

Physikalisches Anfängerpraktikum III für Lehramtsstudierende

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Hans Oppitz

06.03.2025

Versuch 233: Fourieroptik



Abbildung 1: Versuchsaufbau

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.2 Versuchsdurchführung	6
2 Messprotokoll	7
3 Auswertung	9
4 Zusammenfassung und Diskussion	10

1 Einleitung

Während die Fresnelsche und die Fraunhofersche Beugung die zwei „klassischen“ Zugänge zur Theorie der Beugung bilden, ist die Fourieroptik ein weiterer Ansatz zu diesem Gebiet, welcher sich die mathematischen Werkzeuge der Fourieranalyse zunutze macht. Im Versuch 233 (bzw. 333) werden wir die Beugung von Licht am Einzel- und Doppelspalt vor dem Hintergrund der Fourieroptik betrachten.

1.1 Physikalische Grundlagen

Die Fraunhofersche Beugung

Die Fresnelsche Beugung geht von endlichen Abständen zwischen Lichtquelle, Beugungsobjekt und Beobachtungsebene aus. Es treffen hierbei also Lichtstrahlen in verschiedenen Winkeln auf das Beugungsobjekt, entsprechend welcher sie gebeugt werden. Da die mathematische Beschreibung dieses Prinzips augenscheinlich sehr kompliziert ist, beschränken wir uns in diesem ersten Teil auf die Fraunhofersche Beugung.

Wie in Abbildung (2) dargestellt, geht die Fraunhofersche Betrachtung der Beugung von unendlich großen Abständen zwischen Lichtquelle, Beugungsobjekt und Beobachtungsebene aus. In dieser Annäherung (*bzw. Distanzierung lol*) treffen die Lichtstrahlen von der Quelle daher parallel und senkrecht auf das Beugungsobjekt. Da die gebrochenen Lichtbündel daher ebenfalls parallel sind, würden diese erst im Unendlichen interferieren (2, links). Durch die Positionierung einer Sammellinse zwischen Beugungsobjekt und Beobachtungsebene (2, rechts) lassen sich die Interferenzmuster bereits in der Entfernung der Brennweite der verwendeten Linse beobachten.

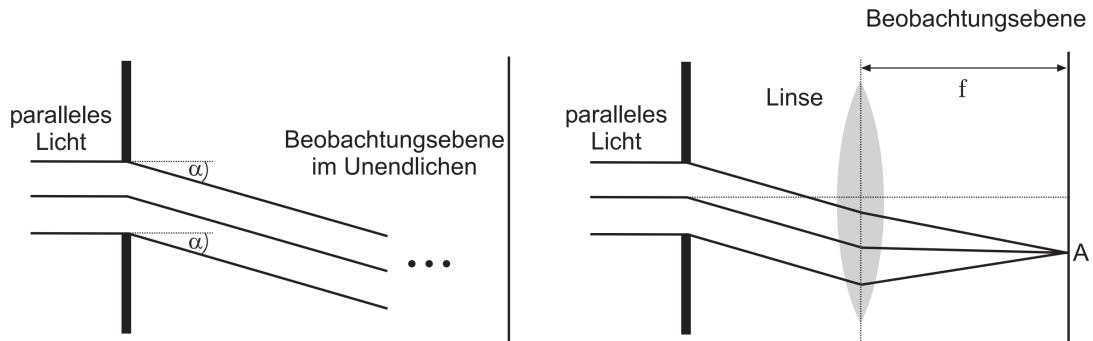


Abbildung 2: Fraunhofersche Beugung mit Beobachtungsebene im Unendlichen (links) und in endlichem Abstand durch Verwendung einer Linse (rechts).

