

Name: Marius Pfeiffer

Matrikel-Nr.: 4188573

E-Mail: marius.pfeiffer@stud.uni-heidelberg.de

Betreut durch: Selina Pohl

05.11.2024

Versuch 245: Induktion

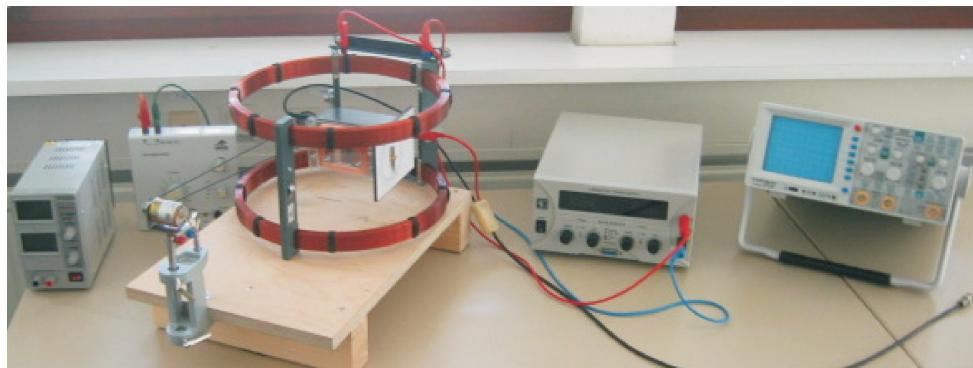


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.1.1 Induktionsgesetz	2
1.1.2 Selbstinduktion und Induktivität	2
1.1.3 Helmholtz-Spule	3
1.1.4 Das Magnetfeld der Erde	4
1.2 Versuchsdurchführung	5
2 Messprotokoll	6
3 Auswertung	10
3.1 Induktion durch Änderung der Fläche und des Magnetfeldes	10
3.2 Auswirkung des Winkels auf die Induktionsspannung	12
3.3 Verhältnis von induzierter und angelegter Spannung	13
3.4 Untersuchung des Erdmagnetfeldes	15
4 Zusammenfassung und Diskussion	17

1 Einleitung

In Versuch 245 befassen wir uns mit der elektromagnetischen Induktion. Diese beschreibt die Erzeugung von elektrischer Spannung durch zeitlich veränderlich Magnetfelder. Kern des Versuchs bildet das Induktionsgesetz, wessen Zusammensetzung wir in den einzelnen Versuchsteilen untersuchen werden. Das hierfür nötige Magnetfeld wird mit einer sogenannten Helmholtz-Spule erzeugt. Als Induktionsspule wird eine kleinere Spule im Inneren der Helmholtz-Spule verwendet, welche sich mit einem Motor in Rotation versetzen lässt.

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Induktionsgesetz

Wird ein elektrischer Leiter einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld ausgesetzt, so entsteht entlang diesem eine elektrische Spannung, die Induktionsspannung. Nach dem Induktionsgesetz

$$U_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

entspricht die Induktionsspannung U_i dem Negativen der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses Φ . Der magnetische Fluss wiederum ist definiert durch das Integral

$$\Phi(t) = \int_{\vec{A}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} \quad (2)$$

der (zeitabhängigen) magnetischen Flussdichte \vec{B} über eine (zeitabhängige) Fläche \vec{A} .

Für den Spezialfall einer mit Kreisfrequenz ω rotierenden Flachspule mit Fläche A und Windungszahl N in einem konstanten Magnetfeld B gilt für den magnetischen Fluss

$$\Phi(t) = BAN \cos(\omega t) \quad (3)$$

und somit für die Induktionsspannung

$$U_i(t) = -BAN\omega \sin(\omega t). \quad (4)$$

Hält man die Induktionsspule bei einem konstanten Winkel α und setzt diese dem Feld einer weiteren Spule aus, durch welche ein Wechselstrom der Kreisfrequenz Ω fließt, so ergibt sich die Induktionsspannung

$$U_i(t) = -BAN\Omega \sin(\Omega t) \cos(\alpha). \quad (5)$$

Lässt man zusätzlich eine zeitliche Veränderung von α zu, versetzt also die Induktionsspule in Rotation, so zeigt sich für eine konstruktive Interferenz der Frequenzen eine Schwebung im Verlauf der induzierten Spannung.

1.1.2 Selbstinduktion und Induktivität

Die im vorherigen Absatz dargestellte zeitliche Änderung der Spannung in der felderzeugenden Spule führt dazu, dass in dieser Spule selbst eine Induktionsspannung entsteht. Diese erzeugte Spannung ist der angelegten Spannung entgegengerichtet. Die daher rührende Schwächung des Stroms durch die Spule lässt sich durch den induktiven Widerstand

$$X_L = \omega L \quad (6)$$

beschreiben. Die hierbei auftretende Konstante L heißt *Induktivität*. Jeder Art von Leiteranordnung lässt sich eine solche bestimmte Induktivität zuordnen. Hierbei spielt sie unter anderem bei der Bestimmung komplexer Impedanzen von Wechselstromkreisen eine Rolle.

1.1.3 Helmholtz-Spule

Die parallele Anordnung zweier in Reihe geschalteten Magnetspulen mit Radius R im Abstand R nennt man Helmholtz-Spule (siehe Abbildung 2).

Die Besonderheit dieser ist die Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes im Zentrum der Spulenanordnung mit der Flussdichte

$$\vec{B}(0) = \frac{8}{\sqrt{125}} \frac{\mu_0 N I}{R} \vec{e}_x. \quad (7)$$

An anderen Punkten der Symmetriearchse x ist die magnetische Flussdichte im Allgemeinen nicht analytisch berechenbar.

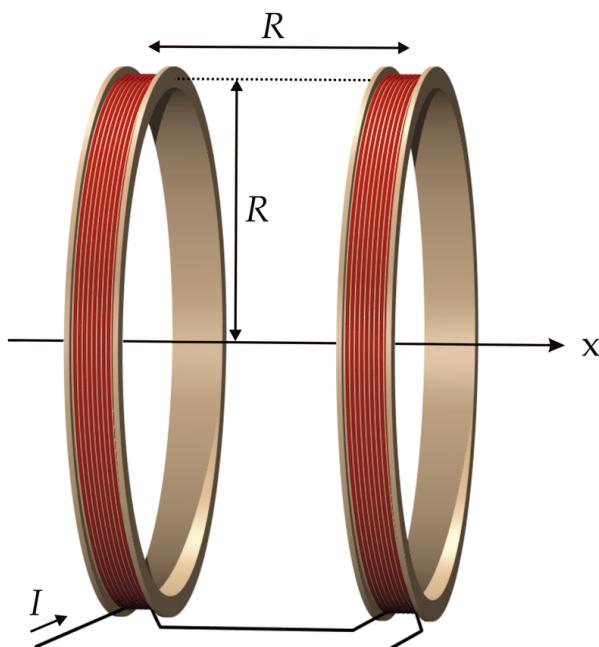


Abbildung 2: Helmholtz-Spule

Auch einer Helmholtz-Spule lässt sich eine Induktivität zuordnen.

1.1.4 Das Magnetfeld der Erde

Durch die Bewegung von flüssigem Eisen im äußeren Erdkern wird ein Magnetfeld erzeugt. In erster Näherung lässt sich dieses Feld wie das Dipolfeld eines riesigen Stabmagneten im Zentrum der Erde beschreiben. Hierbei sind der magnetische Süd- und Nordpol ungefähr umgekehrt in Richtung des geografischen Nord- und Südpol ausgerichtet.

Die *Inklination* ist der Winkel, den die Feldlinien des Magnetfeldes relativ zur Horizontalen bilden. Wie in der schematischen Darstellung in Abbildung 3 zu sehen, verlaufen die Magnetfeldlinien am Äquator parallel zur Erdoberfläche, entsprechend einer Inklination von 0° , und an den Polen senkrecht zu dieser, entsprechend einer Inklination von 90° . Die Inklination in den Bereichen zwischen diesen lässt sich durch die Zerlegung des Erdmagnetfeldes in eine Horizontal- und eine Vertikalkomponente, mithilfe einer Kompressionsmessung, empirisch bestimmen.

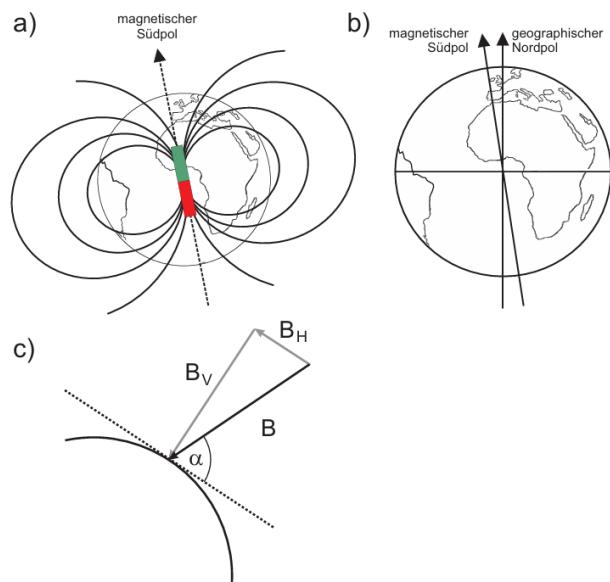


Abbildung 3: Schematische Darstellungen des Erdmagnetfeldes

1.2 Versuchsdurchführung

Der Versuch setzte sich aus vier Teilversuchen zusammen.

Versuchsteil 1 / Vorversuch. Der Vorversuch umfasste eine qualitative Untersuchung des Induktionseffekts. Hierzu schlossen wir eine Magnetspule direkt an das Oszilloskop an und ließen einen Magnet hindurchfallen. Der fallende Magnet erzeugte ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, welches in der Spule eine Spannung induzierte. Diese ließ sich in Form eines Ausschlags auf dem Oszilloskop beobachten.

Versuchsteil 2. Im zweiten Versuchsteil befassen wir uns mit der Messung der Induktionsspannung abhängig von der Drehfrequenz der Induktionsspule (a) und dem Strom durch die felderzeugende Spule (b).

Zur Erzeugung des Magnetfeldes verwendeten wir die Helmholtz-Spule. In deren Zentrum befand sich die kleinere Induktionsspule. Diese ließ sich an einer Aufhängung frei um eine Achse rotieren. Um eine kontinuierliche, konstante Rotation zu erzeugen war die Spule über einen Keilriemen mit einem Motor verbunden.

