

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Dimitrij Bathauer

03.12.24

## Versuch 222: Heißluftmotor

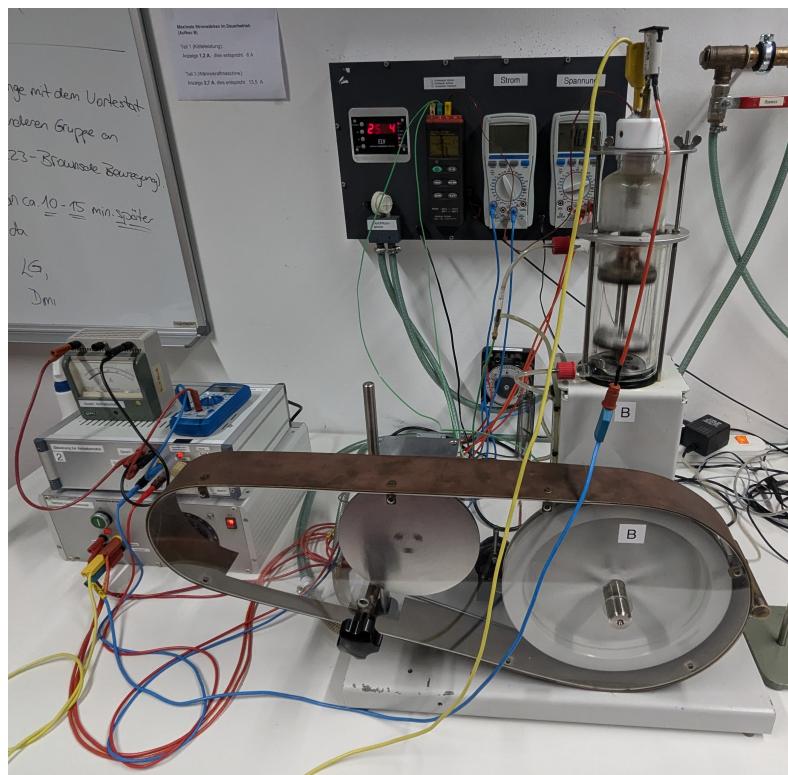


Abbildung 1: Versuchsaufbau

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1 Physikalische Grundlagen . . . . .	2
1.2 Versuchsdurchführung . . . . .	6
<b>2 Messprotokoll</b>	<b>8</b>
<b>3 Auswertung</b>	<b>12</b>
3.1 Betrieb als Kältemaschine und quantitative Bestimmung der Kälteleistung . . . . .	12
3.2 Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe . . . . .	13
3.3 Betrieb als Wärmekraftmaschine . . . . .	15
<b>4 Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>18</b>

# 1 Einleitung

Die technischen Mängel der Hochdruckdampfmaschinen waren einer der Gründe, warum sich Robert Stirling mit der Entwicklung einer damals neuartigen Wärmekraftmaschine beschäftigte. Im Jahr 1816 meldete Stirling den nach ihm benannten *Stirlingmotor* bzw. Heißluftmotor zum Patent an. In Versuch 222 werden wir uns anhand eines Modells mit der Funktionsweise und verschiedenen Anwendungen des Stirlingmotors genauer auseinandersetzen.

## 1.1 Physikalische Grundlagen

Grundsätzlich lässt sich zwischen zwei verschiedenen Typen von Heißluftmotoren unterscheiden, dem  $\gamma$ -Typ und dem  $\beta$ -Typ Heißluftmotor. Die Funktionsweise beider Typen basiert auf den gleichen Prinzipien, während beim  $\gamma$ -Typ der Prozess jedoch auf zwei Verbunde separate Zylinder aufgeteilt ist, kommt der  $\beta$ -Typ mit einem Zylinder aus. Da wir im Versuch alle Experimente ausschließlich an einem  $\beta$ -Typ Heißluftmotor durchführen, wird sich die folgende Einleitung auch auf diesen beschränken.

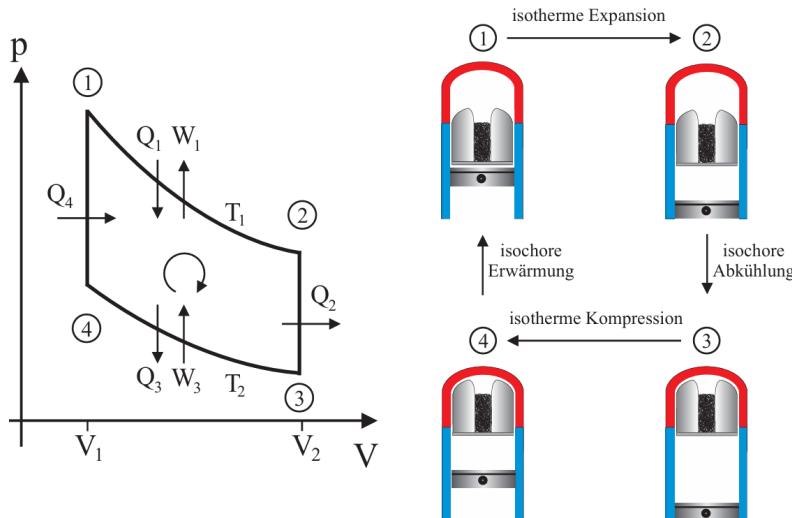


Abbildung 2:  $pV$ -Diagramm der Funktionsweise und schematische Darstellung der Kolbenbewegung des  $\beta$ -Typ Heißluftmotors

Wie Abbildung (2), rechts, zu entnehmen bewegen sich im Zylinder des  $\beta$ -Typ Heißluftmotors zwei Kolben, der Arbeitskolben und der Verdrängerkolben. Der Verdrängerkolben dient dazu, das Gas im Zylinder zwischen dem oberen beheizten und dem unteren gekühlten Teil hin und her zu schieben. Der Arbeitskolben ist für die Kompression und Expansion des Gases im Zylinder zuständig. Das  $pV$ -Diagramm, in Abbildung (2), links, zeigt eine idealisierte Darstellung der thermodynamischen Zustandsänderungen, den *Stirling-Prozess*, welche durch die Kolbenbewegung erzielt wird.

Zur genaueren Beschreibung des Prozesses betrachten wir die durch den ersten Hauptsatz der Thermodynamik gegebene Gleichung

$$dQ = dU + p dV, \quad (1)$$

welchen wir unter der Annahme eines idealen Gases umschreiben können zu

$$dQ = C_V \nu dT + p dV. \quad (2)$$

Über die molare Wärmekapazität  $C_V$  und die Gasmenge  $\nu$  in mol lässt sich die direkte Auswirkung auf die Temperatur durch Änderung der inneren Energie formulieren.

Mit dieser Gleichung lassen sich die Energiebilanzen der vier Zustandsänderungen in Abbildung (2) aufstellen.

**Zustand 1 → 2** läuft durch eine isotherme Expansion ab. Die Luft im heißen Zylinderbereich wird aufgeheizt und nimmt dabei die Wärmemenge  $Q_1$  auf. Sie dehnt sich folglich aus und verrichtet dabei die Arbeit  $W_1$  durch die Verschiebung des Arbeitskolbens. Es gilt

$$dQ_1 = p dV = \nu RT_1 \frac{dV}{V}, \quad (3)$$

wobei wir in der letzten Gleichheit auf das ideale Gasgesetz zurückgreifen. Durch Integration vom Volumen  $V_1$  zu  $V_2$  erhalten wir einen Ausdruck für die Wärmemenge  $Q_1$ , welche zugleich der vollständigen Volumenarbeit  $W_1$  entspricht.

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = W_1 \quad (4)$$

**Zustand 2 → 3** ist eine isochore Abkühlung des Gases von der Temperatur  $T_1$  auf die Temperatur  $T_2$ . Diese wird dadurch hervorgerufen, dass der Verdrängerkolben die heiße Luft in den gekühlten Bereich des Zylinders verschiebt. Bei einer isochoren Zustandsänderung bleibt das Volumen gleich, es gilt also

$$dQ_2 = C_V \nu dT. \quad (5)$$

Durch Integration erhalten wir den Ausdruck

$$Q_2 = -C_V \nu (T_1 - T_2) \quad (6)$$

für die nach außen über das Kühlsystem abgeföhrte Wärmemenge. In diesem Arbeitstakt wird keine mechanische Arbeit verrichtet, es gilt also  $W_2 = 0$ .

Bei der isothermen Kompression in **Zustand 3 → 4** komprimiert der Arbeitskolben bei seiner Bewegung nach oben die kalte Luft. Dabei verrichtet dieser am Gas die Volumenarbeit

$$W_3 = -\nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (7)$$

welche gleich der Wärmemenge  $Q_3$  ist, die über das Kühlsystem abgeführt wird. Mathematisch folgen wir hier denselben Überlegungen wie beim Übergang 1 → 2.

Der Übergang **Zustand 4 → 1** läuft erneut isochor ab. Hierbei wird das Gas durch die Bewegung des Verdrängerkolbens nach oben in den heißen Zylinderbereich geschoben. Die Wärmemenge, welche das Gas hier aufnimmt, ist Analog zur Zustandsänderung 2 → 3 gegeben durch

$$Q_4 = C_V \nu (T_1 - T_2). \quad (8)$$

Auch hierbei wird keine mechanische Arbeit verrichtet, es gilt somit erneut  $W_4 = 0$ .

Die gesamte geleistete Nutzarbeit  $W_N$  erhalten wir aus dem Kurvenintegral über den gesamten Kreisprozess, welches sich auf die Summe

$$W_N = W_1 + W_3 = \nu R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9)$$

reduziert. Aus dem Verhältnis zwischen der Nutzarbeit und der aufgenommenen Wärmemenge  $Q^+$  ergibt sich der ideale thermische Wirkungsgrad nach

$$\eta_{th} = \frac{W_N}{Q^+}. \quad (10)$$

Für die aufgenommene Wärmemenge  $Q^+$  gilt zunächst

$$Q^+ = Q_1 + Q_4 = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \nu (T_1 - T_2). \quad (11)$$

Dies liegt daran, dass die in Takt  $2 \rightarrow 3$  an das Kühlssystem abgegebene Wärmemenge in Takt  $4 \rightarrow 1$  wieder vollständig aus dem Heizsystem entnommen werden muss. Für den Wirkungsgrad gilt in diesem Fall die Formel

$$\eta_{th} = \frac{\ln \frac{V_2}{V_1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}{\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{C_v}{R} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}. \quad (12)$$

Durch die Verwendung eines sogenannten *Regenerator*s kann der Wirkungsgrad des Heißluftmotors erheblich gesteigert werden. In den Verdrängerkolben eingelassene Kupferwolle speichert die in Takt  $2 \rightarrow 3$  abgegebene Wärme, anstatt diese ins Kühlssystem abzuführen. Im Takt  $4 \rightarrow 1$  kann die gespeicherte Wärme dann für die isochore Erwärmung genutzt werden, anstatt sie aus dem Heizsystem zuführen zu müssen. Idealerweise kann  $Q_4$  vollständig aus dem Regenerator bezogen werden. Dadurch reduziert sich die nötige von außen zuzuführende Wärme auf

$$Q^+ = Q_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (13)$$

Mit dieser erhalten wir nach Gleichung 10 einen idealisierten Wirkungsgrad von

$$\eta_{th}^R = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (14)$$

was gerade dem Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses, also dem theoretisch maximal möglichen Wirkungsgrad einer periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine, entspricht.

