 4kHz-Signal zu isolieren und nur die Signalanteile darum zu dämpfen. Bei der Verwendung eines Hoch- bzw. Tiefpassfilters ist dies auch klar, da diese ab ihrer Grenzfrequenz greifen und sich dann auf alle niedrigeren bzw. höheren Frequenzen auswirken. Um nur den Bereich um den 4kHz-Bereich durchzulassen, benötigen wir also einen Bandpassfilter, welchen wir uns in den folgenden Teilen anschauen.

Bandpassfilter

Zum Test des Bandpassfilters haben wir gleich mehrere Konfigurationen der RLC-Schaltung untersucht. Hierbei haben wir das Ausgangssignal je einmal an allen Bauteilen abgenommen und dies jeweils mit einem verbauten $1\text{k}\Omega$ - und einem 47Ω -Widerstand. Hieraus nehmen wir sechs verschiedene Resultate, also zwölf Plots mit. Um die Auswertung dieser abzukürzen, möchten wir uns hier auf das (subjektiv) beste Resultat beschränken.

Abbildung (25) zeigt das Signal bei Filterung durch einen RLC-Bandpassfilter mit 47Ω -Widerstand und Abnahme der Ausgangsspannung an selbigem. Wir können im Spektrum beobachten, dass der 8kHz -Signalanteil quasi komplett im Untergrund verschwindet. Auch der 100Hz -Anteil sticht nur noch leicht aus dem Untergrund hervor. Mittig ist nun, wie gewollt isoliert, der 4kHz -Anteil deutlich sichtbar. Auch die Signalform des Ausgangssignals zeigt, dass es sich quasi nur noch um eine einfache Sinusform ohne starke Überlagerungen handelt.

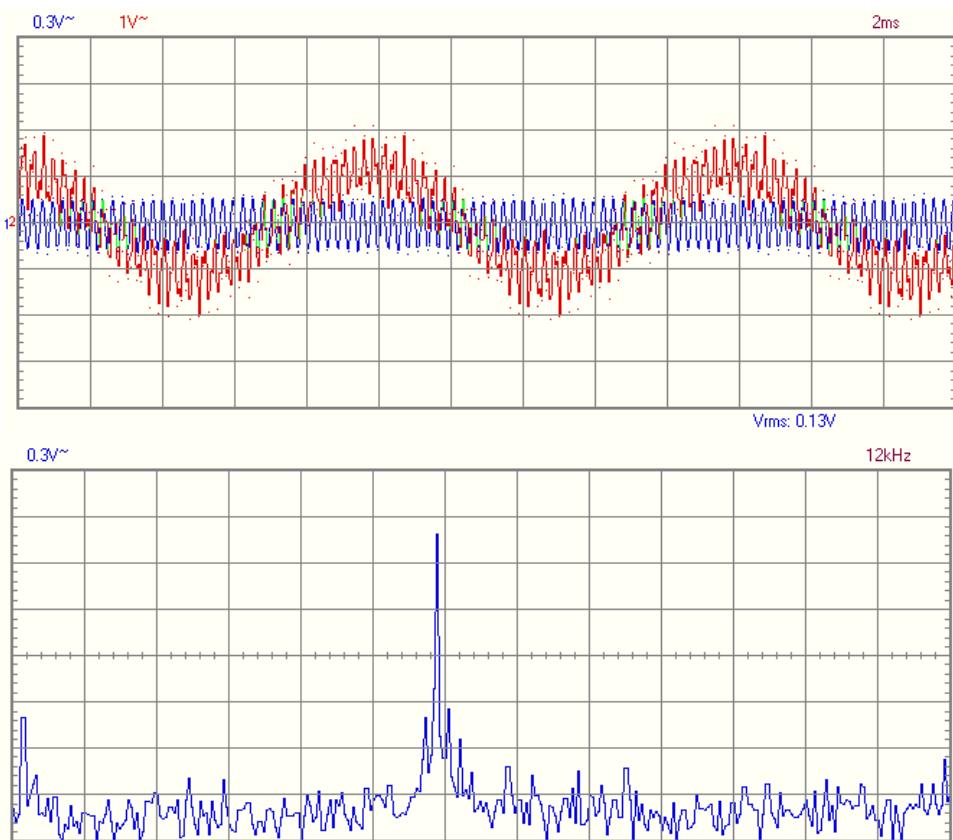


Abbildung 25: Ein- (rot) und Ausgangsspannung (blau) und Frequenzspektrum des überlagerten Signals mit RLC -Bandpassfilter mit $47\text{k}\Omega$ Widerstand, bei Spannungsabnahme über den Widerstand.

Die Amplitude des 4kHz-Signalanteils liegt in dieser Konfiguration bei einem Wert von -18.50 ± 0.02 dBV. Dies entspricht im Vergleich zum ungefilterten Signal einer Dämpfung von

$$\frac{-8.06\text{dBV}}{-18.50\text{dBV}} = 0.4357 \pm 0.0012. \quad (67)$$

Im Vergleich dazu wird die Amplitude des 100Hz-Signals in dieser Filterschaltung auf -57.56 ± 0.02 dBV gedämpft, was einer Dämpfung um

$$\frac{-3.06\text{dBV}}{-57.56\text{dBV}} = 0.0532 \pm 0.0004, \quad (68)$$

entspricht. Also einer deutlich stärkeren, als für das 4kHz-Signal.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Werden die elementaren elektronischen Bauteile Widerstand, Kondensator und Spule gemeinsam in einem Schaltkreis verbunden, weisen diese für unterschiedliche Konfigurationen besondere Verhaltensweisen im Zusammenhang mit Wechselspannung auf. RC-Glieder, also Schaltungen aus einem Widerstand und einer Spule können beispielsweise als Hoch- oder Tiefpassfilter verwendet werden, während das Hinzuschalten einer Spule einen Schwingkreis erzeugt. Derartige Schaltungen waren das Zentralversuchsstobjekt in Versuch 241.

Im ersten Versuchsteil haben wir ein RC-Glied betrachtet. Hierzu haben wir für verschiedene Werte von Kapazität und Widerstand haben wir die Zeitkonstante τ zunächst aus unseren Beobachtungen am Oszilloskop bestimmt und zum Vergleich den zugehörigen theoretisch vorausgesagten Wert berechnet. Die Werte sind in der untenstehenden Tabelle (7) noch einmal zusammengefasst.

Tabelle 7: Messwerte und berechnete Größen der Zeitkonstante τ .

