Simulação Numérica em Elementos Finitos do Escoamento em Artéria Coronária

Leandro Marques
Orientadores: Gustavo Anjos e José Pontes

Universidade do Estado do Rio de Janeiro
10 de Setembro de 2018

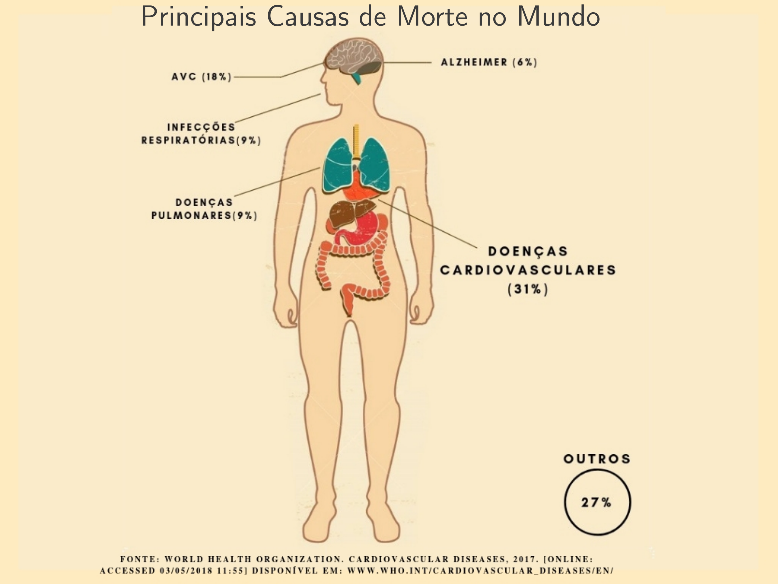
GESAR

Sumário

1. Introdução
2. Revisão Bibliográfica
3. Equações de Governo
4. Método dos Elementos Finitos
5. Validação do Código Numérico
6. Resultados
7. Conclusão

Introdução - Motivação

GESAR



Introdução - Objetivos

1. Desenvolver um código em Elementos Finitos para a formulação corrente-vorticidade com o transporte de espécie química

2. Conhecer a dinâmica do escoamento sanguíneo numa artéria coronária com aterosclerose e com stent farmacológico implantado

1. Introdução
2. Revisão Bibliográfica
3. Equações de Governo
4. Método dos Elementos Finitos
5. Validação do Código Numérico
6. Resultados
7. Conclusão

Review - Stent Farmacológico

1964 — DOTTER INTRODUZ A TÉCNICA ANGIOPLASTIA TRANSLUMINAL PERCUTÂNEA

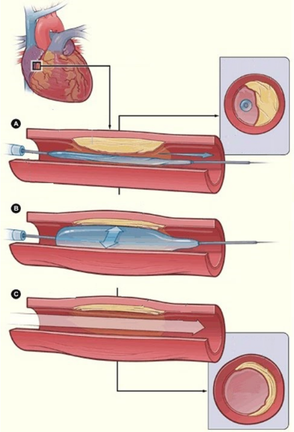
1979 — GRUNTZIG REALIZA A ANGIOPLASTIA TRANSLUMINAL PERCUTÂNEA NA ARTÉRIA CORONÁRIA (PTCA)

1987 — SIGWART REALIZA A IMPLANTAÇÃO DE UMA MALHA METÁLICA QUE FICA CONHECIDA COMO STENT

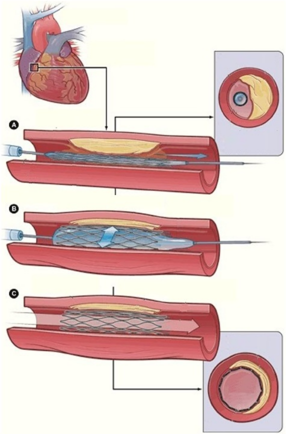
2001 — HWANG APRESENTA UMA SIMULAÇÃO NUMÉRICA COM STENT REVESTIDO COM O FÁRMACO

2017 — LUCENA APRESENTA A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO TRANSPORTE DO FÁRMACO NA PAREDE DA ARTÉRIA

Review - Stent Farmacológico



(a)



(b)

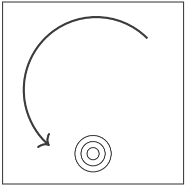
Comparativo dos procedimentos PTCA: (a) balão inflável e (b) stent.

