

Physikalisches Anfängerpraktikum III für Lehramtsstudierende

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Henri Valentin Lurtz

12.02.2025

Versuch 234: Lichtquellen und Gitterspektroskopie

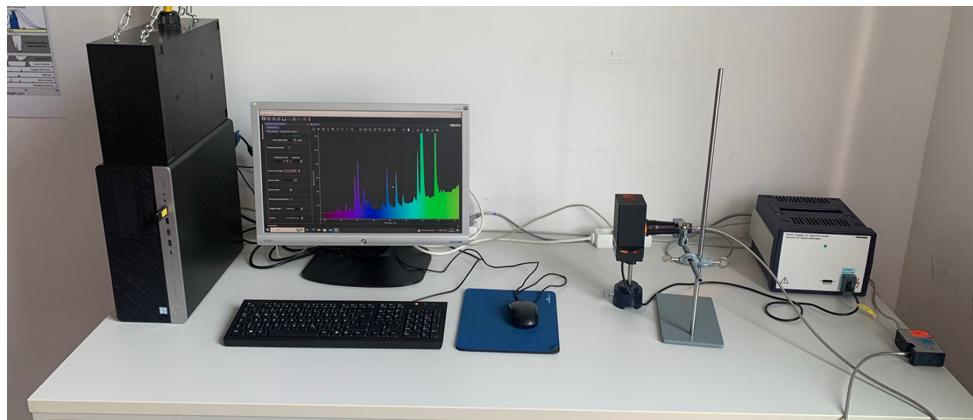


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.2 Versuchsdurchführung	4
2 Messprotokoll	5
3 Auswertung	7
3.1 Untersuchung des Sonnenlichtspektrums	7
3.2 Vergleich der Spektren verschiedener Leuchtmitte	10
3.3 Untersuchung des Natriumspektrums	12
4 Zusammenfassung und Diskussion	17

1 Einleitung

In Versuchs 234 betrachten wir verschiedene Arten von Lichtquellen und deren Spektren. Hierbei unterscheiden wir speziell zwischen Temperaturstrahlern und Nichttemperaturstrahlern, welche in ihrer Art und Weise, Licht bzw. Strahlung auszusenden auf zwei verschiedenen physikalischen Phänomenen basieren.

1.1 Physikalische Grundlagen

Zur Erklärung von **Temperaturstrahlern** betrachten wir zunächst einen idealisierten schwarzen Körper, also einen Körper mit dem Emissionsvermögen $\varepsilon = 1$. Sobald die Temperatur T dieses, und allgemein jedes Körpers, größer 0K ist, sendet dieser elektromagnetische Strahlung aus, deren Intensität dem Planck'schen Strahlungsgesetz

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} dA d\lambda \quad (1)$$

folgt. M_λ steht hierbei für die Strahlungsleistung, welche vom Flächenelement dA im Wellenlängenbereich $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung besitzt ein Maximum bei einer bestimmten Wellenlänge, welche nach dem Wie'schen Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{\max} = \frac{2897.8 \mu\text{m K}}{T} \quad (2)$$

von der Temperatur des Körpers abhängt.

Durch Betrachtung der Farbe des ausgestrahlten Lichts lassen sich die Lichtquellen charakterisieren. Ein Körper erscheint bei einer Temperatur von 0K absolut schwarz. Darauf folgt bei leichter Erwärmung die Emission von zunächst rotem Licht. Bei einer weiteren Erwärmung wird zusätzlich grünes Licht emittiert, welches sich mit den Rotanteilen zu orange bis gelblich erscheinendem Licht vermischt. Weißlich wirkendes Licht erhält man, wenn sich bei einer Temperatur von etwa 5500K alle Wellenlängen des sichtbaren Bereichs mit etwa gleicher Intensität emittiert werden. Mit weiterer Erwärmung des Körpers kommen vermehrt Blauanteile hinzu, welche das Licht zunächst hellblau, dann blau bis violett erscheinen lässt.

Die Streuung von Licht ist nach der Rayleigh-Streuung stark Frequenzabhängig, daher wird blaues Licht deutlich stärker gestreut als rotes Licht. Dies ist auch der Grund, weshalb der Himmel blau erscheint, obwohl das direkte Sonnenlicht weiß ist. Betrachtet man das kontinuierliche Spektrum des von der Sonne abgestrahlten Lichts, so sind in diesem Absorptionslinien, die sogenannten Frauenhoferlinien zu erkennen. Diese entstehen dadurch, dass die Atmosphärenschichten der Sonne und der Erde, welche das Licht passiert, Teile der Strahlung absorbieren.

Bei **Nichttemperaturstrahlern** beruht die Aussendung von Licht auf der Anregung von Atomzuständen in Gasen oder Festkörpern oder der Rekombination von Elektron-Loch-Paaren in Halbleitern. Diese Art von Lichtquellen zeichnet sich durch diskrete Spektren, statt der kontinuierlichen bei Temperaturstrahlern, aus. Leuchtstoffröhren und Energiesparlampen sind Beispiele für Gasentladungslampen, die Quecksilberdampf als Leuchtgas verwenden. Da die meiste emittierte Strahlung von Quecksilber im nicht sichtbaren UV-Bereich liegt, werden derartige Lampen mit einem Leuchtstoff umzogen, welcher bei Bestrahlung mit UV-Licht im sichtbaren Bereich fluoresziert. In Leuchtdioden (LEDs) werden in pn-Übergängen bei der Rekombination von Elektron-Loch-Paaren Photonen emittiert. Die Farbe des Lichts hängt hierbei von den Halbleitermaterialien ab.

Neben den Quecksilberdampflampen sind Natriumdampflampen ein Beispiel für Gasentladungslampen, welche wir in diesem Versuch auch näher betrachten werden. Natrium ist ein Alkalimetall, dessen Atome ein Leuchtelektron besitzen. Das Potential, welches dieses eine Elektron „sieht“, kann in Kernnähe durch das Coulombpotential

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

und in weiterer Entfernung über das Wasserstoffpotential

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

angenähert werden. Dieses ist kein Coulombpotential mehr, somit ist die Entartung des Bahndrehimpuls l aufgehoben und die Energieniveaus

$$E_{n,l} = -13.6 \text{ eV} \frac{1}{(n - \Delta_{n,l})^2} \quad (5)$$

hängen neben der Hauptquantenzahl n auch von der Bahndrehimpulsquantenzahl ab. Die Korrektur $\Delta_{l,n}$ kann aufgrund der geringen n -Abhängigkeit zu Δ_l umgeschrieben beziehungsweise angenähert werden. Halten wir die Hauptquantenzahl n fest, so liegt das s -Niveau am tiefsten und das d -Niveau am höchsten. Die Übergänge $np \rightarrow 3s$ werden als Hauptserie bezeichnet. Die Übergänge $nd \rightarrow 3p$ und $ns \rightarrow 3p$ bezeichnen wir als erste und zweite Nebenserie. Die wichtigsten Übergänge sind in Abbildung (2) dargestellt.