Wir gehen nun von einem Spalt der Breite d in y -Richtung, und einer Länge deutlich größer als d aus. Alle Punkte des Spalts werden mit gleicher Amplitude E_0 und Phase $\varphi = \omega t$ von einem parallelen monochromatischen Lichtstrahl der Wellenlänge λ erregt. Es gilt also

$$E(y) = E_0 e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Das Huygens-Fermat'sche Prinzip besagt nun, dass von jedem dieser Punkte eine Elementarwelle ausgeht. Das Interferenzmuster dieser Wellen können wir bestimmen, indem wir die Überlagerung aller in einen bestimmten Winkel α ausgehenden Wellen betrachten. Mathematisch entspricht dies dem Integral

$$E_\infty(\alpha) = \int_{-d/2}^{+d/2} E_0 e^{i(\omega t - kl)} dy \quad (2)$$

mit dem Betrag des Wellenvektors $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Der Gangunterschied zwischen einem Lichtbündel aus dem Mittelpunkt ($y = 0$) des Spalts und einem Lichtbündel abseits von diesem entspricht gerade $y \sin(\alpha)$. Somit gilt für die Weglänge des äußeren Bündels

$$l = R + \sin(\alpha) \quad (3)$$

mit R als Weglänge des Bündels aus dem Mittelpunkt.

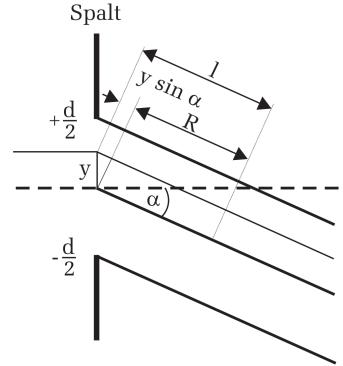


Abbildung 3:
Gangunterschied
der
ausgehenden
Lichtbündel
am Einzelspalt.

Setzen wir diese Definition in das Integral ein, führen dieses aus und benutzen die Euler-sche Formel für die e-Funktion, so ergibt sich

$$E_\infty(\alpha) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin\left(\frac{\pi d \sin(\alpha)}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \sin(\alpha)}{\lambda}}. \quad (4)$$

Wir identifizieren $x = \frac{d}{\lambda} \pi \sin(\alpha)$ und erhalten so

$$E_\infty(x) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin(x)}{x} d. \quad (5)$$

Durch das Quadrieren dieser Formel können wir die Intensität

$$I_\infty(x) \propto \frac{\sin^2(x)}{x^2} d^2 \propto I_0 \frac{\sin^2(x)}{x} \quad (6)$$

mit $I_0 \propto d^2$ bestimmen. Diese ist dargestellt in Abbildung (4).

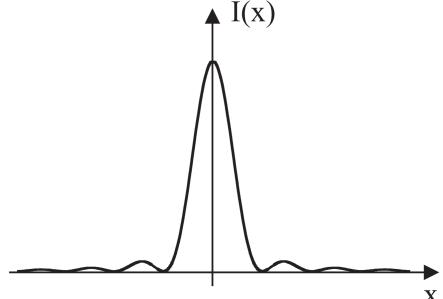


Abbildung 4: Intensitätsverteilung
der Beugungsstruktur des Einzel-spalts.

Fourierreihen und Fourierintegrale

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn ein $L \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine L -periodische und integrierbare Funktion lässt sich mit den trigonometrischen Funktionen

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

als Basisvektoren entwickeln. Das heißt, es existieren $a_n, b_n \forall n \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right). \quad (8)$$

Die sogenannten Fourierkoeffizienten a_n und b_n sind definiert durch

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx, \quad (9)$$

bzw.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx. \quad (10)$$

Zur Veranschaulichung können wir die Fourierkoeffizienten am Beispiel der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -l/2 < x < l/2 \\ 0, & l/2 > |x| < L/2 \end{cases}, \quad (11)$$

dargestellt in Abbildung (??), ausrechnen.

Aus Symmetriegründen verfallen alle Koeffizienten b_n . Für a_0 gilt

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} dx = \frac{2l}{L}. \quad (12)$$

Für alle weiteren a_n gilt

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\pi n \frac{l}{L}\right). \quad (13)$$

Setzen wir das Verhältnis $L : l = 2 : 1$, so erhalten wir die folgenden Summanden als erste Glieder der zugehörigen Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{10\pi}{L}x\right) - \dots \quad (14)$$

Abbildung (5) zeigt die Fourierentwicklung der Funktion für verschiedene, aufsteigende n bis zu einem Wert von $n = 27$. Es ist zu sehen, dass die Linearkombination aus trigonometrischen Funktionen sich immer weiter der rechteckigen Form der Ausgangsfunktion annähert.