Das Schwungrad des Heißluftmotors kann von außen angetrieben werden, um diesen als Kältemaschine oder Wärmepumpe zu betreiben. In diesem Fall wird der Kreisprozess in umgekehrter Richtung durchlaufen, wie in Abbildung (3) Schematisch dargestellt.

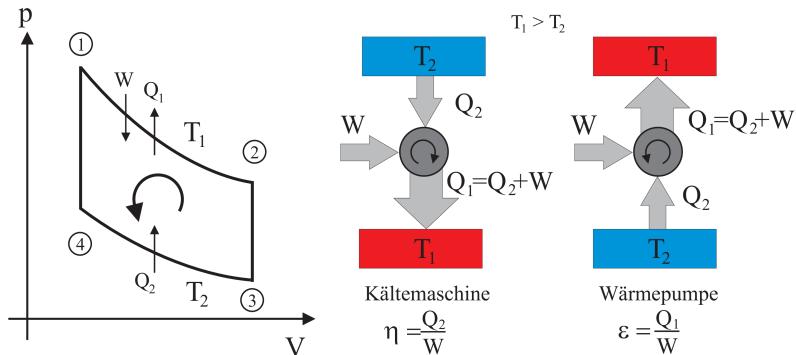


Abbildung 3: Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine oder Wärmepumpe

Hierbei bestimmt die Antriebsrichtung des Schwungrades, ob der Motor als Kältemaschine oder Wärmepumpe fungiert. Dem oberen Bereich wird beim Betrieb als Kältemaschine die Wärmemenge  $Q_2$  entzogen und die Wärmemenge  $Q_1 = W + Q_2$  ab das Kühlsystem abgegeben. Umgekehrt wird beim Betrieb als Wärmepumpe dem Kühlwasser die Wärmemenge  $Q_2$  entzogen und dem oberen Bereich die Wärmemenge  $Q_1 = W + Q_2$  zugeführt. Hierbei beschreibt  $W$  die durch den externen Antrieb zugeführte mechanische Arbeit. Für den Wirkungsgrad der Kältemaschine gilt

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (15)$$

während die Effizienz der Wärmpumpe durch

$$\epsilon = \frac{Q_1}{W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}, \quad (16)$$

genannt Leistungsziffer, angegeben ist.

Die bisher aufgezeigte mathematische Beschreibung, sowie die dargestellten pV-Digramme zeigen einen idealen des Stirling-Prozesses auf, wie er in der Realität nicht möglich ist. Dieser ideale Stirling-Prozess ist technisch nicht realisierbar, da er eine diskontinuierliche Kolbenbewegung erfordert würde, was zu unruhigem Lauf und hohen Belastungen führt. Im Motor sind Arbeits- und Verdrängerkolben über die Kurbelwelle phasenverschoben gekoppelt, wodurch ein ruhiger Lauf und eine Annäherung an den idealen Prozess möglich sind. Allerdings entstehen durch Überlappungen der Zustandsänderungen Wirkungsgradverluste, was sich in einem abweichenden pV-Diagramm mit abgerundeten Isochoren, vlg. Abbildung (4) zeigt.

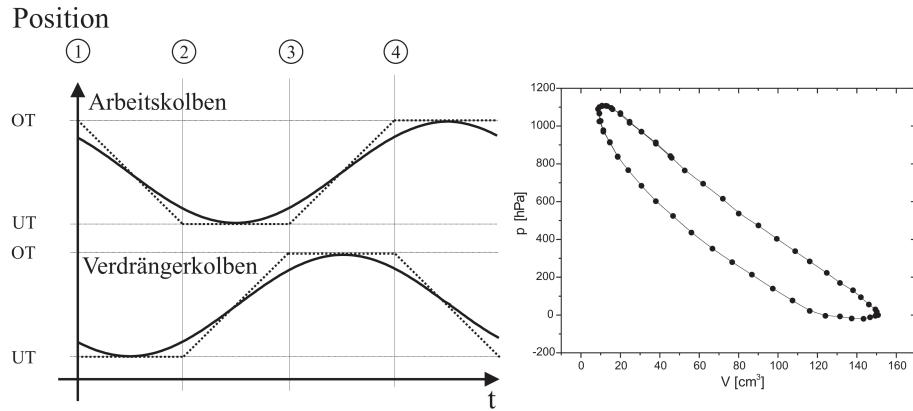


Abbildung 4: Der ideale Stirling-Prozess würde eine diskontinuierliche Kolbenbewegung voraussetzen. In Realität zeigt sich im pV eine Abrundung der Isochoren und damit verbunden Wirkungsgradverluste.

## 1.2 Versuchsdurchführung

Der Versuch teilt sich in drei Blöcke auf, in welchen wir zunächst den umgekehrten Kreisprozess, sprich den Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe, betrachten und im letzten Block den Betrieb als Wärmekraftmaschine.

### Betrieb als Kältemaschine und quantitative Bestimmung der Kälteleistung.

Wir betreiben den Motor als Kältemaschine, wodurch der obere Zylinderbereich zunächst abgekühlt wird. Gleichzeitig heizen wir den Bereich mit einer elektrischen Heizwendel auf, um in „Summe“ wieder die Ausgangstemperatur zu erreichen. Wir messen in diesem Versuchsteil den Heizstrom  $I_H$ , die Heizspannung  $U_H$ , den Volumenfluss des Kühlwassers  $\dot{V}$  und die Temperaturdifferenz  $T_{ab} - T_{zu}$  des ab- und zufließenden Kühlwassers.

**Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe.** In diesem Versuchsteil betreiben wir den Motor zunächst weiterhin als Kältemaschine. Anstatt der Heizwendel montieren wir nun ein Reagenzglas mit Wasser am oberen Teil des Zylinders. Im Wasser befindet sich ein Temperaturfühler, um die Temperatur des Wassers aufzuzeichnen. Wir betreiben die Kältemaschine bis die Temperatur des Wassers unter  $0^\circ\text{C}$  sinkt und dort einen konstanten erreicht. Dazu notieren wir uns den Motorstrom  $I_M$ , die Motorspannung  $U_M$ , Drehzahl  $f$ . Zusätzlich messen wir die Länge  $t_f$  der Gefrierzeit des Wassers, welche an einem kurzen Plateau im Temperaturverlauf um die  $0^\circ\text{C}$ -Marke zu erkennen ist.

**Betrieb als Wärmekraftmaschine.** Wir bauen den externen Antrieb ab und installieren wieder die Heizwendel am oberen Zylinderbereich. Der Motor wird nun durch hinzugeben von Wärme durch die Heizwendel als Wärmekraftmaschine betrieben. Für die Leerlaufmessung lassen wir den Motor zunächst anlaufen und nehmen, sobald er eingelaufen ist, Heizstrom  $I_H$ , Heizspannung  $U_H$ , Durchflussmenge  $\dot{V}$  des Kühlwassers, Temperaturdifferenz des  $T_{ab} - T_{zu}$  ab- und zulaufenden Kühlwassers, Drehzahl  $f$  des Schwungrades auf. Über die Software CASSY LAB zeichnen wir im diesem Versuchsteil zusätzlich die Fläche des pV-Diagrammes auf. Für den die weiteren Messungen bringen wir an der Motorwelle einen Bremszaum mit einem Federkraftmesser an, siehe Abbildung (5). Nachdem der Motor auch in diesem Aufbau eingelaufen ist stellen wir über den Bremszaum vier verschiedene Bremskräfte von  $0.8\text{N}$  bis  $0.2\text{N}$  ein und nehmen die Bremskraft  $F$  vom Federkraftmesser, die Drehzahl  $f$  des Schwungrades und die Fläche des pV-Diagrammes über die Software auf.

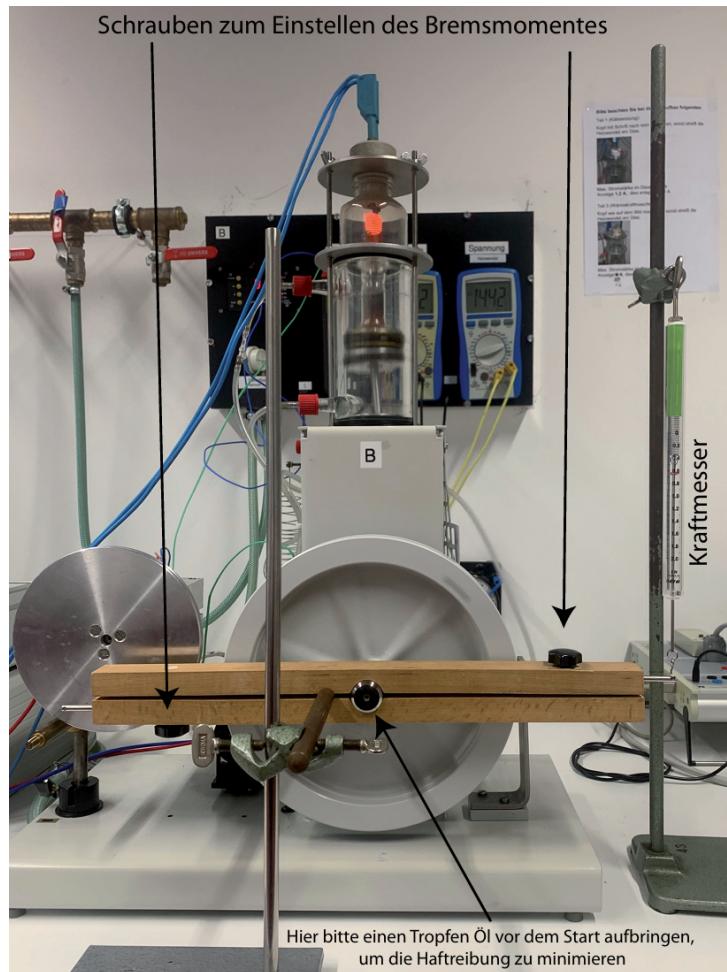


Abbildung 5: Motoraufbau für Versuchsteil 3 mit Bremszaum und Federkraftmesser

## 2 Messprotokoll

Messprotokoll 222

Marius Pleiffer

03.12.2024

Robert Grosch

Aufgabenteil 1

$$I_H = (0.94 \pm 0.01) A \cdot 5 \quad \text{Schwankungsfehler}$$

$$U_H = (4.74 \pm 0.01) V \quad \text{Schwankungsfehler}$$

Durchfluss  $\left[ \frac{m}{min} \right]$

1	2	3	4	5	$\phi$
252.2	251.2	254.9	253.0	250.3	252.3

$$T_{Zu} = T_2 = (17.9 \pm 0.1) ^\circ C \quad \text{Skalenfehler}$$

$$\bar{T}_{ab} = T_1 = (19.6 \pm 0.1) ^\circ C \quad \text{Skalenfehler}$$

Aufgabenteil 2

$$I_M = (2.1 \pm 0.1) A \quad \text{Schwankungsfehler}$$

$$U_M = (24.1 \pm 0.1) V \quad \text{Schwankungsfehler}$$

Drehzahl [rpm]