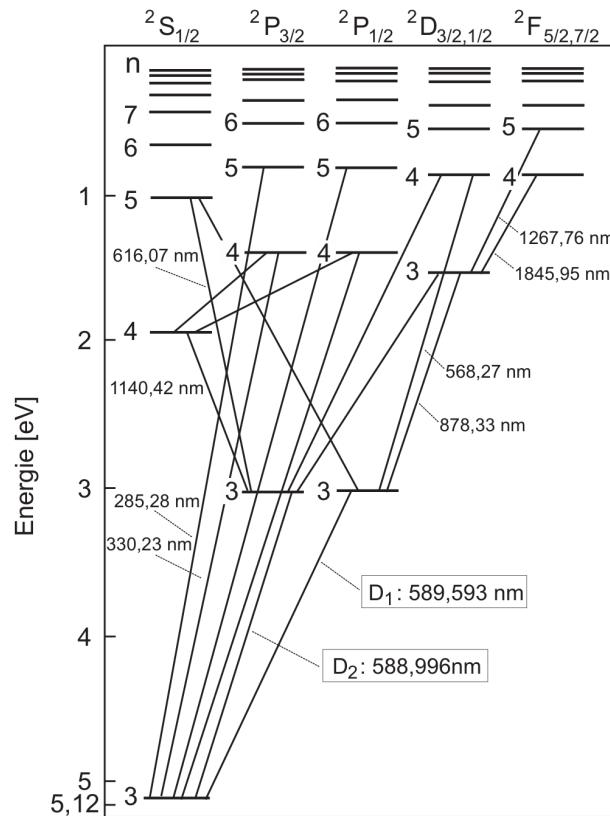


Abbildung 2: Energiespektrum und wichtige Übergänge im Natriumatom

1.2 Versuchsdurchführung

Die Durchführung des Versuchs setzt sich zusammen aus allgemeineren Untersuchungen der Spektren der Sonne und verschiedenen künstlichen Lichtquellen im ersten Teil und einer detaillierteren Untersuchung des Natriumspektrums im zweiten Teil. Zur Aufzeichnung der Spektren verwenden wir ein computergesteuertes Gitterspektroskop, welches einen Spektralbereich von 180nm bis 950nm registrieren kann. Das Programm `OceanView`, welches wir zur Erfassung der Daten verwenden, bietet Funktionen zur Aufzeichnung und Subtraktion von Dunkelstrom, sowie eine automatisierte Mittelwertbildung über mehrere Scans zur Rauschreduzierung.

Aufnahme des Sonnenspektrums. Wir richten das Spektroskop zunächst durch das geöffnete Fenster auf den Himmel und zeichnen einmal das Spektrum auf. Dann schließen wir das Fenster und nehmen das Spektrum noch einmal durch die Scheibe auf.

Qualitativer Vergleich der Spektren verschiedener Leuchtmittel. Qualitativ zeichnen wir die Spektren verschiedener Lichtquellen auf. Dazu gehörten

- eine Glühlampe,
- eine Energiesparlampe,
- ein Laser,
- LEDs in Blau, Gelb, Orange, Rot und verschiedenen Weißtönen.

Aufnahme der Spektrallinien kleiner Intensität einer Natriumlampe. Wir stellen die Natriumdampflampe auf, warten bis diese auf Betriebstemperatur ist und richten das Spektroskop aus. Ziel dieses ersten Aufgabenteils ist die Aufzeichnung der schwächeren Spektrallinien im Bereich von 400 bis 540nm. Durch das Justieren der Irisblende am Spektroskop, sowie der Integrationszeit und Mittelwertbildung in `OceanView` versuchen wir die bestmögliche Auflösung der Spektrallinien zu erzielen.

Aufnahme der Spektrallinien um die D-Linie einer Natriumlampe. Wir justieren die Einstellungen so, dass im Spektrum bei 570 und 615nm jeweils eine Spektrallinie beobachtet werden kann, welche nicht von der D-Linie verschluckt werden.

Aufnahme der Spektrallinien im Bereich von 650 bis 850nm. Wir zeichnen abschließend die Spektrallinien des Natriumspektrums im Bereich von 650 bis 850nm auf.

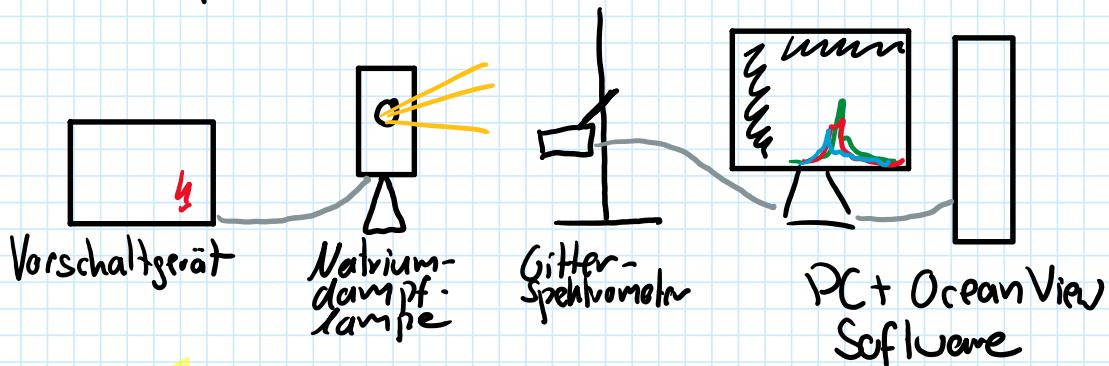
2 Messprotokoll

Versuchsprotokoll 234

Marius Pfeiffer
Robert Grosch

12.02.2025

Versuchsaufbau



Aufgabe 1, Sonnenlichtspektrum

Integrationszeit 100ms, 1 Scan to Average

Die Dunkelstrommessung zeigt, wie erwartet, nur bei sehr hoher Zoomstufe Ausschläge im Spektrogramm.

Intensität bei Sonnenlichtspektrum ohne Fenster allgemein etwas höher als durch das Fenster.
Vor allem im IR- und UV-Bereich des Spektrums sichtbar.

Aufgabe 2, Vergleich der Spektren verschiedener Lichtquellen

(a) LEDs in rot, orange, gelb, blau zeigen um die jeweilige Farbe zentriertes Spektrum

LEDs in weiß zeigen ein kontinuierliches Spektrum auf. Je "wärmer" das Weiß, umso weniger ist der blaue Peak

- (b) Spektrum der Glühlampe ist kontinuierlich
- (c) Spektrum der Energiesparlampe ist diskret
- (d) Spektrum des Lasers konzentriert, diskret um 532 nm

Spektren wurden alle mit 100ms Integrationszeit aufgenommen.