C [nF]	R [k Ω]	τ_{theo} [s]	τ_{exp} [s]	Abw.
470	1.00	$(47 \pm 6) \times 10^{-5}$	$(43 \pm 15) \times 10^{-5}$	0.25σ
4.70	10.00	$(4.7 \pm 0.6) \times 10^{-5}$	$(6.49 \pm 0.15) \times 10^{-5}$	3.29σ
47.00	1.00	$(4.7 \pm 0.6) \times 10^{-5}$	$(4.91 \pm 0.15) \times 10^{-5}$	0.38σ

Es ist zu sehen, dass in zwei von drei Fällen der gemessene Wert sehr gut mit dem theoretisch vorhergesagten Wert übereinstimmt. Die sehr starke Abweichung bei der Konfiguration mit $C = 4.7\text{nF}$, $R = 10\text{k}\Omega$ fällt deutlich heraus und ist vermutlich auf einen groben Messfehler oder einen Fehler in den verwendeten Bauteilen zurückzuführen.

Im zweiten Versuchsteil haben wir qualitativ die Wirkung eines RC-Gliedes als Differentiator und Integrator untersucht. Je nachdem, ob wir die Ausgangsspannung am Kondensator oder am Widerstand abgenommen haben, hat diese in etwa die Form des differenzierten bzw. integrierten Eingangssignals dargestellt. Durch Manipulation des Widerstandes mithilfe eines Potentiometers konnten wir bestätigen, dass dieser Wert eine maßgebliche Auswirkung auf die Annäherung des Ausgangssignals an die entsprechende Form hat.

RC-Schaltungen wirken für eingehende Signale wie ein Hoch- oder Tiefpassfilter, je nachdem ob die Ausgangsspannung über den Kondensator oder die Spule abgegriffen wird. Den Frequenz- und Phasengang dieser Filterschaltungen haben wir im dritten Versuchsteil untersucht. Mithilfe der Oszilloskopsoftware haben wir die Frequenzgänge je für eine Tiefpass- und eine Hochpassfilterschaltung aufgezeichnet. Aus den Frequenzgängen haben wir die Grenzfrequenz, also die Frequenz ab welcher die Wirkung des Filters greift bestimmt. Hierbei haben wir einen Wert von

$$f_{G,TP} = (9.46 \pm 0.02)\text{kHz}$$

für den Tiefpassfilter und

$$f_{G,HP} = (3.31 \pm 0.02)\text{kHz}$$

für den Hochpassfilter gemessen. Für den Hochpassfilter haben wir uns zusätzlich dazu noch den Phasengang angesehen. Da dieser nicht automatisch von der Oszilloskopsoftware aufgezeichnet werden konnte, haben wir diesen manuell aus der zeitlichen Verschiebung

von Ein- und Ausgangssignal gemessen. Die Messung haben wir für verschiedene Frequenzen durchgeführt und die resultierenden Phasen darüber in ein Diagramm aufgetragen. Durch eine Interpolation der gemessenen Werte haben wir dann die Frequenz bei einer Phase von 45° und damit einen zweiten Wert für die Grenzfrequenz bestimmt. Dieser beläuft sich auf

$$f_{G,HP,\varphi} = (3.65 \pm 1.48)\text{Hz}$$

und weicht damit um etwa 2.47σ vom zuvor bestimmten Wert ab. Aus der Vorhersage der Theorie haben wir für die Grenzfrequenz einen Wert von

$$f_{G,theo} = (3.4 \pm 0.4)\text{kHz}$$

berechnet. Mit einer Abweichung von nur etwa 0.21σ liegt dieser Wert sehr nah an dem Wert, welchen wir aus dem Frequenzgang bestimmt haben. Die Abweichung zum aus dem Phasengang interpolierten Wert ist mit etwa 2.47σ wieder sehr hoch. Die starke Abweichung des interpolierten Wertes von den zwei anderen lässt sich vermutlich einerseits auf Messungenauigkeiten bei der Vermessung der Phasenverschiebung, sowie den Fehler aus der Interpolation zurückführen.

Aufgrund des in der Auswertung genannten Fehlers bei der Aufzeichnung der Frequenzgänge lohnt sich ein Vergleich mit der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters nicht.

Im vierten Aufgabenteil haben wir durch Hinzuschalten einer Spule erstmals ein RLC-Glied betrachtet. Für eine eingehende Wechselspannung wirkt ein RLC-Glied wie ein Bandpassfilter, also eine Kombination aus einem Hoch- und einem Tiefpassfilter. Für drei unterschiedliche Werte des Widerstandes haben wir Ein- und Ausgangsamplitude, sowie die Resonanzfrequenz und die Bandbreite der Filterschaltung gemessen. Aus Resonanzfrequenz haben wir dann zusammen mit der Kapazität des verbauten Kondensators die Induktivität der Spule zu

$$L = (3.63 \pm 0.22) \cdot 10^{-2}\text{H}$$

bestimmt. Daraufhin haben wir die durch die Spule verursachten Verluste in der RLC-Schaltung untersucht. Um diese zu quantifizieren haben wir die Existenz eines zusätzlichen Verlustwiderstandes R_V angenommen, mit welchem sich der Gesamtwiderstand der Schaltung auf $R + R_V$ beläuft. Den Gesamtwiderstand haben wir dann auf zwei verschiedenen Wegen, über die Bandbreite und die Induktivität, sowie über das Verhältnis der von Ein- und Ausgangsspannung bestimmt. In Tabelle (8) sind die Resultate der beiden Rechenwege noch einmal zusammengefasst dargestellt.

Tabelle 8: Resultate und Abweichungen für die Berechnung des Verlustwiderstandes.

$R [\Omega]$		1000 ± 50	220 ± 11	47.0 ± 2.4
Aus Bandbreite	$R + R_V [\Omega]$	1123 ± 650	294 ± 171	128 ± 75
	$R_V [\Omega]$	123 ± 652	74 ± 171	80 ± 75
Aus Amplituden	$R + R_V [\Omega]$	1033 ± 61	270 ± 17	109 ± 10
	$R_V [\Omega]$	33 ± 79	49.811 ± 21	62.144 ± 11
Abweichung		0.792σ	0.838σ	1.296σ

Die Abweichungen zwischen den Resultaten der beiden Rechenwege sind mit Größen um 1σ relativ gering und vermutlich hauptsächlich auf Messungenauigkeiten zurückzuführen. Dass der Verlustwiderstand der Spule über die verschiedenen Widerstandswerte nicht konstant ist, hängt damit zusammen, dass dieser frequenzabhängig ist. Wie auch in der Auswertung dieser Aufgabe zu sehen, ergeben sich für die verschiedenen Widerstände ganz verschiedene Frequenzgänge der Schaltung.