Für Teilaufgabe (a) betrieben wir die Helmholtz-Spule mit einem Strom von etwa 4A und notierten die in der Leiterschleife induzierte Spannung für einen Bereich von 3 bis 15Hz. Für Teilaufgabe (b) stellten wir die Leiterschleife auf eine konstante Rotation von ca. 10Hz und variierten für die Aufzeichnung der Induktionsspannung den Strom durch die Helmholtz-Spule in einem Bereich von 0.5 bis 4.5A.

Versuchsteil 3. Für diesen Versuchsteil legten wir an die Helmholtz-Spule eine Wechselspannung der Kreisfrequenz Ω an. Teilaufgabe (a) umfasste die Messung der Induktionsspannung für verschiedene Winkelstellungen der ruhenden Induktionsspule im Bereich von 0 bis 360°. In der zweiten Teilaufgabe positionierten wir die Induktionsspule in der Horizontalen in der Helmholtz-Spule und zeichneten die induzierte Spannung, sowie Spannung und Strom in der Helmholtz-Spule für verschiedene Kreisfrequenzen der angelegten Wechselspannung auf.

Versuchsteil 4. Im letzten Versuchsteil befassten wir uns mit dem Erdmagnetfeld. Hierzu richteten wir die Induktionsspule in Richtung des magnetischen Nordpols aus und notierten für eine Rotationsfrequenz von ca. 15Hz die induzierte Spannung. Dann schalteten wir die Helmholtz-Spule hinzu, um mit dieser ein Magnetfeld zu erzeugen, welches die vertikale Komponente des Erdmagnetfeldes kompensiert. Die Helmholtz-Spule mussten wir dafür auf die Seite legen. Wir notierten uns die induzierte Spannung, sowie den Strom durch die Helmholtz-Spule.

2 Messprotokoll

Messprotokoll 245

Marius Kleifter
Robert Grosch

05.11.2024

Vorberechnung, max. Spannung

Widerstand Spule: $2.6 \pm 0.1 \Omega$

Max. Strom: 5 A

$$U = R \cdot I \Rightarrow U = 2.6 \Omega \cdot 5 A = 13 V$$

✓

Aufgabe 2

a) Scheitelspannung in Abh. von Frequenz

Frequenz [Hz]	Sp-Sp [V]
3.0 ± 0.3	0.78 ± 0.04
6.05 ± 0.15	2.80 ± 0.06
9.05 ± 0.12	5.04 ± 0.04
12.10 ± 0.09	7.54 ± 0.16
15.00 ± 0.12	9.84 ± 0.16

✓

b) Scheitelspannung in Abh. vom B-Feld

Strom [A]	Sp-Sp [V]
0.50 ± 0.01	0.74 ± 0.02
1.00 ± 0.01	1.50 ± 0.08
1.50 ± 0.01	2.22 ± 0.04
2.00 ± 0.01	3.00 ± 0.09
2.50 ± 0.01	3.68 ± 0.04
3.00 ± 0.01	4.40 ± 0.08
3.50 ± 0.01	5.28 ± 0.08
4.00 ± 0.01	6.00 ± 0.12
4.50 ± 0.01	6.80 ± 0.16

$$f = (10.05 \pm 0.12) \text{ Hz}$$

✓

Aufgabe 3

a) Sp-Sp in Abh. vom Winkel

Winkel [°]	Sp-Sp [mV] ($\pm 2\%$)
0.0 ± 2.5	320
30.0 ± 2.5	272
60.0 ± 2.5	148
90.0 ± 2.5	16
120.0 ± 2.5	184
150.0 ± 2.5	288
180.0 ± 2.5	320
210.0 ± 2.5	272
240.0 ± 2.5	156
270.0 ± 2.5	4
300.0 ± 2.5	164
330.0 ± 2.5	280

✓

5)

Freq [Hz]	Sp-Sp Ind. [mV]	Sp-Sp HH [V]	I HH [mA]
20.00 ± 0.12	107 ± 1	5.44 ± 0.08	23.02 ± 0.02
40.00 ± 0.15	197 ± 1	5.68 ± 0.08	20.56 ± 0.02
60.00 ± 0.15	257 ± 1	5.68 ± 0.08	17.68 ± 0.02
80.00 ± 0.15	293 ± 1	5.68 ± 0.24	15.12 ± 0.02
100.0 ± 0.2	317 ± 1	5.44 ± 0.16	13.03 ± 0.02
120.0 ± 0.2	331 ± 1	5.36 ± 0.08	11.35 ± 0.02
140.0 ± 0.4	341 ± 1	5.36 ± 0.08	10.05 ± 0.02
160.0 ± 0.4	347 ± 1	5.36 ± 0.08	8.98 ± 0.02
180.0 ± 0.4	352 ± 1	5.36 ± 0.08	8.05 ± 0.02
200.0 ± 0.4	355 ± 1	5.36 ± 0.08	7.37 ± 0.02
400 ± 1	367 ± 1	5.36 ± 0.08	3.81 ± 0.02
600 ± 1	371 ± 1	5.36 ± 0.08	2.56 ± 0.02
800 ± 2	373 ± 1	5.36 ± 0.08	1.92 ± 0.02
1000 ± 2	374 ± 1	5.36 ± 0.08	1.53 ± 0.02
1200 ± 4	380 ± 1	5.36 ± 0.08	1.28 ± 0.02
1400 ± 10	382 ± 2	5.36 ± 0.08	1.08 ± 0.02
1600 ± 10	382 ± 2	5.36 ± 0.08	0.95 ± 0.02
1800 ± 10	386 ± 2	5.36 ± 0.08	0.84 ± 0.02
2000 ± 10	392 ± 4	5.36 ± 0.08	0.75 ± 0.02

Aufgabe 4

a) Ohne Kompensation

Frequenz: 14.8 ± 0.2 Hz

Sp-Sp: 148 ± 1 mV

b) Mit Kompensation

Frequenz: 14.7 ± 0.3 Hz

Strom: 59.8 ± 0.2 mA

Sp-Sp: 45 ± 2 mV



s Rell

3 Auswertung

3.1 Induktion durch Änderung der Fläche und des Magnetfeldes

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen die Aufgezeichnete induzierte Spannung in Abhängigkeit von der Drehfrequenz der Induktionsspule bzw. dem Strom durch die Helmholtz-Spule. Da wir die Drehfrequenz der Induktionsspule nicht exakt einstellen konnten, mussten wir diese durch die Frequenz der induzierten Wechselspannung ermitteln. Das Oszilloskop wies hierbei für niedrige Frequenzen hohe Schwankungen auf, weshalb der Fehler der niedrigeren Kreisfrequenzen in Abbildung 4 größer ist.

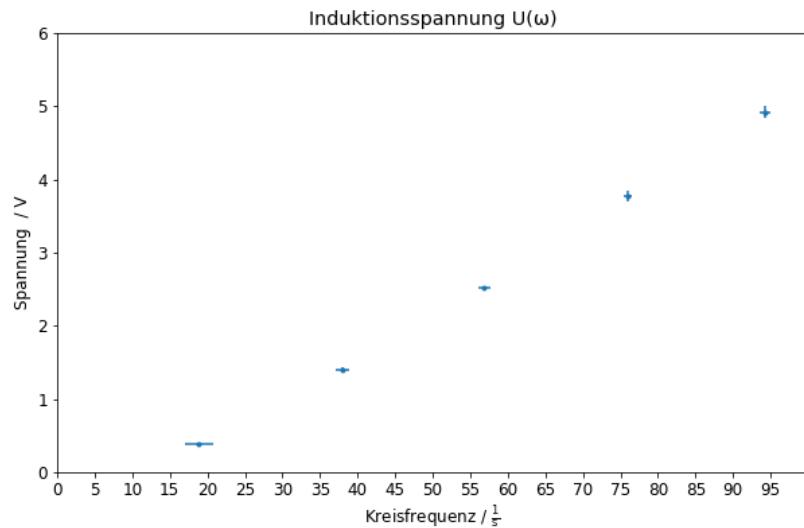


Abbildung 4: Induzierte Spannung in Abhängigkeit von der Drehfrequenz der Induktionsspule

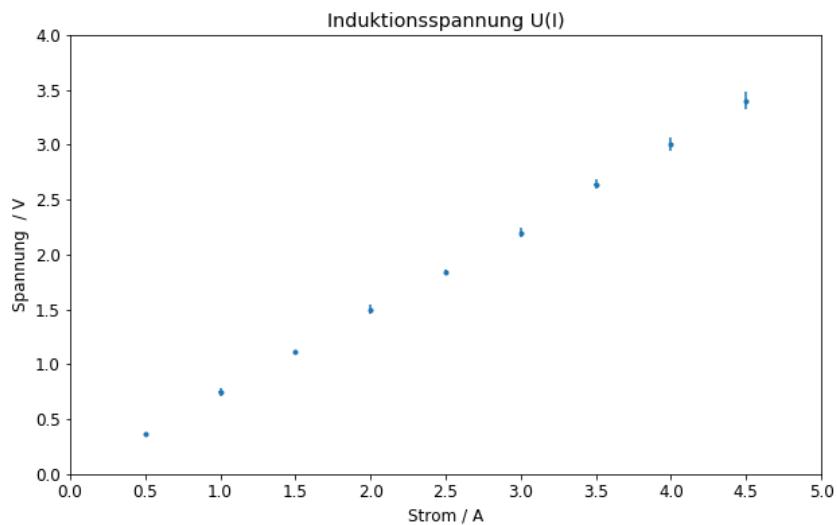


Abbildung 5: Induzierte Spannung in Abhängigkeit vom Strom durch die Helmholtz-Spule

Wie auch von der mathematischen Beschreibung, dem Induktionsgesetz, vorhergesagt, weisen beide Szenarien ein lineares Verhältnis auf. Mithilfe einer linearen Regression

können wir die Steigung dieses linearen Verhältnisses ermitteln, zu sehen in den Abbildungen 6 und 7.