Aufgabe 3

Integrationszeit 100ms, 40 Scans für Mittelwert

Aufgabe 4

Bei Sättigung im D-Peak

Integration Time: 10ms

Scans für Mittelwert: 1

Ohne Sättigung im D-Peak

Integration Time: 10ms

Scans für Mittelwert: 5

Aufgabe 5

H. Lutz

Integration Time: 50ms

Scans für Mittelwert: 5

Alle Messungen wurden mit DunkelstromKorrektur durchgeführt.

3 Auswertung

Bevor wir mit der Aufzeichnung der eigentlichen Spektren begonnen haben, haben wir eine Dunkelstrommessung durchgeführt. Das Spektrum dieser ist in Abbildung (3) zu sehen.

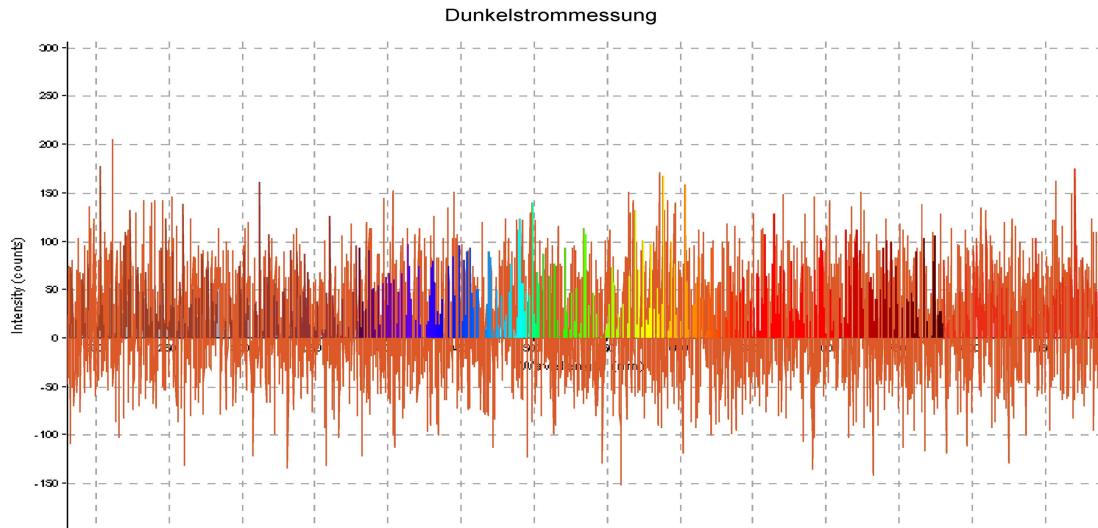


Abbildung 3: Spektrum Dunkelstrommessung

Es handelt sich hierbei um ein Untergrundrauschen, welches wir mit der `OceanView` Software automatisch von allen weiteren aufgezeichneten Spektren abziehen.

3.1 Untersuchung des Sonnenlichtspektrums

Am Tag der Versuchsdurchführung war das Wetter leider stark bewölkt, weshalb wir mit dem Spektroskop nicht auf den blauen Himmel zielen konnten. Es ist also zu beachten, dass die folgenden Betrachtungen durch die Auswirkungen der Wolkendecke gestört sind. Die untenstehende Abbildung (4) zeigt aufgezeichnete Spektrum des Tageslichts durch das geöffnete Fenster (blau) und durch die Fensterscheibe (orange) im Vergleich. Es ist bereits hier zu sehen, dass die Intensität durch das Glas über das gesamte Spektrum hinweg abgeschwächt wird. Die stärkste Abschwächung verzeichnen wir bei niedrigen Wellenlängen, also im UV-Bereich. Dies ist auch am Verlauf der Absorption in Abbildung (5) zu sehen. Die geringste Abschwächung tritt im Bereich der Wellenlänge zwischen 400 bis 600nm, also dem sichtbaren Bereich auf. In Richtung des Rot- bis Infrarotbereichs steigt die Absorption wieder etwas an.