1	2	3	4	$\phi$
316.6	318.8	317.6	315.9	317.2

$$t_f = |225.0s - 405.0s| = 180.0s$$

$$\Delta t_f = \pm 2s \quad \text{Abgeschätzt}$$

### Aufgabe 3 (1)

$$I_H = (2.51 \pm 0.01) A \cdot 5 \quad \text{Schwankungsfehler}$$

$$U_H = 11.54 \pm 0.03 \text{ V} \quad \text{Schwankungsfehler}$$

Durchfluss  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{min}} \right]$

1	2	3	4	5	$\bar{\phi}$
252.0	249.9	243.1	251.9	253.3	250.0

$$T_{2a} = T_2 = (18.0 \pm 0.1)^\circ\text{C} \quad \text{Shalenfehler}$$

$$T_{as} = T_1 = (21.3 \pm 0.1)^\circ\text{C} \quad \text{Shalenfehler}$$

Drehzahl [rpm]

1	2	3	4	$\bar{\phi}$
286.6	288.8	285.9	280.4	288.9

Fläche pV-Diagramm  $[\text{hPa cm}^3]$

1	2	3	4	$\bar{\phi}$
15600	15550	15420	15220	15558

## Aufgabe 3 (2)

Bremshraft:  $(0.8 \pm 0.02) N$  Schwanlungsfehler  
für alle Werte

Drehzahl [rpm]

1	2	3	4	$\phi$
190.0	191.1	192.3	193.2	191.7

Fläche pV-Diagramm [ $hPa \text{ cm}^3$ ]

1	2	3	4	$\phi$
27250	26710	27640	27950	27388

Bremshraft:  $(0.6 \pm 0.02) N$

Drehzahl [rpm]

1	2	3	4	$\phi$
211.3	210.2	205.4	210.4	210.3

Fläche pV-Diagramm [ $hPa \text{ cm}^3$ ]

1	2	3	4	$\phi$
25570	25320	25610	25540	25510

### Aufgabe 3 (3)

Bremshraft:  $(0.4 \pm 0.02) N$

Drehzahl [rpm]

1	2	3	4	$\phi$
229.6	229.2	230.8	229.9	229.9

Fläche pV-Diagramm [hPa cm<sup>3</sup>]

1	2	3	4	$\phi$
23420	23000	23340	22870	25158

Bremshraft:  $(0.2 \pm 0.02) N$

Drehzahl [rpm]

1	2	3	4	$\phi$
253.6	253.8	256.0	255.4	254.7

Fläche pV-Diagramm [hPa cm<sup>3</sup>]

1	2	3	4	$\phi$
20220	21050	21170	21120	20890

*Barthauer*

### 3 Auswertung

*Hinweis: Soweit nicht anders angegeben, werden im folgenden Abschnitt alle Fehler nach der standardmäßigen Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.*

#### 3.1 Betrieb als Kältemaschine und quantitative Bestimmung der Kälteleistung

Zentral für die Bestimmung des Wirkungsgrades ist die Relation

$$\eta = \frac{Q_2}{W_M} \quad (17)$$

dabei entspricht die dem oberen Zylinderteil entzogene Wärmemenge  $Q_2$  gerade der elektrischen Arbeit  $W_H$ , für die Kompensation durch die Heizung. Gemessen haben wir die Größen  $I_H$ ,  $U_H$  zur Bestimmung der Leistung  $P_H$  der Heizung, sowie die Umlaufzahl  $f$  des Schwungrades. Mit diesen gilt der Zusammenhang

$$Q_2 = W_M = \frac{P_H}{f} = \frac{I_H U_H}{f}. \quad (18)$$

Damit erhalten wir für  $Q_2$  einen Wert von

$$Q_2 = (4.21 \pm 0.05) \text{J}.$$

Die Wärmemenge  $Q_1$ , welche an das Kühlwasser abgegeben wird, berechnen wir über die kalorische Zustandsgleichung

$$Q_1 = \frac{c_W \rho_W \Delta T \dot{V}}{f} \quad (19)$$

mit

$$\Delta Q_1 = Q_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta(\Delta T)}{(\Delta T)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \dot{V}}{\dot{V}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2}. \quad (20)$$

Dafür setzen wir einen Durchfluss von  $\dot{V} = (4.205 \pm 0.012) \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  und eine Temperaturdifferenz von  $\Delta T = (1.70 \pm 0.15) \text{K}$  ein und erhalten

$$Q_1 = (5.6 \pm 0.5) \text{J}. \quad (21)$$

Wie dem Messprotokoll zu entnehmen ist, stammen in den bisherigen Rechnungen Werte wie die Drehzahl  $f$  und der Durchfluss  $\dot{V}$  aus einer Reihe von  $N$  Messungen  $x_i$ . Für diese, sowie alle folgenden Fälle verwenden wir den klassischen Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (22)$$

sowie dem Standardfehler des Mittels nach

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2} \quad (23)$$

und rechnen mit  $x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ .

Zur Bestimmung der pro Umdrehung zugeführten mechanischen Arbeit durch den Motor ziehen wir die Werte  $I_M$  und  $U_M$  aus dem zweiten Aufgabenteil heran. Dies ist erlaubt, da der Motor für beide Versuchsteile unter den gleichen Bedingungen betrieben wurde. Mit diesen Werten gilt

$$W_M = \frac{U_M I_M}{f} = (9.6 \pm 0.5) \text{J}. \quad (24)$$

Mit den nun berechneten Werten würde im idealen Fall die Energiebilanz  $Q_1 = Q_2 + W_M$  gelten. Diese ist allerdings nur theoretisch erreichbar. In unserem Versuchsaufbau verzeichnen wir eine Energie von

$$\Delta Q = Q_2 + W_M - Q_1 = (8.1 \pm 0.7) \text{J}, \quad (25)$$

welche aus dem System verloren geht. Gründe dafür werden im Diskussionsteil näher beleuchtet werden.

Zunächst berechnen wir mit dem zu Beginn eingeführten Bruch den Wirkungsgrad der Kälteleistung zu

$$\eta = 0.440 \pm 0.022, \quad (26)$$

also in etwa 44%.

### 3.2 Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe

Abbildung Abbildung (6) zeigt dem Temperaturverlauf des Wassers im Reagenzglas, welches am oberen Zylinderbereich angebracht ist.

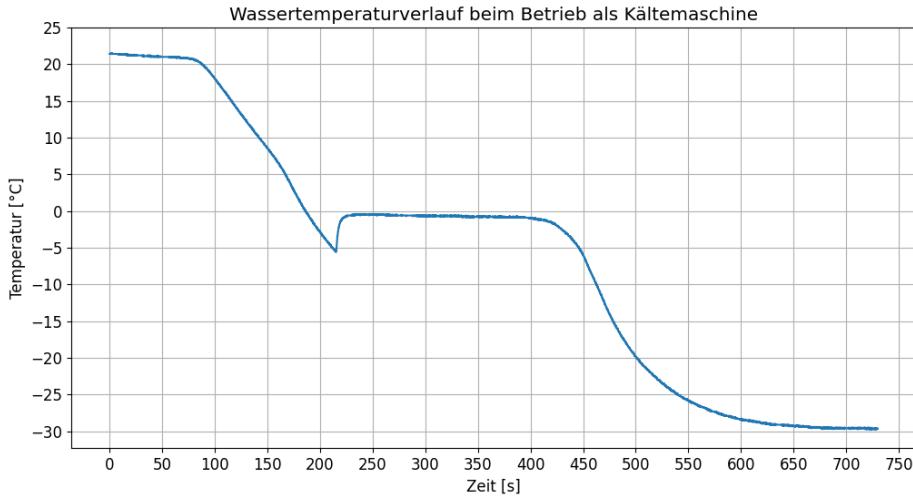


Abbildung 6: Wassertemperaturverlauf beim Betrieb als Kältemaschine für etwa 1mL Wasser.

Der Verlauf der Temperatur zeigt, ausgehen von der Ausgangstemperatur von etwa 22°C, einen nahezu perfekt linearen Abfall bis zur 0°C. Wir können hier einen sehr kurzen Zeitraum beobachten, in dem sich das lineare Verhalten bis -5°C fortsetzt, um kurz darauf sehr abrupt wieder auf 0°C zu springen. Dieses Verhalten des Wassers ist auf den Effekt der *Unterkühlung* zurückzuführen. Dabei wird das Wasser unter den Gefrierpunkt abgekühlt,

ohne dass der Phasenübergang einsetzt. Eben dieser dann einsetzende Phasenübergang ist es, welcher für das nachfolgende Plateau von etwa 230s bis 380s verantwortlich ist. Während der Gefrierzeit,  $t_f$ , wird hierbei nahezu alle Energie für den Übergang des Wassers von flüssig zu fest benötigt. Erst nachdem das Wasser vollständig gefroren ist, sinkt die Temperatur weiter ab, bis sie bei ca.  $-30^\circ\text{C}$  ein asymptotisches Minimum erreicht. Diese untere Grenze ist durch die maximale Kühlleistung der Kältemaschine bestimmt.