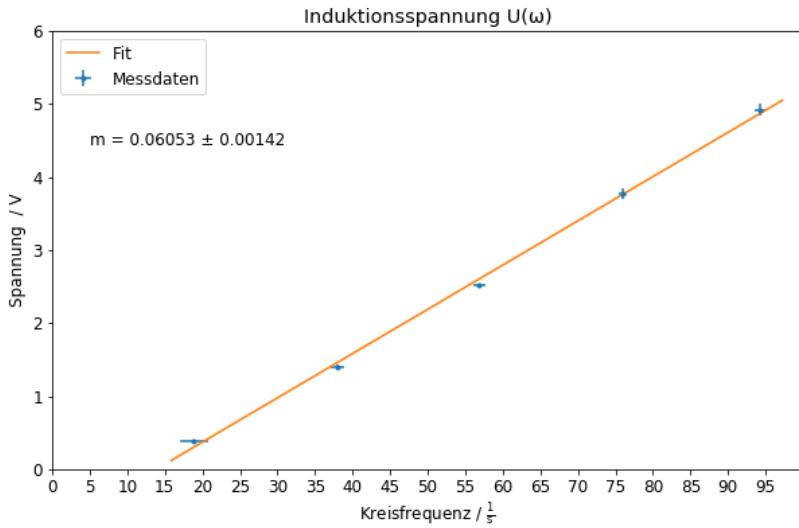


Abbildung 6: Induzierte Spannung in Abhängigkeit von der Drehfrequenz der Induktionsspule mit linearem Fit

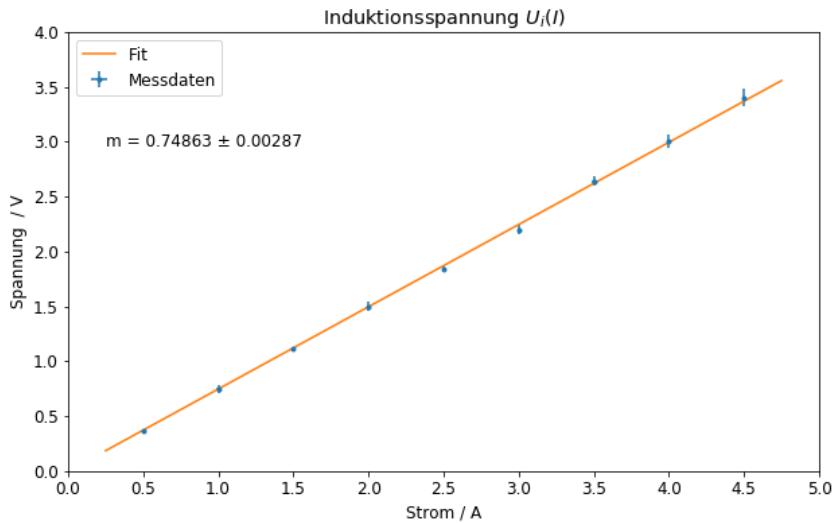


Abbildung 7: Induzierte Spannung in Abhängigkeit vom Strom durch die Helmholtz-Spule mit linearem Fit

Wir betrachten nun genauer das Diagramm in Abbildung 6, also die Frequenzabhängigkeit der Induktionsspannung. Wir können in der Formel für die Spitzenspannung aus dem Einleitungsteil

$$U_{i,peak}(\omega) = BAN\omega \quad (8)$$

die Steigung der Gerade mit $m = BAN$ identifizieren. Stellen wir diese nach B um, so erhalten wir mit $N = 4000$ und $A = 41.7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ eine magnetische Flussdichte von

$$B_{exp} = \frac{m}{AN} \pm \frac{\Delta m}{AN} = (3.63 \pm 0.08) \cdot 10^{-3} \text{ T.} \quad (9)$$

Die theoretische Vorhersage für die magnetische Flussdichte im Zentrum der Helmholtz-Spule, gegeben durch Gleichung 7 entspricht

$$|\vec{B}(0)| = \frac{8}{\sqrt{125}} \frac{\mu_0 N(I \pm \Delta I)}{R} = \frac{8}{\sqrt{125}} \frac{\mu_0 \cdot 124 \cdot (4.0 \pm \Delta 0.1)}{0.1475 \text{m}^2} \quad (10)$$

$$= (3.02 \pm 0.08) \cdot 10^{-3} \text{T}. \quad (11)$$

Aus den Werten erkennen wir, dass die experimentell verzeichnete magnetische Felddichte leicht höher ist, als die theoretisch vorhergesagte. Mögliche Ursachen für diesen Unterschied werden wir im letzten Kapitel diskutieren.

3.2 Auswirkung des Winkels auf die Induktionsspannung

Für die folgenden Versuchsteile wurde an die Helmholtz-Spule eine Wechselspannung der Kreisfrequenz Ω angelegt. Abbildung 8 zeigt die induzierte Spannung aufgetragen über den Winkel der Induktionsspule in der Helmholtz-Spule.

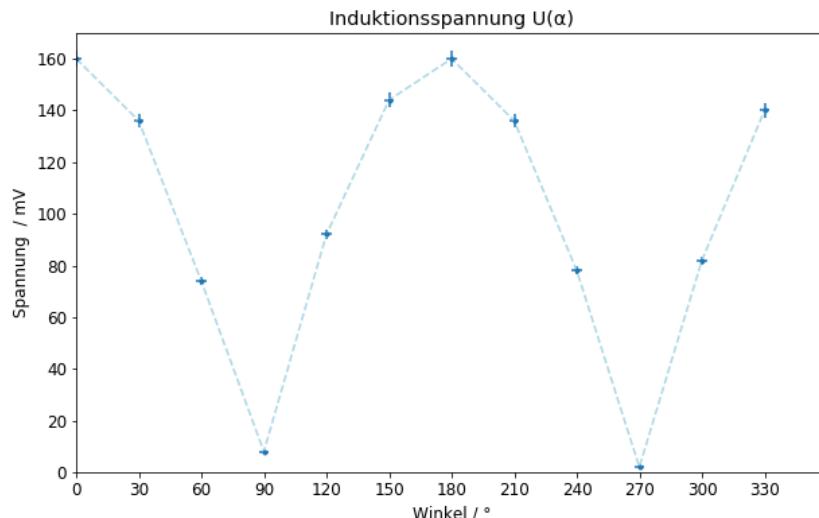


Abbildung 8: Induzierte Spannung in Abhängigkeit des Winkels der Induktionsspule

Nach Gleichung 5 weist die Induktionsspannung in diesem Fall eine Abhängigkeit der Form $U_I \sim |\cos(\alpha)|$ auf. Dies deutet sich bereits in Abbildung 8 und ist im Fit (Abbildung 9) noch einmal deutlicher zu erkennen.

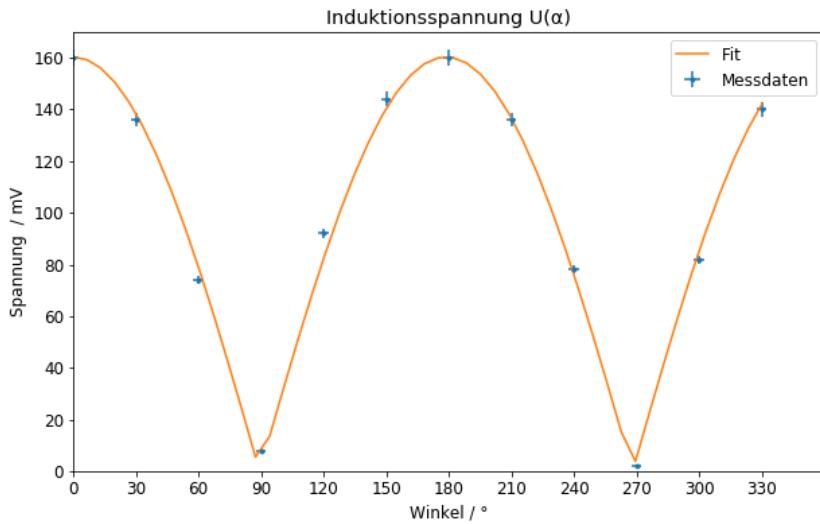


Abbildung 9: Induzierte Spannung in Abhängigkeit des Winkels der Induktionsspule mit Fit

Für die nun folgenden Betrachtungen brachten wir die Induktionsspule wieder in eine horizontale Stellung in der Helmholtz-Spule.

3.3 Verhältnis von induzierter und angelegter Spannung

Abbildung (10) zeigt das Verhältnis von induzierter zu angelegter Spannung $\frac{U_{\text{ind}}}{U_{\text{Hh}}}$ über der Kreisfrequenz Ω der angelegten Spannung.

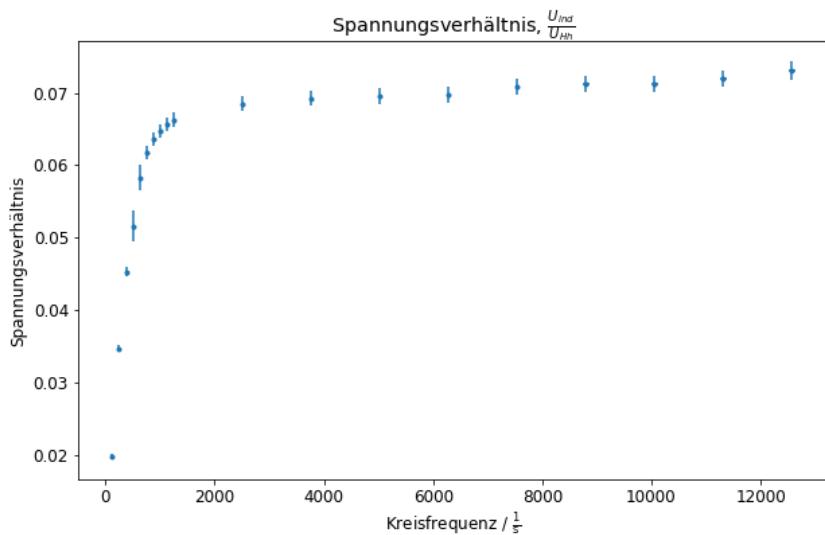


Abbildung 10: Verhältnis von induzierter und angelegter Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz

Es ist zu erkennen, dass sich das Verhältnis allmählich einer Asymptote bei ca. 0.07 anschmiegt. Vergleichbar dazu zeigt Abbildung (11), dass der Strom durch die Helmholtz-Spule mit zunehmender Frequenz der angelegten Wechselspannung abnimmt.