Review - Método dos Elementos Finitos

- **1964** — ZIENKICWICZ FORMALIZA O MEF
- **1979** — CHRISTIE PROPÕE A FORMULAÇÃO PETROV-GALERKIN
- **1982** — BROOKS PROPÕE A FORMULAÇÃO SUPG
- **1982** — PIRONNEAU APRESENTA O MÉTODO DAS CURVAS CARACTERÍSTICAS APLICADO AO MEF
- **1984** — DONEA PROPÕE O ESQUEMA TAYLOR-GALERKIN
- **2006** — ANJOS APRESENTA O ESQUEMA SEMI-LAGRANGEANO EM SIMULAÇÕES COM ELEVADOS REYNOLDS E SCHMIDT

Hipóteses:

1. Fluido como um Meio Contínuo
2. Fluido incompressível
3. Fluido newtoniano
4. Escoamento monofásico
5. Escoamento bidimensional
6. Elevado número de Reynolds ($Re = \infty$)



$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = 0$$

Video

Equações de Governo

Hipóteses:

1. Fluido como um Meio Contínuo
2. Fluido incompressível
3. Fluido homogêneo e isotrópico
4. Fluido newtoniano
5. Fluido com difusividade de massa constante
6. Escoamento monofásico
7. Escoamento sem geração de espécie química

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c$$

Equações de Governo - Adimensionalização

$$p = \rho_0 U^2 p^* \qquad c = (c_s - c_0)c^* + c_0 \qquad \nu = \nu_0 \nu^* \qquad D = D_0 D^* \qquad x = Lx^*$$

$$\mathbf{v} = U\mathbf{v}^* \qquad \mathbf{g} = g_0 \mathbf{g}^* \qquad \rho = \rho_0 \rho^* \qquad \nabla = \frac{1}{L}\nabla^* \qquad t = \frac{L}{U} t^*$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2}\mathbf{g}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc}\nabla^2 c$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} \qquad \nabla \times [\mathbf{v} \times \omega] = -\mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla v$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D} \psi$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c$$

Onde **D** é um operador diferencial cujas componentes são $[\partial/\partial y, -\partial/\partial x]$

1. Introdução
2. Revisão Bibliográfica
3. Equações de Governo
4. **Método dos Elementos Finitos**
5. Validação do Código Numérico
6. Resultados
7. Conclusão

MEF - Discretização no tempo

$$\dot{\omega} + \mathbf{v}.\nabla\omega^n = \frac{1}{Re}\nabla^2\omega^n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{v}\cdot\nabla\left[\mathbf{v}\cdot\nabla\omega^n\right]$$

$$\nabla^2\psi = -\omega$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi$$

$$\dot{c} + \mathbf{v}.\nabla c^n = \frac{1}{ReSc}\nabla^2 c^n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{v}\cdot\nabla\left[\mathbf{v}\cdot\nabla c^n\right]$$

Onde $\dot{\omega}$ e $\dot{c}$ são $\left[\omega^{n+1} - \omega^n\right]/\Delta t$ e $\left[c^{n+1} - c^n\right]/\Delta t$ respectivamente, $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade cujas componentes são $\mathbf{v} = [u, v]$ e $\mathbf{D}$ é um operador matemático com componentes $\mathbf{D} = [\partial/\partial y, -\partial/\partial x]$

MEF - Forma Matricial

$$\frac{M}{\Delta t}\omega^{n+1} = \frac{M}{\Delta t}\omega^n - u \cdot G_x\omega^n - v \cdot G_y\omega^n - \frac{1}{Re}\left[K_{xx} + K_{yy}\right]\omega^n - \frac{\Delta t}{2}u\left[uK_{xx} + vK_{yx}\right]\omega^n - \frac{\Delta t}{2}v\left[uK_{xy} + vK_{yy}\right]\omega^n$$