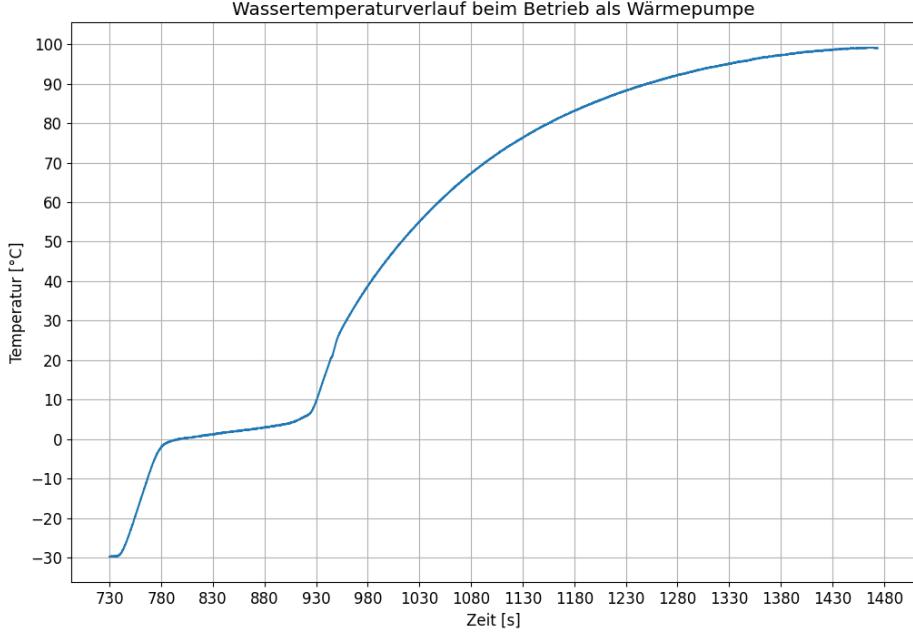


Abbildung 7: Wassertemperaturverlauf beim Betrieb als Wärmepumpe für etwa 1mL Wasser.

Der Temperaturverlauf beim Betrieb als Wärmepumpe, zu sehen in Abbildung (7), zeigt im Wesentlichen das gleiche Verhalten, nur in umgekehrter Reihenfolge. Was allerdings besonders auffällt, ist, dass der gesamte Prozess der Erwärmung des Wassers wesentlich schneller abzulaufen scheint. Dies könnte unter anderem durch einen Beitrag der Umgebungswärme, eine gezieltere Wärmeübertragung, und einen weniger energieintensiven Phasenübergang verursacht sein.

Nun möchten wir zusätzlich in diesem Versuchsteil die Kühlleistung der Kältemaschine berechnen. Dazu verwenden wir die Gefrierzeit  $t_f = (180 \pm 2)\text{s}$ , welche wir aus der Länge des Plateaus im Temperaturverlauf bestimmt haben. Für die notwendige Energie, um die Menge  $V_W$  Wasser zu vollständig zu gefrieren gilt der Zusammenhang

$$\Delta E_G = V_W \rho_W \lambda_W = m_W \lambda_W. \quad (27)$$

Dabei ist  $\lambda_W = 335 \frac{\text{J}}{\text{g}}$  die spezifische Schmelzwärme von Wasser. Die Kühlleistung erhalten wir daraus nach

$$P_G = \frac{\Delta E_G}{t_f}. \quad (28)$$

Diese entspricht schließlich nach unseren Messungen einem Wert von

$$P_G = (1.856 \pm 0.021) \frac{\text{J}}{\text{s}} \quad (29)$$

### 3.3 Betrieb als Wärmekraftmaschine

Wir installieren am oberen Zylinderteil nun erneut die Heizwendel, um den Motor als Wärmekraftmaschine zu betreiben. Die Heizwendel führt die elektrische Energie  $Q_{el}$  in Form von Wärme zu, welche der Motor zum Teil in die mechanische Arbeit  $W_{mech}$  umwandelt. Die zugeführte Energie teilt sich allerdings noch weiter auf, die komplette Energiebilanz lautet hierbei

$$Q_{el} = Q_v + W_{mech} + Q_{ab} + Q_R \quad (30)$$

$Q_v$  beschreibt Verluste bedingt durch Wärmeabstrahlung und Wärmeleitung, zusammen mit den Reibungsverlusten  $Q_R$  fassen wir diese Verluste zusammen zu

$$Q_V = Q_v + Q_R. \quad (31)$$

Gemeinsam mit der Wärme  $Q_{ab}$ , welche ungenutzt ins Kühlssystem abgeführt wird, können wir die Gleichung

$$Q_V = Q_{el} - Q_{ab} - W_{mech} \quad (32)$$

zur Berechnung der Verluste aufstellen.

$Q_{el}$  bestimmen wir anhand der Heizleistung pro Motorzyklus nach

$$Q_{el} = \frac{P_{el}}{f} = \frac{I_H U_H}{f}. \quad (33)$$

Die abgeführte Wärme  $Q_{ab}$  lässt sich erneut anhand der kalorischen Zustandsgleichung (19) bestimmen.  $P_{ab}$  entspricht gerade dem Zusammenhang  $P_{ab} = Q_{ab}f$ .

Die mechanische Arbeit  $W_{mech}$  bestimmen wir nach zwei verschiedenen Methoden. Erstere macht sich die Fläche der  $pV$ -Diagramme zunutze. Die  $pV$ -Diagramme hatten wir während dem Versuch mit der Software *Cassy-Lab* aufgezeichnet. Diese erlaubt uns außerdem, direkt ein Integral über die Fläche des aufgezeichneten Diagramms zu berechnen. Diese entspricht der Arbeit  $W_{pV}(= Q_{pV})$ , welche wir lediglich zur Vergleichbarkeit in Joule umrechnen. Auch hier ist  $P_{pV}$  durch  $Q_{pV} \cdot f$  gegeben.

Eine andere Variante, um die mechanische Arbeit zu berechnen nutzt das Drehmoment durch den Bremszaum aus. Dieser war von der Antriebswelle aus über einen Hebel der Länge  $l$  mit einem Federkraftmesser verbunden. Aus der eingestellten Kraft können wir das ausgeübte Drehmoment bestimmen nach

$$D = lF. \quad (34)$$

Für die Arbeit abgegebene pro Motorzyklus  $W_D$  gilt dann der einfache Zusammenhang

$$W_D = 2\pi D = \frac{P_D}{f}. \quad (35)$$

Wir berechnen die angegebenen Werte zunächst für die Leerlaufmessung ohne, dass der Bremszaum angebracht ist, diese sind Tabelle (1) zu entnehmen.

Der hier aufgeführte thermische Wirkungsgrad  $\eta_{th}$  entspricht dem Verhältnis der mechanischen Arbeit zur zugeführten Wärme

$$\eta_{th} = \frac{W_{pV}}{Q_{el}}. \quad (36)$$

	$f$ [ $\frac{1}{s}$ ]	$P_{el}$ [ $\frac{J}{s}$ ]	$Q_{el}$ [J]	$P_{ab}$ [ $\frac{J}{s}$ ]	$Q_{ab}$ [J]	$P_{pV}$ [ $\frac{J}{s}$ ]	$Q_{pV}$ [J]	$\eta_{th}$
Wert	4.815	144.8	30.08	57.3	11.9	7.49	1.556	0.0517
Fehler	$\pm 0.011$	$\pm 0.7$	$\pm 0.16$	$\pm 2.5$	$\pm 0.6$	$\pm 0.09$	$\pm 0.017$	$\pm 0.0007$

Tabelle 1: Berechnete Werte aus der Leerlaufmessung

Für die Motorverluste  $Q_V$  erhalten wir in diesem Messgang, nach Formel (32), einen Wert von

$$Q_V = 16.6 \pm 0.6 \text{ J}. \quad (37)$$

In Tabelle (3.3) betrachten wir die Werte bei angebrachtem Bremszaum. Diese sind nach den oben genannten Formeln berechnet. Zusätzlich gilt führen wir hier den effektiven Wirkungsgrad als Verhältnis der am Bremszaum verrichteten mechanischen Arbeit zur zugeführten Wärme,

$$\eta_{eff} = \frac{W_D}{Q_{el}}. \quad (38)$$

Einstellung	$F$ [N]	$f$ [ $\frac{1}{s}$ ]	$W_D$ [J]	$W_{pV}$ [J]	$\eta_{th}$	$\eta_{eff}$
<b>0.8N</b>	0.80	3.194	1.26	2.739	0.0604	0.0277
	$\pm 0.02$	$\pm 0.012$	$\pm 0.04$	$\pm 0.027$	$\pm 0.0007$	$\pm 0.0008$
<b>0.6N</b>	0.60	3.505	0.94	2.551	0.0617	0.0228
	$\pm 0.02$	$\pm 0.007$	$\pm 0.04$	$\pm 0.007$	$\pm 0.0004$	$\pm 0.0008$
<b>0.4N</b>	0.40	3.831	0.63	2.316	0.0613	0.0166
	$\pm 0.02$	$\pm 0.006$	$\pm 0.04$	$\pm 0.014$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0009$
<b>0.2N</b>	0.20	4.245	0.31	2.089	0.0612	0.0092
	$\pm 0.02$	$\pm 0.010$	$\pm 0.04$	$\pm 0.023$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0010$

Tabelle 2: Messwerte mit Unsicherheiten für verschiedene Messungen

Die Werte für den thermischen bzw. effektiven Wirkungsgrad aus Tabelle (3.3) sind noch einmal in den Plots (8) bzw. (9) als Funktion der Motorfrequenz  $f$  dargestellt.

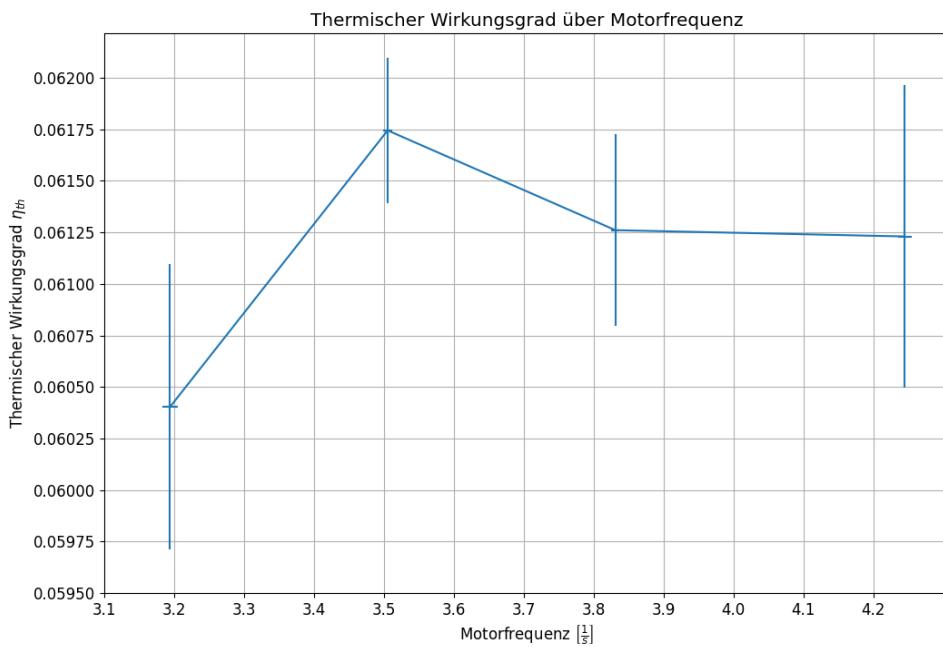


Abbildung 8: Thermischer Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine  $\eta_{th}$  nach Motorfrequenz.