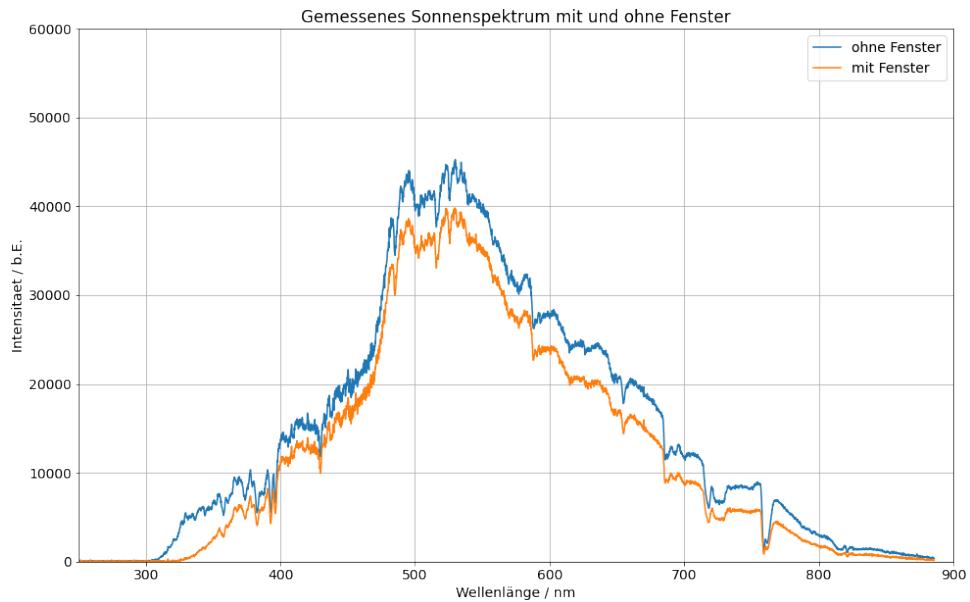


Abbildung 4: Sonnen

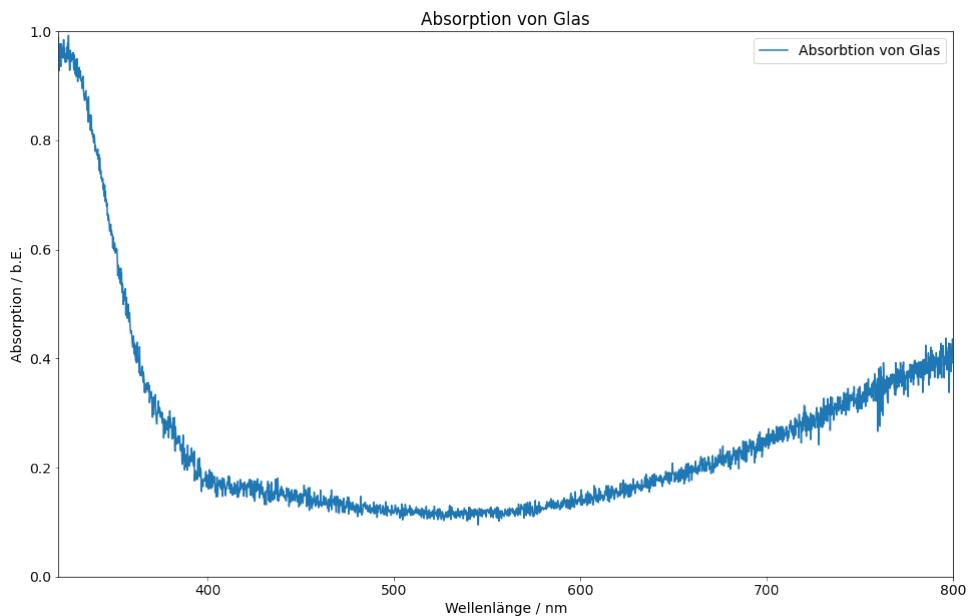


Abbildung 5: Absorption

Die vielen im Spektrum sichtbaren lokalen Minima sind gerade die Wellenlängen der Frauenhoferlinien, welche durch Absorption von Licht bestimmter Wellenlängen in der Sonnen- und Erdatmosphäre entstehen. Abbildung (6) zeigt erneut das Spektrum des Sonnenlichts, ohne Fensterscheibe. Markiert sind hier in Orange nun die Minima im Spektrum, welche jeweils am nächsten an der erwarteten Wellenlänge einer Frauenhoferlinie liegen. Zusätzlich sind in Grün die Literaturwerte der Wellenlänge der Balmer-Serie von Wasserstoff eingezeichnet.

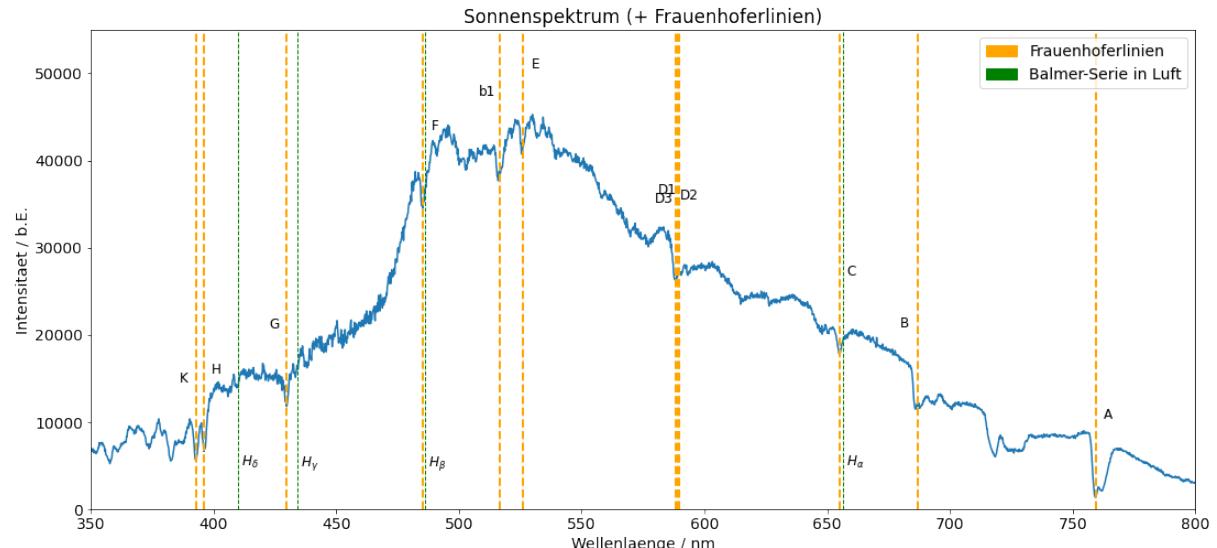


Abbildung 6: Frauenhoferlinien und Balmerserie

Tabelle (1) zeigt eine Aufschlüsselung der erwarteten Wellenlänge der Frauenhoferlinien, die von uns aus dem Spektrum abgelesenen werte, sowie die Abweichung zwischen den Werten. Als Fehler für die abgelesenen Wellenlängen haben wir hier einen Wert von $\pm 1\text{nm}$ verwendet. Es ist zu sehen, dass sich die Abweichung, bis auf wenige ausnahmen auf unter einem σ beläuft.

Tabelle 1: Vergleich der erwarteten und gemessenen Wellenlängen der Frauenhoferlinien

Linie	Literaturwert [nm]	Abgelesener Wert [nm]	Abweichung [σ]
K	393.4	393.0	0.4
H	396.8	396.1	0.7
G	430.8	429.8	1.0
F	486.1	485.2	0.91
b1	518.4	516.7	1.7
E	527.0	526.2	0.8
D3	587.6	588.4	0.8
D2	589.0	589.0	0.0
D1	589.6	589.7	0.11
C	656.3	655.0	1.3
B	686.7	686.7	0.0
A	759.4	759.4	0.0

3.2 Vergleich der Spektren verschiedener Leuchtmittel

Im Folgenden betrachten wir die Spektren verschiedener Lichtquellen. Abbildung (7) zeigt hierzu zunächst die Spektren der drei untersuchten farbigen LEDs, sowie des Lasers.