Weiter mit dem Serienschwingkreis haben wir im nächsten Schritt die Frequenzgänge aller drei Bauteile untersucht. Eine Besonderheit bei Betrachtung der Frequenzgänge von Kondensator und Spule ist, dass es bei diesen zu einer sogenannten Resonanzüberhöhung kommt. Dabei steigt bei der jeweiligen Resonanzüberhöhung der Bauteile der Wert der Ausgangsamplitude über den Wert der Eingangamplitude an. Dies konnten wir sehr gut an den aufgezeichneten Frequenzgängen beobachten. Aus diesen haben wir dann für alle drei Bauteile die jeweilige Resonanzfrequenz abgelesen. Um diese mit der theoretischen Voraussage zu vergleichen haben wir zunächst die Dämpfungskonstante des Schwingkreises auf

$$\delta = (3028 \pm 1758) \frac{1}{s}$$

bestimmt. Damit konnten wir die Resonanzfrequenz des Widerstandes, und mithilfe dieser wiederum die Resonanzfrequenzen von Kondensator und Spule berechnen. Die Werte sind zum Vergleich in Tabelle (9) zusammengefasst.

Tabelle 9: Vergleich der gemessenen und theoretisch vorhergesagten Werte der Resonanzfrequenzen der Bauteile im RLC-Serienschwingkreis.

	$\omega_R [\frac{1}{s}]$	$\omega_C [\frac{1}{s}]$	$\omega_L [\frac{1}{s}]$
Gemessener Wert	3910 ± 20	3800 ± 20	4040 ± 20
Theoretischer Wert	3851 ± 1131	3791 ± 1149	3911 ± 1114
Abweichung	0.06σ	0.009σ	0.12σ

Die Fehler der theoretisch Werte sind sehr groß, was ein Grund für die sehr geringe σ -Abweichung zwischen diesen und den gemessenen Werten ist. Andererseits fällt auch bei Betrachtung der absoluten Unterschiede auf, dass die Theorie sehr nahe an der Praxis ist.

Bevor wir zum mehr praxisorientierten Teil fortgefahrene sind, haben wir noch einmal kurz einen Parallelschwingkreis betrachtet. Auch für diesen haben wir einen Frequenzgang aufgezeichnet, in welchem sich sehr gut das Einsetzen der Bandsperre bei der Resonanzfrequenz beobachten ließ. Aus dem Grafen haben wir eine Resonanzfrequenz von

$$f_{0,exp} = (3.94 \pm 0.02)\text{kHz}$$

abgelesen. Die Theorie sagt für die verwendete Konfiguration eine Resonanzfrequenz von

$$f_{0,theo} = (3.85 \pm 1.14)\text{kHz}$$

voraus. Diese weicht um gerade mal 0.078σ vom gemessenen Wert ab. Auch hier ist wieder ein großer Fehler im theoretischen Wert für die außergewöhnlich geringe σ -Abweichung verantwortlich. Allerdings zeigt ein direkter Vergleich der Werte ebenso eine sehr gute Annäherung.

In Aufgabe 8 haben wir uns dann erstmalig mit einer tatsächlichen praktischen Anwendung der RC- und RLC-Glieder auseinandergesetzt. Mit dem Funktionsgenerator haben wir ein Sinussignal aus mehreren überlagerten verschiedenen Frequenzen generiert. Dessen Spektrum sah zunächst wie in Abbildung (26) zu sehen aus. Die primären Anteile waren ein 100Hz-, ein 4kHz- und ein 8kHz-Signal, welche auch leicht im ungefilterten Spektrum zu sehen sind.

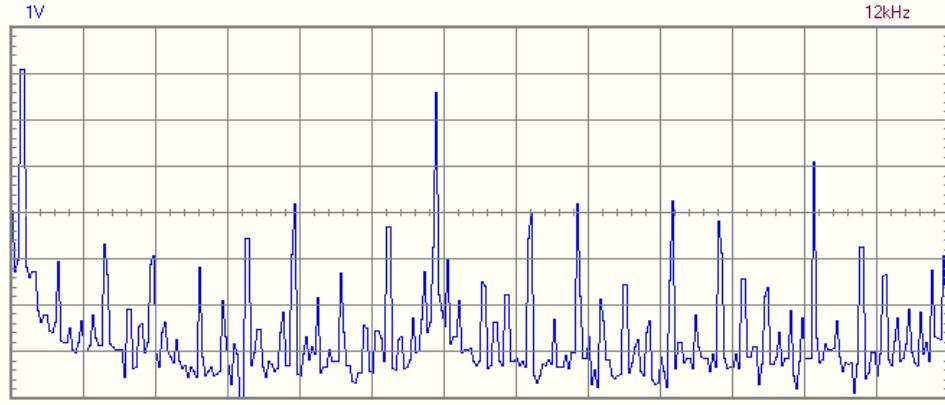


Abbildung 26: Frequenzspektrum des überlagerten Signals ohne Filter.

Mit dem Ziel, den mittig zu sehenden Anteil bei in etwa 4kHz zu isolieren und alle umliegenden Frequenzen weitestgehend zu dämpfen haben wir das Signal durch verschiedene Schaltungen gefiltert. Dazu gehörten RC-Hoch- und Tiefpassfilter, ein LC-Tiefpassfilter, sowie verschiedene Konfigurationen des RLC-Bandpassfilters. Die beste Herausstellung des 4kHz-Anteils, zu sehen in Abbildung (27), konnten wir mit einem RLC-Bandpassfilter mit einem $47\text{k}\Omega$ Widerstand erzielen. Die Ausgangsspannung haben wir hier am Widerstand abgenommen.

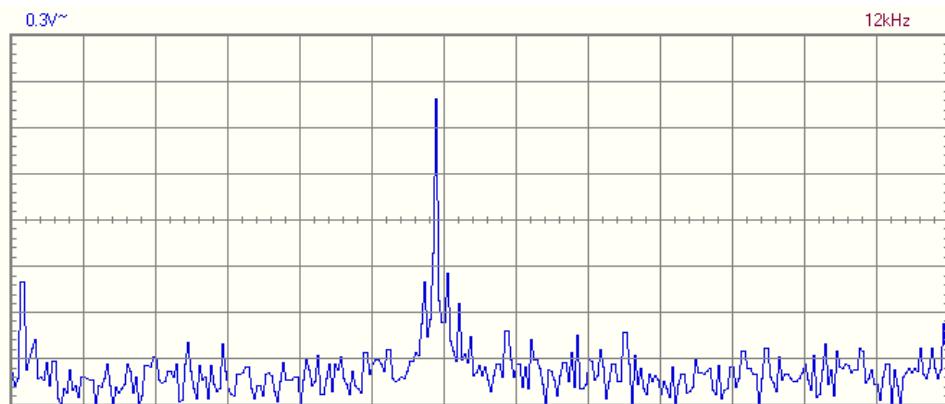


Abbildung 27: Frequenzspektrum des überlagerten Signals mit *RLC*-Bandpassfilter mit $47\text{k}\Omega$ Widerstand, bei Spannungsabnahme über den Widerstand.