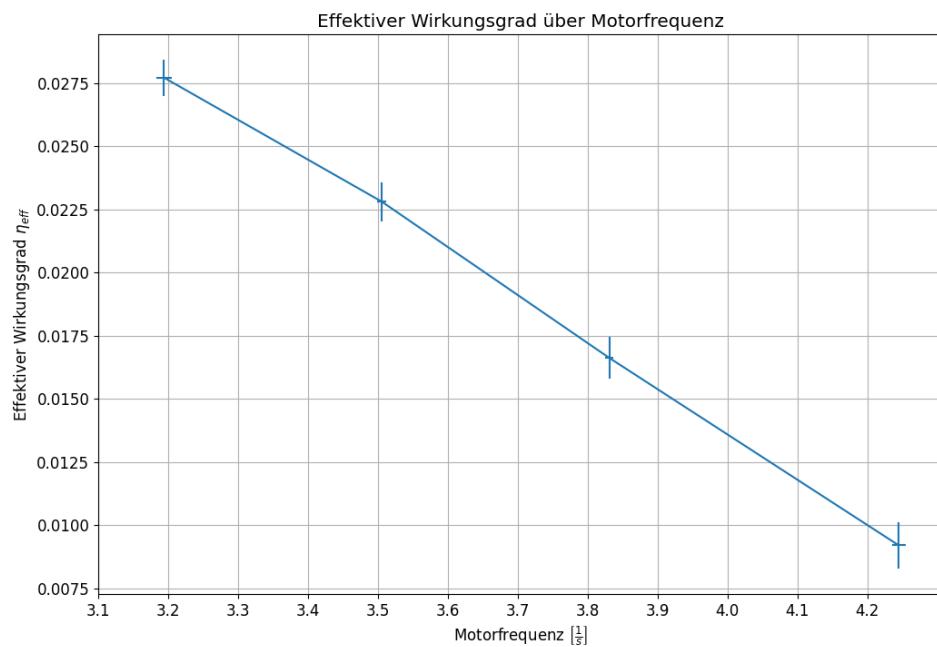


Abbildung 9: Effektiver Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine  $\eta_{th}$  nach Motorfrequenz.

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

In Versuch 222 setzten wir uns mit dem Heißluft- bzw. Stirlingmotor auseinander. Dieser wurde im Jahr 1816 von Robert Stirling zum Patent angemeldet. Die Funktionsweise des Heißluftmotors basiert auf einem thermodynamischen Kreisprozess aus abwechselnden isothermen und isochoren Zustandsänderungen, welchen wir im Versuch quantitativ untersuchten.

Im ersten Versuchsteil wurde der Heißluftmotor zunächst nicht als Motor im klassischen Sinne verwendet. Stattdessen trieben wir diesen mit einem externen Motor an, führten also mechanische Arbeit von außen zu. Hierdurch ist es möglich, den eigentlichen Kreisprozess des Motors umzukehren und ihn als Kältemaschine oder auch Wärmepumpe, zur Abkühlung bzw. Aufheizung eines Reservoirs zu verwenden. Die erste Aufgabe war es, die Kälteleistung und Wirkungsgrad der Kältemaschine zu berechnen, sowie die Energiebilanz im System zu untersuchen. Hierzu montierten wir am Zylinder der Kältemaschine eine Heizwendel, mit welcher die entzogene Wärme kompensiert wurde. Anhand der Heizleistung berechneten wir dann die Kälteleistung pro Motorumdrehung zu

$$Q_2 = (4.21 \pm 0.05)\text{J},$$

was in Relation zur zugeführten mechanischen Arbeit einem Wirkungsgrad von

$$\eta = 0.440 \pm 0.022$$

entsprach. Eine Untersuchung der Energiebilanz zeigte auf, dass dem System im Prozess eine Energie von

$$\Delta Q = (8.1 \pm 0.7)\text{J}$$

verloren geht. Diese großen Energieverluste könnten sich auf Wärmeverluste durch unzureichende Isolation, mechanische Reibung, ineffiziente Energieübertragung und Verluste im Kühlkreislauf zurückführen lassen. Zusätzlich könnten Messfehler oder Unsicherheiten sowie das nicht-ideale Verhalten des realen Stirlingprozesses, dies zeigt sich durch die abgerundeten Isochoren, eine Rolle spielen. Auch Effizienzverluste des Elektromotors bei der Umwandlung von elektrischer Energie zu mechanischer Arbeit können Gründe für die Abweichungen sein.

Für den zweiten Versuchsteil trieben wir den Heißluftmotor weiterhin extern an. Anstelle der Heizwendel montierten wir nun ein Reagenzglas mit Wasser am Motor. Wir betrieben diesen zunächst erneut als Kältemaschine, um das Wasser auf etwa  $-30^\circ\text{C}$  herunterzukühlen und anschließend als Wärmepumpe um das Wasser wieder aufzuheizen, bis es in etwa  $100^\circ\text{C}$  erreichte. Über den kompletten Vorgang hinweg zeichneten wir die Wassertemperatur auf. Eine detaillierte Interpretation des Temperaturverlaufs ist im entsprechenden Abschnitt der Ausarbeitung zu finden. Abbildung Abbildung (10) zeigt noch einmal den interessantesten Teil des Temperaturverlaufs um und unter der  $0^\circ\text{C}$ -Marke.

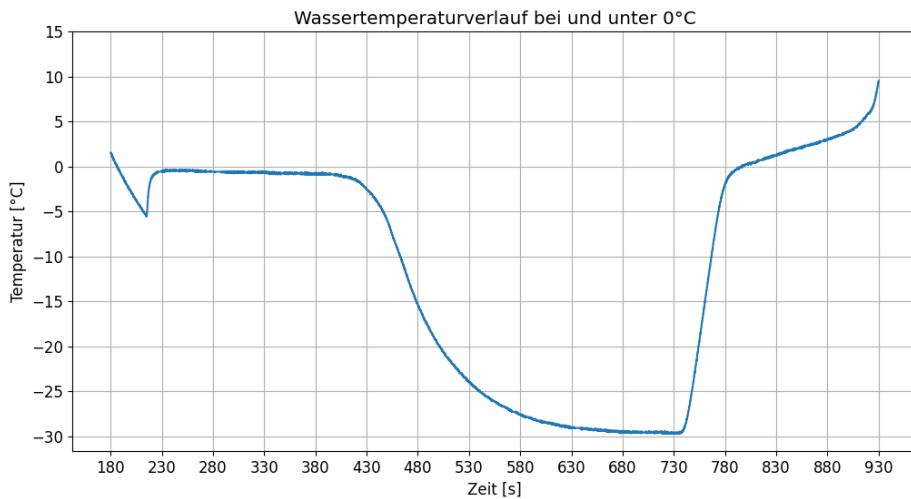


Abbildung 10: Wassertemperaturverlauf beim Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe für etwa 1mL Wasser um und unter 0°C.

Besonderes Augenmerk legten wir hierbei auf den Plateaubereich, der sich ab etwa Sekunde 230 einstellte. In dieser Zeit wurde nahezu alle Energie für den Phasenübergang des Wassers zu Eis benötigt, weshalb es hier nicht weiter abgekühlt wird. Aus der Länge dieses Plateaus konnten wir anhand der spezifischen Schmelzwärme von Wasser erneut die Kälteleistung der Kältemaschine berechnen. Hierbei kamen wir auf einen Wert von

$$P_G = (1.856 \pm 0.021) \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Diese Kühlleistung ist sehr viel geringer, als die zuvor mittels der Kompensationsmessung bestimmte Kühlleistung. Ursachen dafür könnten wie folgt aussehen. In Abschnitt 3.1 maßen wir den Strom und die Spannung, welche Heizwendel anliegen, um daraus die Heizleistung zu bestimmen. Hierbei sind wir davon ausgegangen, dass die Umwandlung von elektrischer Energie zu Wärme ideal abläuft, was in Realität nicht der Fall ist. Weiter beziehen die Berechnungen in 3.1 die Kompensation aller Wärmeverluste des Systems mit ein. Dies sind neben dem tatsächlichen Wärmeentzug durch die Kältemaschine auch die bereits erwähnte Verluste durch unzureichende Isolation und Abstrahlung. Im zweiten Versuchsteil betrachteten wir über die Temperaturnessung ausschließlich die notwendige Energie für den Phasenübergang.

In Versuchsteil drei beschäftigen wir uns mit der Umwandlung von zugeführter Wärme in mechanische Arbeit. Hierzu brachten wir wieder die Heizwendel am Zylinder des Motors an. In einer Leerlaufmessung bestimmten wir zunächst die zugeführte elektrische Leistung und Wärme, die an das Kühlssystem abgeführt Wärme, sowie die vom Motor aufgebrachte mechanische Arbeit. Für letzteres zeichneten wir mit der Software *Cassy Lab* das *pV*-Diagramm des Kreisprozesses auf und berechneten die mechanische Arbeit aus dessen Fläche. Als Verhältnis der mechanischen Arbeit zur zugeführten elektrischen Energie bestimmten wir den thermischen Wirkungsgrad zu

$$\eta_{th} = 0.0517 \pm 0.0007.$$

Dieser ist sehr gering, was sich auch in den sehr hohen Verlusten in einer Höhe von

$$Q_V = 16.6 \pm 0.6 \text{ J}$$

durch Wärmeabstrahlung, Wärmeleitung und Reibung widerspiegelt. Die Gründe für die Höhe der Verluste sind größtenteils dieselben, wie sie auch bereits zu den vorherigen Versuchsteilen genannt wurden. Deshalb werden wir an dieser Stelle nicht noch einmal näher auf diese eingehen.