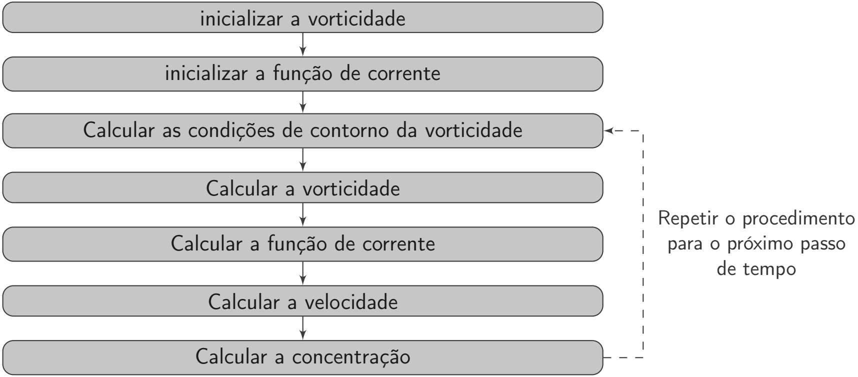
$$\left[K_{xx} + K_{yy}\right]\psi = M\omega$$

$$Mu = G_y\psi$$

$$Mv = -G_x\psi$$

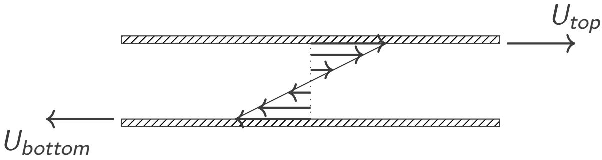
$$\frac{M}{\Delta t}c^{n+1} = \frac{M}{\Delta t}c^n - u \cdot G_x c^n - v \cdot G_y c^n - \frac{1}{ReSc}\left[K_{xx} + K_{yy}\right]c^n - \frac{\Delta t}{2}u\left[uK_{xx} + vK_{yx}\right]c^n - \frac{\Delta t}{2}v\left[uK_{xy} + vK_{yy}\right]c^n$$

MEF - Algoritmo de Solução



Algoritmo de solução da formulação corrente-vorticidade com transporte de espécie química

1. Introdução
2. Revisão Bibliográfica
3. Equações de Governo
4. Método dos Elementos Finitos
5. Validação do Código Numérico
6. Resultados
7. Conclusão

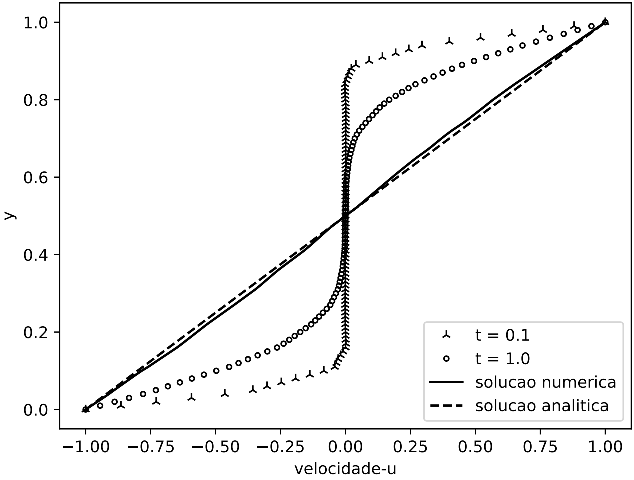


As condições de contorno são:

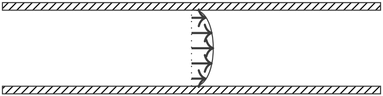
Placa Superior: $u = U_{top}$ onde $U_{top} = 1$, $v = 0$ e $\psi = 0$;

Placa Inferior: $u = U_{bottom}$ onde $U_{bottom} = -1$, $v = 0$ e $\psi = 0$

$$u = \left[U_{top} - U_{bottom}\right]\frac{y}{L} + U_{bottom}$$



Evolução do perfil de velocidade no tempo para Re = 100 e a comparação da solução numérica com a solução analítica.