Wie im Spektrum zu sehen, haben wir in diese Konfiguration den 8kHz-Anteil so weit herausgefiltert, dass dieser komplett im Untergrund verschwindet. Der 4kHz wurde ebenfalls sehr stark gedämpft. Bei einem Vergleich der gefilterten und ungefilterten Amplitude haben wir für diesen eine Dämpfung von

$$\delta_{100\text{Hz}} = 0.0532 \pm 0.0004$$

berechnet. Besonders gut zu sehen ist in diesem Spektrum nun der 4kHz-Anteil. Diese erfuhr durch die Filterschaltung eine Dämpfung von

$$\delta_{4\text{kHz}} = 0.4357 \pm 0.0012.$$

Als zweites Anwendungsgebiet haben wir mit einer RLC-Schaltung einen AM-Empfänger simuliert. Über eine Sendeantenne im Versuchsraum wurde ein kontinuierliches Sinussignal ausgesendet. Dieses haben wir über eine Antenne empfangen und versucht, es durch die Filterschaltung möglichst störungsfrei am Oszilloskop anzuzeigen. Dabei haben wir außerdem die Auswirkungen der Variation der Kapazität im Schwingkreis, sowie eines Eisenkerns in der Spule qualitativ beobachtet.

Wir konnten beobachten, dass die Amplitude des empfangenen Signals bis zu einem Maximum mit Erhöhung der Kapazitäten zu- und dann wieder abnahm. Beim Entfernen des Eisenkerns aus der Spule konnten wir eine Abnahme der Amplitude beobachten. Tatsächlich schafften wir es, durch etwas fine-tuning an der Filterschaltung ein nur noch leicht verzerrtes Sinussignal am Oszilloskop anzuzeigen.

Weiter versuchten wir ein tatsächliches Audiosignal, welches im Raum durch einen Spulen-aufbau ausgesendet wurde, zu empfangen und mit der Filterschaltung aufzulösen. Leider schlugen hierbei all unsere Versuche fehl und wir haben es nicht geschafft, ein über Kopfhörer hörbares Signal zu bekommen.

Python Code, Hauptprogramm

241auswertung

February 16, 2025

```
[2]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit

plt.rcParams.update({'font.size': 12})

%run ../lib.ipynb

[3]: class aufgabe1:
    f = ValErr(165, 1) # Hz
    halbw = [
        # C, R, T_1/2
        [ 470, 1, ValErr(0.3, 0.1) * 1000 ], # nF, kO, μs
        [ 4.7, 10, ValErr(45, 1) ], # nF, kO, μs
        [ 47, 1, ValErr(34, 1) ], # nF, kO, μs
        [ 47, 1, ValErr(32, 1) ], # nF, kO, μs
    ]

    class aufgabe3tp:
        f_intersect = ValErr(9.46, 0.02) # kHz

    class aufgabe3hp:
        f_intersect = ValErr(3.31, 0.02) # kHz
        phase_shift = [
            # f [kHz], Dt [μs], phi [°]
            [ 1, ValErr(0.22, 0.02) * 1000, ValErr(79, 8) ],
            [ 2, ValErr(86, 2), ValErr(61.9, 1.5) ],
            [ 3, ValErr(46, 2), ValErr(49.7, 2.2) ],
            [ 4, ValErr(30, 2), ValErr(43.2, 2.9) ],
            [ 5, ValErr(20, 2), ValErr(36, 4) ],
            [ 6, ValErr(15, 2), ValErr(34, 5) ],
            [ 7, ValErr(11, 2), ValErr(27, 5) ],
            [ 8, ValErr(9, 2), ValErr(26, 6) ],
            [ 9, ValErr(7, 2), ValErr(23, 7) ],
            [ 10, ValErr(5, 2), ValErr(18, 7) ],
        ]
```

```

class aufgabe4:
    C = 47 #nF
    freqgang = [
        # R [Ohm], f_r [kHz], U_A [Vrms], U_E [Vrms], Df [kHz]
        [ 1000, ValErr(4.02, 0.02), ValErr(0.64, 0.02), ValErr(0.661, 0.001), □
         ↳ValErr(4.92, 0.03) ],
        [ 220, ValErr(3.80, 0.02), ValErr(0.53, 0.02), ValErr(0.650, 0.001), □
         ↳ValErr(1.29, 0.03) ],
        [ 47, ValErr(3.75, 0.02), ValErr(0.27, 0.02), ValErr(0.627, 0.001), □
         ↳ValErr(0.56, 0.03) ],
    ]

class aufgabe5:
    f_R = ValErr(3.91, 0.02) * 10**3 # Hz (Schwarz)
    f_L = ValErr(4.04, 0.02) * 10**3 # Hz (Blau)
    f_C = ValErr(3.80, 0.02) * 10**3 # Hz (Rot)

class aufgabe6:
    f = 100 # Hz
    amplitude = [
        # U_P [V], T [ms]
        [ ValErr(0.74, 0.02), ValErr(0.26, 0.02) ],
        [ ValErr(0.50, 0.02), ValErr(0.26, 0.02) ],
        [ ValErr(0.36, 0.02), ValErr(0.26, 0.02) ],
        [ ValErr(0.26, 0.02), ValErr(0.26, 0.02) ],
        [ ValErr(0.18, 0.02), ValErr(0.26, 0.02) ],
    ]

class aufgabe7:
    f_res = ValErr(3.94, 0.02) * 10**3 # Hz

class aufgabe8t1oF:
    R = 220 # ohm
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(-3.06, 0.02), ValErr(100.71, 10) ],
        [ ValErr(-8.06, 0.02), ValErr(3600, 10) ],
        [ ValErr(-22.13, 0.02), ValErr(6790, 10) ]
    ]

class aufgabe8t2hp:
    R = 220 # ohm
    C = 470 # nF
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(-26.81, 0.02), ValErr(100.71, 10) ],
        [ ValErr(-8.69, 0.02), ValErr(3600, 10) ],

```

```

        [ ValErr(-22.44, 0.02), ValErr(6790, 10) ]
    ]

class aufgabe8t2tp:
    R = 220 # ohm
    C = 470 # nF
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(-2.75, 0.02), ValErr(100.71, 10) ],
        [ ValErr(-15.88, 0.02), ValErr(3600, 10) ],
        [ ValErr(-51.19, 0.02), ValErr(6790, 10) ]
    ]

class aufgabe8t2lctp:
    C = 470 # nF
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(-2.56, 0.02), ValErr(100.71, 10) ],
        [ ValErr(9.94, 0.02), ValErr(3600, 10) ],
    ]
#####
class aufgabe8t3bpC1ko:
    R = 1 # kOhm
    C = 47 # nF
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(-3.19, 0.02), ValErr(100.71, 10) ],
        [ ValErr(-8.81, 0.02), ValErr(3590, 10) ],
    ]
class aufgabe8t3bpC47o:
    R = 47 # Ohm
    C = 47 # nF
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(-2.87, 0.02), ValErr(100.71, 10) ],
        [ ValErr(8.06, 0.02), ValErr(3590, 10) ],
    ]
#####
class aufgabe8t3bpL1ko:
    R = 1 # kOhm
    C = 47 # nF
    sig = [