Für den zweiten Abschnitt des dritten Versuchsteils brachten wir an der Antriebswelle des Heißluftmotors einen Bremszaum an, welcher mit einem Federkraftmesser verbunden war. Für vier unterschiedliche Einstellungen der Bremskraft ermittelten wir die vom Motor ausgeübten Drehmomente. Diese nutzten wir, neben der Fläche des  $pV$ -Diagramms, als eine weitere Weise, die verrichtete mechanische Arbeit des Motors zu berechnen. Als Verhältnis der durch die Drehmomentmessung berechneten mechanischen Arbeit zur zugeführten Wärme berechneten wir in dieser Versuchsreihe unter anderem den effektiven Wirkungsgrad  $\eta_{th}$ . Tabelle (4) fasst die errechneten Wirkungsgrade zu den eingestellten Bremskräften noch einmal zusammen.

Eingestellte Kraft	$f \left[ \frac{1}{s} \right]$	$\eta_{th}$	$\eta_{eff}$
<b>0.8N</b>	3.194	0.0604	0.0277
	$\pm 0.012$	$\pm 0.0007$	$\pm 0.0008$
<b>0.6N</b>	3.505	0.0617	0.0228
	$\pm 0.007$	$\pm 0.0004$	$\pm 0.0008$
<b>0.4N</b>	3.831	0.0613	0.0166
	$\pm 0.006$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0009$
<b>0.2N</b>	4.245	0.0612	0.0092
	$\pm 0.0010$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0010$

Tabelle 3: Berechneter thermischer und effektiver Wirkungsgrad mit Unsicherheiten für verschiedene Bremskrafteinstellungen

Betrachten wir den funktionalen Verlauf der Wirkungsgrade, auch noch einmal grafisch dargestellt in den Abbildungen (8) und (9), fällt auf, dass der thermische Wirkungsgrad, unter Beachtung der großen Fehlerbereiche, weitestgehend konstant bleibt, während der effektive Wirkungsgrad mit steigender Motorfrequenz abfällt. Diese Beobachtungen lassen sich bereits durch die mathematische Betrachtung erklären. Der thermische Wirkungsgrad lässt sich durch Einsetzen auf das Verhältnis  $\eta_{th} = \frac{P_{PV}}{P_{el}} \cdot f$  bringen, hier kürzt sich die Frequenz  $f$  also heraus, was die Unabhängigkeit von dieser erklärt. Den effektiven Wirkungsgrad führen wir auf den Bruch  $\eta_{eff} = \frac{2\pi D f}{P_{el}}$  zurück. Wodurch sich die Proportionalität zur Frequenz zeigt.

Die beiden Wirkungsgrade sind unterschiedlich, weil  $\eta_{th}$  die gesamte mechanische Arbeit im thermodynamischen Kreisprozess betrachtet, während nur  $\eta_{eff}$  die effektiv abgegebene Arbeit am Bremszaum berücksichtigt. Die Diskrepanz resultiert aus Reibungsverlusten, ungenutzter Energie und Ineffizienzen im Motor.

# Python Code, Hauptprogramm

auswertung222

February 11, 2025

```
[1]: import matplotlib.pyplot as plt
      import numpy as np

      plt.rcParams.update({'font.size': 12})

      %run ../../lib.ipynb

[2]: class DatenAufgabe1:
      heizstrom = ValErr(0.94, 0.01) * 5.0
      heizspannung = ValErr(4.74, 0.01)
      durchfluss = [ 252.2, 251.2, 254.9, 253.0, 250.3 ]
      drehzahl = [ 316.6, 318.8, 317.6, 315.9, 317.9 ] # übernommen aus Aufgabe 2
      T_zu = ValErr(17.9, 0.1) + 273.15
      T_ab = ValErr(19.6, 0.1) + 273.15

      class DatenAufgabe2:
          motorstrom = ValErr(2.1, 0.1)
          motorspannung = ValErr(24.1, 0.1)
          drehzahl = [ 316.6, 318.8, 317.6, 315.9, 317.9 ]
          gefrierzeit = ValErr(180.0, 2.0)

      class DatenAufgabe3a:
          heizstrom = ValErr(2.51, 0.01) * 5
          heizspannung = ValErr(11.54, 0.03)
          durchfluss = [ 252.0, 249.9, 243.1, 251.9, 253.3 ]
          T_zu = ValErr(18.0, 0.1) + 273.15
          T_ab = ValErr(21.3, 0.1) + 273.15
          drehzahl = [ 286.6, 288.8, 289.9, 290.4, 288.9 ]
          flaechePV = [ 15600, 15990, 15420, 15220 ]

      class DatenAufgabe3b08:
          bremskraft = ValErr(0.8, 0.02)
          drehzahl = [ 190.0, 191.1, 192.3, 193.2 ]
          flaechePV = [ 27250, 26710, 27640, 27950 ]

      class DatenAufgabe3b06:
          bremskraft = ValErr(0.6, 0.02)
```

```

drehzahl = [ 211.3, 210.2, 209.4, 210.4 ]
flaechePV = [ 25570, 25320, 25610, 25540 ]

class DatenAufgabe3b04:
    bremskraft = ValErr(0.4, 0.02)
    drehzahl = [ 229.6, 229.2, 230.8, 229.9 ]
    flaechePV = [ 23420, 23000, 23340, 22870 ]

class DatenAufgabe3b02:
    bremskraft = ValErr(0.2, 0.02)
    drehzahl = [ 253.6, 253.8, 256.0, 255.4 ]
    flaechePV = [ 20220, 21050, 21170, 21120 ]

class Konst:
    C_W = 4180 # J / (kg K)
    rho_W = 997 # kg / m³
    lambda_W = 335 # J / g
    V_W = 1 # ml

```

## 0.1 Aufgabe 1

```

[3]: v_dot = ValErr.fromMeasurements(DatenAufgabe1.durchfluss) * (1.0e-6 / 60.)
f = ValErr.fromMeasurements(DatenAufgabe1.drehzahl) * (1. / 60.)
T_diff = DatenAufgabe1.T_ab - DatenAufgabe1.T_zu

print_all(v_dot.strfmtf(4, -6, "Vdot"), f.strfmtf(4, 0, "f"), T_diff.strfmtf(4, ↴0, "ΔT"), "-----")

# Heizleistung
P_H = DatenAufgabe1.heizstrom * DatenAufgabe1.heizspannung

# Motorleistung
P_M = DatenAufgabe2.motorstrom * DatenAufgabe2.motorspannung

# Zugeführte mechanische Arbeit pro Umdrehung
W_M = P_M / f

# An das Kühlwasser abgegebene Wärmemenge, Kalorische Zustandsgleichung
Q_1 = (Konst.C_W * Konst.rho_W * T_diff * v_dot) / f
Q_1.setErr(Q_1.val * np.sqrt(T_diff.relerr()**2 + v_dot.relerr()**2 + f.relerr()**2))

# Am Zylinderkopf entzogene Wärmemenge
Q_2 = P_H / f

# Abweichung von der idealen "Wärmebilanz"

```

```

DQ = Q_2 + W_M - Q_1
DQ.setErr(np.sqrt(np.sum([Q_2.err**2, W_M.err**2, Q_1.err**2])))

# Wirkungsgrad
eta = (Q_2 / W_M)

print_all(P_H.strfmtf(4, 0, "P_H"), P_M.strfmtf(4, 0, "P_M"), W_M.strfmtf(4, 0,
    ↪"W_M"), Q_1.strfmtf(4, 0, "Q_1"), Q_2.strfmtf(4, 0, "Q_2"), DQ.strfmtf(4, 0,
    ↪"ΔQ"), eta.strfmtf(4, 0, ""))

```

Vdot = 4.2053e-6 ± 0.0132e-6  
f = 5.2893 ± 0.0084  
ΔT = 1.7000 ± 0.1414  
-----  
P\_H = 22.2780 ± 0.2416  
P\_M = 50.6100 ± 2.4191  
W\_M = 9.5683 ± 0.4576  
Q\_1 = 5.6327 ± 0.4690  
Q\_2 = 4.2119 ± 0.0462  
ΔQ = 8.1474 ± 0.6569  
= 0.4402 ± 0.0216

## 0.2 Aufgabe 2

### Kälteleistung

```
[8]: masse_W = Konst.rho_W * Konst.V_W * 1e-6

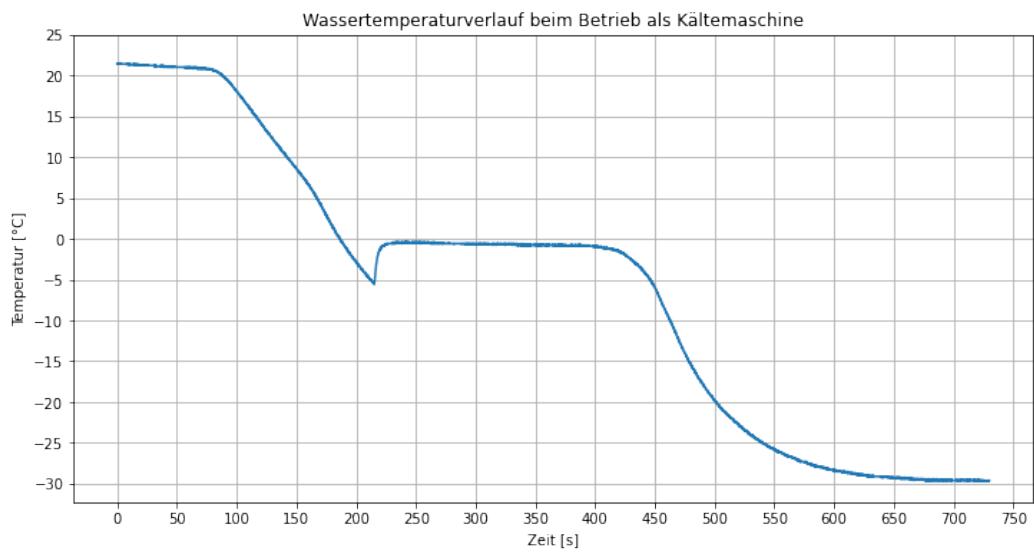
print('Kälteleistung aus Gefrierzeit:', (masse_W * Konst.lambda_W * 1e3 /
    ↪DatenAufgabe2.gefrierzeit).strfmtf(5, 0))
```