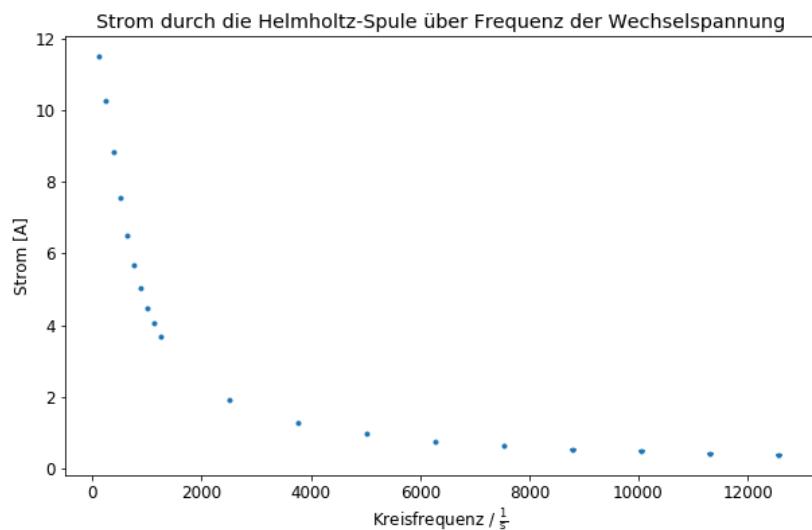


Abbildung 11: Strom durch die Helmholtz-Spule in Abhängigkeit von der Frequenz

Diese Beobachtung ist durch die im Theorieteil erwähnte Selbstinduktion der Helmholtz-Spule zu erklären. Diese verursacht einen Strom, welcher gegen den angelegten Strom gerichtet ist. Um die Selbstinduktion noch einmal genauer zu untersuchen, betrachten wir in Abbildung (12) den Widerstand der Helmholtz-Spule, erneut abgetragen über der Frequenz der Wechselspannung.

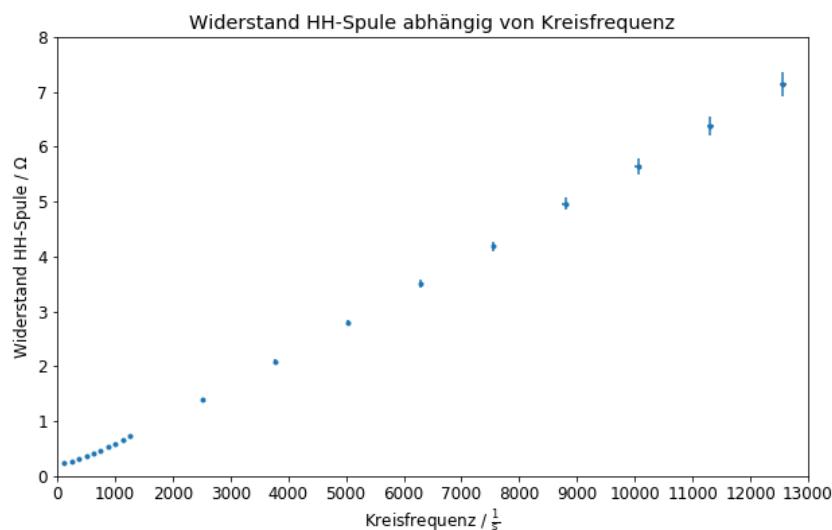


Abbildung 12: Widerstand der Helmholtz-Spule in Abhängigkeit von der Frequenz

Der Widerstand zeigt einen nahezu linearen Anstieg in Abhängigkeit von der Frequenz, durch welchen wir mittels linearer Regression eine Gerade legen können. Das Resultat des Fittings ist in Abbildung (13) zu sehen.

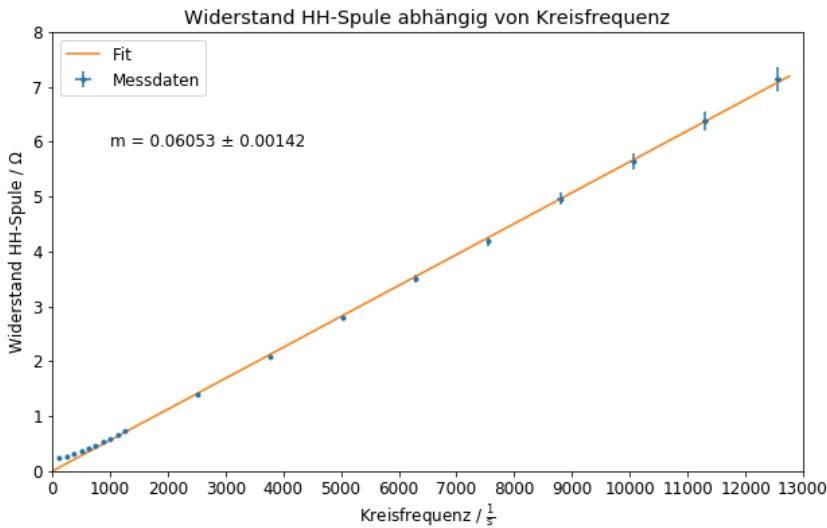


Abbildung 13: Widerstand der Helmholtz-Spule in Abhängigkeit von der Frequenz mit linearem Fit

Wie in Gleichung 6 aufgezeigt, hängt der induktive Widerstand direkt von der Frequenz ab, wobei die Induktivität L die Proportionalitätskonstante darstellt. Diese entspricht somit der Steigung der soeben gefitteten Gerade

$$m = L = (0.0605 \pm 0.0014) \text{ H.} \quad (12)$$

3.4 Untersuchung des Erdmagnetfeldes

Um der Richtung der Feldlinien des Erdmagnetfeldes zu entsprechen, richteten wir die Induktionsspule zunächst mit einem Kompass in Nord-Süd-Richtung aus. Wir versetzen die Spule in eine Rotation der Kreisfrequenz $\omega = (14.8 \pm 0.2) \frac{2\pi}{\text{s}}$. Die dabei gemessene induzierte Spannung betrug $U_i = (0.0740 \pm 0.0005) \text{ V}$. Durch Umstellen der Formel für die Induktionsspannung

$$U_i = -BAN\omega \quad (13)$$

und einsetzen von Fläche und Windungszahl der Induktionsspule erhalten wir einen Wert von

$$B_{E,1} = (47.7 \pm 0.7) \mu\text{T}. \quad (14)$$

Dieses Resultat erhalten wir aus der Messung ohne Kompensation. Für die Messung mit Kompensation wurde mit der Helmholtz-Spule ein Magnetfeld erzeugt, welches die Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes kompensiert. Die beste Kompensation erhielten wir bei einem Strom von $I_{helm} = 0.0598 \pm 0.0002 \text{ A}$. Nach Formel 7 entspricht dies einer Vertikalkomponente von

$$B_v = (45.20 \pm 0.15) \mu\text{T}. \quad (15)$$

Aus der verbleibenden Induktionsspannung von $U_i = (0.0225 \pm 0.0010) \text{ V}$ und einer Kreisfrequenz der Induktionsspule von $\omega = (14.7 \pm 0.3) \frac{2\pi}{\text{s}}$ können wir, nach derselben Formel wie oben, eine horizontale Feldkomponente von

$$B_h = (14.6 \pm 2.3) \mu\text{T} \quad (16)$$

berechnen.

Die beiden Feldkomponenten bilden zusammen mit der absoluten Magnetfelddichte aus dem ersten Teil ein rechtwinkliges Dreieck, wie auch in 3 aus dem Einleitungsteil zu sehen. Den Winkel der Hypotenuse dieses Dreiecks berechnen wir aus den beiden Komponenten mittels

$$\alpha = \arctan\left(\frac{B_v}{B_h}\right) = 72.10^\circ. \quad (17)$$

Der Fehler des Winkels berechnet sich nach

$$\Delta\alpha = \sqrt{\left(\frac{B_h \cdot \Delta B_v}{B_v^2 + B_h^2}\right)^2 + \left(\frac{B_v \cdot \Delta B_h}{B_v^2 + B_h^2}\right)^2} \quad (18)$$

zu

$$\Delta\alpha = 2.68^\circ. \quad (19)$$

4 Zusammenfassung und Diskussion

In Versuch 245 untersuchten wir in verschiedenen Aufbauten die elektromagnetische Induktion. Mathematisch fundiert durch das Induktionsgesetz, besagt dieses, dass durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ein elektrischer Strom erzeugt wird. Zu Erzeugung des Magnetfeldes verwendeten wir eine Helmholtz-Spule, dies ist ein Aufbau aus zwei in Reihe geschalteten Spulen, in dessen Zentrum ein nahezu homogenes Magnetfeld erzeugt werden kann. In eben diesem Zentrum war eine kleinere, drehbare Magnetspule platziert, in welcher der Strom durch das Feld der Helmholtz-Spule induziert wurde. Das Induktionsgesetz gibt verschiedene Größen an, von welchen die induzierte Spannung abhängt.

Im ersten Versuchsteil untersuchten wir die Auswirkungen der Drehfrequenz der Spule, sowie der magnetischen Flussdichte des äußeren Magnetfelds auf die Induktionsspannung. Aus den aufgenommenen Daten bei der Untersuchung der Frequenzabhängigkeit berechneten wir die magnetische Flussdichte im Zentrum der Helmholtz-Spule zu

$$(3.63 \pm 0.08) \cdot 10^{-3} \text{ T.}$$

Der theoretische Wert für diese Größe lässt sich aus den Eigenschaften der Spule zu $(3.02 \pm 0.08) \cdot 10^{-3} \text{ T}$ berechnen. Die Abweichung könnte zum einen durch weitere äußere Felder im Versuchsräum, welche neben dem Feld der Helmholtz-Spule auf die Induktionsspule wirkten, verursacht sein. Idealisierte Annahmen in der Theorie, welche in der Realität nicht gegeben sind, haben ebenfalls Auswirkungen auf das Ergebnis, genauso wie Ungenauigkeiten in der Elektronik des Versuchsaufbaus.

Im zweiten Versuchsteil analysierten wir die Induktionsspannung bei einem periodisch veränderlichen äußeren Feld, dazu betrieben wir die Helmholtz-Spule mit einer Wechselspannung. Wir betrachteten zunächst die induzierte Spannung für verschiedenen Winkelstellungen der Induktionsspule, dann für verschiedene Frequenzen der Wechselspannung an der Helmholtz-Spule. Aus den hierbei aufgenommenen Daten berechneten wir die Induktivität der Helmholtz-Spule zu

$$L = (0.0605 \pm 0.0014) \text{ H.}$$

Der dritte Versuchsteil befasste sich mit dem Magnetfeld der Erde. Wenn wir die Induktionsspule entlang der Feldlinien, also in Nord-Süd-Richtung ausrichteten und diese in Rotation versetzten, wurde durch das Erdmagnetfeld in der Spule eine Spannung induziert. Durch Anwendung des Induktionsgesetzes war es uns möglich, aus der gemessenen Induktionsspannung die magnetische Flussdichte des Erdmagnetfeldes zu berechnen. Hier kamen wir auf einen Wert von

$$B_E = (47.7 \pm 0.7) \mu\text{T.}$$

Auf der Erdoberfläche treffen die Feldlinien des Erdmagnetfeldes im sogenannten Inklinationswinkel auf. Das untersuchte Magnetfeld lässt sich somit in eine Vertikal- und Horizontalkomponente zerlegen. Durch zuschalten der Helmholtz-Spule konnten wir die Vertikalkomponente kompensieren und somit „isoliert“ die magnetische Flussdichte der Horizontalkomponente nach demselben Schema wie zuvor aus der Induktionsspannung berechnen. Mithilft trigonometrischer Funktionen ließ sich damit der Inklinationswinkel am Versuchsstandort (Heidelberg) zu

$$\alpha = (72.1 \pm 2.7)^\circ \quad (20)$$

berechnen.