```

```

# U [dBV], f [Hz]
[ ValErr(-11.50, 0.02), ValErr(3600, 10) ],
[ ValErr(-22.75, 0.02), ValErr(6790, 10) ],
]

class aufgabe8t3bpL47o:
    R = 47 # Ohm
    C = 47 # nF
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(6.81, 0.02), ValErr(3590, 10) ],
        [ ValErr(-22.25, 0.02), ValErr(6790, 10) ],
    ]
#####

class aufgabe8t3bpR1ko:
    R = 1 # kOhm
    C = 47 # nF
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(-32.44, 0.02), ValErr(100.7, 10) ],
        [ ValErr(-8.06, 0.02), ValErr(3590, 10) ],
        [ ValErr(-43.38, 0.02), ValErr(6800, 10) ],
    ]

class aufgabe8t3bpR47o:
    R = 47 # Ohm
    C = 47 # nF
    sig = [
        # U [dBV], f [Hz]
        [ ValErr(-57.56, 0.02), ValErr(100.71, 10) ],
        [ ValErr(-18.50, 0.02), ValErr(3590, 10) ],
    ]

```

0.0.1 Aufgabe 1

```
[4]: # Aufgabe 1
# Zeitkonstanten der RC-Kombinationen berechnen und in Tabelle Eintragen
# C, R, f, _exp, _theo

for dat_1 in aufgabe1.halbw[0:3]:
    C_a1 = ValErr.fromValPerc(dat_1[0], 10)
    R_a1 = ValErr.fromValPerc(dat_1[1], 5)

    tau_theo = C_a1 * 10**(-9) * R_a1 * 10**3
```

```

tau_exp = dat_1[2] * 10**(-6) / np.log(2)

diff = np.abs(tau_theo.val - tau_exp.val) / np.sqrt(tau_theo.err**2 + u
tau_exp.err**2

print_all(C_a1.strfmtf2(2, 0, 'C'), R_a1.strfmtf2(2, 0, 'R'), aufgabe1.f.
strfmtf2(2, 0, 'f'), tau_theo.strfmtf2(5, -5, '_theo'), tau_exp.strfmtf2(5, u
-5, '_exp'), tau_theo.sigmadiff_fmt(tau_exp), '---')

```

C = 470.00 ± 47.00
R = 1.00 ± 0.05
f = 165.00 ± 1.00
_theo = (47.00000 ± 5.25476)e-5
_exp = (43.28085 ± 14.42695)e-5
0.25

C = 4.70 ± 0.47
R = 10.00 ± 0.50
f = 165.00 ± 1.00
_theo = (4.70000 ± 0.52548)e-5
_exp = (6.49213 ± 0.14427)e-5
3.29

C = 47.00 ± 4.70
R = 1.00 ± 0.05
f = 165.00 ± 1.00
_theo = (4.70000 ± 0.52548)e-5
_exp = (4.90516 ± 0.14427)e-5
0.38

0.0.2 Aufgabe 3

```
[5]: # f [kHz], Dt [μs], phi [°]

f_val = np.array([x[0] * 1000 for x in aufgabe3hp.phase_shift])
phi_val = np.array([x[2].val for x in aufgabe3hp.phase_shift])
phi_err = np.array([x[2].err for x in aufgabe3hp.phase_shift])

def fit_func_exp(x, A, lam, c):
    return A * np.exp(-lam * x) + c

def inv_func_exp(y, A, lam, c):
    return - (1./lam) * np.log((y - c) / A)

def inv_func_exp_err(y, A, lam, c, dA, dlam, dc):
    log_term = np.log((y - c) / A)
```

```

dx_A = (1 / (lam * A)) * log_term * dA
dx_lambda = (1 / lam**2) * log_term * dlam
dx_c = (1 / (lam * (y - c))) * dc

dx = np.sqrt(dx_A**2 + dx_lambda**2 + dx_c**2)
return dx

p0_phase = [80, 0, 15]

popt_phase, pcov_phase = curve_fit(fit_func_exp, f_val, phi_val, p0_phase,
                                     sigma=phi_err, absolute_sigma=True)

A_fit = ValErr.fromFit(popt_phase, pcov_phase, 0)
lam_fit = ValErr.fromFit(popt_phase, pcov_phase, 1)
c_fit = ValErr.fromFit(popt_phase, pcov_phase, 2)

grenzfreq_val = inv_func_exp(45, A_fit.val, lam_fit.val, c_fit.val)
grenzfreq_err = inv_func_exp_err(45, A_fit.val, lam_fit.val, c_fit.val, A_fit.
                                 err, lam_fit.err, c_fit.err)
grenzfreq = ValErr(grenzfreq_val, grenzfreq_err)

print(f'Interpolierte Grenzfrequenz: {grenzfreq}')
print(f'Abweichung Grenzfrequenz: {aufgabe3hp.f_intersect.
      sigmadiff_fmt(grenzfreq, 5)}')

plt.figure(figsize=(10,7))
plt.errorbar(f_val, phi_val, yerr=phi_err, fmt='o', label='Datenpunkte')
plt.plot(f_val, fit_func_exp(f_val, *popt_phase), color='orange', 
         label='angepasste Funktion')
plt.plot([grenzfreq.val - 500, grenzfreq.val + 500], [45, 45], linestyle='--',
         color='green')
plt.plot([grenzfreq.val, grenzfreq.val], [45 + 7, 45 - 7], linestyle='--',
         color='green')
plt.ylabel(r'Phase [°]')
plt.xlabel('f [kHz]')
plt.yticks(np.arange(10, 91, 10))
plt.xticks(np.arange(1, 11, 1) * 1000)
plt.title(r'Phasenverschiebung Hochpassfilter')
plt.text(grenzfreq.val + 500, 45 + 6, f'Grenzfrequenz: {(grenzfreq * 10**(-3)).strfmtf(2, 0)} kHz', color='green', size='large')
plt.grid()

plt.text(7000, 60, f'A = {A_fit.strfmtf(2, 0)}\n$\lambda$ = {lam_fit.strfmtf(2, -4)}\nc = {c_fit.strfmtf(2, 0)}', size='large')

plt.legend(loc='upper right')