Kälteleistung aus Gefrierzeit: 1.85553 ± 0.02062

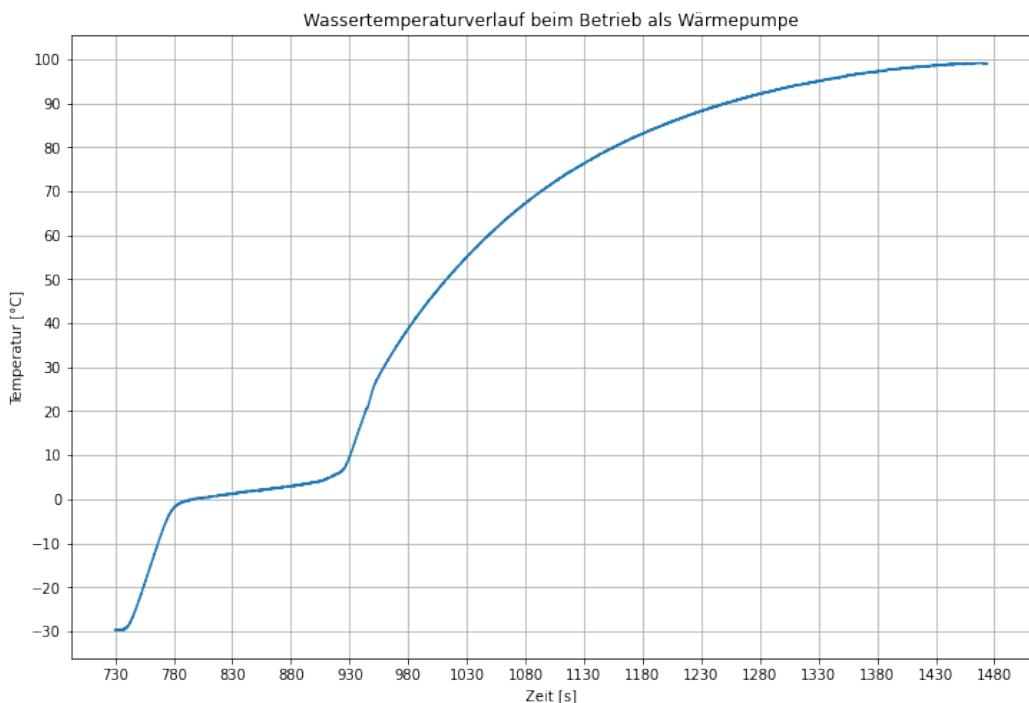
### Temperaturverlauf

```
[9]: temperaturverlauf = np.loadtxt('aufgabe2_wassertemp_daten.txt', skiprows=1,
    ↪usecols=(0,1), unpack=True)
```

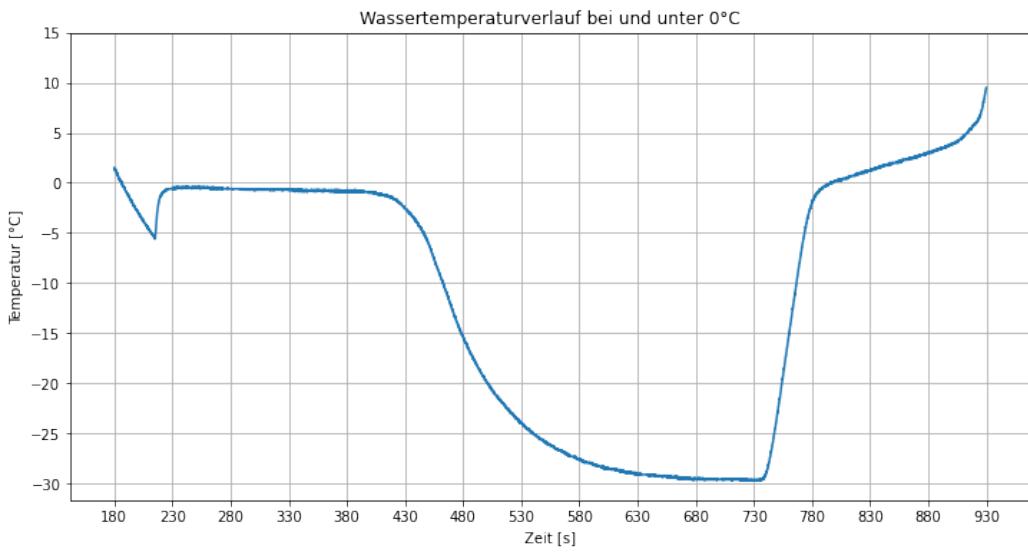
```
[10]: plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(temperaturverlauf[0][0:7300], temperaturverlauf[1][0:7300])
plt.ylabel(r'Temperatur [°C]')
plt.xlabel('Zeit [s]')
plt.yticks(np.arange(-30, 30, 5))
plt.xticks(np.arange(0, 760, 50))
plt.title(r'Wassertemperaturverlauf beim Betrieb als Kältemaschine')
plt.grid()
plt.savefig("tempverlauf_kalt.png", format="png")
```



```
[11]: plt.figure(figsize=(12,8))
plt.plot(temperaturverlauf[0][7300:], temperaturverlauf[1][7300:])
plt.ylabel(r'Temperatur [°C]')
plt.xlabel('Zeit [s]')
plt.yticks(np.arange(-30, 110, 10))
plt.xticks(np.arange(730, 1500, 50))
plt.title(r'Wassertemperaturverlauf beim Betrieb als Wärmepumpe')
plt.grid()
plt.savefig("tempverlauf_warm.png", format="png")
```



```
[12]: plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(temperaturverlauf[0][1800:9300], temperaturverlauf[1][1800:9300])
plt.ylabel(r'Temperatur [°C]')
plt.xlabel('Zeit [s]')
plt.yticks(np.arange(-30, 20, 5))
plt.xticks(np.arange(180, 950, 50))
plt.title(r'Wassertemperaturverlauf bei und unter 0°C')
plt.grid()
plt.savefig("tempverlauf_unter0.png", format="png")
```



### 0.3 Aufgabe 3

#### Leerlaufmessung

```
[19]: v_dot = ValErr.fromMeasurements(DatenAufgabe3a.durchfluss) * (1.0e-6 / 60.)
f = ValErr.fromMeasurements(DatenAufgabe3a.drehzahl) * (1. / 60.)
T_diff = DatenAufgabe3a.T_ab - DatenAufgabe3a.T_zu

P_el = DatenAufgabe3a.heizstrom * DatenAufgabe3a.heizspannung
Q_el = P_el / f

P_ab = Konst.C_W * Konst.rho_W * T_diff * v_dot
Q_ab = P_ab / f

#1 hPa cm^-3 = 10^-4 J

W_pV = Q_pV = ValErr.fromMeasurements(DatenAufgabe3a.flaechePV) * 10**-4
P_pV = W_pV * f

Q_V = Q_el - Q_ab - W_pV
Q_V.setErr(np.sqrt(np.sum([Q_el.err**2, Q_ab.err**2, W_pV.err**2])))

eta_th = W_pV / Q_el

print_all(f.strfmtf(4, 0, "f"), P_el.strfmtf(4, 0, "P_el"), Q_el.strfmtf(4, 0, "Q_el"),
          P_ab.strfmtf(4, 0, "P_ab"), Q_ab.strfmtf(4, 0, "Q_ab"),
```

```

        P_pV.strfmf(4, 0, "P_pV"), Q_pV.strfmf(4, 0, "Q_pV"), Q_V.
        ↪strfmf(4, 0, "Q_V"), eta_th.strfmf(5, 0, "eta_th"), ↪
        ↪"-----")
    
```

```

def eta_err_calc(var_w, var_f, var_p):
    eta_value = (var_w.val * var_f.val) / var_p.val
    eta_error = math.sqrt(np.sum([
        ((var_f.val / var_p.val) * var_w.err )**2 +
        ((var_w.val / var_p.val) * var_f.err )**2 +
        ((var_w.val * var_f.val / var_p.val)**2) * var_p.err )**2]))
    
```

```

    return ValErr(eta_value, eta_error)

```

```

def eta_brems(daten):
    W_D_br = 0.25 * daten.bremskraft * 2 * np.pi
    W_pV_br = ValErr.fromMeasurements(daten.flaechePV) * 10**-4
    f_br = ValErr.fromMeasurements(daten.drehzahl) * (1. / 60.)
    eta_th_br = eta_err_calc(W_pV_br, f_br, P_el)
    eta_eff_br = eta_err_calc(W_D_br, f_br, P_el)

    print_all(daten.bremskraft.strfmf(2, 0, "F"), f_br.strfmf(4, 0, "f"),
    ↪W_D_br.strfmf(4, 0, "W_D"), W_pV_br.strfmf(4, 0, "W_pV"), eta_th_br.
    ↪strfmf(5, 0, "eta_th"), eta_eff_br.strfmf(5, 0, "eta_eff"), ↪
    ↪"-----")
    
```

```

    return (eta_th_br, eta_eff_br, f_br)

