

Physikalisches Anfängerpraktikum II für Lehramtsstudierende

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Kristian Köhler

17.12.2024 & 13.01.2025

Versuch 241: Wechselstromeigenschaften von RLC-Gliedern

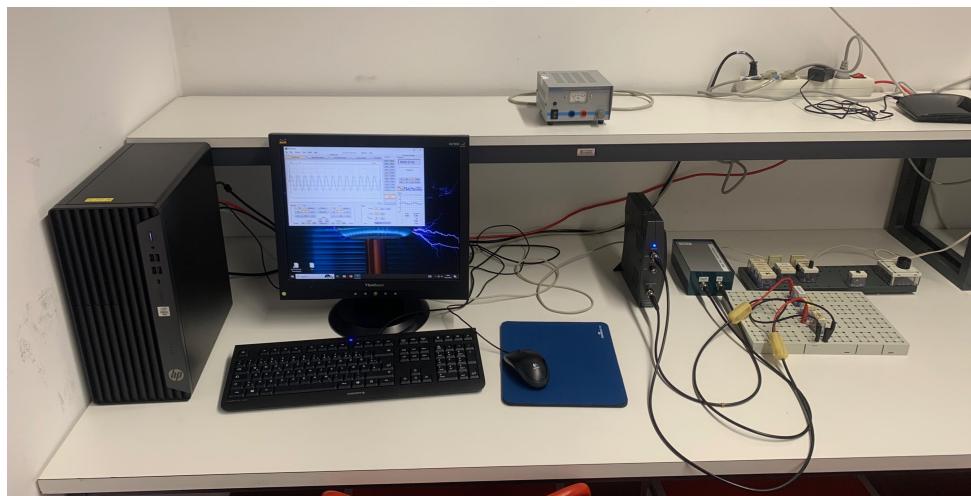


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.2 Versuchsdurchführung	6
2 Messprotokoll	7
3 Auswertung	14
4 Zusammenfassung und Diskussion	15

1 Einleitung

In Versuch 241 setzen wir uns mit sogenannten RLC-Schaltungen, also elektrische Schaltungen, welche Widerstände (R), Spulen (L) und Kondensatoren (C) verbinden. In Wissenschaft und Technik haben diese Schaltungen eine vielfältige und weitreichende Menge an Anwendungsfällen. Hierzu gehört zum Beispiel die Erzeugung von Schwingungen in Funktionsgeneratoren, wie sie auch im Praktikum oft zur Anwendung kommen. Die Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstandes, der sogenannten Impedanz, kann dazu verwendet werden, um Filterschaltungen zu realisieren. Weiter finden RLC-Glieder in der Signalverarbeitung und Störunterdrückung Anwendung, um beispielsweise Messsignale aufzubereiten und präzisere Messungen zu ermöglichen. Effekte von Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten treten auch in anderen Bauelementen und Kabeln auf. Das Verständnis der Effekte dieser hilft uns, Schaltungen entsprechend zu optimieren, sowie Fehler und Verfälschungen besser Interpretieren zu können.

1.1 Physikalische Grundlagen

Verhalten eines RC-Gliedes im Zeitbereich

Zunächst betrachten wir das Verhalten eines RC-Gliedes, also einer Schaltung aus einem Widerstand und einem Kondensator in einer Schaltung mit einer Gleichspannungsquelle, wie in Abbildung TODO: abbildung dargestellt. Wird der Stromkreis geschlossen, so beginnt der Kondensator sich aufzuladen. Der Aufladevorgang ist abgeschlossen, sobald die Spannung am Kondensator die Eingangsspannung U_E erreicht. Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt, dass die Eingangsspannung U_E gleich der Summe der Spannung am Kondensator U_C und am Widerstand U_R entspricht, also

$$U_E = U_C + U_R = U_C + RI. \quad (1)$$

Der Strom I entspricht gerade der zeitlichen Änderung der Kondensatorladung $I = \dot{Q} = C\dot{U}_C$, wodurch wir die Differentialgleichung

$$U_E = U_C + RC\dot{U}_C \quad (2)$$

erhalten. Als Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir

$$U_C(t) = U_E(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3)$$

Hierbei haben wir mit $\tau = RC$ die Zeitkonstante eingeführt. Erneut nach der Maschenregel können wir aus diesem Ergebnis den Verlauf der Spannung am Widerstand

$$U_R(t) = U_E e^{-t/\tau}, \quad (4)$$

sowie nach dem Ohm'schen Gesetz den Strom

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = I_0 e^{-t/\tau} \quad (5)$$

herleiten. Wir sehen nun, dass die Kondensatorladung exponentiell bis U_E ansteigt, während der Strom von $I_0 = \frac{U_E}{R}$ gegenläufig exponentiell bis 0 abfällt. Die ausschlaggebende Größe ist bei diesem Prozess die soeben eingeführte Zeitkonstante τ . Diese lässt sich durch die Messung der Halbwertszeit des $T_{1/2}$ der Kondensatorladung nach

$$\frac{U_E}{2} = U_E \left(1 - e^{T_{1/2}/\tau}\right) \quad (6)$$

$$\iff \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \quad (7)$$

bestimmen.

Liegt am RC-Glied eine Rechtecksspannung mit der Periodendauer T an, so wird der Kondensator abwechselnd, abhängig von τ be- und endladen, wie es in Abbildung **TODO: abbildung** dargestellt ist.

Impedanz

Die Impedanz $Z = U/I$ bezeichnet den Wechselstromwiderstand, welchen die Bauelemente in einem Wechselstromkreis aufweisen. Die Wechselspannung sei nun beschrieben durch $U_E(t) = U_0 e^{i\omega t}$ mit Amplitude U_0 und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$. Für einen ohmschen Widerstand in einem Wechselstromkreis gilt

$$Z_R = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} = R. \quad (8)$$

Die Impedanz ist also identisch mit dem Gleichstromwiderstand.

Für einen Kondensator in einem Wechselstromkreis gilt

$$U_E(t) = \frac{Q}{C} \implies \dot{U}_E = \frac{I(t)}{C} \implies i\omega U_E(t) = \frac{I(t)}{C}. \quad (9)$$

Hierdurch können wir dessen Impedanz herleiten zu

$$Z_C = \frac{U_E(t)}{I(t)} = \frac{1}{i\omega C}. \quad (10)$$

Eine solche rein imaginäre Impedanz wird auch Blindwiderstand genannt, da dieser Widerstand keine elektrische Leistung verbraucht. Wir stellen außerdem fest, dass die Impedanz frequenzabhängig ist. Für $\omega \rightarrow 0$ ist sie unendlich groß, für $\omega \rightarrow \infty$ verschwindet sie. Das Auftreten der imaginären Einheit $\frac{1}{i} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ zeigt außerdem eine Phasenverschiebung des Stromes um $-\frac{\pi}{2}$ gegenüber der Spannung auf.

Für eine Spule mit Induktivität L gilt der Zusammenhang

$$U_E(t) = L\dot{I}(t) = i\omega LI(t) \quad (11)$$

$$\implies Z_E = i\omega L. \quad (12)$$

Diese ist also ebenfalls rein imaginär und frequenzabhängig. Auch hier zeigt sich das Auftreten der imaginären Einheit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ in einer Phasenverschiebung des Stroms um $+\frac{\pi}{2}$ gegenüber der Spannung auf.

Frequenzverhalten von RC-Gliedern

Die soeben festgestellte Frequenzabhängigkeit der Impedanz von Kondensatoren erlaubt es uns, Filterschaltungen zu bauen. Hierzu betrachten wir erneut RC-Glieder, wie sie bereits im ersten Teil zum Einsatz kamen. Wir betrachten eine Schaltung, wie sie in Abbildung **TODO: Abbildung RC Wechselstrom** dargestellt ist.

Die Spannungsquelle liefert eine zeitabhängige Wechselspannung, beschrieben durch $U_E(t) = U_0 e^{i\omega t}$. Am Kondensator C nehmen wir eine Spannung ab, für welche nach dem Ohm'schen Gesetz gilt

$$U_C(t) = \frac{Z_C}{R + Z_C} U_E(t). \quad (13)$$

Hierbei ist R der ohm'sche Widerstand und $Z_C = \frac{-i}{\omega C}$ die komplexe Impedanz des Kondensators. Setzen wir dies in die obere Gleichung ein, so erhalten wir

$$U_C(t) = \frac{-i/\omega C}{R - i/\omega C} U_0 e^{i\omega t} \quad (14)$$

mit dem Betrag

$$|U_C| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (15)$$

Am Betrag $|U_C|$ lässt sich erkennen, dass es sich hierbei um einen Tiefpassfilter handelt. Denn, für $\omega \rightarrow 0$ geht der Nenner gegen eins und somit $|U_C| \rightarrow |U_E|$. Für $\omega \rightarrow \infty$ geht auch der Nenner $\rightarrow \infty$ und somit $|U_C| \rightarrow 0$. Es können also nur niedrige, bzw. tiefe Frequenzen die Schaltung passieren.

Gerade den umgekehrten Effekt erhält man durch Vertauschen des Widerandes und des Kondensators, wodurch ein Hochpassfilter entsteht. Mit diesem gilt für den Betrag der Spannung am Widerstand

$$|U_R| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}. \quad (16)$$

Der Frequenzgang einer solchen Filterschaltung ist definiert als das Verhältnis der Amplituden $|U_E|/|U_A|$ über der Frequenz. Die Grenzfrequenz $\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ ist die Frequenz, an welcher die Ausgangsamplitude $|U_A|$ um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gegenüber der Eingangsamplitude abgefallen (Tiefpassfilter) bzw. angestiegen (Hochpassfilter) ist. Den Bereich bis zur Grenzfrequenz eines Filters nennt man dessen Bandbreite.

RC-Glied als Differenzier- und Integrierglied

Ein weiterer Anwendungsbereich von Hoch- und Tiefpassfilterschaltungen ist die Anwendung als Differenzier- und Integrierglieder. Betrachten wir zunächst einen Tiefpassfilter. Der Strom I ergibt sich sowohl anhand der zeitlichen Änderung der Kondensatorladung, also auch dem ohm'schen Gesetz, nach

$$I = C \frac{dU_A}{dt} = \frac{U_E - U_A}{R}. \quad (17)$$

Ist nun die Periodendauer T der Eingangsspannung U_E deutlich kleiner als die Zeitkonstante τ , so ist nach (15) $U_A \ll U_E$ und es ergibt sich die Näherung

$$\frac{dU_A}{dt} \approx \frac{U_E}{RC}. \quad (18)$$

Somit entspricht das Ausgangssignal des Tiefpassfilters

$$U_A \approx \frac{1}{RC} \int U_E dt. \quad (19)$$

für die Bedingung $\tau \gg T$ ungefähr dem Integral des Eingangssignals.

Wiederum umgekehrt betrachten wir nun für einen Hochpassfilter die Summe der Teilspannungen. Die Eingangsspannung entspricht der Summe der Spannung am Kondensator

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt \quad (20)$$

und der Spannung am Widerstand, also der Ausgangsspannung U_A . Für den Strom gilt somit

$$\int I dt = C(U_E - U_A) \implies I = C \frac{d}{dt}(U_E - U_A). \quad (21)$$

Unter der Annahme, dass $\tau \ll T$ ist nach (16) $U_A \ll U_E$. Es gilt somit

$$I \approx C \frac{d}{dt} U_E, \quad (22)$$

also

$$IR = U_A \approx RC \frac{d}{dt} U_E. \quad (23)$$

Das Ausgangssignal des Hochpassfilters stellt also unter der Bedingung, dass $\tau \ll T$ ist, ungefähr die Differentiation des Eingangssignals dar.

Elektrischer Schwingkreis (RLC-Glied)

Wir betrachten zunächst einen idealisierten Schaltkreis mit einem Kondensator und einer parallel geschalteten Spule. Entlädt sich der Kondensator, so wird durch den Entladestrom ein Magnetfeld in der Spule erzeugt. Die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie wird also allmählich in magnetische Energie umgewandelt. Sobald der Kondensator gänzlich entladen ist, beginnt der Strom abzunehmen und als Konsequenz des Induktionsgesetzes und der Lenz'schen Regel wird in der Spule ein entgegengesetzter Strom erzeugt. Dieser lädt den Kondensator mit umgekehrter Polung wieder auf, die magnetische Energie wird also wieder in elektrische Energie umgewandelt. Dieses wechselwirkende Verhalten gibt den Schwingkreisen ihren Namen. In der Realität sorgen Widerstände in den Bauteilen, sowie dielektrische wie magnetische Verluste dafür, dass die Schwingung nicht ewig anhält, sondern gedämpft ist, soweit sie nicht durch ein kontinuierliches Eingangssignal angeregt ist. Daher betrachten wir nun RLC-Glieder, welche neben der Spule (L) und dem Kondensator (C) auch einen Widerstand (R) enthalten.

In einem RLC-Serienschwingkreis sind die drei Bauteile in Reihe geschaltet. Die Einzelspannungen, die an den einzelnen Bauteilen abfallen sind

$$U_R = \frac{R}{I}, \quad U_C = \frac{Q}{C}, \quad U_L = -L \frac{d}{dt} I. \quad (24)$$

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt weiter

$$U_R + U_C - U_L = 0, \quad (25)$$

die Summe der Teilspannungen muss also verschwinden. Durch Einsetzen und differenzieren erhalten wir hieraus die folgende Gleichung

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + R \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C} I = 0. \quad (26)$$

Dies entspricht der allgemeinen Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator. Unter der Annahme, dass der Widerstand verschwindet erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}I + \omega_0^2 I = 0 \quad (27)$$

eines ungedämpften harmonischen Oszillators mit der Lösung

$$I = I_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (28)$$

Hierbei wurden Induktivität und Kapazität zur Eigenfrequenz, definiert durch die Thomson'sche Schwingungsformel,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (29)$$

zusammengefasst.

Die allgemeine Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left(c_1 e^{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} \right). \quad (30)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen dabei von den Anfangsbedingungen ab. Unter der Voraussetzung

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}, \quad (31)$$

also einer entsprechend schwachen Dämpfung, spricht man vom sogenannten *Schwingfall*. Nur in diesem Fall kommt es auch tatsächlich zu einer periodischen, exponentiell gedämpften Oszillation des Stroms nach

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{i(\omega_f t + \varphi)} \quad (32)$$

mit

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (33)$$

Wie aus dem Term abzulesen ist, nimmt die Amplitude proportional zu $e^{-\delta t}$ ab. Hierbei ist die Dämpfungskonstante δ definiert als

$$\delta = \frac{R}{2L}. \quad (34)$$

Ihr Kehrwert $1/\delta$ ist die Relaxationszeit oder Abklingzeit τ_r . Empirisch kann die Dämpfungskonstante durch das Vermessen der Amplituden und der Periodendauer bestimmt werden. Das logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right) = \delta T \quad (35)$$

stellt den zugehörigen mathematischen Zusammenhang her.

1.2 Versuchsdurchführung

2 Messprotokoll

Messprotokoll 241

Marius Pfeiffer

17.12.2024

Robert Grosch

Aufgabe 1

RC-Schaltung

$$f = 165 \pm 1 \text{ Hz}$$

Halbwertszeiten:

C [nF]	R [kΩ]	T _{1/2}
470	1	0.3 ± 0.1 ms
4.7	10	45 ± 1 μs
47	1	34 ± 1 μs
47	1	32 ± 1 μs

Aufgabe 2

Integrator

Wenn wir den Widerstand durch den Poti höher einstellen, nähert sich die Signalkurve von U_A einer Dreiecksform an, welche sehr genau in die Rechteckige Form von U_E passt.

Das Integral einer Rechtecksfunktion ist die Dreiecksfunktion, dies stimmt mit den Beobachtungen überein.

Aus einem eingehenden Dreidiodensignal ergibt sich durch den Integrator ein Sinussignal.

Aufgabe 3

Tiefpass Filter

Frequenz Schnittpunkt: $(9.46 \pm 0.02) \text{ kHz}$

Hochpass Filter

Freq. Schnittpunkt: $(3.31 \pm 0.02) \text{ kHz}$

Phasenverschiebung Hochpass Filter

$f [\text{kHz}]$	$\Delta t [\text{s}]$	$\varphi [^\circ]$
1	$0.22 \pm 0.02 \text{ ms}$	79 ± 8
2	$86 \pm 2 \mu\text{s}$	61.9 ± 1.5
3	$46 \pm 2 \mu\text{s}$	49.7 ± 2.2
4	$30 \pm 2 \mu\text{s}$	43.2 ± 2.9
5	$20 \pm 2 \mu\text{s}$	36 ± 4
6	$15 \pm 2 \mu\text{s}$	34 ± 5
7	$11 \pm 2 \mu\text{s}$	27 ± 5
8	$9 \pm 2 \mu\text{s}$	26 ± 6
9	$7 \pm 2 \mu\text{s}$	23 ± 7
10	$5 \pm 2 \mu\text{s}$	18 ± 8

Aufgabe 4

Eigenschaften der Frequenzgänge

R	f_R	$\sqrt{U_A}$ [Vrms]	U_E [Vrms]	Δf [kHz]
$1 \text{ k}\Omega$	$4.02 \pm 0.02 \text{ kHz}$	0.64 ± 0.02	0.661 ± 0.001	4.92 ± 0.03
220Ω	$3.80 \pm 0.02 \text{ kHz}$	0.53 ± 0.02	0.650 ± 0.001	1.29 ± 0.03
47Ω	$3.75 \pm 0.02 \text{ kHz}$	0.27 ± 0.02	0.627 ± 0.001	0.56 ± 0.03

Aufgabe 5

Resonanzfrequenzen bei Frequenzüberhöhung

	R (Schwarz)	L (Blau)	C (Rot)
f	$3.91 \pm 0.02 \text{ Hz}$	$4.04 \pm 0.02 \text{ Hz}$	$3.80 \pm 0.02 \text{ Hz}$

Aufgabe 6

$$f = 100.00 \text{ Hz}$$

	U_p [V]	T [ms]
A_1	0.74 ± 0.02	0.26 ± 0.02
A_2	0.50 ± 0.02	0.26 ± 0.02
A_3	0.36 ± 0.02	0.26 ± 0.02
A_4	0.26 ± 0.02	0.26 ± 0.02
A_5	0.18 ± 0.02	$\phi 0.26 \pm 0.02$

Mit veränderlichem
Widerstand, Beobachtung

Schwingung wird
geringer mit höherem
Widerstand.

Amplituden und Schwingungsdauer
der gedämpften Schwingung

Aufgabe 7

Resonanzfrequenz: (3.94 ± 0.02) kHz

Aufgabe 8

Die Tabellen zeigen jeweils Frequenz & Amplitude der 100Hz, 4kHz und 8kHz Signalanteile (falls sichtbar)

Teil 1 (ohne Filter, 220Ω)

Signalanteil	U [dBV]	dU [dB]	f [Hz]
1	-3.06 ± 0.02	71.25 ± 0.02	100.71 ± 10
2	-8.06 ± 0.02	65.63 ± 0.02	3600 ± 10
3	-22.13 ± 0.02	51.25 ± 0.02	6780 ± 10

Teil 2 (Hochpass, 220Ω , 470nF)

Signalanteil	U [dBV]	dU [dB]	f [Hz]
1	-26.81 ± 0.02		100.71 ± 10
2	-8.69 ± 0.02		3600 ± 10
3	-22.44 ± 0.02		6780 ± 10

Teil 2 (Tiefpass, 220Ω , 470nF)

Signalanteil	U [dBV]	dU [dB]	f [Hz]
1	-2.75 ± 0.02		100.71 ± 10
2	-15.88 ± 0.02		3600 ± 10
3	-51.19 ± 0.02		6780 ± 10

Teil 2 (LC-Tiefpass, $L_1, 47\text{nF}$)

Signalanteil	$U [\text{dBV}]$	$dU [\text{dB}]$	$f [\text{Hz}]$
1	-2.56 ± 0.02		100.71 ± 10
2	3.34 ± 0.02		3600 ± 10
3	—		—

Teil 3 (Bandpass RLC)

$1\text{k}\Omega, L_1, 47\text{nF}$

Signalanteil	$U [\text{dBV}]$	$f [\text{Hz}]$	
1	-3.19 ± 0.02	100.71 ± 10	Osz. Bild hat für Ch 1: 3V Ch 2: 1V Skalierung
2	-8.81 ± 0.02	3590 ± 10	

$47\Omega, L_1, 47\text{nF}$

Signalanteil	$U [\text{dBV}]$	$f [\text{Hz}]$
1	-2.87 ± 0.02	100.71 ± 10
2	8.06 ± 0.02	3590 ± 10

Teil 3 (Bandpass RCL)

$1k\Omega, L_1, 47nF$

Signalanteil	U [dBV]	f [Hz]
1	-11.50 ± 0.02	3600 ± 10
2	-22.75 ± 0.02	6790 ± 10

Skalierung
Ch1: 1V
Ch2: 1V

$47\Omega, L_1, 47nF$

Signalanteil	U [dBV]	f [Hz]
1	6.81 ± 0.02	3590 ± 10
2	-22.25 ± 0.02	6790 ± 10

→ 100 Hz Peak nicht mehr im Spektrum zu sehen

Teil 3 (Bandpass CLR)

$1k\Omega, L_1, 47nF$

Signalanteil	U [dBV]	f [Hz]
1	-32.44 ± 0.02	100.7 ± 10
2	-8.06 ± 0.02	3590 ± 10
3	-43.38 ± 0.02	6800 ± 10

Skalierung
Ch1: 1V
Ch2: 1V

$47\Omega, L_1, 47nF$

Signalanteil	U [dBV]	f [Hz]
1	-57.56 ± 0.02	100.71 ± 10
2	-18.50 ± 0.02	3590 ± 10

Skalierung
Ch1: 0.3V
Ch2: 1V

→ 6.8 kHz Peak nicht mehr sichtbar

Aufgabe 9

Amplitude bei ca. 1 MHz nahm mit Vergrößerung der Kapazität bis zu einem Maximum zu und bei weiterer Erhöhung der Kapazität wieder ab.

Amplitude nahm bei Entfernung des Eisenkerns aus der Spule ab.

Es konnte im Oszilloskop ein leicht verzerrtes Sinussignal beobachtet werden.

AA
7.!

3 Auswertung

4 Zusammenfassung und Diskussion

$$x = 3 \frac{1}{|\text{cm}|} \quad (36)$$

$$x = 3 \text{ cm} \quad (37)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\vec{q} \quad (38)$$

$$\vec{p}^2 = \delta_{ij}p_ip_j \quad (39)$$

$$\vec{q}^2 = \delta_{kl}q_kq_l \quad (40)$$

$$\{L_i, H\} = \left\{ \varepsilon_{abc}q_bp_c, \frac{\delta_{ij}p_ip_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\delta_{kl}q_kq_l \right\} \quad (41)$$

$$= \varepsilon_{abc} \left\{ q_bp_c, \frac{\delta_{ij}p_ip_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\delta_{kl}q_kq_l \right\} \quad (42)$$

$$= \varepsilon_{abc} \left(\frac{1}{2m} \{q_bp_c, \delta_{ij}p_ip_j\} + \frac{m}{2}\omega^2 \{q_bp_c, \delta_{kl}q_kq_l\} \right) \quad (43)$$

$$(44)$$