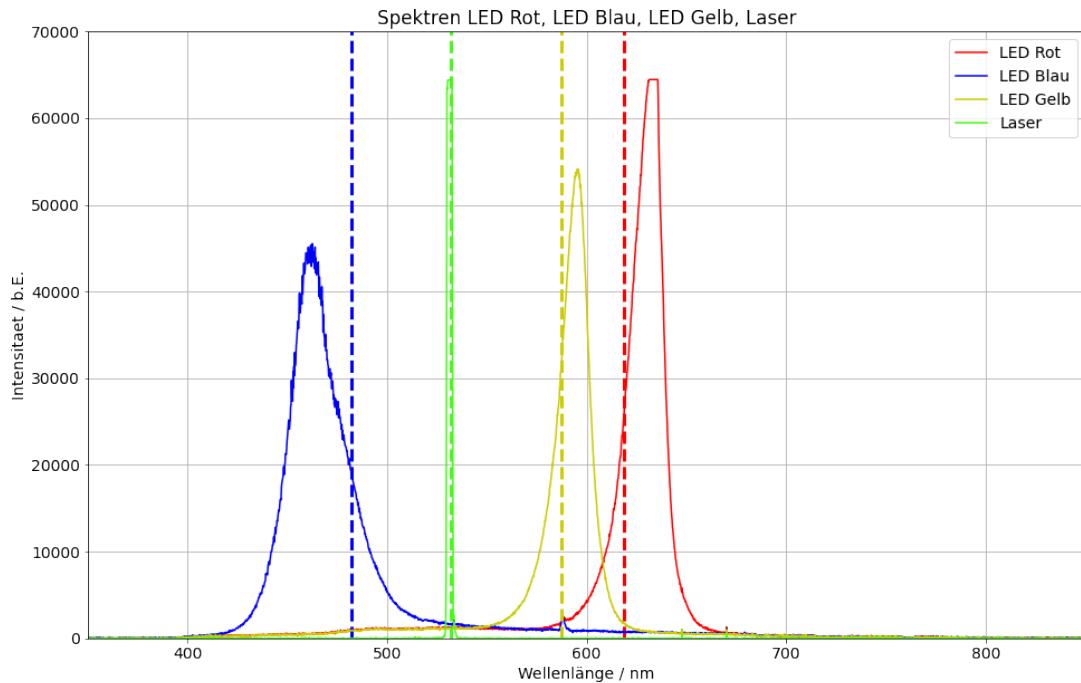


Abbildung 7: Aufgezeichnete Spektren der farbigen LEDs, sowie des Lasers.

Die vertikalen Linien im Diagramm zeigen jeweils das nach Intensität gewichtete Mittel der Wellenlängen der Lichtquellen. Es ist zu erkennen, dass es sich hierbei in allen vier Fällen um diskrete Spektren handelt. Bei den LEDs streuen dabei die Wellenlängen etwas mehr und das Maximum der Verteilung ist etwas vom Mittel verschoben. Der Laser sendet konzentriertes Licht genau einer Wellenlänge aus, was sich ebenfalls an der direkten Überlagerung des „Peaks“ mit dem Mittel zeigt.

Die Spektren der drei verschiedenen weißen LEDs sind gemeinsam mit dem der Energiesparlampe in Abbildung (8) dargestellt. Alle vier Lichtquellen erzeugen, weitestgehend, weißes Licht. Am Spektrum der Energiesparlampe ist zu erkennen, dass diese das weiße Licht durch die Überlagerung mehrerer diskreter Wellenlängen erzeugt. Bei den weißen LEDs sehen wir jeweils einen relativ deutlichen, schmalen Peak bei den „blauen“ Wellenlängen und einen sehr breiten Peak um den Bereich, in welchem Gelb zu verorten ist. Weiß wird hierbei also durch die Überlagerung von blauem und gelbem Licht erzeugt. Wir können außerdem beobachten, dass der Blau-Peak abnimmt, je „wärmer“ das Weiß der LED wird. Durch geringere Blauanteile erhalten wir also wärmer erscheinendes Licht.

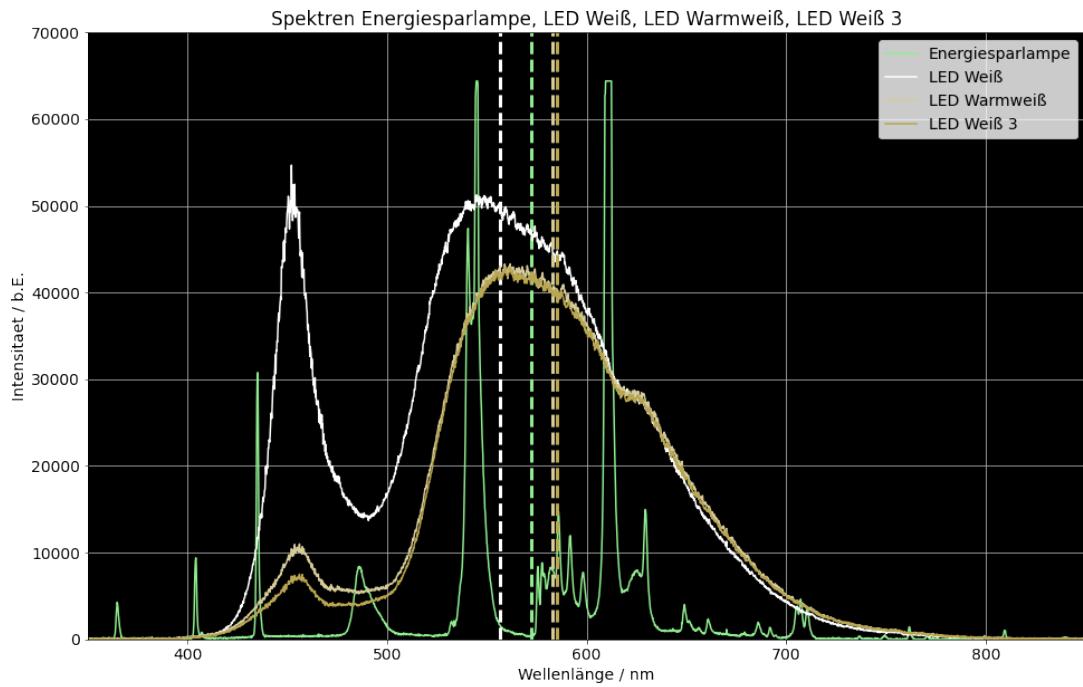


Abbildung 8: Aufgezeichnete Spektren der weißen LEDs, sowie der Energiesparlampe.

Während die bisher betrachteten Lichtquellen Nichttemperaturstrahler sind, ist die Glühlampe ein Temperaturstrahler. Sie weist also ein kontinuierliches Spektrum auf, wie es auch in Abbildung (9) zu sehen ist.