```

```

etas = [eta_brems(DatenAufgabe3b08()), eta_brems(DatenAufgabe3b06()),
    ↪eta_brems(DatenAufgabe3b04()), eta_brems(DatenAufgabe3b02())]
    
```

```

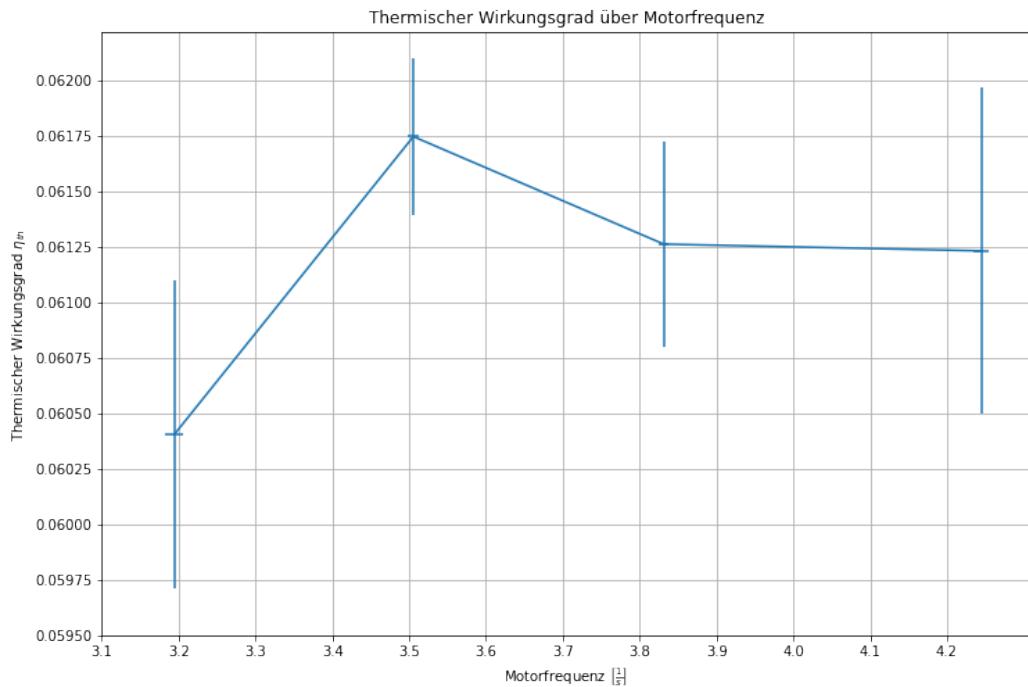
f = 4.8153 ± 0.0109
P_el = 144.8270 ± 0.6890
Q_el = 30.0762 ± 0.1584
P_ab = 57.3117 ± 2.4912
Q_ab = 11.9019 ± 0.5180
P_pV = 7.4915 ± 0.0806
Q_pV = 1.5557 ± 0.0164
Q_V = 16.6185 ± 0.5420
eta_th = 0.05173 ± 0.00061
-----
F = 0.80 ± 0.02
f = 3.1942 ± 0.0116
W_D = 1.2566 ± 0.0314
W_pV = 2.7388 ± 0.0267
eta_th = 0.06040 ± 0.00069
eta_eff = 0.02772 ± 0.00071
    
```

```

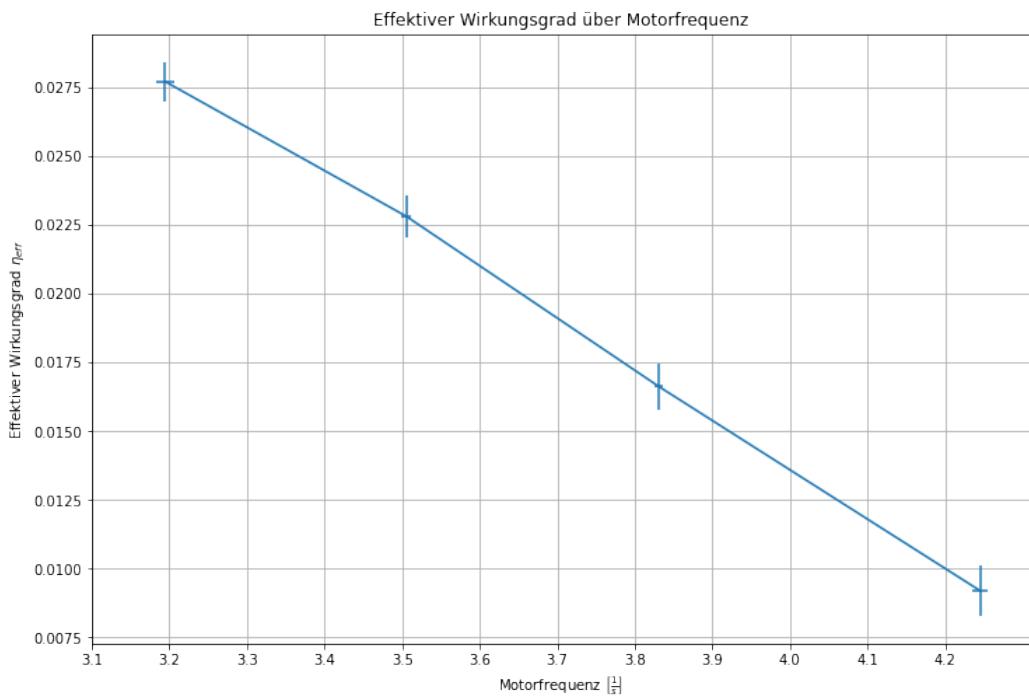
-----
F = 0.60 ± 0.02
f = 3.5054 ± 0.0065
W_D = 0.9425 ± 0.0314
W_pV = 2.5510 ± 0.0065
eta_th = 0.06174 ± 0.00035
eta_eff = 0.02281 ± 0.00077
-----
F = 0.40 ± 0.02
f = 3.8312 ± 0.0057
W_D = 0.6283 ± 0.0314
W_pV = 2.3157 ± 0.0132
eta_th = 0.06126 ± 0.00046
eta_eff = 0.01662 ± 0.00084
-----
F = 0.20 ± 0.02
f = 4.2450 ± 0.0099
W_D = 0.3142 ± 0.0314
W_pV = 2.0890 ± 0.0225
eta_th = 0.06123 ± 0.00073
eta_eff = 0.00921 ± 0.00092
-----
```

```
[20]: eta_th_val = [x[0].val for x in etas]
eta_th_err = [x[0].err for x in etas]
eta_eff_val = [x[1].val for x in etas]
eta_eff_err = [x[1].err for x in etas]
f_br_val = [x[2].val for x in etas]
f_br_err = [x[2].err for x in etas]
```

```
[21]: plt.figure(figsize=(12,8))
plt.errorbar(f_br_val, eta_th_val, xerr=f_br_err, yerr=eta_th_err)
plt.xticks(np.arange(3.1, 4.3, 0.1))
plt.yticks(np.arange(0.0595, 0.062, 0.00025))
plt.ylabel(r'Thermischer Wirkungsgrad $\eta_{th}$')
plt.xlabel(r'Motorfrequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$')
plt.title(r'Thermischer Wirkungsgrad über Motorfrequenz')
#plt.gca().invert_xaxis()
plt.grid()
plt.savefig("eta_th_freq.png", format="png")
```



```
[22]: plt.figure(figsize=(12,8))
plt.errorbar(f_br_val, eta_eff_val, xerr=f_br_err, yerr=eta_eff_err)
plt.xticks(np.arange(3.1, 4.3, 0.1))
plt.yticks(np.arange(0.0075, 0.0280, 0.0025))
plt.ylabel(r'Effektiver Wirkungsgrad $\eta_{eff}$')
plt.xlabel(r'Motorfrequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$')
plt.title(r'Effektiver Wirkungsgrad über Motorfrequenz')
#plt.gca().invert_xaxis()
plt.grid()
plt.savefig("eta_eff_freq.png", format="png")
```



[ ] :

# Python Code, Bibliothek

lib

February 11, 2025

```
[3]: def floatfmt(v, prec, exp):
       return f"{v/10**exp}:0={prec}f}{f'e{exp}' if exp != 0 else ''}"
```

```
[1]: import math
      import numpy as np

      class ValErr:
          val: float = 0
          err: float = 0
          err_set = False

          def __init__(self, val, err=0):
              self.val = val
              if err != 0:
                  self.err_set = True
                  self.err = err

          def getTuple(self):
              return (self.val, self.err)

          def setErr(self, err_value):
              self.err_set = True
              self.err = err_value

          @classmethod
          def fromMeasurements(self, measurements):
              return ValErr(np.mean(measurements), (1 / math.sqrt(len(measurements))) ↴
                           * np.std(measurements, ddof=1))

          @classmethod
          def fromTuple(self, tup):
              return ValErr(tup[0], tup[1])

          @classmethod
          def fromFit(self, popt, pcov, i):
              return ValErr(popt[i], np.sqrt(pcov[i][i]))
```

```

@classmethod
def fromFitAll(self, popt, pcov):
    for i in range(0, len(popt)):
        yield ValErr(popt[i], np.sqrt(pcov[i][i]))

@classmethod
def fromValPerc(self, v, perc):
    return ValErr(v, v * perc/100)

def strfmt(self, prec=2):
    if self.err != 0:
        return fr"{{self.val:.{prec}e} ± {self.err:.{prec}e}}"
    else:
        return f"{{self.val:.{prec}e}}"

def strfmtf(self, prec, exp, name = ""):
    prefix = ""
    if name != "":
        prefix = f"{{name}} = "

    if self.err != 0:
        return prefix + fr"{{floatfmt(self.val, prec, exp)} ± {{floatfmt(self.
→err, prec, exp)}}}"
    else:
        return prefix + f"{{floatfmt(self.val, prec, exp)}}"

def strfmtf2(self, prec, exp, name = ""):
    prefix = ""
    if name != "":
        prefix = f"{{name}} = "

    if self.err != 0:
        return prefix + fr"{{f'(' if exp != 0 else ''){{self.val/10**exp}:.
→0=1.{prec}f} ± {{self.err/10**exp}:0=1.{prec}f}{f')e{exp}}' if exp != 0 else_
→''))"
    else:
        return prefix + f"{{floatfmt(self.val, prec, exp)}}"

def strltx(self, prec=2):
    if self.err != 0:
        return fr"{{self.val:.{prec}e} \pm {self.err:.{prec}e}}"
    else:
        return f"{{self.val}}"

def relerr(self):
    return self.err / self.val

```

```

def sigmadiff(self, other):
    return np.abs(self.val - other.val) / np.sqrt(self.err**2 + other.
→err**2)

def __repr__(self):
    return f"ValErr({self.val}, {self.err})"

def __radd__(self, other):
    return self.__add__(other)

def __add__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(self.val + other.val, math.sqrt(self.err**2 + other.
→err**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(self.val + other, self.err)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
→__class__}' and '{type(other)}'")

def __rsub__(self, other):
    return self.__sub__(other)

def __sub__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(self.val - other.val, math.sqrt(self.err**2 + other.
→err**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(self.val - other, self.err)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
→__class__}' and '{type(other)}'")

def __rmul__(self, other):
    return self.__mul__(other)

def __mul__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(self.val * other.val, math.sqrt((other.val * self.
→err)**2 + (self.val * other.err)**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(self.val * other, self.err * other)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
→__class__}' and '{type(other)}'")

```

```

def __rtruediv__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(other.val / self.val, math.sqrt((other.err / self.
val)**2 + (other.val * self.err / self.val**2)**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(other / self.val, np.abs(other / self.val**2) * self.
err)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
__class__}' and '{type(other)}'")

def __truediv__(self, other):
    if isinstance(other, self.__class__):
        return ValErr(self.val / other.val, math.sqrt((self.err / other.
val)**2 + (self.val * other.err / other.val**2)**2))
    elif isinstance(other, float) or isinstance(other, int):
        return ValErr(self.val / other, self.err / other)
    else:
        raise TypeError(f"unsupported operand type(s) for +: '{self.
__class__}' and '{type(other)}'")

```

```
[5]: def spacearound(dat, add):
       return np.linspace(dat[0] - add, dat[len(dat)-1] + add)
```

```
[6]: def div_with_err(a, a_err, b, b_err):
       err = (1 / b) * np.sqrt(a_err**2 + (a * b_err / b)**2)
       return (a / b, err)
```

```
[7]: def print_all(*args):
       for e in args:
           print(e)
```

```
[ ]:
```