```

```

plt.savefig('phaseshift_hp_fit.png', format='png')

# theoretische werte + vergleich

# 1 / RC

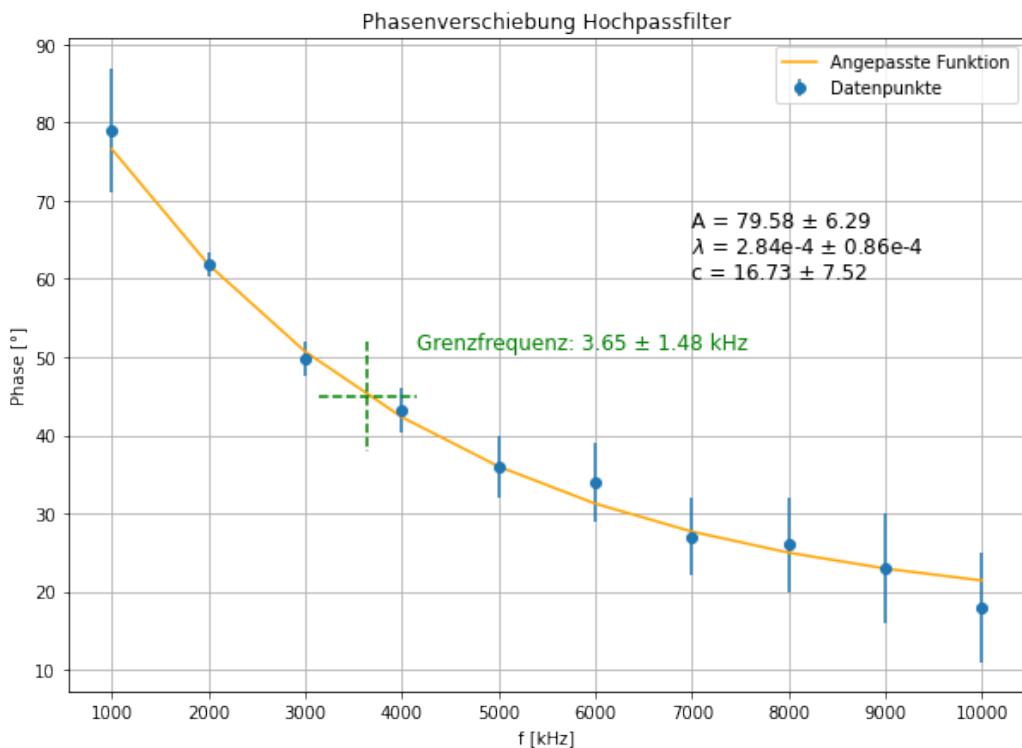
C_a3 = ValErr.fromValPerc(47, 10) * 10 **(-9)
R_a3 = ValErr.fromValPerc(1, 5) * 10**3

w_G = (1 / ((C_a3 * R_a3) * (2 * np.pi))) * 10 ** (-3) #kHz

print(w_G , aufgabe3hp.f_intersect.sigmadiff_fmt(w_G), grenzfreq.
      ↪sigmadiff_fmt(w_G))

```

Interpolierte Grenzfrequenz: ValErr(3648.3123494678557, 1476.5500751470736)
 Abweichung Grenzfrequenz: 2.4686
 ValErr(3.386275384933943, 0.3785970975623283) 0.21 2.47



[]:

0.0.3 Aufgabe 4

```
[6]: Ls = []

r47vals = dict()

cap4 = ValErr.fromValPerc(aufgabe4.C, 10) * 10**(-9)

for i in range(0, len(aufgabe4.freqgang)):
    dat4 = aufgabe4.freqgang[i]

    freq4 = dat4[1] * 1000

    L_val = 1 / ((2 * np.pi * freq4.val)**2 * cap4.val)
    L_err = L_val * np.sqrt((2 * freq4.err / freq4.val)**2 + (cap4.err / cap4.
    val)**2)
    L = ValErr(L_val, L_err)
    Ls.append(L)

    print(L.strftime2(3, -2, f'L({i+1})'))

L_mean = ValErr(np.mean([x.val for x in Ls]), (1/len(Ls)) * np.sqrt(np.sum([x.
    err**2 for x in Ls])))

print_all('=> L Mittelwert', L_mean.strftime2(3, -2, 'L'), '#####')

#
for i in range(0, len(aufgabe4.freqgang)):
    dat4 = aufgabe4.freqgang[i]

    freq4 = dat4[1] * 1000
    Dfreq4 = dat4[4] * 1000 * 2 * np.pi
    res4 = ValErr.fromValPerc(dat4[0], 5)
    U_A = dat4[2]
    U_E = dat4[3]

    RpRv = Dfreq4 * L_mean

    RpRv_amp = res4 * (U_E/U_A)

    print_all('Aus Bandbreite', Dfreq4.strftime2(3, 0, 'Δ'), RpRv.strftime2(3, 0,
    'R + R_v'), res4.strftime2(3, 0, 'R'), (RpRv - res4).strftime2(3, 0, 'R_v'),
    '----')
```

```

print_all('Aus Amplituden', U_E.strfmtf2(3, 0, 'U_E'), U_A.strfmtf2(3, 0, u
↪'U_A'), RpRv_amp.strfmtf2(3, 0, 'R + R_v'), (RpRv_amp - res4).strfmtf2(3, 0, u
↪'R_v'), (RpRv - res4).sigmadiff_fmt((RpRv_amp - res4), 3), '####')
if res4.val == 47:
    r47vals['RpRv'] = RpRv

```

```

L(1) = (3.335 ± 0.335)e-2
L(2) = (3.732 ± 0.375)e-2
L(3) = (3.832 ± 0.385)e-2
=> L Mittelwert
L = (3.633 ± 0.211)e-2
#####
Aus Bandbreite
Δ = 30913.272 ± 188.496
R + R_v = 1123.154 ± 65.668
R = 1000.000 ± 50.000
R_v = 123.154 ± 82.537
-----
Aus Amplituden
U_E = 0.661 ± 0.001
U_A = 0.640 ± 0.020
R + R_v = 1032.813 ± 60.917
R_v = 32.813 ± 78.809
0.792
#####
Aus Bandbreite
Δ = 8105.309 ± 188.496
R + R_v = 294.485 ± 18.443
R = 220.000 ± 11.000
R_v = 74.485 ± 21.474
-----
Aus Amplituden
U_E = 0.650 ± 0.001
U_A = 0.530 ± 0.020
R + R_v = 269.811 ± 16.907
R_v = 49.811 ± 20.170
0.838
#####
Aus Bandbreite
Δ = 3518.584 ± 188.496
R + R_v = 127.839 ± 10.108
R = 47.000 ± 2.350
R_v = 80.839 ± 10.377
-----
Aus Amplituden

```

```

U_E = 0.627 ± 0.001
U_A = 0.270 ± 0.020
R + R_v = 109.144 ± 9.756
R_v = 62.144 ± 10.035
1.296
#####