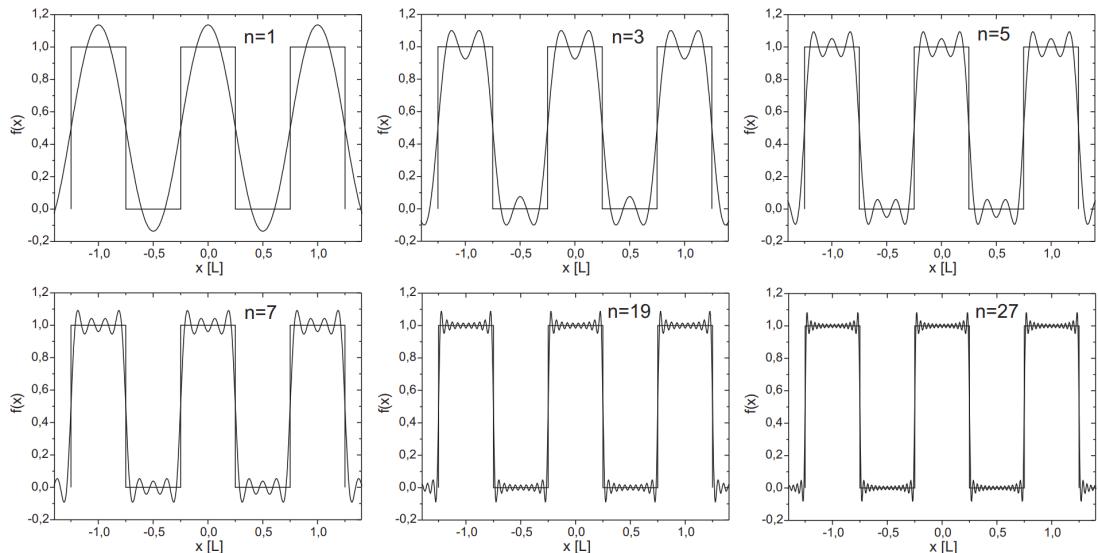


Abbildung 5: Fourierentwicklungen der gezeigten Rechtecksfunktion für verschiedene n .

Die Gleichung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (15)$$

zeigt einen besonderen Anwendungsfall der Fourierentwicklung. Hier wurde x durch die Zeit t und die Periode L durch die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ mit der Frequenz ω ersetzt. In dieser Variante kann die Fourierreihe genutzt werden, um die verschiedenen anteiligen Frequenzen und Amplituden eines zeitperiodischen Signals zu ermitteln.

Während sie zwar nicht als *Fourierreihe* dargestellt werden können, können wir auch nichtperiodische Funktionen dennoch mithilfe von trigonometrischen Funktionen darstellen. Für den Fall $L \rightarrow \infty$ geht die Fourierreihe in ein Integral und die Koeffizienten zu kontinuierlichen Funktionen über. Die kontinuierlichen Fouriertransformation ist dann definiert durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (16)$$

Dabei ist F die Fouriertransformierte von f . Diese erhalten wir durch die Rücktransformation