As condições de contorno são:

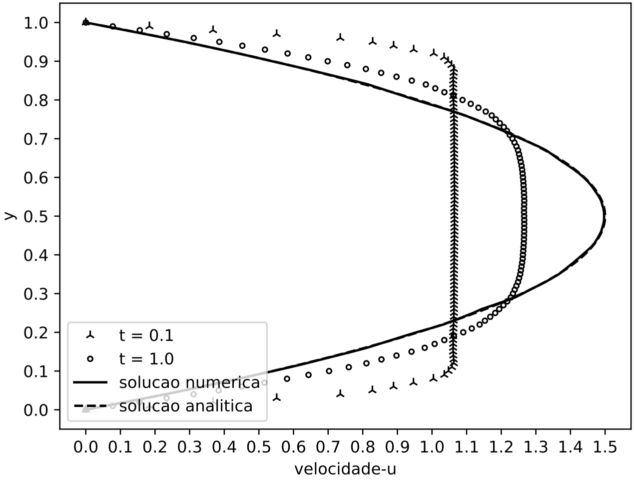
Condição de Entrada: $u = 1$, $v = 0$ e $\psi = y$;

Condição de Saida: $\psi = y$;

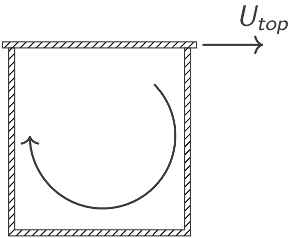
Parede superior: $u = 0$, $v = 0$, $\psi = 1$;

Parede inferior: $u = 0$, $v = 0$, $\psi = 0$

$$u = \frac{4u_{max}}{L^2} y \left[L - y \right]$$



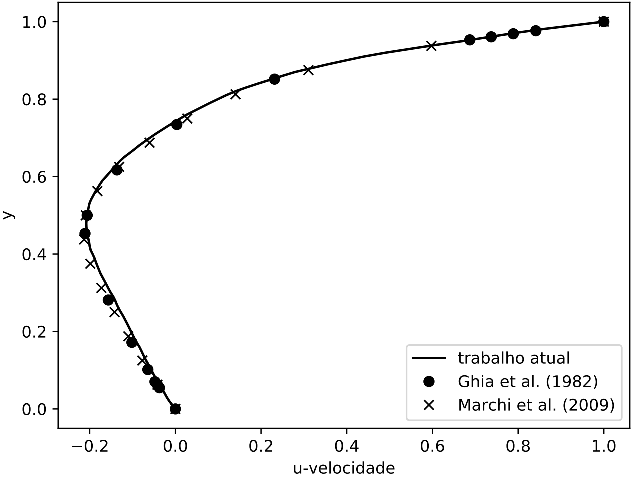
Evolução do perfil de velocidade no tempo para Re = 100 e a comparação da solução numérica com a solução analítica.



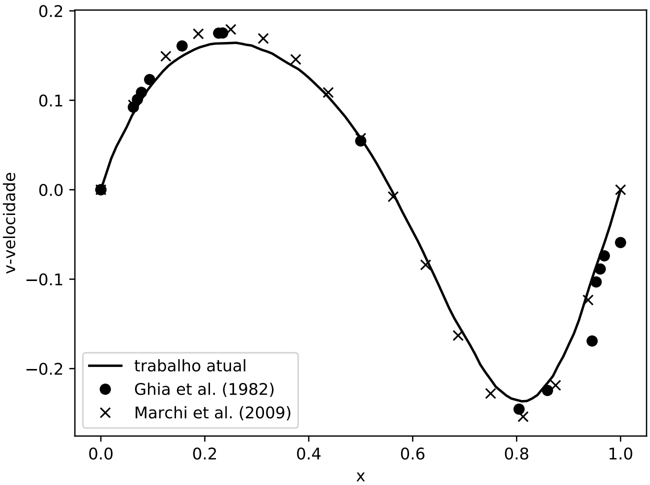
As condições de contorno são:

Paredes laterais e inferior: $u = 0$, $v = 0$ e $\psi = 0$;

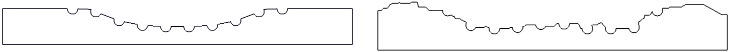
Parede superior: $u = 1$, $v = 0$ e $\psi = 0$



Perfil de u na linha central da cavidade ($x = 0.5$) para Reynolds $Re = 100$.



Perfil de v na linha central da cavidade ($y = 0.5$) para Reynolds $Re = 100$.



(a) (b)

Geometria não dimensional para escoamento sanguíneao em artéria coronária. (a) Canal Curvado com Stent (b) Canal Real com Stent.

