

## Versuch 221: Adiabatenkoeffizient



Abbildung 1: Versuchsaufbau

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Physikalische Grundlagen . . . . .	2
1.2	Versuchsdurchführung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Messprotokoll</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
3.1	Berechnung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt . . . . .	7
3.2	Berechnung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément-Desormes . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>9</b>

# 1 Einleitung

Ein adiabatischer Prozess beschreibt eine thermodynamische Zustandsänderung eines Systems, bei der kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Eine wichtige Größe bei adiabatischen Prozessen ist der Adiabatenkoeffizient. In Versuch 221 werden zwei verschiedene Verfahren betrachtet, um den Adiabatenkoeffizienten zu bestimmen.

## 1.1 Physikalische Grundlagen

Eine adiabatische Zustandsänderung folgt der Gesetzmäßigkeit

$$pV^\kappa = \text{const.} \quad (1)$$

Hierbei beschreibt  $p$  den Druck im System,  $V$  das Volumen des Systems und  $\kappa$  den Adiabatenkoeffizient. Letzterer ergibt sich aus dem Verhältnis

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} \quad (2)$$

der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p$  und bei konstantem Volumen  $c_V$ .

Zur Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten werden im folgenden Versuch zwei Verfahren betrachtet, das Verfahren nach Clément-Desormes und das Verfahren nach Rüchardt.

### *Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes*

Der Aufbau nach Clément-Desormes ist in Abbildung (2) zu sehen.

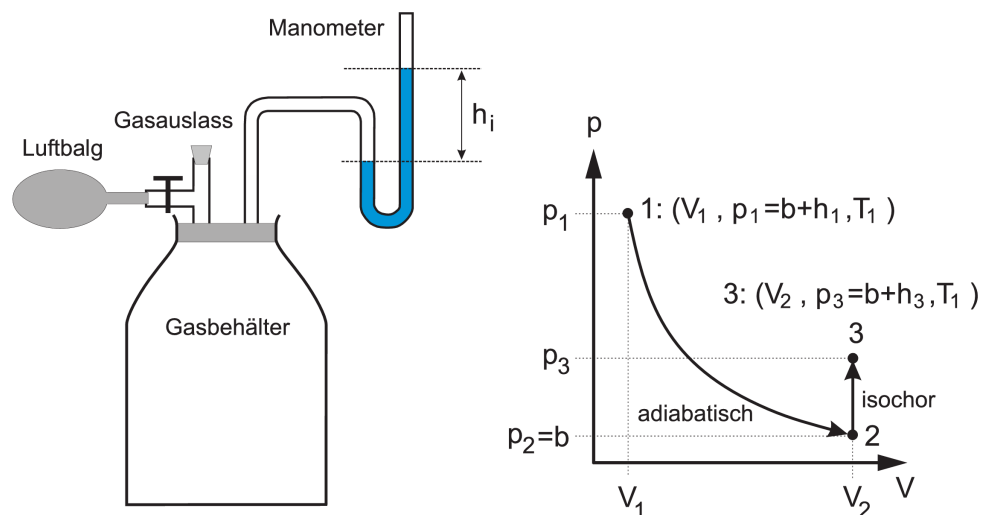


Abbildung 2: Versuchsaufbau nach Clément-Desormes und zugehöriges  $pV$ -Diagramm

Dem nebenstehenden  $pV$ -Diagramm sind die drei Zustände des Systems zu entnehmen, welche im Versuch betrachtet werden.

Erzeugt man durch pumpen des Luftbalgs einen Überdruck im System und lässt es daraufhin auf Zimmertemperatur abkühlen, so ist

**Zustand 1:**  $V_1, p_1 = b + h_1, T_1$

mit Volumen  $V_1$ , äußerem Druck  $b$ , Höhendifferenz des Manometers  $h_1$  und Temperatur  $T_1$  (Zimmertemperatur) erreicht. Durch sehr kurzes öffnen des Gasauslasses erreicht man, optimalerweise ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, in einem adiabatischen Übergang den

$$\textbf{Zustand 2: } V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_1 = b, \quad T_2 = T_1 - \Delta T.$$

Die Volumenvergrößerung  $\Delta V$  entspricht den im Prozess entwichenen Gasmolekülen. Während sich die Temperatur wieder an die Zimmertemperatur anpasst, erreicht man durch einen isochoren Übergang, also bei konstanten Volumen,

$$\textbf{Zustand 3: } V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_1 = b + h_3, \quad T_3 = T_1.$$