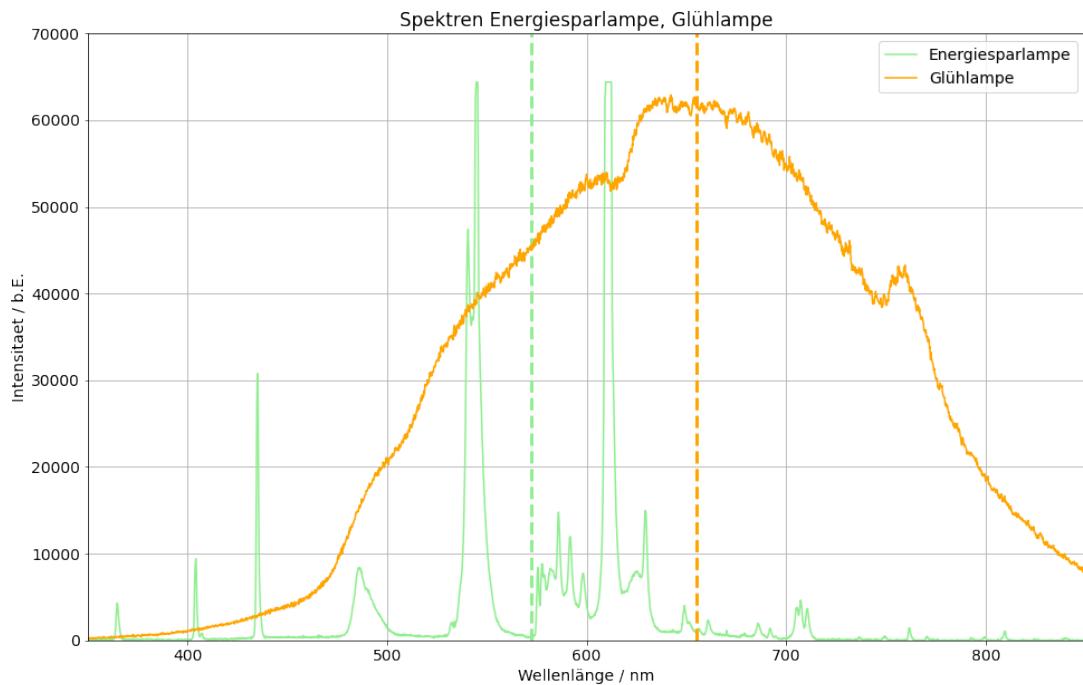


Abbildung 9: Aufgezeichnete Spektren der Glühlampe, sowie der Energiesparlampe.

Am Spektrum der Glühlampe ist zu erkennen, dass sich ein nicht ungewisser Teil des Spektrums im oberen bis nicht sichtbaren Wellenlängenbereich befindet. Es geht hierbei also sehr viel Energie in Form von Wärme an die Umgebung verloren. Im Vergleich dazu ist die Energiesparlampe, deren Spektrum ebenfalls noch einmal in diesem Diagramm

zu sehen ist, deutlich energieeffizienter. Die Glühlampe erzeugt eher ein warmes Licht, während die Lichttemperatur der Energiesparlampe eher in Richtung des kälteren Bereichs liegt.

3.3 Untersuchung des Natriumspektrums

Beobachtete Spektrallinien

Im folgenden haben wir drei verschiedene Bereiche des Spektrums einer Natriumdampflampe aufgezeichnet und möchten im weiteren Verlauf die beobachtbaren Spektrallinien mit den theoretischen Vorhersagen der Zustandsübergänge vergleichen. Abbildung (10) zeigt die Linien geringer Intensität, welche im Bereich einer Wellenlänge von 350nm bis 550nm zu finden sind.

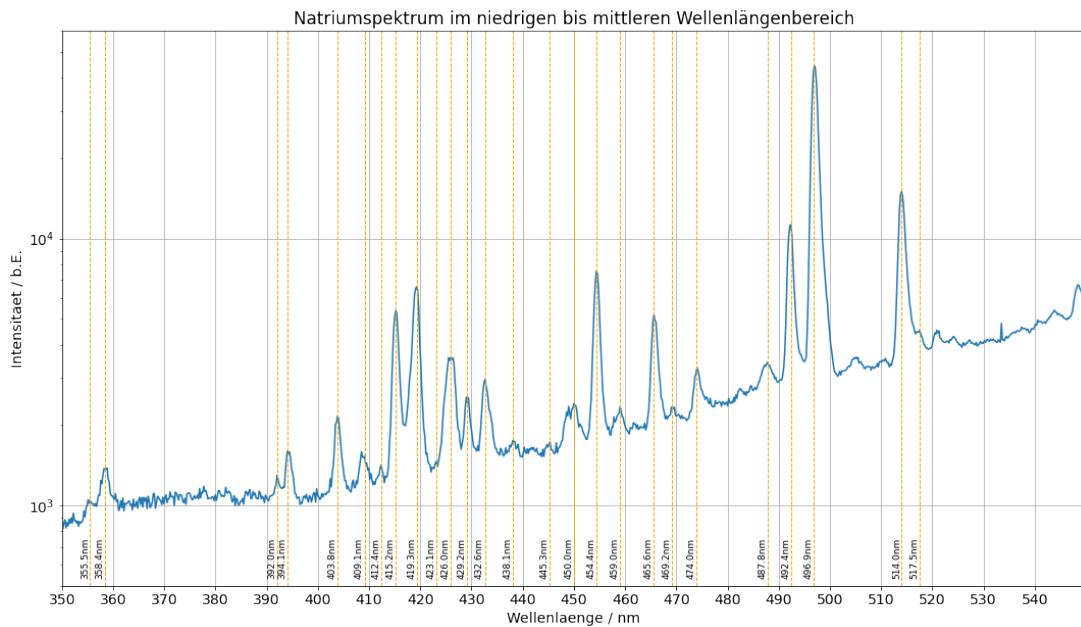


Abbildung 10: Natriuspektrum im Wellenlängenbereich von 350 bis 550nm.

Als nächstes beobachten wir den Wellenlängenbereich zwischen 585 und 595nm. In diesem ist die markante D-Linie des Natriumspektrums zu finden. Die Intensität der D-Linie ist im Vergleich zu den anderen Linien so hoch, dass keine weiteren Linien im aufgezeichneten Spektrum sichtbar sind, wenn die D-Linie nicht in Sättigung ist. Diesen Fall zeigt die Abbildung (11). Ebenfalls relativ gut zu erkennen ist in dieser Abbildung die Doppelstruktur der D-Linie aus zwei dicht beieinander liegenden Linien.