As condições de contorno são:

Condição de Entrada: $u = 1$, $v = 0$ e $\psi = y$;

Condição de Saida: $\psi = y$;

Parede superior: $u = 0$, $v = 0$, $\psi = 1$;

Eixo de simetria: $v = 0$, $\psi = 0$;

Stent Farmacológico: $u = 0$, $v = 0$, $\psi = 1$ e $c = 1$

$R = 0.0015m$

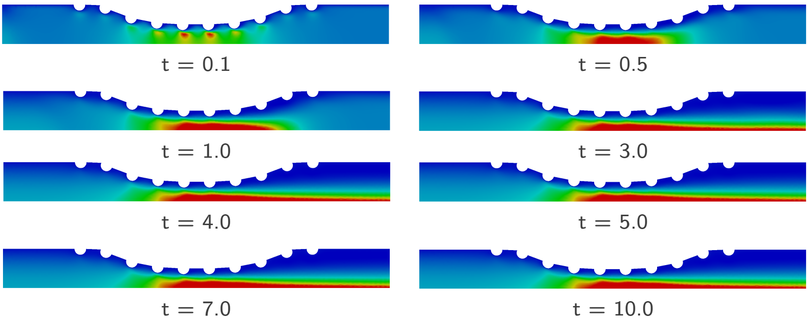
$\mu = 0.0035Pa.s$

$\rho = 1060kg/m^3$

$u = 12cm/s$

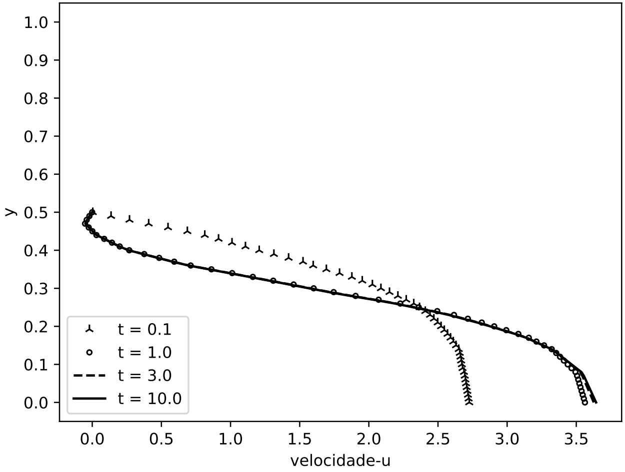
$Re = 54.5$

Resultados - Canal Curvado com Stent



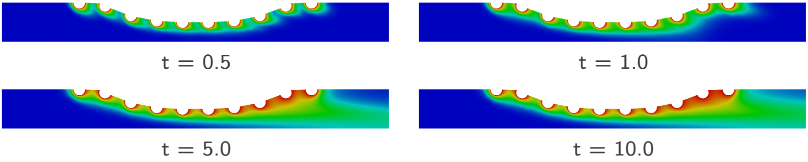
Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Curvado com Stent Farmacológico

Resultados - Canal Curvado com Stent

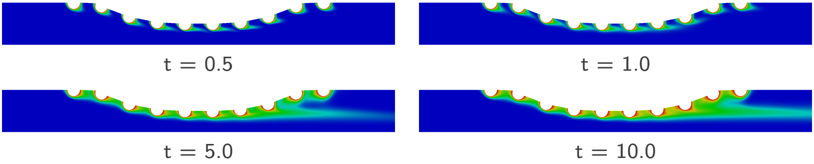


Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Curvado com Stent Farmacológico

Resultados - Canal Curvado com Stent

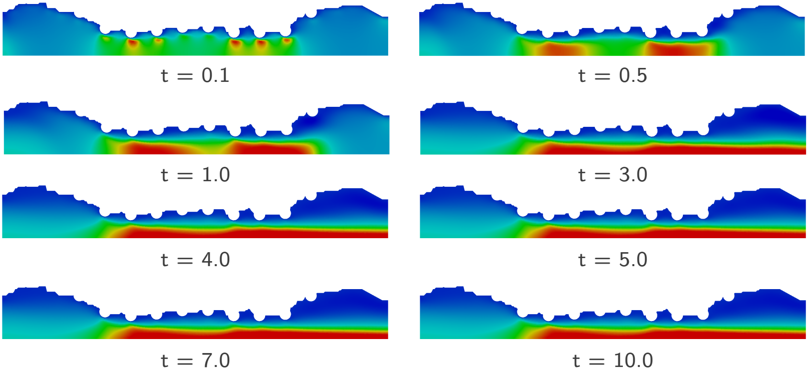


Canal Curvado com Stent Farmacológico cujo $Sc = 1$.