Da die Zustandsänderung  $1 \rightarrow 2$  adiabatisch abläuft, sind die beiden Zustände nach Gleichung 1 verknüpft über die Poisson'sche Gleichung

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa. \quad (3)$$

Nach dieser Beziehung berechnen wir mit

$$(b + h_1) V_1^\kappa = b (V_1 + \Delta V)^\kappa \quad (4)$$

und der Näherung, dass  $\Delta V \ll V_1$  die Gleichung

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1}. \quad (5)$$

Da die Temperaturen der Zustände 1 und 3 gleich sind, gilt nach dem Boyle-Mariott'schen Gesetz, dass

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \quad (6)$$

und somit

$$(b + h_1) V_1 = (b + h_3) (V_1 + \Delta V). \quad (7)$$

Mit den Näherungen  $\Delta V \ll V_1$  und  $\Delta h_3 \ll b$  erhalten wir daraus

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b}. \quad (8)$$

Gemeinsam mit Gleichung 5 erhalten wir die Gleichung

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \quad (9)$$

für den Adiabatenkoeffizienten.

### *Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt*

Bei der Bestimmung nach Rüchardt betrachten wir einen Schwingkörper welcher in einem Glasrohr durch adiabatische Expansion und Kompression in Schwingung versetzt wird.

Als Gleichgewichtssituation betrachten wir die Summe aus Luftdruck  $p_0$  und Schweredruck  $\frac{mg}{A}$  des Schwingkörpers

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}. \quad (10)$$

Für eine infinitesimale Schwingung des Körpers gilt nach dem ersten Newton'schen Gesetz

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = A dp. \quad (11)$$

Da der Prozess adiabatisch abläuft, gilt Gleichung (1). Durch das Ableiten dieser nach  $p$  erhalten wir den Zusammenhang

$$dp = -\kappa \frac{p}{V} dV. \quad (12)$$

Eingesetzt in 11 erhalten wir daraus

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -A\kappa \frac{p}{V} dV. \quad (13)$$

Identifizieren wir zusätzlich die Volumenänderung  $dV$  mit der Bewegung des Schwingkörpers  $dV = Ax = \pi r^2 x$ , so erhalten wir die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \frac{\pi^2 r^2 \kappa p}{mV} x = 0. \quad (14)$$

Daraus lesen wir die Kreisfrequenz und die Periodendauer

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 r^2 \kappa p}{mV}}, \quad T = \sqrt{\frac{4mV}{r^4 \kappa p}} \quad (15)$$

ab. Damit haben wir einen weiteren mathematischen Zusammenhang für den Adiabatenkoeffizienten hergeleitet:

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p}. \quad (16)$$

## 1.2 Versuchsdurchführung

Wir begannen die Versuchsdurchführung mit der Messung nach Rüchardt und führten diese für Druckluft und Argon durch. Im zweiten Teil führten wir die Messung nach Clément-Desormes für Luft durch.

**Messung nach Rüchardt.** Für sowohl Druckluft, als auch Argon, nahmen wir zunächst den Umgebungsluftdruck und die Maße des Versuchsaufbaus auf. Danach nahmen wir in jeweils drei Messgängen die Zeit für 50 Schwingungen auf.

**Messung nach Clément-Desormes.** Die notwendigen Schritte der Durchführung (Pumpen, Temperatur angleichen lassen, Pfropfen öffnen) sind bereits in den theoretischen Grundlagen genannt. Für fünf Durchgänge nahmen wir die Höhen  $h_1$  und  $h_3$  vom Manometer ab.