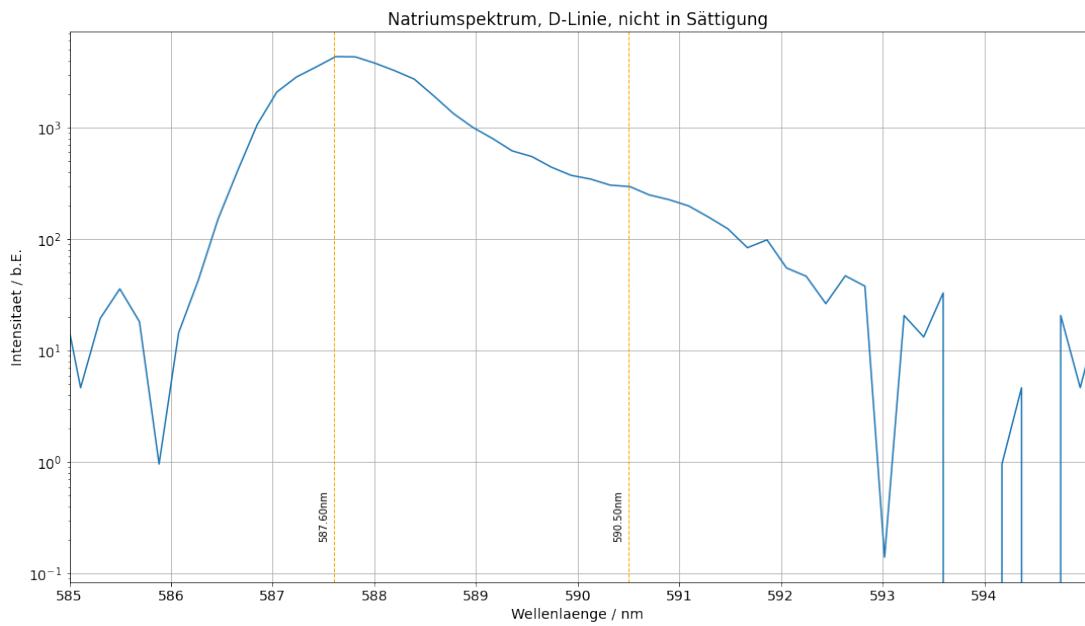


Abbildung 11: D-Linie im Natriuspektrum, nicht in Sättigung.

Betrachten wir einen etwas weiteren Wellenlängebereich um die D-Linie, erlauben dieser allerdings in Sättigung zu gehen, so können wir in deren Umgebung weitere Spektrallinien geringer Intensität beobachtbaren. Diese sind in Abbildung (12) gekennzeichnet.

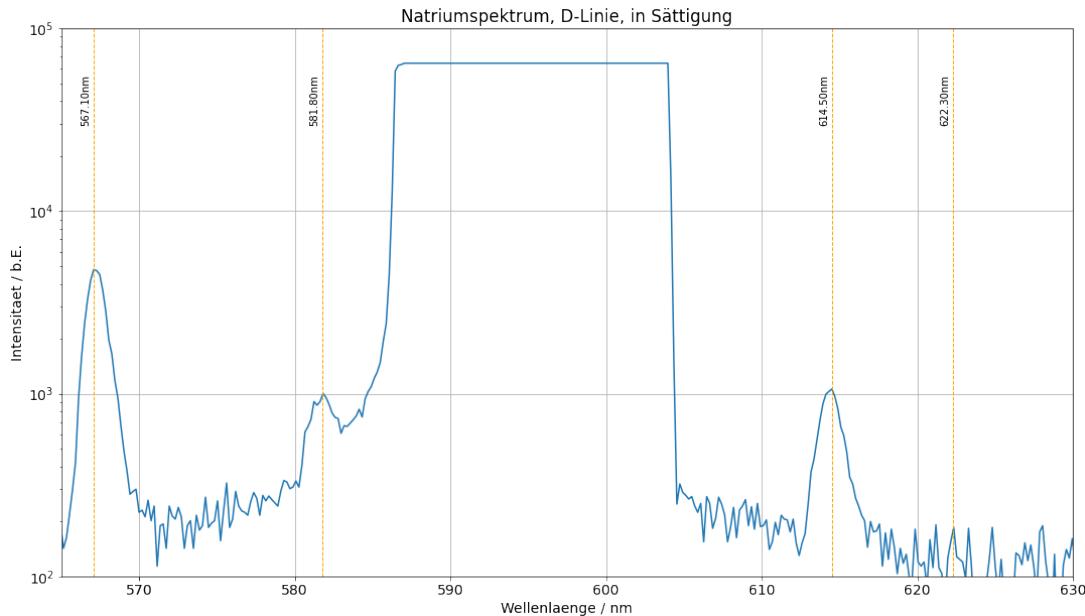


Abbildung 12: Weitere Linien um die D-Linie im Natriuspektrum, während diese in Sättigung ist.

Als letztes Betrachten wir den oberen Bereich des Natriumspektrums von 650 bis 850nm. Wie in Abbildung (13) zu sehen sind hier wieder sehr viele, teils auch sehr markante, Spektrallinien aufzufinden.

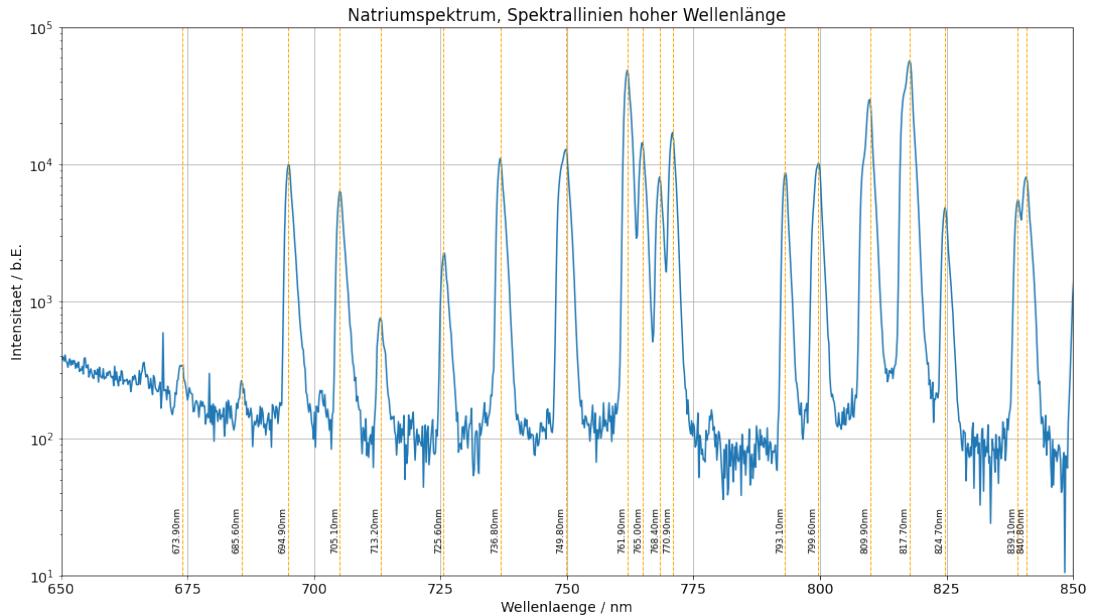


Abbildung 13: Natriuspsektrogramm im Wellenlängenbereich von 350 bis 550nm.

Nun möchten wir die beobachteten Spektrallinien mit den Vorhersagen der Theorie vergleichen.

