Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia

Leandro Marques

Método dos Elementos Finitos - Trabalho 1

Rio de Janeiro
2016

1 Método dos Elementos Finitos

1.1 Introdução

Descreveremos neste capítulo o Método dos Elementos Finitos (MEF). Enquanto o Método das Diferenças Finitas (MDF) representa uma aproximação direta para às equações diferenciais, a proposta do procedimento dos elementos finitos é uma aproximação aplicada para os termos da formulação variacional [1]. Existem três ingredientes básicos para chegarmos nas equações discretizadas [2]:

- Formulação Forte
- Formulação Fraca
- Funções de Aproximação

1.2 Formulação Forte

No método dos Elementos Finitos, a equação de governo com as condições de contorno é conhecida como **Formulação Forte**. Desta forma, a formulação forte é:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - Pe\frac{du}{dx} = 0 \tag{1}$$

onde Pe é conhecido como Número de Peclet que representa a razão entre as taxas de transporte advectivo e difusivo. Esta equação é válida no domínio $\Omega = [0, 1] \in \mathbb{R}$ com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= u - 1 \text{ para x = 0} \\ u &= 0 \text{ para x = 1} \end{aligned} \tag{2}$$

1.3 Formulação Fraca

O restultado da ponderação da equação de governo sobre o domínio é conhecida como **formulação fraca** [3]. A seguir será explanada a formulação fraca. Para mais detalhes, consultar [4]. Como o objetivo é encontrar uma solução aproximada, é aceitável supor que seja produzido um **Resíduo R** na equação de governo, isto é:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - Pe\frac{du}{dx} = R \tag{3}$$

Buscaremos forçar o resíduo ser equivalente a zero num sentido médio [5], logo:

$$\int_\Omega R w d\Omega = 0 \tag{4}$$

onde w é função peso. A função peso é um conjunto de funções arbitrárias dentro de um espaço de funções que será discutido à frente. Possuímos, então, as seguintes integrais:

$$\int_\Omega \left[\frac{d^2u}{dx^2} - Pe\frac{du}{dx}\right] w d\Omega = 0 \tag{5}$$

Desenvolvendo a integral, temos:

$$\int_\Omega \frac{d^2u}{dx^2} w d\Omega - Pe \int_\Omega \frac{du}{dx} w d\Omega = 0 \tag{6}$$

No termo difusivo, aplicaremos a integração por partes com o intuito de diminuir a ordem da derivada. Assim temos:

$$w\frac{du}{dx} - \int_\Omega \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} d\Omega - Pe \int_\Omega \frac{du}{dx} w d\Omega = 0 \tag{7}$$

O primeiro termo da equação acima é conhecido como condição natural. Quando $x = 1$, $w = 0$ por hipótese. Assim, a equação será:

$$-w(0)\frac{du}{dx}(0) - \int_\Omega \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} d\Omega - Pe \int_\Omega \frac{du}{dx} w d\Omega = 0 \tag{8}$$

isto é:

$$-w(0)[u(0) - 1] - \int_\Omega \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} d\Omega - Pe \int_\Omega \frac{du}{dx} w d\Omega = 0 \tag{9}$$

ou seja:

$$-w(0)u(0) + w(0) - \int_\Omega \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} d\Omega - Pe \int_\Omega \frac{du}{dx} w d\Omega = 0 \tag{10}$$

Simplificando a equação temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}(u,w) &= \int_\Omega \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} d\Omega + w(0)u(0) \\
\mathbf{c}(u,w) &= \int_\Omega w\frac{du}{dx} d\Omega \\
\mathbf{f}(u,w) &= -w(0)
\end{aligned} \tag{11}$$

Desta forma, a equação pode ser apresentada como:

$$\mathbf{k}(u,w) + Pe\mathbf{c}(u,w) + \mathbf{f}(u,w) = 0 \tag{12}$$

Dado o espaço de funções bases:

$$\mathbb{U} = \{u \in \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega \frac{du}{dx}^2 d\Omega < \infty; u(1) = 0\} \tag{13}$$

Dado o espaço de funções pesos:

$$\mathbb{W} = \{w \in \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega \frac{dw}{dx}^2 d\Omega < \infty; w(1) = 0\} \tag{14}$$

Desta forma, a formulação fraca consiste em encontrarmos a solução de $u \in \mathbb{U}$ tal que:

$$\mathbf{k}(u,w) + Pe\mathbf{c}(u,w) + \mathbf{f}(u,w) = 0 \tag{15}$$

para todo w $\in \mathbb{W}$.

Referências

[1] O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, “Finite elements in the solution of fiel problems,” *The Engineer*, 1965.

[2] J. Fish and T. Belytschko, *A First Course in Finite Elements.* John Wiley & Sons, Ltd, 2007.

[3] G. R. Anjos, “Hydrodynamics field solution of electrochemical cells through finite element method,” Master’s thesis, Metallurgical and Materials Engineering, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, 2007.

[4] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer, 1994.

[5] B. A. Finlayson, *The Method Weighted Residuals and Variational Principles.* Elsevier, 1972.