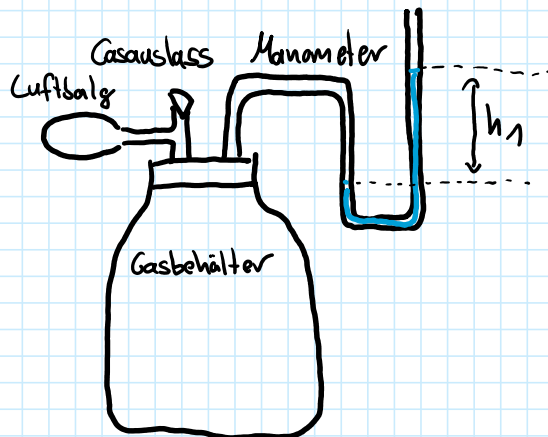
Messprotokoll 221

Marius Heißer  
Robert Grosch

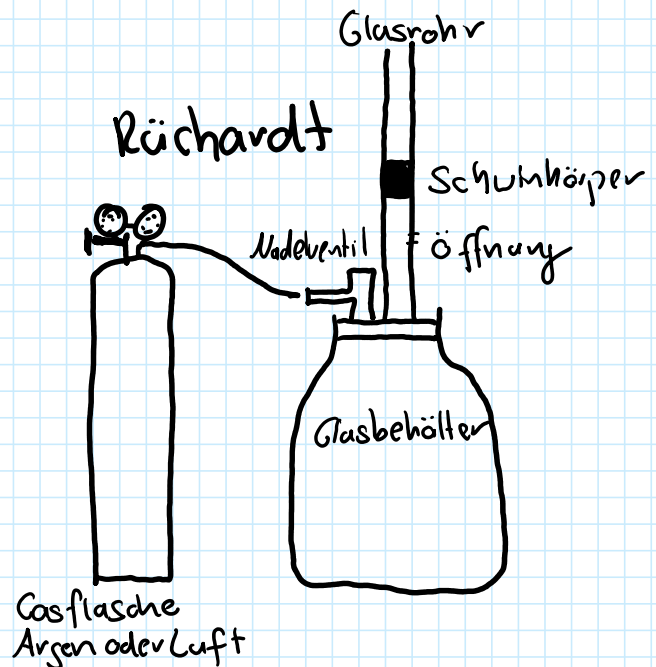
26.11.2024

Skizze

Clément & Desormes



Rüchardt



V.2 Messung nach Rüchardt

Teil 1: Druckluft

Luftdruck:  $(1008.0 \pm 0.1) \text{ hPa}$

$V = (5460 \pm 5) \text{ cm}^3$ ,  $m = (26.006 \pm 0.002) \text{ g}$

$r = (15.97 \pm 0.02) \text{ mm}$

Messgang	1	2	3
Schwingungen	50	50	50
Zeit [s]	50.37s	50.31s	50.23s

Fehler: Reaktionszeit 0.2 s

Teil 2: Argon

Luftdruck:  $(1008.0 \pm 0.1) \text{ hPa}$

$V = (5370 \pm 5) \text{ cm}^3$ ,  $m = (26.116 \pm 0.002) \text{ g}$

$2r = (15.95 \pm 0.02) \text{ mm}$

Messgang	1	2	3
Schwingungen	50	50	50
Zeit [s]	45.56	45.34	45.44

Fehler: Reaktionszeit 0.2s

### V.1 Messung nach Clément und Desormes

Messgang	$h_1 [\text{cm}]$	$h_2 [\text{cm}]$
1	$12.9 \pm 0.2$	$3.5 \pm 0.2$
2	$13.3 \pm 0.2$	$3.6 \pm 0.2$
3	$14.5 \pm 0.2$	$4.2 \pm 0.2$
4	$13.6 \pm 0.2$	$3.8 \pm 0.2$
5	$13.5 \pm 0.2$	$3.7 \pm 0.2$

$$\begin{aligned}\Delta(h_1 - h_2) &= \sqrt{(\Delta h_1)^2 + (\Delta h_2)^2} \\ &= \sqrt{0.1^2 + 0.1^2} \\ &= 0.14 \approx 0.2\end{aligned}$$

e. Bodo

### 3 Auswertung

#### 3.1 Berechnung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt

Wir beginnen zunächst mit der Berechnung nach Rüchardt. Hierzu ziehen wir die Gleichung (16)

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p} \quad (17)$$

hinzu. Bevor wir die Werte einsetzen können, müssen wir zunächst die Periodendauer einer Schwingung ermitteln. Hierzu mitteln wir zunächst die Zeit für 50 Schwingungen über die drei Messgänge und erhalten somit

$$\bar{T}_{50,\text{Luft}} = (50.30 \pm 0.07)\text{s}, \quad (18)$$

$$\bar{T}_{50,\text{Ar}} = (45.45 \pm 0.07)\text{s}. \quad (19)$$

Der Fehler dieser Angaben ergibt sich aus Reaktionszeit über die Formel  $\Delta\bar{T}_{50} = 0.2\text{s}/\sqrt{3}$ . Für die Periodendauer einer einzelnen Schwingung teilen wir diese Werte durch 50 und erhalten

$$T_{\text{Luft}} = (1.0061 \pm 0.0014)\text{s}, \quad (20)$$

$$T_{\text{Ar}} = (0.9089 \pm 0.0014)\text{s}. \quad (21)$$

Weiter ist noch der Druck  $p$  zu berechnen. Diesen erhalten wir, wie in Gleichung (10) beschrieben, aus der Summe des Luftdrucks  $p_0$  und des Schweredrucks des Schwingkörpers. Die Fehlerfortpflanzung dieses Wertes folgt der Formel

$$\Delta p = \sqrt{(\Delta p)^2 + \left(\frac{g}{2\pi r} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(-\frac{mg}{2\pi r^2} \cdot \Delta r\right)^2}. \quad (22)$$

Damit erhalten wir den Wert

$$p = (100805 \pm 11)\text{Pa}, \quad (23)$$

mit welchem wir weiterrechnen können. Die Angaben für Radius und Masse des Gummipfropfens unterscheiden sich minimal zwischen den Versuchsaufbauten für Luft und Argon. Allerdings liegen die Auswirkungen dieser Unterschiede auf den errechneten Wert von  $p$  außerhalb des signifikanten Bereichs.

Alle weiteren Messwerte können wir direkt aus dem Messprotokoll entnehmen und in Gleichung (16) einsetzen. Wir erhalten damit die Werte

$$\kappa_{\text{Luft}} = 1.369 \pm 0.008 \quad \text{und} \quad (24)$$

$$\kappa_{\text{Ar}} = 1.665 \pm 0.010. \quad (25)$$

Zur Angabe des Fehlers  $\Delta\kappa$  verwenden wir die quadratische Addition der relativen Fehler der Messwerte nach

$$\Delta\kappa = \kappa \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2}. \quad (26)$$

Die Potenzen des Radius  $r$  und der Periodendauer  $T$  gehen hierbei als Faktoren mit in die Fehlerrechnung ein.

Ein Vergleich der soeben berechneten Werte mit den Literaturwerten findet sich im Diskussionsteil der Ausarbeitung. Zunächst berechnen wir jedoch den Adiabatenkoeffizienten von Luft noch über die zweite Variante.

### 3.2 Berechnung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément-Desormes

Anstatt wie zuvor den Mittelwert über die Höhen  $h_1$  und  $h_3$  aus den fünf Messgängen zu ermitteln, um den Adiabatenkoeffizienten zu bestimmen, berechnen wir fünf Werte für diesen und betrachten anschließend deren Mittelwert. Hierzu ziehen wir Formel 9

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \quad (27)$$

heran. Für den Fehler  $\Delta\kappa$ , welcher sich aus dieser Formel ergibt, gilt nach der standardmäßigen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta\kappa = \frac{1}{(h_1 - h_3)^2} \sqrt{(h_3 \Delta h_1)^2 + (h_1 \Delta h_3)^2}. \quad (28)$$

Die fünf verschiedenen berechneten Werte für  $\kappa$  sind der nachfolgenden Tabelle (1) zu entnehmen.

Messgang	1	2	3	4	5
$\kappa$	$1.37 \pm 0.04$	$1.371 \pm 0.030$	$1.409 \pm 0.029$	$1.389 \pm 0.030$	$1.378 \pm 0.030$

Tabelle 1: Berechnete Werte für  $\kappa$  aus den Messgängen 1 bis 5

Aus der Mittlung über die fünf Werte von  $\kappa$  erhalten wir einen finalen Wert von

$$\kappa = 1.383 \pm 0.013. \quad (29)$$

Hierbei bestimmten wir den Fehler des Mittelwertes aus den Fehlern der Einzelwerte über die Formel

$$\Delta\kappa = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 \Delta\kappa_i^2}{5^2}}. \quad (30)$$

Auch dieser Wert wird im folgenden Teil diskutiert werden.



## 4 Zusammenfassung und Diskussion

Ziel des Versuchs 221 war es, den Adiabatenkoeffizienten  $\kappa$  für Argon und Luft über zwei unterschiedliche Verfahren zu bestimmen. Bei einer adiabatischen Zustandsänderung eines Systems findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt. Mathematisch folgt diese der Beziehung

$$pV^\kappa = \text{const.}, \quad (31)$$

in welcher der Adiabatenkoeffizienten  $\kappa$  als Exponent des Volumens  $V$  auftritt. Zur Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten wandten wir im Versuch das Verfahren nach Rüchardt und das Verfahren nach Clément-Desormes an.