Erwartete Linien für die 1. Nebenserie $md \rightarrow 3p$

Den Korrekturterm Δ_d können wir für diese Serie vernachlässigen. Für die Wellenlänge λ_m für die Übergänge $md \rightarrow 3p$ gilt

$$\lambda_m = \frac{hc}{\frac{E_{Ry}}{m^2} - E_{3p}}. \quad (6)$$

Hierbei sind die Rydbergennergie $E_{3p} = -13.605\text{eV}$, sowie $hc = 1.2398 \cdot 10^3\text{nm eV}$ als Konstanten gesetzt. E_{3p} können wir mit dieser Formel berechnen, indem wir $m = 3$ und entsprechend λ_3 gleich der gemessenen Linie im Bereich von 819nm setzen. Die von uns gemessene Linie, welche am nächsten an dieser ist, liegt bei 817.7nm. Damit erhalten wir einen Wert von

$$E_{3p} = -3.0279 \pm 0.0019\text{eV}. \quad (7)$$

Setzen wir nun diese Energie und die Quantenzahl m im Bereich von 3 bis 12 in die obige Formel ein, so erhalten wir die erwarteten Wellenlängen für die jeweiligen Übergänge. Diese sind in Tabelle (2) zu sehen, gemeinsam mit der zugeordneten Spektrallinie aus unseren Beobachtungen, sowie der jeweiligen Abweichung.

Tabelle 2: Vergleich der berechneten und gemessenen Wellenlängen der 1. Nebenserie $md \rightarrow 3p$.

m	$\lambda_{\text{theo.}} [\text{nm}]$	$\lambda_{\text{beob.}} [\text{nm}]$	Abweichung
3	817.7 ± 1.000	817.7 ± 1	0.01σ
4	569.4 ± 0.5	567.1 ± 1	2.03σ
5	499.2 ± 0.4	496.9 ± 2	1.13σ
6	467.9 ± 0.4	469.2 ± 1	1.28σ
7	450.8 ± 0.4	450.0 ± 1	0.77σ
8	440.4 ± 0.3	438.1 ± 1	2.20σ
9	433.5 ± 0.3	432.6 ± 1	0.88σ
10	428.7 ± 0.3	429.2 ± 1	0.46σ
11	425.3 ± 0.3	426.0 ± 1	0.72σ
12	422.7 ± 0.3	423.1 ± 1	0.44σ

Erwartete Linien für die 2. Nebenserie $ms \rightarrow 3p$

Bei der Betrachtung der 2. Nebenserie können wir den Korrekturterm Δ_s nicht vernachlässigen. Die Bindungsenergie des Grundzustandes E_{3s} berechnen wir nach der Formel

$$E_{3s} = E_{3p} - \frac{hc}{\lambda}. \quad (8)$$

Für die Wellenlänge λ setzen wir die beobachtete Wellenlänge der D-Linie ein, da diese dem Übergang $3p \rightarrow 3s$ entspricht. In unseren Aufzeichnungen können wir diese Linie bei in etwa $\lambda = (590.5 \pm 1)\text{nm}$ beobachten. Damit erhalten wir eine Bindungsenergie von

$$E_{3s} = (-5.127 \pm 0.005)\text{eV}. \quad (9)$$

Durch Umstellen der Gleichung

$$E_{3s} = \frac{E_{Ry}}{(3 - \Delta_s)^2} \quad (10)$$

berechnen wir den Wert des Korrekturterms zu

$$\Delta_s = 1.3711 \pm 0.0007. \quad (11)$$

Die erwarteten Werte für die Wellenlängen der Linien können wir dann pro Quantenzahl m mit der Formel

$$\lambda_m \approx \frac{hc}{\frac{E_{Ry}}{(m - \Delta_s)^2} - E_{3p}} \quad (12)$$

berechnen. Die Werte für m im Bereich von 4 bis 9 sind in der Tabelle (3) wiederzufinden.

Tabelle 3: Vergleich der berechneten und gemessenen Wellenlängen der 2. Nebenserie $ms \rightarrow 3p$.

m	$\lambda_{\text{theo.}} [\text{nm}]$	$\lambda_{\text{beob.}} [\text{nm}]$	Abweichung
4	1170.366 ± 1.302	-	-
5	621.527 ± 0.692	622.34 ± 1	0.67σ
6	518.112 ± 0.577	517.50 ± 1	0.53σ
7	477.124 ± 0.531	474.00 ± 1	2.76σ
8	456.100 ± 0.508	454.40 ± 1	1.52σ
9	443.719 ± 0.494	445.30 ± 1	1.42σ

Erwartete Linien für die Hauptserie $mp \rightarrow 3s$

Zu guter Letzt betrachten wir noch die erwarteten Linien der Hauptserie $mp \rightarrow 3s$. Hierzu benötigen wir den Korrekturterm Δ_p , welchen wir ähnlich zur vorherigen Betrachtung durch Umstellen der Gleichung

$$E_{3p} = \frac{E_{Ry}}{(3 - \Delta_p)^2} \quad (13)$$

zu

$$\Delta_p = 0.8803 \pm 0.0007 \quad (14)$$

berechnen.

Mit diesem Wert berechnen wir nach der Gleichung

$$\lambda_m \approx \frac{hc}{\frac{E_{Ry}}{(m - \Delta_p)^2} - E_{3s}} \quad (15)$$

die erwarteten Wellenlängen der Linien mit den Quantenzahlen $m = 4$ und 5 . Diese sind in der Tabelle (4) zu finden. Da wir den Bereich des Spektrums, in dem sich diese Linien befinden, nicht aufgezeichnet haben, können wir diese nicht mit beobachteten Werten vergleichen.

Tabelle 4: Berechneten Wellenlängen der Hauptserie $mp \rightarrow 3s$.

m	$\lambda_{\text{theo.}} [\text{nm}]$	$\lambda_{\text{beob.}} [\text{nm}]$	Abweichung
4	332.4 ± 0.6	-	-
5	286.6 ± 0.5	-	-

4 Zusammenfassung und Diskussion

$$x = 3 \frac{1}{|\text{cm}|} \quad (16)$$

$$x = 3 \text{ cm} \quad (17)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\vec{q} \quad (18)$$

$$\vec{p}^2 = \delta_{ij}p_ip_j \quad (19)$$

$$\vec{q}^2 = \delta_{kl}q_kq_l \quad (20)$$

$$\{L_i, H\} = \left\{ \varepsilon_{abc}q_bp_c, \frac{\delta_{ij}p_ip_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\delta_{kl}q_kq_l \right\} \quad (21)$$

$$= \varepsilon_{abc} \left\{ q_bp_c, \frac{\delta_{ij}p_ip_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\delta_{kl}q_kq_l \right\} \quad (22)$$

$$= \varepsilon_{abc} \left(\frac{1}{2m} \{q_bp_c, \delta_{ij}p_ip_j\} + \frac{m}{2}\omega^2 \{q_bp_c, \delta_{kl}q_kq_l\} \right) \quad (23)$$

$$(24)$$