```

0.0.4 Aufgabe 5

```

[7]: dekrs = []
dekrs_err = []

for i in range(0, len(aufgabe6.amplitude) - 1):
    U_P1 = aufgabe6.amplitude[i][0]
    U_P2 = aufgabe6.amplitude[i+1][0]
    d = np.log(U_P1.val / U_P2.val)
    d_err = np.sqrt(U_P1.relerr()**2 + U_P2.relerr()**2)
    dekrs.append(d)
    dekrs_err.append(d_err)
    print(U_P1.strfmtf(4, 0, 'A(n)'), U_P2.strfmtf(4, 0, 'A(n+1)'), f'\t\Lambda_{i+1} =', d, d_err)

dekrement = ValErr(np.mean(dekrs), (1/len(dekrs_err)) * np.sqrt(np.sum([x**2 for x in dekrs_err])))
print(dekrement.strfmtf(4, 0, '\Lambda'))

T = ValErr(0.26, 0.02) * 10**(-3)

RpRv_dekr_val = (2 * L_mean.val * dekrement.val) / T.val
RpRv_dekr_err = RpRv_dekr_val * np.sqrt(np.sum([L_mean.relerr()**2, dekrement.relerr()**2, T.relerr()**2]))

RpRv_dekr = ValErr(RpRv_dekr_val, RpRv_dekr_err)

# \Lambda = T, \Lambda = R/2L => \Lambda = TR/2L <=> R = 2\Lambda T

print_all(RpRv_dekr.strfmtf(4, 0, 'R + R_v'), 'vorher:', r47vals['RpRv'].strfmtf(4, 0, 'R + R_v'), 'abw', RpRv_dekr.sigmadiff_fmt(r47vals['RpRv'], 3))

```

```

A(n) = 0.7400 ± 0.0200 A(n+1) = 0.5000 ± 0.0200          \Lambda_1 = 0.3920420877760237
0.048274840133548345
A(n) = 0.5000 ± 0.0200 A(n+1) = 0.3600 ± 0.0200          \Lambda_2 =
0.32850406697203605 0.06845743022555273
A(n) = 0.3600 ± 0.0200 A(n+1) = 0.2600 ± 0.0200          \Lambda_3 =
0.32542240043462795 0.09488719363749794
A(n) = 0.2600 ± 0.0200 A(n+1) = 0.1800 ± 0.0200          \Lambda_4 = 0.3677247801253175
0.13514007094736666

```

```

Λ = 0.3534 ± 0.0463
R + R_v = 98.7748 ± 16.0650
vorher:
R + R_v = 127.8387 ± 10.1075
abw
1.532

```

0.0.5 Aufgabe 6

```
[8]: # w_R = sqrt(1/LC)
#   = R / 2L
# w_C = sqrt(w_R^2 - 2^2)
# w_L = sqrt(w_R^2 + 2^2)

cap6 = ValErr.fromValPerc(47, 10) * 10**(-9)
res6 = ValErr.fromValPerc(220, 5)
ind6 = L_mean

LC6 = ind6*cap6

wR6_val = np.sqrt(1 / LC6.val)
wR6_err = (1 / 2) * (LC6.err / LC6.val**(3/2))
wR6 = ValErr(wR6_val, wR6_err)
fR6 = wR6 / (2*np.pi)

delta6 = (1 / 2) * (res6 / ind6)

wC6_val = np.sqrt(wR6.val**2 - 2*delta6.val**2)
wC6_err = np.sqrt(((wR6_val*wR6_err)/wC6_val)**2 + ((delta6.val*delta6.err)/
    ↪wC6_val)**2)
wC6 = ValErr(wC6_val, wC6_err)
fC6 = wC6 / (2*np.pi)

wL6_val = np.sqrt(wR6.val**2 + 2*delta6.val**2)
wL6_err = np.sqrt(((wR6_val*wR6_err)/wL6_val)**2 + ((delta6.val*delta6.err)/
    ↪wL6_val)**2)
wL6 = ValErr(wL6_val, wL6_err)
fL6 = wL6 / (2*np.pi)

print_all(delta6.strfmtf(4, 0, ' '),
          '---',
          fR6.strfmtf(4, 0, '_R'),
          aufgabe5.f_R.strfmtf(4, 0, '_R_exp'),
          aufgabe5.f_R.sigmadiff_fmt(fR6, 5),
          '---',
          fC6.strfmtf(4, 0, '_C'),
```

```

aufgabe5.f_C.strfmf(4, 0, '_C_exp'),
aufgabe5.f_C.sigmadiff_fmt(fC6, 5),
'---',
fL6.strfmf(4, 0, '_L'),
aufgabe5.f_L.strfmf(4, 0, '_L_exp'),
aufgabe5.f_L.sigmadiff_fmt(fL6, 5)

= 3027.5991 ± 232.1858
---
_R = 3851.4480 ± 222.7632
_R_exp = 3910.0000 ± 20.0000
0.2618
---
_C = 3790.6832 ± 226.3829
_C_exp = 3800.0000 ± 20.0000
0.041
---
_L = 3911.2690 ± 219.4034
_L_exp = 4040.0000 ± 20.0000
0.58431

```

0.0.6 Aufgabe 7

```
[9]: cap7 = ValErr.fromValPerc(47, 10) * 10**(-9)
ind7 = L_mean

# w_0 = 1 / sqrt(LC)

LC7 = cap7*ind7

w07_val = np.sqrt(1 / LC7.val)
w07_err = (1 / 2) * (LC7.err / LC7.val**(3/2))
w07 = ValErr(w07_val, w07_err)
f07 = w07 / (2*np.pi)

print_all(aufgabe7.f_res.strfmf(4, 0, 'f_0_exp'),
          f07.strfmf(4, 0, 'f_0_theo'),
          f'abw {aufgabe7.f_res.sigmadiff_fmt(f07, 4)}')

f_0_exp = 3940.0000 ± 20.0000
f_0_theo = 3851.4480 ± 222.7632
abw 0.396
```

0.0.7 Aufgabe 8

```
[10]: print('RLC, 47 ohm, Widerstand')
print('4kHz', aufgabe8t1oF.sig[1][0], aufgabe8t3bpR47o.sig[1][0], aufgabe8t1oF.
    ↪sig[1][0]/aufgabe8t3bpR47o.sig[1][0])
print('100Hz', aufgabe8t1oF.sig[0][0], aufgabe8t3bpR47o.sig[0][0], aufgabe8t1oF.
    ↪sig[0][0]/aufgabe8t3bpR47o.sig[0][0])

print('\n', 'RC Hochpass')
print('4kHz', aufgabe8t1oF.sig[1][0], aufgabe8t2hp.sig[1][0], aufgabe8t1oF.
    ↪sig[1][0]/aufgabe8t2hp.sig[1][0])
print('8kHz', aufgabe8t1oF.sig[2][0], aufgabe8t2hp.sig[2][0], aufgabe8t1oF.
    ↪sig[2][0]/aufgabe8t2hp.sig[2][0])
print('100Hz', aufgabe8t1oF.sig[0][0], aufgabe8t2hp.sig[0][0], aufgabe8t1oF.
    ↪sig[0][0]/aufgabe8t2hp.sig[0][0])

print('\n', 'RC Tiefpass')
print('4kHz', aufgabe8t1oF.sig[1][0], aufgabe8t2tp.sig[1][0], aufgabe8t1oF.
    ↪sig[1][0]/aufgabe8t2tp.sig[1][0])
print('8kHz', aufgabe8t1oF.sig[2][0], aufgabe8t2tp.sig[2][0], aufgabe8t1oF.
    ↪sig[2][0]/aufgabe8t2tp.sig[2][0])
print('100Hz', aufgabe8t1oF.sig[0][0], aufgabe8t2tp.sig[0][0], aufgabe8t1oF.
    ↪sig[0][0]/aufgabe8t2tp.sig[0][0])
```