Mithilfe des *IGRF Declination Calculator* des Helmholtz Centre Potsdam ist es möglich, Referenzdaten für des Erdmagnetfeldes an verschiedenen Standorten abzurufen. Für Heidelberg, bei einer Höhe von 114m bei den Koordinaten $49^{\circ}25'N$ $8^{\circ}42'O$ ist eine gesamte magnetische Flussdichte von 48939.3nT angegeben. Dieser Wert liegt im 2σ -Bereich unseres errechneten Wertes. Für den Inklinationswinkel in Heidelberg gibt die Referenz einen Wert von 65.25° an. Dieser Wert weicht etwas stärker von dem von uns berechneten Wert ab, liegt aber noch im 3σ -Bereich um diesen. Fehlerursachen könnten hier beispielsweise wieder die Auswirkungen überlagernder äußerer Felder im Versuchsaufbau sein. Ungenauigkeiten bei der Ausrichtung der Spule mit dem Kompass könnten hier auch eine Rolle spielen, sowie die Einstellung des Kompensationsfeldes nach Augenmaß.

Python Code, Hauptprogramm

245_auswertung

December 9, 2024

```
[43]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
import scipy.integrate as integrate
import scipy.constants as constants

%run ../lib.ipynb

plt.rcParams.update({'font.size': 12})
```

```
[44]: def linear_origin(x, m):
    return x * m

def linear_translated(x, m, b):
    return x * m + b
```

0.0.1 Aufgabe 2

```
[45]: data_2a = np.loadtxt('data2a.txt', skiprows=1, usecols=(0,1,2,3), unpack=True)

# Umrechnung f ->
data_2a_angf = data_2a[0] * (2 * np.pi)
data_2a_angf_err = data_2a[1] * (2 * np.pi)

# Umrechnung Peak-to-Peak -> Peak
data_2a_peaku = data_2a[2] * 0.5
data_2a_peaku_err = data_2a[3] * 0.5

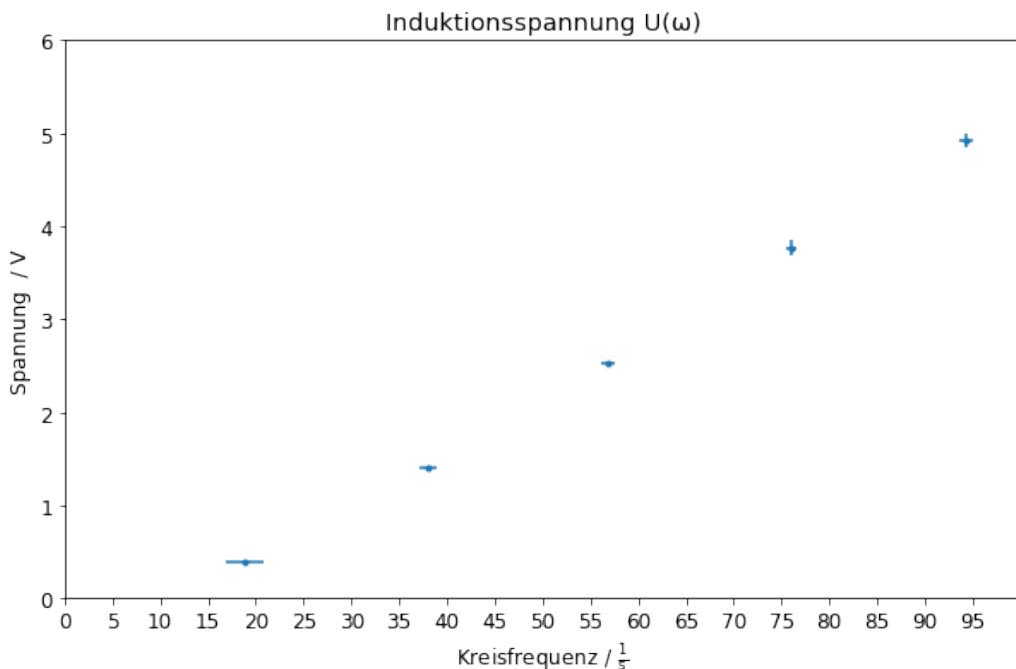
data_2b = np.loadtxt('data2b.txt', skiprows=1, usecols=(0,1,2,3), unpack=True)

data_2b_i = data_2b[0]
data_2b_i_err = data_2b[1]

# Umrechnung Peak-to-Peak -> Peak
data_2b_peaku = data_2b[2] * 0.5
data_2b_peaku_err = data_2b[3] * 0.5
```

Induktionsspannung abhängig von Drehfrequenz der Spule

```
[46]: plt.figure(figsize=(10,6))
plt.errorbar(data_2a_angf, data_2a_peaku, xerr=data_2a_angf_err, yerr=data_2a_peaku_err, fmt='.')
plt.axis([0,100,0,6])
plt.xticks(np.arange(0,100,5))
plt.xlabel(r'Kreisfrequenz / $\frac{1}{\text{s}}$')
plt.ylabel('Spannung / V')
plt.title('Induktionsspannung U()')
plt.savefig('ui_by_omega.png')
```



```
[47]: fu_lin_popt, fu_lin_pcov = curve_fit(linear_translated, data_2a_angf, data_2a_peaku, [0, 0])

fu_lin_m = ValErr.fromFit(fu_lin_popt, fu_lin_pcov, 0)
fu_lin_b = ValErr.fromFit(fu_lin_popt, fu_lin_pcov, 1)

plt.figure(figsize=(10,6))
plt.errorbar(data_2a_angf, data_2a_peaku, xerr=data_2a_angf_err, yerr=data_2a_peaku_err, fmt='.', label='Messdaten')
plt.plot(spacearound(data_2a_angf, 3), linear_translated(spacearound(data_2a_angf, 3), *fu_lin_popt), label='Fit')
plt.axis([0,100,0,6])
```

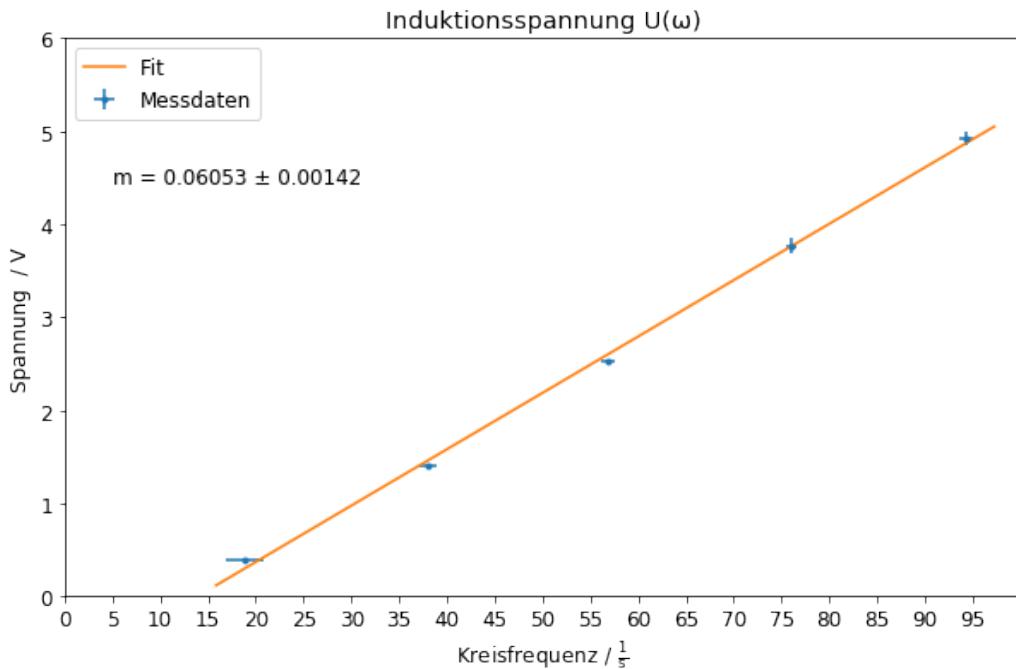
```

plt.xticks(np.arange(0,100,5))
plt.xlabel(r'Kreisfrequenz / $\frac{1}{\text{s}}$')
plt.ylabel('Spannung / V')
plt.title('Induktionsspannung U( )')
plt.legend(loc='upper left')
plt.text(5, 4.5, rf'm = {fu_lin_m.strfmtf(5, 0)}', horizontalalignment='left',
         verticalalignment='center')
plt.savefig('ui_by_omega_fit.png')

fu_lin_m

```

[47]: ValErr(0.06052529937399517, 0.0014159332063130817)



```

[48]: # Skript: U_peak( ) = B * A * N *
# m = B * A * N <=> B = m / (A * N)

A_spule = 41.7 * 1e-2 * 1e-2
N_spule = 4000

B_val = fu_lin_m.val / (A_spule * N_spule)
B_err = fu_lin_m.err / (A_spule * N_spule)

B_exp = ValErr(B_val, B_err)

```

```

#Helmholtz B-Feld im Zentrum
#  $B(0) = 8/\sqrt{125} * (\mu_0 * N * I) / R$ 

N_hh_spule = 124
r_hh_spule = 295 * 0.5 * 1e-3
I_hh_spule = 4

print(r_hh_spule)

B_HH_val = (8 / np.sqrt(125)) * ((constants.mu_0 * N_hh_spule * I_hh_spule) / r_hh_spule)
B_HH_err = (8 / np.sqrt(125)) * ((constants.mu_0 * N_hh_spule * 0.1) / r_hh_spule)
B_theo = ValErr(B_HH_val, B_HH_err)

print(f"B_exp = ({B_exp:.3f}) T\nB_theo = ({B_theo:.3f}) T")

sig_exp_theo = np.abs(B_exp.val - B_theo.val)/np.sqrt(B_exp.err ** 2 + B_theo.val ** 2)

print(f"Sigma-Abweichung: {sig_exp_theo}")