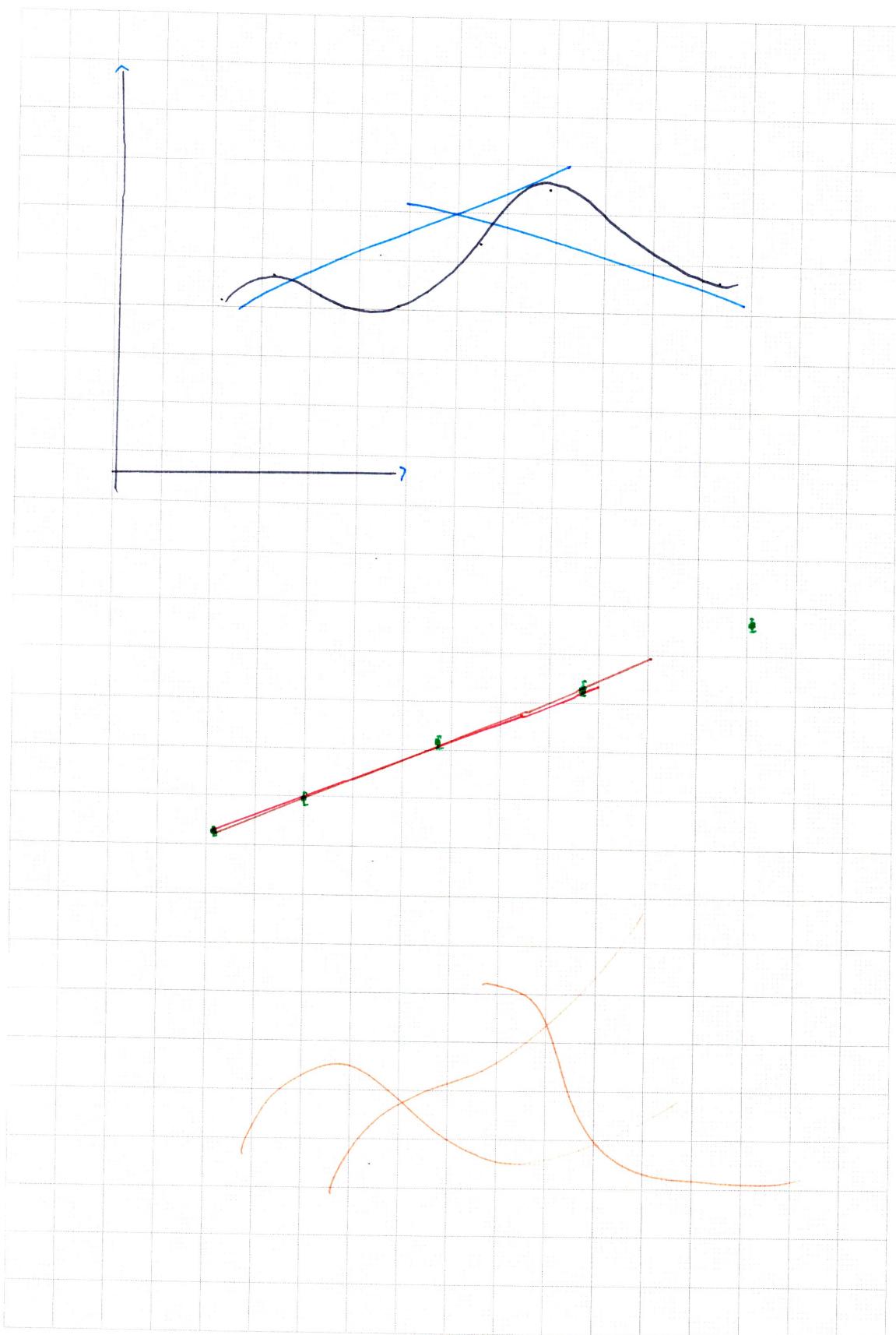
$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (17)$$

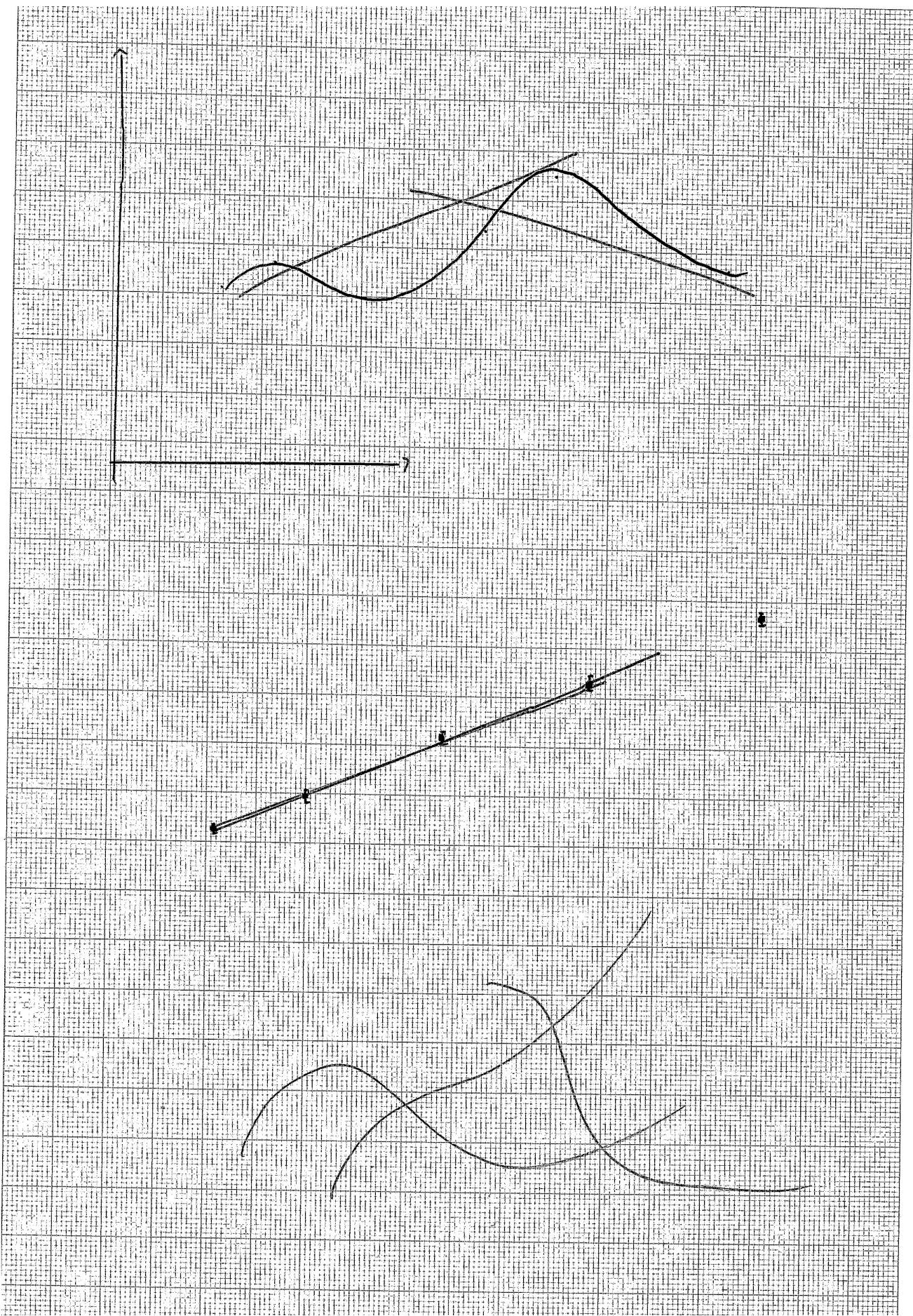
Falls x eine Ortsvariable ist, so nennen wir k die Raum- oder Ortsfrequenz.

Die Fourierdarstellung der Fraunhoferbeugung

1.2 Versuchsdurchführung

2 Messprotokoll





3 Auswertung

4 Zusammenfassung und Diskussion

$$x = 3 \frac{1}{|\text{cm}|} \quad (18)$$

$$x = 3 \text{ cm} \quad (19)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\vec{q} \quad (20)$$

$$\vec{p}^2 = \delta_{ij}p_ip_j \quad (21)$$

$$\vec{q}^2 = \delta_{kl}q_kq_l \quad (22)$$

$$\{L_i, H\} = \left\{ \varepsilon_{abc}q_bp_c, \frac{\delta_{ij}p_ip_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\delta_{kl}q_kq_l \right\} \quad (23)$$

$$= \varepsilon_{abc} \left\{ q_bp_c, \frac{\delta_{ij}p_ip_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\delta_{kl}q_kq_l \right\} \quad (24)$$

$$= \varepsilon_{abc} \left(\frac{1}{2m} \{q_bp_c, \delta_{ij}p_ip_j\} + \frac{m}{2}\omega^2 \{q_bp_c, \delta_{kl}q_kq_l\} \right) \quad (25)$$

$$(26)$$