Beim Verfahren nach Rüchardt wird ein Schwingkörper in einem Glasrohr untersucht, der durch adiabatische Expansion und Kompression in harmonische Schwingungen versetzt wird. Der Adiabatenkoeffizient lässt sich hierbei aus der Periodendauer der Schwingung berechnen.

Wir führten das Verfahren für Argon, sowie für Luft durch. Daraus berechneten wir die Werte

$$\kappa_{\text{Luft}} = 1.369 \pm 0.008 \quad \text{und} \quad (32)$$

$$\kappa_{\text{Ar}} = 1.665 \pm 0.010. \quad (33)$$

Der errechnete Wert für Argon lässt sich direkt mit dem im PAP-Skript gegebenen Wert von  $\kappa_{\text{Ar, Lit.}} = 1.648$  vergleichen. Um einen Literaturwert für den Adiabatenkoeffizienten von Luft zu erhalten, berechnen wir die gewichtete Summe, basierend auf der Zusammensetzung der Luft, aus den Adiabatenkoeffizienten der verschiedenen Gase. Die Werte sind Tabelle (2) zu entnehmen.

Gas	Anteil [Vol.-%]	$\kappa$
Stickstoff	78.08	1.401
Sauerstoff	20.95	1.398
Argon	0.93	1.648
Kohlenstoffdioxid	0.04	1.293
Luft		1.403

Tabelle 2: Zusammensetzung der Luft und Adiabatenkoeffizienten der Bestandteile.  
Quelle: Praktikumsanleitung und Wikipedia („Luft“)

Unter Betrachtung der Fehler, weicht der von uns berechnete Wert für  $\kappa_{\text{Ar}}$  um etwa  $1.76\sigma$  vom Literaturwert ab, der Fehler liegt also innerhalb des nicht signifikanten Bereichs. Für  $\kappa_{\text{Luft}}$  verzeichnen wir eine signifikante Abweichung von etwa  $4.29\sigma$ .

Bevor wir die möglichen Quellen der Ungenauigkeiten diskutieren, betrachten wir zunächst die Ergebnisse der zweiten Methode. Das Verfahren nach Clément-Desormes nutzt eine schnelle adiabatische Expansion und den anschließenden isochoren Druckausgleich, um den Adiabatenkoeffizienten zu bestimmen. Dabei wird das Druckverhältnis vor und nach dem Ausgleich verwendet, um  $\kappa$  zu bestimmen.

Wir führten dieses Verfahren ausschließlich für Luft durch und erhielten damit einen Wert von

$$\kappa_{\text{Luft,CD}} = 1.383 \pm 0.013. \quad (34)$$

Dieser weicht um etwa  $1.5\sigma$  vom Literaturwert (1.403) ab.

Die zentrale und vermutlich größte Fehlerquelle für beide Verfahren ist die Annahme einer adiabatischen Zustandsänderung. So sind beispielsweise beide Versuchsaufbauten fast vollständig aus Glas. Dies ist zwar ein sehr schlechter Wärmeleiter, jedoch kann trotzdem nicht garantiert werden, dass durch das Material absolut kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Auch das, wenn auch sehr kurze, Herausnehmen des Gummistopfens beim Versuch nach Clément-Desormes garantiert nur einen annähernd adiabatischen Prozess. Ebenfalls zentral ist die Annahme idealer, reiner Gase für die mathematische Beschreibung der Prozesse, was in Realität auch nur näherungsweise der Fall ist.

Beim Versuchsaufbau nach Rüchardt kann es trotz der Vorkehrungen zu leichten Reibungsverlusten kommen, wodurch die Periodendauer  $T$  beeinflusst wird. Ebenfalls auf die Messung der Periodendauer wirkt sich die Reaktionszeit aus, welche von uns möglicherweise zu gering eingeschätzt wurde. Die sehr starke Abweichung bei der Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten für Luft, könnte an einer Abweichung der Gaszusammensetzung der verwendeten Druckluft liegen.

Auch beim Versuchsaufbau nach Clément-Desormes spielen Messungenauigkeiten eine Rolle, hier beim Ablesen der Höhen am Manometer. Weiter ist es möglich, dass wir die Dauer der Angleichung des Systems an die Zimmertemperatur unterschätzt und die Manometerwerte zu früh abgelesen haben.