```

```

0.1475
B_exp = (3.63e-3 ± 0.08e-3) T
B_theo = (3.02e-3 ± 0.08e-3) T
Sigma-Abweichung: 0.1999907036329482

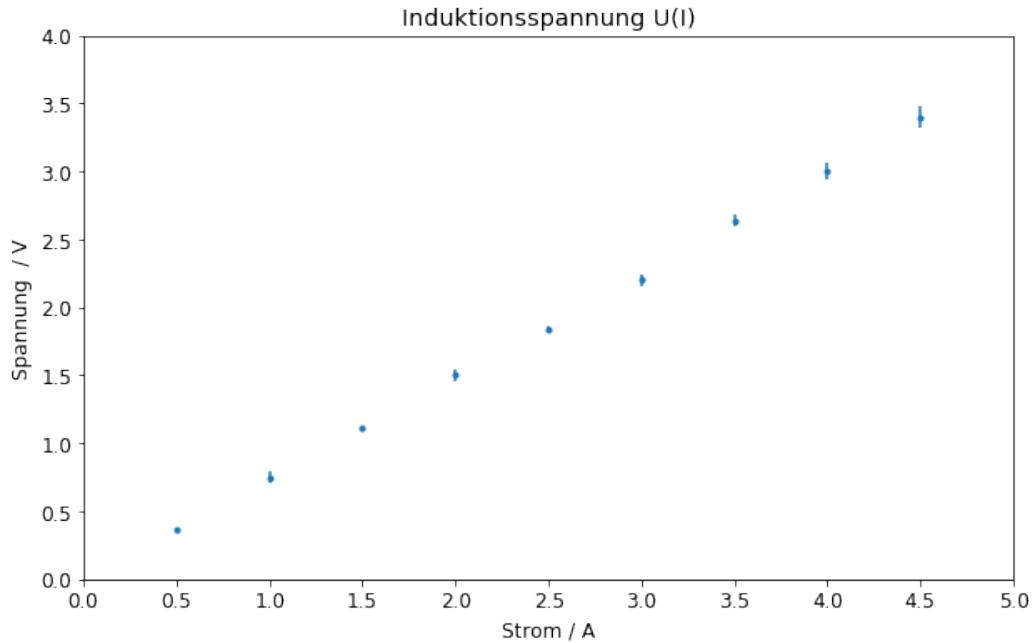
```

Induktionsspannung abhängig vom Strom durch die Spule

```

[49]: plt.figure(figsize=(10,6))
plt.errorbar(data_2b_i, data_2b_peaku, xerr=data_2b_i_err, yerr=data_2b_peaku_err, fmt='.')
plt.axis([0,5,0,4])
plt.xticks(np.arange(0,5.5,0.5))
plt.xlabel('Strom / A')
plt.ylabel('Spannung / V')
plt.title('Induktionsspannung U(I)')
plt.savefig('ui_by_i.png')

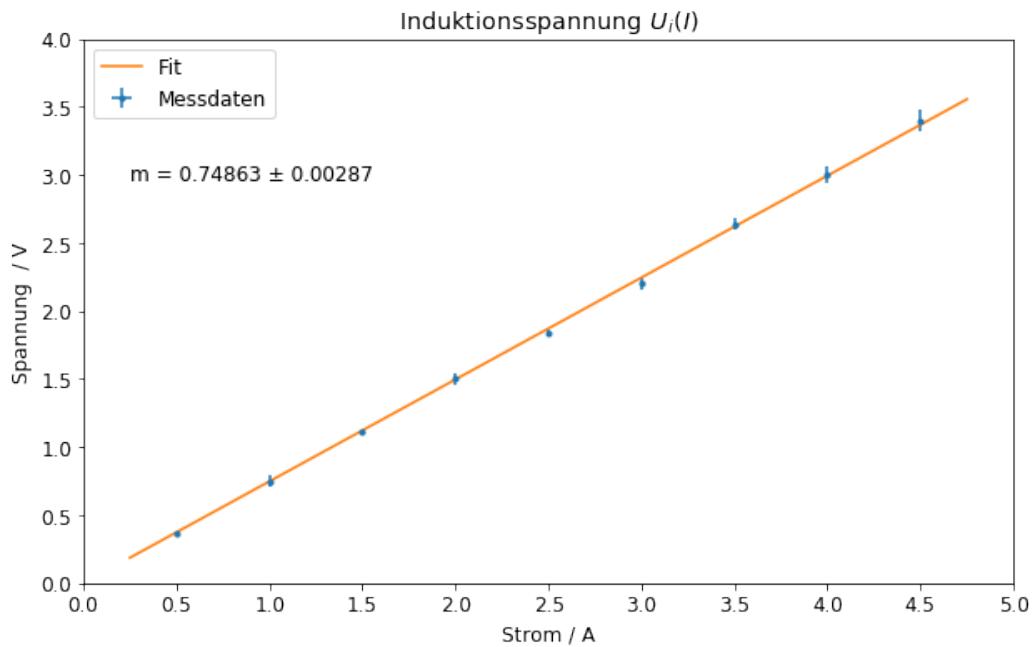
```



```
[50]: iu_lin_popt, iu_lin_pcov = curve_fit(linear_origin, data_2b_i, data_2b_peaku, u
                                          ↪[0])

iu_lin_m = ValErr.fromFit(iu_lin_popt, iu_lin_pcov, 0)

plt.figure(figsize=(10,6))
plt.errorbar(data_2b_i, data_2b_peaku, xerr=data_2b_i_err, u
              ↪yerr=data_2b_peaku_err, fmt='.', label='Messdaten')
plt.plot(spacearound(data_2b_i, 0.25), linear_origin(spacearound(data_2b_i, 0.
              ↪25), *iu_lin_popt), label='Fit')
plt.axis([0,5,0,4])
plt.xticks(np.arange(0,5.5,0.5))
plt.xlabel('Strom / A')
plt.ylabel('Spannung / V')
plt.title('Induktionsspannung $U_i(I)$')
plt.text(0.25, 3, rf'm = {iu_lin_m.strfmtf(5, 0)}', horizontalalignment='left',
         verticalalignment='center')
plt.legend(loc='upper left')
plt.savefig('ui_by_i_fit.png')
```



0.0.2 Aufgabe 3

```
[51]: data_3a = np.loadtxt('data3a.txt', skiprows=1, usecols=(0,1,2), unpack=True)

# Winkel
data_3a_ang = data_3a[0]
data_3a_ang_err = data_3a[1]

# Umrechnung Peak-to-Peak -> Peak
data_3a_peaku = data_3a[2] * 0.5

data_3b = np.loadtxt('data3b.txt', skiprows=1, usecols=(0,1,2,3,4,5,6,7), unpack=True)

# Umrechnung f ->
data_3b_angf = data_3b[0] * (2 * np.pi)
data_3b_angf_err = data_3b[1] * (2 * np.pi)

# Umrechnung Peak-to-Peak -> Peak
data_3b_peakuind = data_3b[2] * 0.5
data_3b_peakuind_err = data_3b[3] * 0.5

# Umrechnung Peak-to-Peak -> Peak
```

```

data_3b_peakuhh = data_3b[4] * 0.5
data_3b_peakuhh_err = data_3b[5] * 0.5

data_3b_ihh = data_3b[6] * 0.5
data_3b_ihh_err = data_3b[7] * 0.5

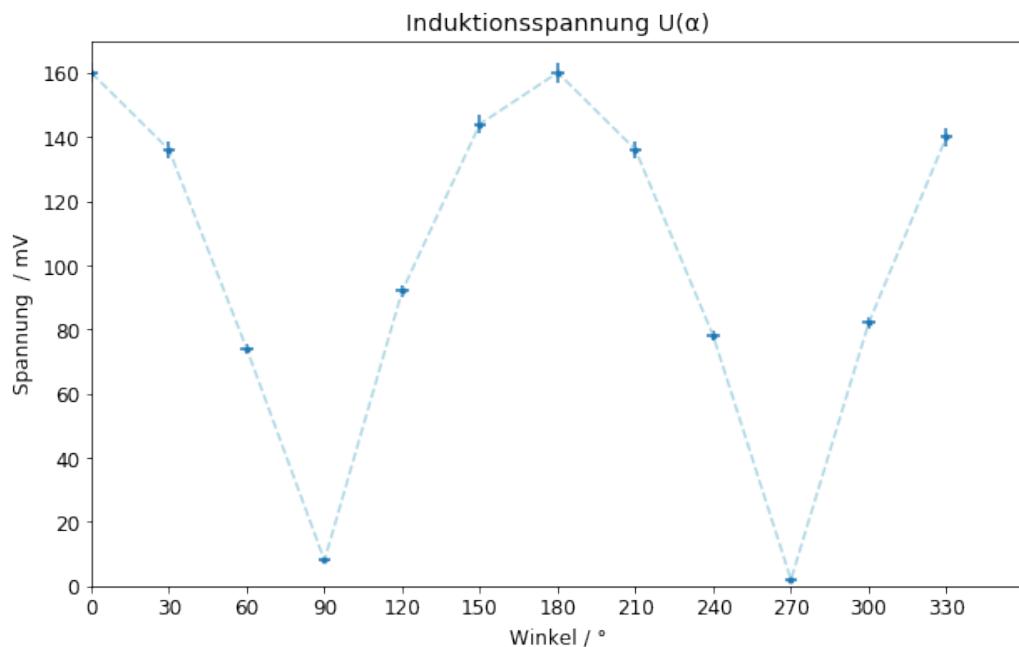
```

Induktionsspannung abhängig vom Winkel der Spule

```

[52]: plt.figure(figsize=(10,6))
plt.errorbar(data_3a_ang, data_3a_peaku, xerr=data_3a_ang_err, yerr=data_3a_peaku * 0.02, fmt='.')
plt.plot(data_3a_ang, data_3a_peaku, color='lightblue', linestyle='--')
plt.axis([0,360,0,170])
plt.xticks(np.arange(0,340,30))
plt.xlabel('Winkel / °')
plt.ylabel('Spannung / mV')
plt.title('Induktionsspannung U()')
plt.savefig('ui_by_alpha.png')