RLC, 47 ohm, Widerstand
4kHz ValErr(-8.06, 0.02) ValErr(-18.5, 0.02) ValErr(0.4356756756756757,
0.0011792277099718577)
100Hz ValErr(-3.06, 0.02) ValErr(-57.56, 0.02) ValErr(0.05316191799861014,
0.00034795416878131134)

RC Hochpass
4kHz ValErr(-8.06, 0.02) ValErr(-8.69, 0.02) ValErr(0.9275028768699656,
0.0031390427356231265)
8kHz ValErr(-22.13, 0.02) ValErr(-22.44, 0.02) ValErr(0.9861853832442067,
0.0012517639252519503)
100Hz ValErr(-3.06, 0.02) ValErr(-26.81, 0.02) ValErr(0.11413651622528907,
0.0007508336411163078)

RC Tiefpass
4kHz ValErr(-8.06, 0.02) ValErr(-15.88, 0.02) ValErr(0.5075566750629723,
0.001412385144501711)
8kHz ValErr(-22.13, 0.02) ValErr(-51.19, 0.02) ValErr(0.4323109982418441,
0.0004256480161859309)
100Hz ValErr(-3.06, 0.02) ValErr(-2.75, 0.02) ValErr(1.1127272727272728,
0.01088035483979233)

[]:

Python Code, Bibliothek

lib

February 16, 2025

```
[1]: def floatfmt(v, prec, exp):
    return f"{v/10**exp}:0={prec}f}{f'e{exp}' if exp != 0 else ''}"

def prec_ceil(v, prec=0):
    return np.true_divide(np.ceil(v * 10**prec), 10**prec)

def prec_floor(v, prec=0):
    return np.true_divide(np.floor(v * 10**prec), 10**prec)
```

```
[2]: import math
import numpy as np

class ValErr:
    val: float = 0
    err: float = 0
    err_set = False

    def __init__(self, val, err=0):
        self.val = val
        if err != 0:
            self.err_set = True
            self.err = err

    def getTuple(self):
        return (self.val, self.err)

    def setErr(self, err_value):
        self.err_set = True
        self.err = err_value

    @classmethod
    def fromMeasurements(self, measurements):
        return ValErr(np.mean(measurements), (1 / math.sqrt(len(measurements))) ↴
                    * np.std(measurements, ddof=1))

    @classmethod
    def fromTuple(self, tup):
```

```

    return ValErr(tup[0], tup[1])

@classmethod
def fromFit(self, popt, pcov, i):
    return ValErr(popt[i], np.sqrt(pcov[i][i]))

@classmethod
def fromFitAll(self, popt, pcov):
    for i in range(0, len(popt)):
        yield ValErr(popt[i], np.sqrt(pcov[i][i]))

@classmethod
def fromValPerc(self, v, perc):
    return ValErr(v, v * perc/100)

def strfmt(self, prec=2):
    if self.err != 0:
        return fr"{{self.val:.{prec}e} ± {self.err:.{prec}e}}"
    else:
        return f"{{self.val:.{prec}e}}"

def strfmtf(self, prec, exp, name = ""):
    prefix = ""
    if name != "":
        prefix = f"{{name}} = "

    if self.err != 0:
        return prefix + fr"{{floatfmt(self.val, prec, exp)} ± {{floatfmt(self.
→err, prec, exp)}}}"
    else:
        return prefix + f"{{floatfmt(self.val, prec, exp)}}"

def strfmtf2(self, prec, exp, name = ""):
    prefix = ""
    if name != "":
        prefix = f"{{name}} = "

    if self.err != 0:
        return prefix + fr"{{f'(' if exp != 0 else ''){{self.val/10**exp}:.
→0=1.{prec}f} ± {{self.err/10**exp}:0=1.{prec}f}{f')e{exp}' if exp != 0 else
→'!'}}"
    else:
        return prefix + f"{{floatfmt(self.val, prec, exp)}}"

def strltx(self, prec=2):
    if self.err != 0:
        return fr"{{self.val:.{prec}e} \pm {{self.err:.{prec}e}}}"

```

```

    else:
        return f"{self.val}"

def relerr(self):
    return self.err / self.val

def sigmadiff(self, other):
    return np.abs(self.val - other.val) / np.sqrt(self.err**2 + other.
→err**2)

def sigmadiff_fmt(self, other, prec=2):
    return f"{'{prec_ceil(self.sigmadiff(other), prec)}'}"

def __repr__(self):
    return f"ValErr({self.val}, {self.err})"

def __radd__(self, other):
    return self.__add__(other)

def __add__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(self.val + other.val, math.sqrt(self.err**2 + other.
→err**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(self.val + other, self.err)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
→__class__}' and '{type(other)}'")

def __rsub__(self, other):
    return self.__sub__(other)

def __sub__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(self.val - other.val, math.sqrt(self.err**2 + other.
→err**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(self.val - other, self.err)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for -: '{self.
→__class__}' and '{type(other)}'")

def __rmul__(self, other):
    return self.__mul__(other)

def __mul__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):

```

```

        return ValErr(self.val * other.val, math.sqrt((other.val * self.
→err)**2 + (self.val * other.err)**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(self.val * other, self.err * other)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
→__class__}' and '{type(other)}'")

def __rtruediv__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(other.val / self.val, math.sqrt((other.err / self.
→val)**2 + (other.val * self.err / self.val**2)**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(other / self.val, np.abs(other / self.val**2) * self.
→err)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
→__class__}' and '{type(other)}'")

def __truediv__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(self.val / other.val, math.sqrt((self.err / other.
→val)**2 + (self.val * other.err / other.val**2)**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(self.val / other, self.err / other)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
→__class__}' and '{type(other)}'")

```

[5]: def spacearound(dat, add):
 return np.linspace(dat[0] - add, dat[len(dat)-1] + add)

[6]: def div_with_err(a, a_err, b, b_err):
 err = (1 / b) * np.sqrt(a_err**2 + (a * b_err / b)**2)
 return (a / b, err)

[7]: def print_all(*args):
 for e in args:
 print(e)

[]: