

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Valentin Krems

13.02.2025

Versuch 255: Röntgenspektrometer



Abbildung 1: Versuchsaufbau

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Einleitung | 2 |
| 1.1 Physikalische Grundlagen | 2 |
| 1.2 Versuchsdurchführung | 5 |
| 2 Messprotokoll | 6 |
| 3 Auswertung | 8 |
| 3.1 Röntgenspektrum mit LiF-Kristall | 8 |
| 3.2 Bestimmung der Wellenlängen der $K_{\alpha,\beta}$ -Linien | 10 |
| 3.3 Zählrate als Funktion der Beschleunigungsspannung | 11 |
| 4 Zusammenfassung und Diskussion | 12 |

1 Einleitung

In Versuch 255 setzen wir uns mit der Funktionsweise einer Röntgenröhre, sowie dem charakteristischen Spektrum der Röntenstrahlung auseinander. Neben quantitativen Untersuchungen des Röntgenspektrums selbst, nutzen wir das Prinzip der Bragg-Reflexion, um unter anderem die Gitterkonstante eines NaCl-Kristalls zu bestimmen.

1.1 Physikalische Grundlagen

Die Röntgenröhre

Eine Röntgenröhre ist aufgebaut aus einer Glühkathode und einer Anode, welche sich in einem evakuierten Glaskolben befinden. Durch Glühemission werden aus der Kathode Elektronen freigesetzt, welche durch eine Beschleunigungsspannung von 10 bis 100kV, welche zwischen Kathode und Anode anliegt beschleunigt werden. Der kontinuierliche Teil des Röntgenspektrums wird durch die ausgehende Bremsstrahlung beim Abbremsen der Elektronen im Anodenmaterial verursacht. Diese Strahlung setzt bei einer bestimmten Grenzwellenlänge λ_{gr} ein, welche sich nach

$$\lambda_{gr} = \frac{hc}{eU} \quad (1)$$

berechnen lässt. Hierbei sind h , c , e das Plank'sche Wirkungsquantum, die Lichtgeschwindigkeit und die Elementarladung. U ist die an der Röntgenröhre anliegende Beschleunigungsspannung. Durch frei werdende Strahlung bei der Ionisation des Anodenmaterials ist dem kontinuierlichen Spektrum ein diskretes Spektrum überlagert, zu sehen in Abbildung (2), welches charakteristisch für das jeweilige Anodenmaterial ist.

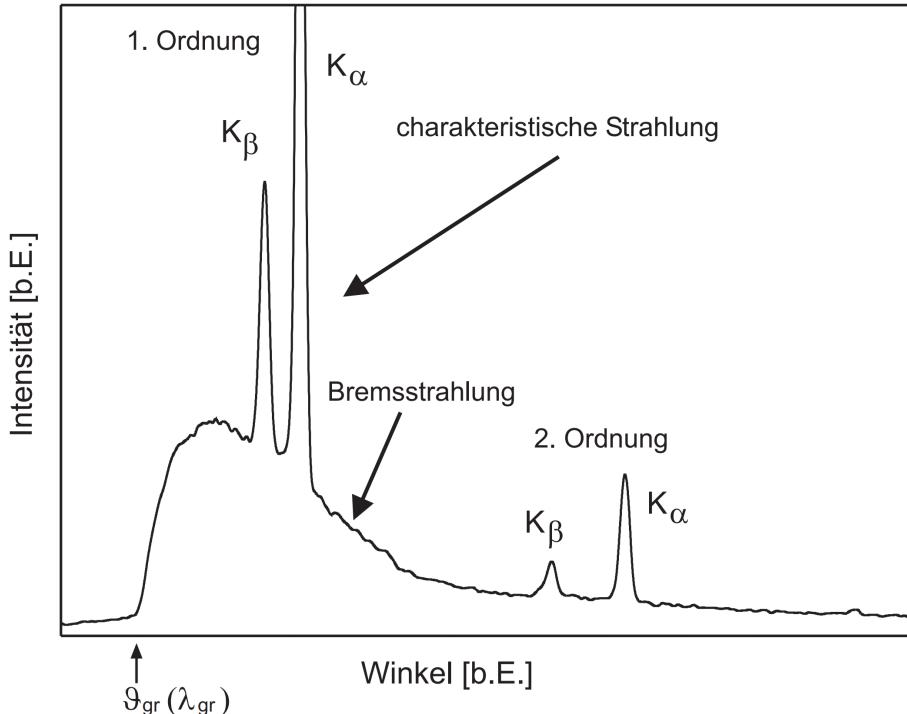


Abbildung 2: Kontinuierliches und diskretes Röntgenspektrum.

Die Positionen der Linien im diskreten Spektrum sind abhängig von der Ursprungs- und Ziel-Schale von bzw. zu welcher der Übergang des Elektrons stattfindet. Beispielsweise bezeichnen wir die Strahlung der Übergänge von der L - auf die K -Schale als K_α -Strahlung,

die für die Übergänge der M - auf die K -Schale als K_{β} -Strahlung. Die freiwerdende Energie eines Übergangs von der n -ten zur m -ten Schale lässt sich durch das Moseley'sche Gesetz

$$E_{n \rightarrow m} = hcR_{\infty}(Z - A)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (2)$$

berechnen. Hier gehen die Rydbergkonstante R_{∞} , sowie die Kernladungszahl Z und die Abschirmung der Kernladung als Abschirmungskonstante A mit ein. Nähert man die Abschirmungskonstante als $A \approx 1$ an, so lässt sich mit dem Moseley'schen Gesetz eine Näherung der Energie für die K_{α} -Strahlung abhängig von der Kernladungszahl angeben:

$$E_{2 \rightarrow 1} = hcR_{\infty}(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} hcR_{\infty}(Z - 1)^2. \quad (3)$$

Es ist zu beachten, dass bei genauerer Betrachtung, neben der Hauptquantenzahl, noch eine Entartung der Drehimpuls- und Spinquantenzahl in die freigesetzte Energie der Übergänge eingeht. Das Moseley'sche Gesetz gibt somit nur eine Näherung an.

Bragg-Reflexion

Als Bragg-Reflexion bezeichnet man die Beugung von Röntgenstrahlung durch die Gitterstruktur von Kristallen. Die Atomabstände in der Kristallstruktur befinden sich in der gleichen Größenordnung wie die Wellenlängen der Röntgenstrahlung, weshalb sich die Bragg-Reflexion zur Untersuchung des Röntgenspektrums eignet. Die Bragg-Reflexion beruht darauf, dass auf den Kristall treffende Röntgenstrahlung sowohl an der Oberfläche, als auch den tieferliegenden Netzebenen der Kristallstruktur reflektiert wird. Beträgt der Gangunterschied $\Delta s = 2d \sin(\vartheta)$ zweier Teilbündel, die unter dem Winkel ϑ eintreffen, siehe Abbildung (3), ein Vielfaches der Wellenlänge λ , so interferieren diese konstruktiv, andernfalls destruktiv. Dies ist festgehalten durch das Bragg'sche Gesetz

$$2d \sin(\vartheta) = n\lambda, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

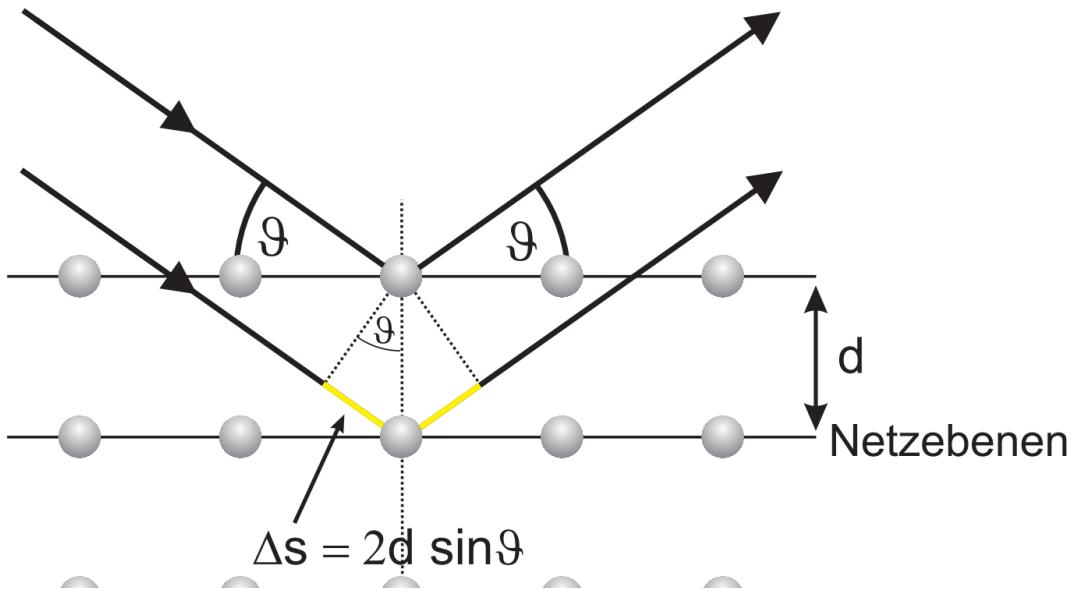


Abbildung 3: Bragg-Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Kristall.

Bei der sogenannten Drehkristallmethode wird diese Gesetzmäßigkeit angewandt. Dabei trifft Röntgenstrahlung auf einen Kristall, welcher um die Achse senkrecht zu dieser gedreht

wird. Welche Wellenlänge reflektiert wird, hängt dann gerade von der Winkelstellung des Kristalls ab. Die Intensität der reflektierten Strahlung kann dann mit einem Zählrohr gemessen und so Spektren wie in Abbildung (2) aufgezeichnet werden. Ist der Drehkristall so justiert, dass gerade die Wellenlänge einer bekannten diskreten Linie reflektiert wird, lässt sich mit dem Bragg'schen Gesetz der Netzaabstand d berechnen.

Kristallstruktur

Kristalle sind aus sich periodisch wiederholenden Elementarzellen aufgebaut, wie sie Beispielsweise in Abbildung (4) zu sehen sind. Bei NaCl- und LiF-Kristallen sind die drei Gitterkonstanten, also die Seitenlängen a einer Elementarzelle, gleich groß.

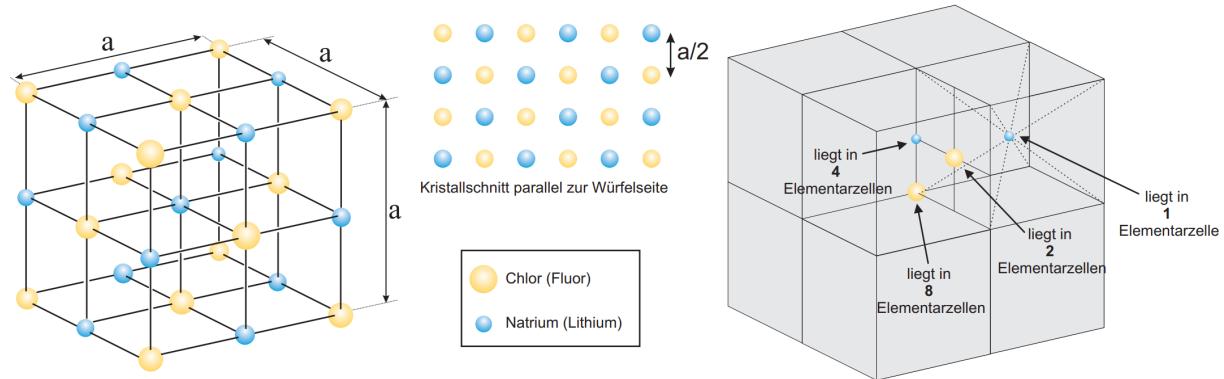


Abbildung 4: Elementarzelle eines NaCl-Kristalls, deren periodische Anordnung, sowie der Kristallschnitt.

Zur Ermittlung der Anzahl an Atomen, die einer Elementarzelle angehören, muss man beachten, zu wie vielen benachbarten Elementarzellen die Atome jeweils außerdem zählen. Dies ist ebenfalls in Abbildung (4) dargestellt. Trägt ein Atom zu x Elementarzellen bei, so zählt es für eine einzelne Elementarzelle nur zu $1/x$. So lässt sich die Anzahl an Atomen am Beispiel der NaCl- (LiF-) Kristalle bestimmen.

| Element | Position | Beitrag zu x EZ | Beitrag zu einer EZ | Anzahl | Beitrag |
|---------|--------------|-------------------|---------------------|--------|---------|
| Cl (F) | Ecken | 8 | 1/8 | 8 | 1 |
| Cl (F) | Mitte Fläche | 2 | 1/2 | 6 | 3 |
| Na (Li) | Mitte Kante | 4 | 1/4 | 12 | 3 |
| Na (Li) | Mitte Zelle | 1 | 1/1 | 1 | 1 |

Aus den Beiträgen können ablesen, dass zu jeder Elementarzelle 4 Chlor- (Fluor-) Atome und 4 Natrium- (Lithium-) Atome, also 4 NaCl- (LiF-) Moleküle, beitragen. Die Zahl 4 geht bei der Berechnung der Avogadrokonstante wie folgt mit ein:

$$N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{V}. \quad (5)$$

Dabei ist V_{Mol} das Molvolumen eines einzelnen Moleküls und V das Volumen einer Elementarzelle. Dieses lässt sich aus dem Netzaabstand d , welcher hier $a/2$ beträgt, berechnen. Somit gilt

$$N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{(2d)^3} = 4 \frac{M_{Mol}}{\rho(2d)^3} = \frac{1}{2} \frac{M_{Mol}}{\rho d^3}. \quad (6)$$

1.2 Versuchsdurchführung

Zur Durchführung der Messungen verwenden wir ein Röntgengerät, welches mit einem Zählrohr-Goniometer ausgestattet ist (Abbildung (5)). Die Röntgenstrahlung wird durch eine Röntgenröhre mit Molybdänanode erzeugt und über einen Kollimator auf den Drehkristall fokussiert. Das Zählrohr am Goniometer dreht sich im Verhältnis 2:1 mit dem Drehkristall, sodass es immer genau die Strahlung, welche im Winkel ϑ reflektiert wird erfassen kann.

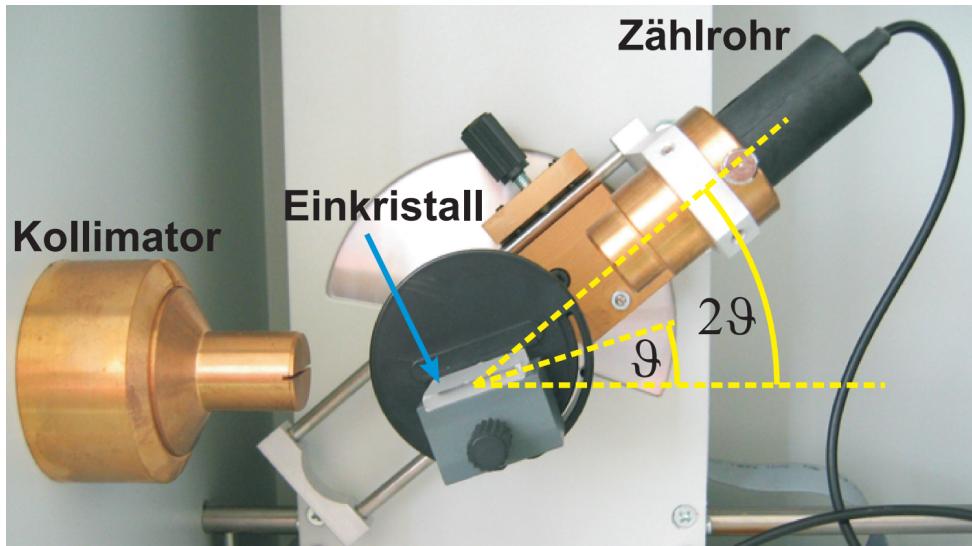


Abbildung 5: Montierung des Drehkristalls und des Zählrohr-Goniometers im Winkelverhältnis 2:1.

Messung des Röntgenspektrums mit einem LiF-Kristall. Bei einer Beschleunigungsspannung von $U = 35\text{kV}$, einem Strom von $I = 1\text{mA}$ und einer Torzeit von $t = 5\text{s}$ zeichnen wir das Röntgenspektrum in einem Winkelbereich von 3° bis 22° in 0.2° -Schritten auf.

Vermessen der K_α und K_β -Linien des Anodenmaterials. Aus unseren Messdaten der vorherigen Aufgabe entnehmen wir die ungefähren Positionen der K_α - und K_β -Linien. Mit den gleichen Einstellungen für Beschleunigungsspannung und Strom nehmen wir in deren Umgebung das Spektrum noch einmal in Winkelschritten von 0.1° und einer Torzeit von 20s auf.

Zählrate als Funktion der Beschleunigungsspannung. Bei einem festen Winkel von 7.5° Zeichnen wir die Zählrate für Beschleunigungsspannungen im Bereich von 20 bis 35kV in 1kV -Schritten jeweils über 20s auf.

Messung des Röntgenspektrums mit einem NaCl-Kristall. Hier führen wir die Messung aus Aufgabe 1 noch einmal mit einem NaCl-Kristall in einem Winkelbereich von 3° bis 18° durch.

2 Messprotokoll

Versuchsprotokoll 255

Marius Pfeiffer
Robert Grösch

13.02.2025

Aufgabe 1 (LiF)

$$U = 35 \text{ kV} \quad t = 5 \text{ s}$$

$$I = 1 \text{ mA} \quad \Delta\beta = 0.2^\circ$$

$$\beta \in [3^\circ, 22^\circ]$$

Aufgabe 2 (LiF)

$$U = 35 \text{ kV} \quad t = 20 \text{ s}$$

$$I = 1 \text{ mA} \quad \Delta\beta = 0.1^\circ$$

β -Bereiche:

K_β 1. Ordnung ca. 8.5° bis 9.5°

K_α 1. Ordnung ca. 9.6° bis 10.7°

K_β 2. Ordnung ca. 17.5° bis 18.9°

K_α 2. Ordnung ca. 20.1° bis 21.2°

Aufgabe 3 (LiF)

$$I = 1 \text{ mA} \quad t = 20 \text{ s} \quad \beta = 7.5^\circ$$

| Spannung [kV] | Zählrate [$\frac{1}{s}$] |
|---------------|----------------------------|
| 20 | 0.65 |
| 21 | 1.60 |
| 22 | 1.40 |
| 23 | 10.35 |
| 24 | 123.9 |
| 25 | 296.5 |
| 26 | 425.3 |
| 27 | 551.3 |
| 28 | 646.8 |
| 29 | 740.4 |
| 30 | 841.4 |
| 31 | 937.4 |
| 32 | 1005 |
| 33 | 1092 |
| 34 | 1155 |
| 35 | 1213 |

Aufgabe 4 (NaCl)

$$U = 35 \text{ kV} \quad t = 5 \text{ s}$$

$$I = 1 \text{ mA} \quad \Delta\beta = 0.2^\circ$$

$$\beta \in [3^\circ, 18^\circ]$$

V. LG

3 Auswertung

Vorbemerkungen

Sofern nicht anders angegeben, berechnen wir die Fehler zusammengesetzter Werte anhand der standardmäßigen Gauß'schen Fehlerfortpflanzung. Die σ -Abweichung zweier fehlerbehafteter Werte $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ berechnen wir anhand der Formel

$$\sigma = \frac{|x - y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \quad (7)$$

Für eine Anzahl an Ereignissen N berechnet sich der Fehler gemäß $\Delta N = \sqrt{N}$. Zur Fehlerangabe für Zählraten $n = N/t$ leiten wir daraus die Formel

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{t} = \frac{\sqrt{N}}{t} = \frac{\sqrt{nt}}{t} = \sqrt{\frac{n}{t}} \quad (8)$$

ab.

3.1 Röntgenspektrum mit LiF-Kristall

Abbildung (6) zeigt das Röntgenspektrums, welches wir mit der Drehkristallmethode mit einem LiF-Kristall im Winkelbereich von 3° bis 22° aufgezeichnet haben. Bereits hier ist zu erkennen, dass wir ab einem Winkel von etwa 5° beginnen, Bremsstrahlung zu detektieren.

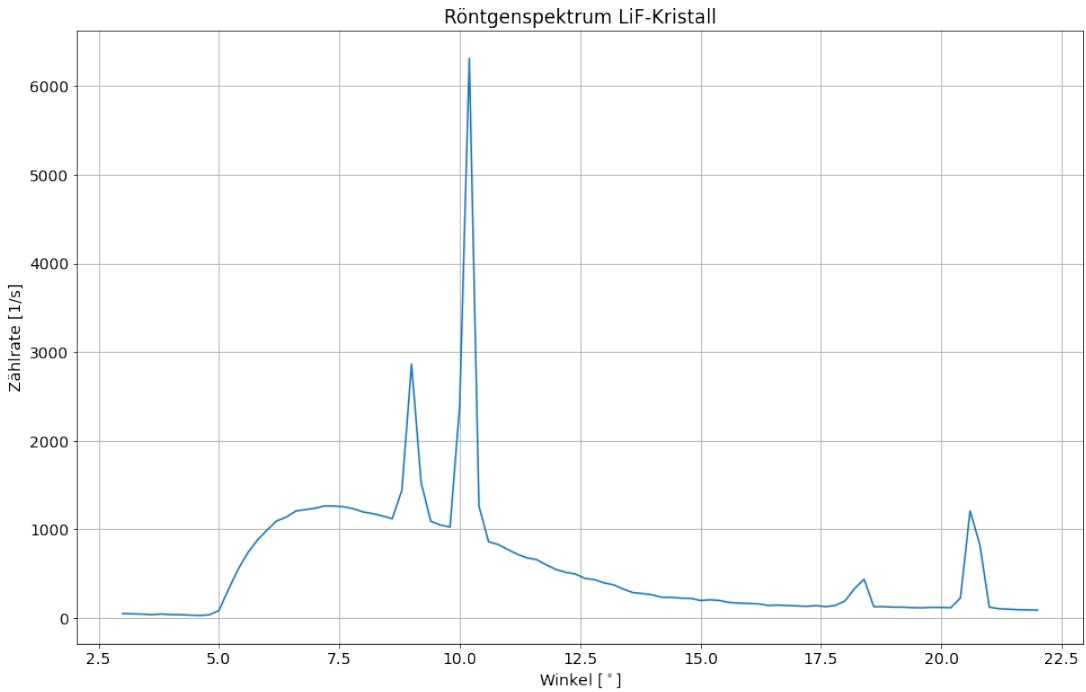


Abbildung 6: Röntgenspektrum mit LiF-Kristall

Um den Winkel und die zugehörige Grenzwellenlänge genauer zu bestimmen, betrachten wir den nahezu linearen Bereich des Spektrums am kurzweligen Ende und fitten an dieses eine lineare Funktion der Form $f(x; a, b) = ax + b$, wie in Abbildung (7) zu sehen.

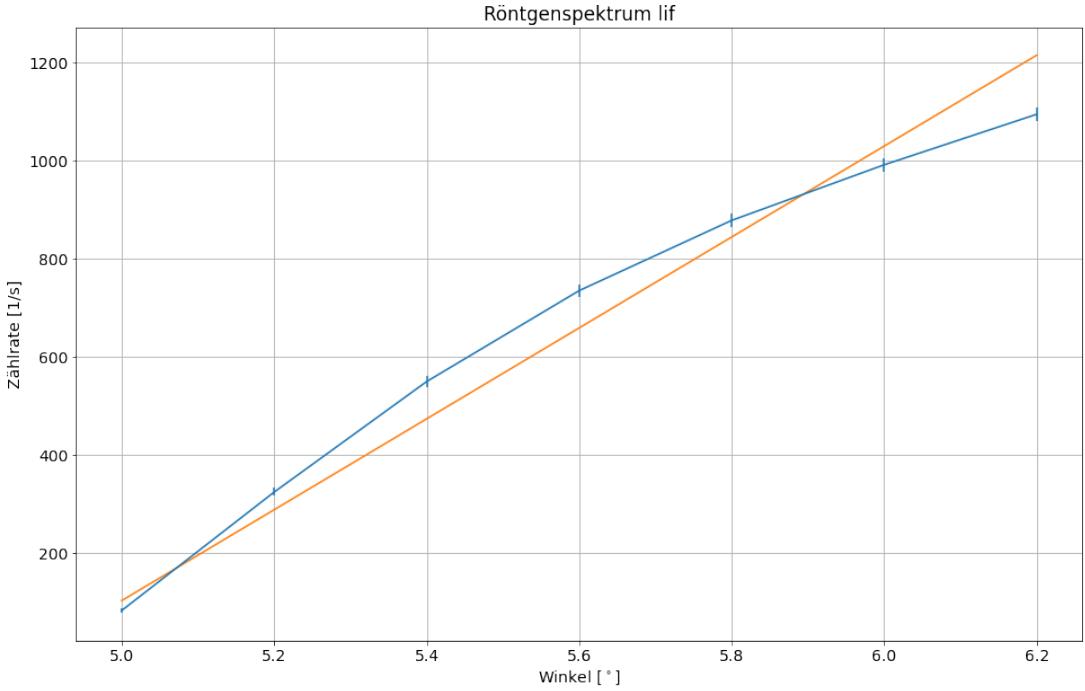


Abbildung 7: spektrumliflinearfit

Für die optimierten Parameter erhalten wir die Werte

$$a = 926.94 \pm 56.62 \frac{1}{\text{s}^\circ}, \quad b = -4531.53 \pm 297.50 \frac{1}{\text{s}}. \quad (9)$$

Mit diesen berechnen wir den Winkel, ab dem die Bremsstrahlung einsetzt, als Nullstelle der linearen Funktion nach

$$\vartheta_{0,1,Ord} = -\frac{b}{a} = 4.9 \pm 0.5^\circ. \quad (10)$$

Mithilfe des Bragg'schen Gesetzes (4) können wir daraus nach

$$\lambda = \frac{2d \sin(\vartheta)}{n} \quad (11)$$

die entsprechende Grenzwellenlänge berechnen. Da es sich hierbei um den Einsatz des Spektrums erster Ordnung handelt, setzen wir $n = 1$. Den Netzabstand d des LiF-Kristalls entnehmen wir aus der Praktikumsanleitung als $d = 201.4\text{pm}$. Damit erhalten wir für die Grenzwellenlänge einen Wert von

$$\lambda_{Grenz} = (34.33 \pm 3.08)\text{pm}. \quad (12)$$

Setzen wir nun in (1) diese Grenzwellenlänge, die Spannung $U = 35\text{kV}$ ein und stellen diese nach dem Plank'schen Wirkungsquantum h um, so erhalten wir für dieses einen Wert von

$$h = (6.4 \pm 0.6) \cdot 10^{-34} \text{J s}. \quad (13)$$

Die Grenzwellenlänge λ_{grenz} können wir weitergehend einsetzen, um den Winkel zu bestimmen, ab dem das Spektrum zweiter Ordnung einsetzt. Dazu stellen wir (4) nach ϑ um, und setzen $n = 2$. Wir erhalten damit einen Winkel von

$$\vartheta_{0,2,Ord} = (9.813 \pm 0.016)^\circ. \quad (14)$$

3.2 Bestimmung der Wellenlängen der $K_{\alpha,\beta}$ -Linien

Wir betrachten nun die Wellenlängenbereiche, in welchen die K_{α} - und K_{β} -Linien erster und zweiter Ordnung zu sehen sind, genauer. Die Ausschnitte, aufgenommen in Winkelschritten von 0.1° , sind in Abbildung (8) zu sehen.

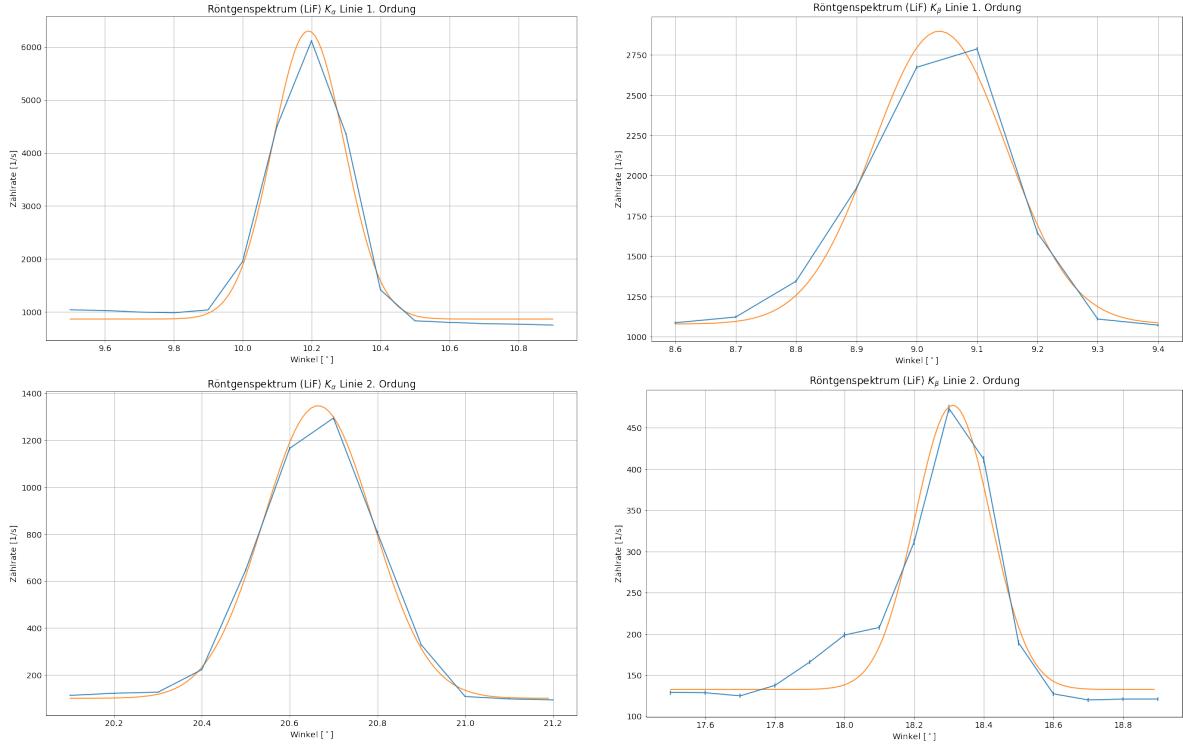


Abbildung 8: K_{α} - und K_{β} -Linien erster Ordnung (oben) und zweiter Ordnung (unten).

Um die Lage der Linien, sowie die Halbwertsbreite, zu ermitteln, fitten wir an die Daten eine Exponentialfunktion der Form

$$f(x; A, \mu, \sigma, c) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) + c. \quad (15)$$

Die Halbwertsbreite ermitteln wir dann aus der Standardabweichung σ nach der Formel

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma. \quad (16)$$

Der optimierte Wert von μ beschreibt hier erneut den *Winkel*, des Kristalls, bei welchem sich die Linie befindet. Um daraus die zugehörige Wellenlängen zu berechnen, verwenden wir wieder das Bragg'sche Gesetz (4), mit entsprechendem $n \in \{1, 2\}$ für die Linien erster bzw. zweiter Ordnung.

| Linie | Ordnung | Winkel [°] | Stabw. [°] | FWHM [°] | λ [pm] |
|--------------|---------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| K_{α} | 1 | 10.191 ± 0.005 | 0.104 ± 0.005 | 0.245 ± 0.011 | 71.27 ± 0.04 |
| K_{β} | 1 | 9.038 ± 0.007 | 0.110 ± 0.008 | 0.260 ± 0.018 | 63.27 ± 0.05 |
| K_{α} | 2 | 20.665 ± 0.004 | 0.125 ± 0.004 | 0.294 ± 0.008 | 71.074 ± 0.011 |
| K_{β} | 2 | 18.311 ± 0.011 | 0.109 ± 0.011 | 0.256 ± 0.025 | 63.27 ± 0.04 |

Tabelle 1: Ergebnisse des Röntgenspektrums (LiF) für die K_{α} - und K_{β} -Linien in der 1. und 2. Ordnung.

Aus den Werten der Wellenlängen der Linien erster und zweiter Ordnung bilden wir nun noch die Mittelwerte, um mit diesen später weiterzurechnen:

$$\lambda_{K_\alpha} = (71.171 \pm 0.018)\text{pm}, \quad (17)$$

$$\lambda_{K_\beta} = (63.274 \pm 0.029)\text{pm}. \quad (18)$$

Diese beiden Werte sind charakteristisch für die Molybdänanode der Röntgenröhre.

3.3 Zählrate als Funktion der Beschleunigungsspannung

Bei einem festen Winkel des LiF-Kristalls von 7.5° haben wir die Zählraten für die Beschleunigungsspannungen im Bereich von 20 bis 35kV aufgezeichnet. Die Daten sind in Abbildung (9) zu sehen.

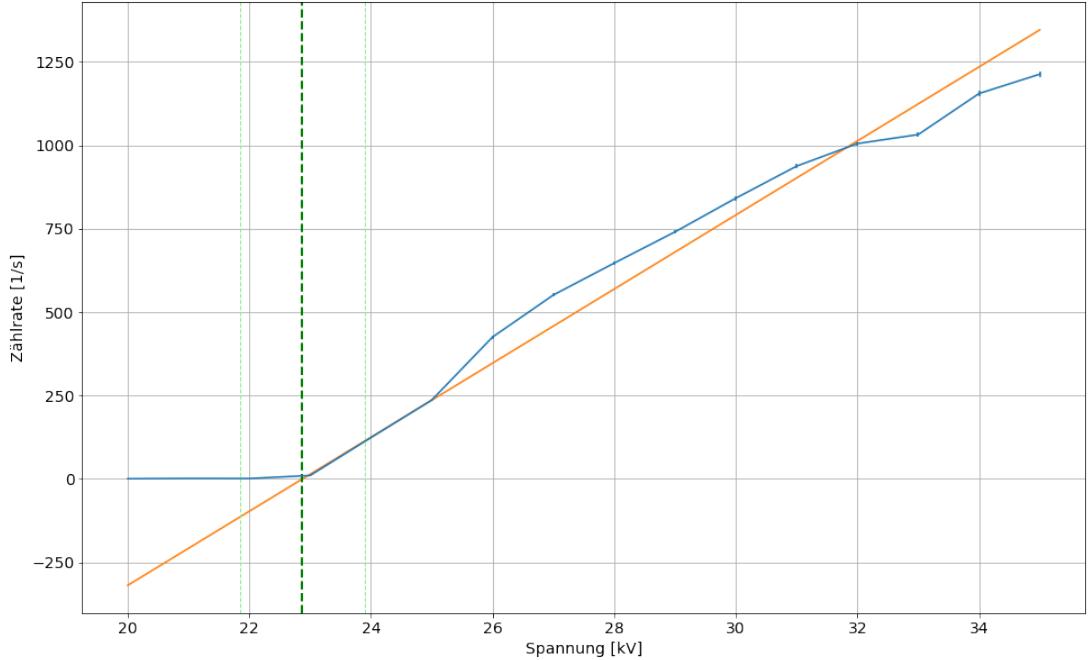


Abbildung 9: Zählraten bei steigender Beschleunigungsspannung unter einem Winkel von 7.5° .

Ebenfalls in Abbildung (9) zu sehen ist eine linearer Funktion, welchen wir an diese Daten angepasst haben, um die Nullstelle, also den Punkt, ab dem die Aussendung von Bremsstrahlung einsetzt, zu finden. Nach dem gleichen Schema wie zuvor, können wir anhand der optimierten Parameter der linearen Funktion deren Nullstelle zu einem Wert von

$$U_0 = (22.9 \pm 1.1)\text{kV} \quad (19)$$

bestimmen. Die zu einem Winkel von 7.5° korrespondierende Wellenlänge berechnen wir auf

$$\lambda_{7.5} = (52.6 \pm 0.4)\text{pm}. \quad (20)$$

Die ermittelte Wellenlänge und die Einsatzspannung können wir nun erneut in Gleichung (1) einsetzen, um das Planck'sche Wirkungsquantum zu bestimmen. Hier erhalten wir einen Wert von

$$h = (6.43 \pm 0.30) \cdot 10^{-34} \quad (21)$$

4 Zusammenfassung und Diskussion