```



```

[53]: def fit_cos(x, a, b):
    return a * np.abs(np.cos(x * b))

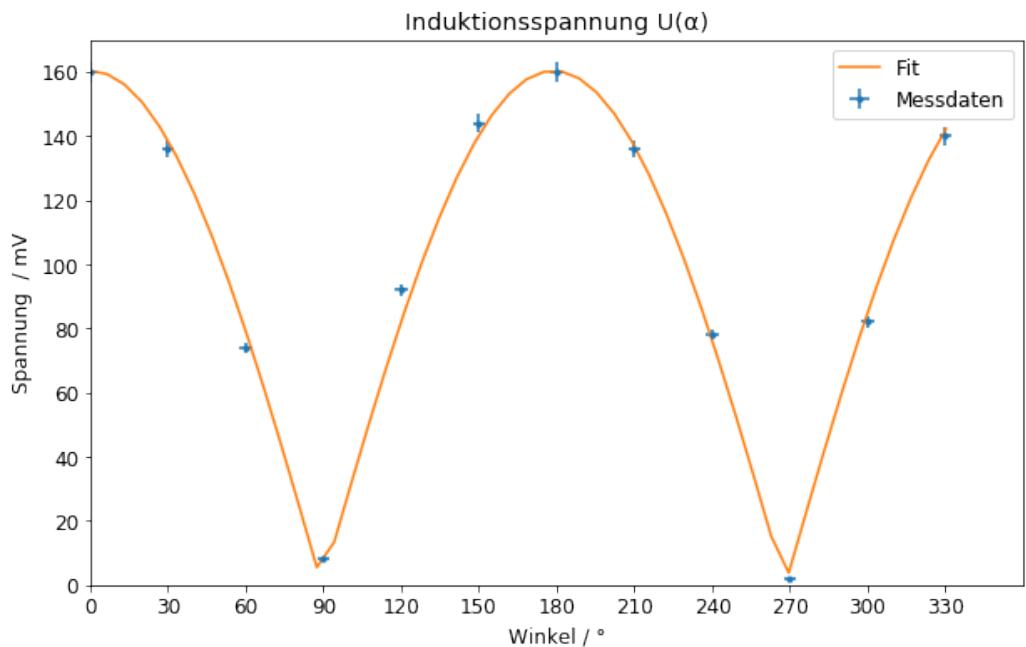
au_cos_popt, au_cos_pcov = curve_fit(fit_cos, data_3a_ang, data_3a_peaku, [160., 1./59.])

```

```

plt.figure(figsize=(10,6))
plt.errorbar(data_3a_ang, data_3a_peaku, xerr=data_3a_ang_err, yerr=data_3a_peaku * 0.02, fmt='.', label='Messdaten')
plt.plot(spacearound(data_3a_ang, 0.25), fit_cos(spacearound(data_3a_ang, 0.25), *au_cos_popt), label='Fit')
plt.axis([0,360,0,170])
plt.xticks(np.arange(0,340,30))
plt.xlabel('Winkel / °')
plt.ylabel('Spannung / mV')
plt.title('Induktionsspannung U( )')
plt.legend(loc='upper right')
plt.savefig('ui_by_alpha_fit.png')

```



Verhältnis von induzierter und angelegter Spannung, abhängig von der Frequenz der Induktionsspule

```

[54]: plt.figure(figsize=(10,6))

#rel_U = data_2a_peakuind / data_2a_peakuhh
#rel_U_err = (1 / data_2a_peakuhh) * np.sqrt(data_2a_peakuind_err**2 + (data_2a_peakuind * data_2a_peakuhh_err / data_2a_peakuhh)**2)

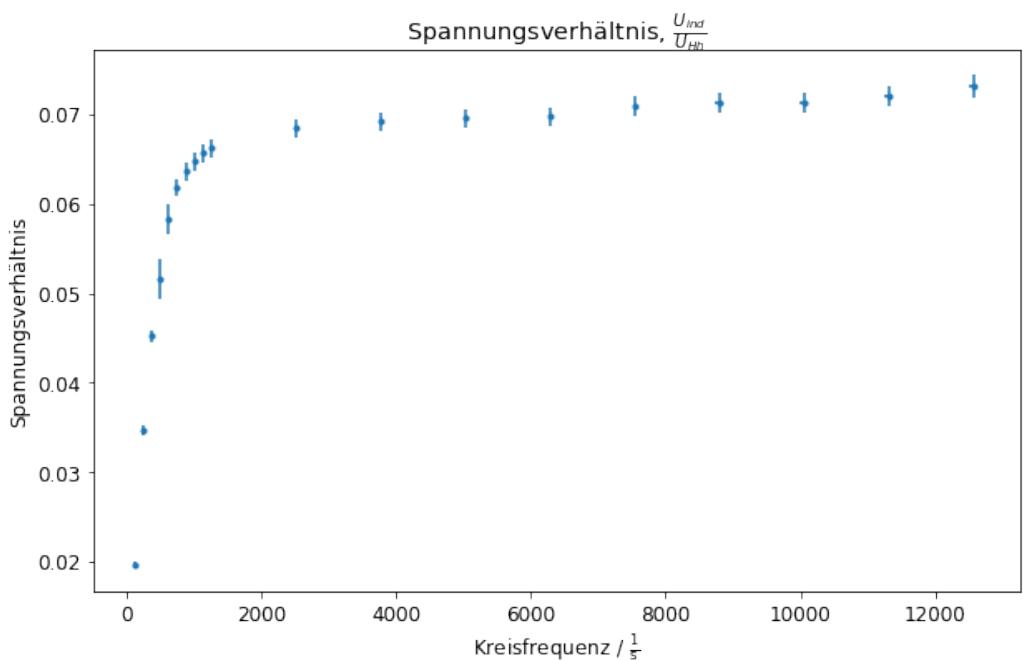
```

```

rel_U, rel_U_err = div_with_err(data_3b_peakuind * 1e-3, data_3b_peakuind_err * 1e-3, data_3b_peakuhh, data_3b_peakuhh_err)

plt.errorbar(data_3b_angf, rel_U, xerr=data_3b_angf_err, yerr=rel_U_err, fmt='.')
# plt.axis([0,13000,0,0.065])
# plt.xticks(np.arange(0,14000,1000))
plt.xlabel(r'Kreisfrequenz / $\frac{1}{\text{s}}$')
plt.ylabel('Spannungsverhältnis')
plt.title(r'Spannungsverhältnis, $\frac{U_{\text{ind}}}{U_{\text{Hh}}}$')
plt.savefig('ui_to_uhh_by_f.png')

```



```

[55]: plt.figure(figsize=(10,6))

#rel_U = data_2a_peakuind / data_2a_peakuhh
#rel_U_err = (1 / data_2a_peakuhh) * np.sqrt(data_2a_peakuind_err**2 + (data_2a_peakuind * data_2a_peakuhh_err / data_2a_peakuhh)**2)

#rel_U, rel_U_err = div_with_err(data_3b_peakuind * 1e-3, data_3b_peakuind_err * 1e-3, data_3b_peakuhh, data_3b_peakuhh_err)

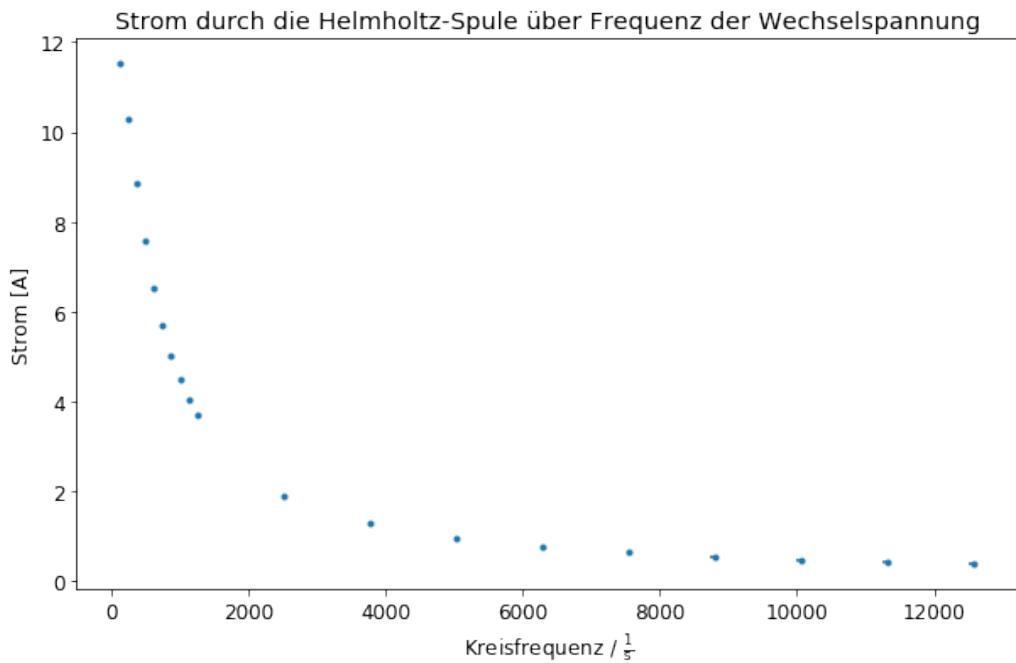
plt.errorbar(data_3b_angf, data_3b_ihh, xerr=data_3b_angf_err, yerr=data_3b_ihh_err, fmt='.')