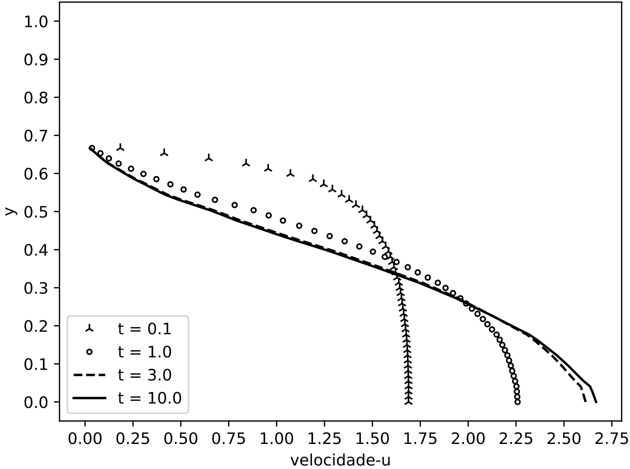
Canal Curvado com Stent Farmacológico cujo $Sc = 10$.

Resultados - Canal Real com Stent



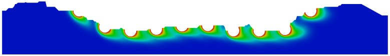
Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Real com Stent Farmacológico

Resultados - Canal Real com Stent

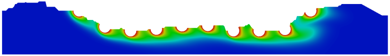


Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Real com Stent Farmacológico

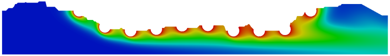
Resultados - Canal Real com Stent



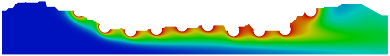
t = 0.5



t = 1.0

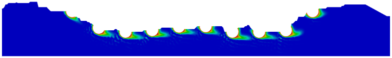


t = 5.0

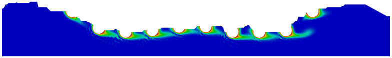


t = 10.0

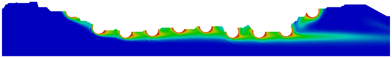
Canal Real com Stent Farmacológico cujo $Sc = 1$.



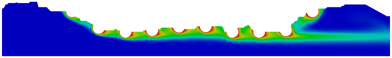
t = 0.5



t = 1.0



t = 5.0



t = 10.0

Canal Real com Stent Farmacológico cujo $Sc = 10$.

1. Introdução
2. Revisão Bibliográfica
3. Equações de Governo
4. Método dos Elementos Finitos
5. Validação do Código Numérico
6. Resultados
7. Conclusão

Conclusão

1. Foi construído um código completo em linguagem de programação de alto nível (Python) usando o paradigma de orientação de objetos e partir do presente momento, possuímos uma plataforma de estudos de problemas de escoamento de fármacos em artérias

2. O simulador é capaz também de descrever em detalhes problemas envolvendo escoamento de fluidos newtonianos com transporte de natureza escalar (concentração ou temperatura) devido a construção generalizada do código

3. A formulação corrente-vorticidade se mostrou uma aproximação usual para calcular os campos de velocidade e concentração já que as variáveis são escalares permitindo uma implementação suave

4. Foi observado que o número de *Schmidt* influencia diretamente no transporte do fármaco na corrente sanguínea. Para elevados valores de *Schmidt*, o transporte de espécie química torna-se puramente convectivo e sua influência na parede da artéria deve ser verificada

Conclusão - Trabalhos Futuros

1. Implementação do esquema Semi-Lagrangeano
2. Utilização das variáveis primitivas na equação Navier-Stokes numa abordagem 3D
3. Modelar o escoamento sanguíneo como um problema multifásico
4. Simular a transferência de espécie química na parede da artéria

Obrigado!

marquesleandro67@gmail.com