```

```

# plt.axis([0, 13000, 0, 0.065])
#plt.xticks(np.arange(0, 14000, 1000))
plt.xlabel(r'Kreisfrequenz / $\frac{1}{\Omega}$')
plt.ylabel('Strom [A]')
plt.title(r'Strom durch die Helmholtz-Spule über Frequenz der Wechselspannung')
plt.savefig('i_by_acf.png')

```



Widerstand der Helmholtz-Spule abhängig von der Frequenz der Induktionsspule

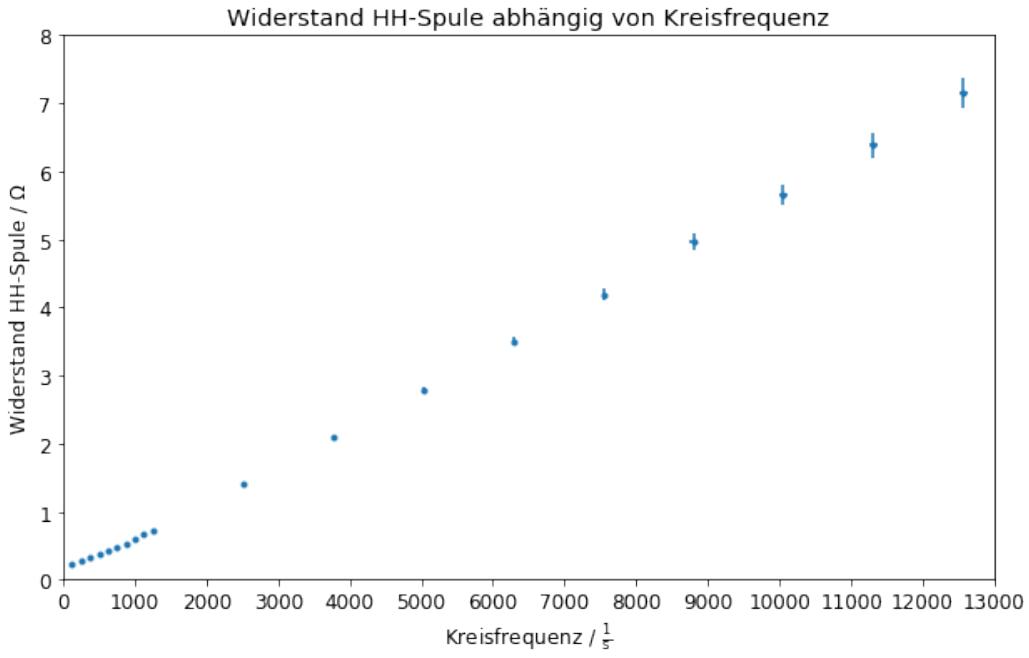
```

[56]: plt.figure(figsize=(10,6))

R_HH, R_HH_err = div_with_err(data_3b_peakuhh, data_3b_peakuhh_err,
                                data_3b_ihh, data_3b_ihh_err)

plt.errorbar(data_3b_angf, R_HH, xerr=data_3b_angf_err, yerr=R_HH_err, fmt='.')
plt.axis([0,13000,0,8])
plt.xticks(np.arange(0,14000,1000))
plt.xlabel(r'Kreisfrequenz / $\frac{1}{\Omega}$')
plt.ylabel('Widerstand HH-Spule / $\Omega$')
plt.title(r'Widerstand HH-Spule abhängig von Kreisfrequenz')
plt.savefig('rhh_by_f.png')

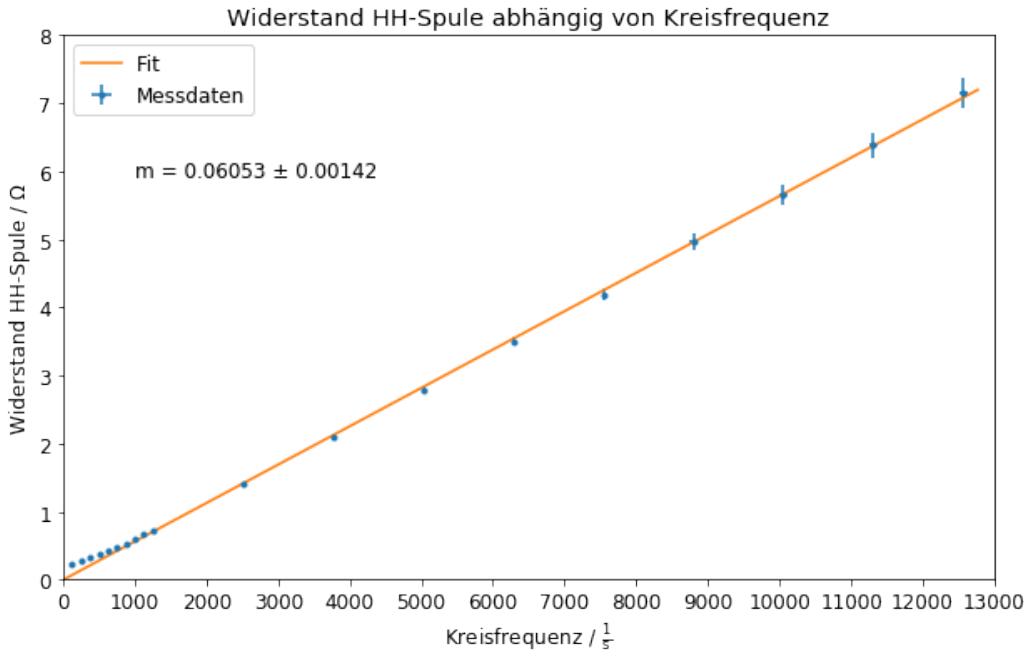
```



```
[57]: frhh_lin_popt, frhh_lin_pcov = curve_fit(linear_origin, data_3b_angf, R_HH, [0])

frhh_lin_m = ValErr.fromFit(fu_lin_popt, fu_lin_pcov, 0)
#frhh_lin_b = ValErr.fromFit(fu_lin_popt, fu_lin_pcov, 1)

plt.figure(figsize=(10,6))
plt.errorbar(data_3b_angf, R_HH, xerr=data_3b_angf_err, yerr=R_HH_err, fmt='.', 
             label='Messdaten')
plt.plot(spacearound(data_3b_angf, 200), 
         linear_origin(spacearound(data_3b_angf, 200), *frhh_lin_popt), label='Fit')
plt.axis([0,13000,0,8])
plt.xticks(np.arange(0,14000,1000))
plt.xlabel(r'Kreisfrequenz / $\frac{1}{\text{s}}$')
plt.ylabel('Widerstand HH-Spule / Ω')
plt.title(r'Widerstand HH-Spule abhängig von Kreisfrequenz')
plt.legend(loc='upper left')
plt.text(1000, 6, rf'm = {frhh_lin_m.strfmtf(5, 0)}', 
         horizontalalignment='left',
         verticalalignment='center')
plt.savefig('rhh_by_f_fit.png')
```



```
[58]: frhh_lin_m
```

```
[58]: ValErr(0.06052529937399517, 0.0014159332063130817)
```

0.0.3 Aufgabe 4

Ohne Kompensation

```
[59]: A_spule = 41.7 * 1e-2 * 1e-2
N_spule = 4000

freq_ok = ValErr(14.8, 0.2) * 2 * np.pi
u_ind_ok = ValErr(0.148, 0.001) * 0.5

print(freq_ok, u_ind_ok)

#  $U = B A N w \Leftrightarrow B = U / A N w$ 

B_erd_ok = u_ind_ok.val / (A_spule * freq_ok.val * N_spule)
B_erd_ok_err = np.sqrt((freq_ok.err/freq_ok.val)**2 + (u_ind_ok.err/u_ind_ok.
    val)**2) * B_erd_ok

print(f"{{ValErr(B_erd_ok, B_erd_ok_err) * 1e6}.strfmtf(1, 0)}) μT")
```

```
ValErr(92.99114254625788, 1.2566370614359172) ValErr(0.074, 0.0005)
```

(47.7 ± 0.7) µT

Mit Kompensation

```
[60]: freq_mk = ValErr(14.7, 0.3) * 2 * np.pi
i_mk = ValErr(0.0598, 0.0002)
u_ind_mk = ValErr(0.045, 0.002) * 0.5

print(freq_mk, u_ind_mk)

B_erd_hor = u_ind_mk.val / (A_spule * freq_mk.val * N_spule)
B_erd_hor_err = np.sqrt((freq_mk.err/freq_mk.val)**2 + (u_ind_mk.err/u_ind_mk.
↪val)**2) * B_erd_ok

print(f"B_hor = ({ValErr(B_erd_hor, B_erd_hor_err) * 1e6}.strfmtf(1, 0)}) µT")

N_hh_spule = 124
r_hh_spule = 295 * 0.5 * 1e-3

B_vert = (8 / np.sqrt(125)) * ((constants.mu_0 * N_hh_spule * i_mk.val) /_
↪(r_hh_spule))
B_vert_err = (8 / np.sqrt(125)) * ((constants.mu_0 * N_hh_spule * i_mk.err) /_
↪(r_hh_spule))

print(f"B_vert = ({ValErr(B_vert, B_vert_err) * 1e6}.strfmtf(2, 0)}) µT")

alpha_rad = np.arctan(B_vert / B_erd_hor)
alpha_deg = (360 / (2 * np.pi)) * alpha_rad

alpha_rad_err = np.sqrt((B_erd_hor * B_vert_err / (B_vert**2 +_
↪B_erd_hor**2))**2 + (B_vert * B_erd_hor_err / (B_vert**2 + B_erd_hor**2))**2)
alpha_deg_err = (360 / (2 * np.pi)) * alpha_rad_err

print(alpha_deg, "+-", alpha_deg_err)
```

ValErr(92.36282401553991, 1.8849555921538759) ValErr(0.0225, 0.001)
B_hor = (14.6 ± 2.3) µT
B_vert = (45.20 ± 0.15) µT
72.09525774376331 +- 2.67842382397209

Python Code, Bibliothek

lib

December 7, 2024

```
[32]: def floatfmt(v, prec, exp):
        return f"{v/10**exp}:0={prec}f}{f'e{exp}' if exp != 0 else ''}"
```

```
[36]: class ValErr:
    val: float = 0
    err: float = 0
    err_set = False

    def __init__(self, val, err=0):
        self.val = val
        if err != 0:
            self.err_set = True
            self.err = err

    def getTuple(self):
        return (self.val, self.err)

    @classmethod
    def fromTuple(self, tup):
        return ValErr(tup[0], tup[1])

    @classmethod
    def fromFit(self, popt, pcov, i):
        return ValErr(popt[i], np.sqrt(pcov[i][i]))

    @classmethod
    def fromFitAll(self, popt, pcov):
        for i in range(0, len(popt)):
            yield ValErr(popt[i], np.sqrt(pcov[i][i]))

    def strfmt(self, prec=2):
        if self.err != 0:
            return f'{self.val:.{prec}e} ± {self.err:.{prec}e}'
        else:
            return f'{self.val:.{prec}e}'

    def strfmtf(self, prec, exp):
```

```

    if self.err != 0:
        return fr"{{floatfmt(self.val, prec, exp)} ± {floatfmt(self.err,_
→prec, exp)}}"
    else:
        return f"{{floatfmt(self.val, prec, exp)}}"

def strltx(self, prec=2):
    if self.err != 0:
        return fr"{{self.val:.{prec}e} \pm {self.err:.{prec}e}}"
    else:
        return f"{{self.val}}"

def __repr__(self):
    return f"ValErr({self.val}, {self.err})"

def __mul__(self, num):
    return ValErr(self.val * num, self.err * num)

```

[34]: def spacearound(dat, add):
 return np.linspace(dat[0] - add, dat[len(dat)-1] + add)

[35]: def div_with_err(a, a_err, b, b_err):
 err = (1 / b) * np.sqrt(a_err**2 + (a * b_err / b)**2)
 return (a / b, err)

[]: