



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO ARAGUAIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LUCAS MARQUETTI ANDRADE DE RESENDE

ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS ESPESSAS ATRAVÉS DO MÉTODO LOCAL DE
PETROV-GALERKIN COM A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS
MÓVEIS ORTOGONALIS

BARRA DO GARÇAS

2020

LUCAS MARQUETTI ANDRADE DE RESENDE

**ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS ESPESSAS ATRAVÉS DO MÉTODO
LOCAL DE PETROV-GALERKIN COM A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS
MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS ORTOGONALIS**

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao
curso de Engenharia Civil, da Universidade Federal
de Mato Grosso, Campus Universitário do Araguaia,
como parte das exigências para obtenção do grau
de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Danilo Hiroshi Konda

BARRA DO GARÇAS

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

M357a Marquetti Andrade de Resende, Lucas.

ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS ESPESSAS ATRAVÉS DO MÉTODO LOCAL DE PETROV-GALERKIN COM A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS ORTOGONALIS / Lucas Marquetti Andrade de Resende. -- 2020

xvii, 144 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Dr. Danilo Hiroshi Konda.

TCC (graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Barra do Garças, 2020.
Inclui bibliografia.

1. MLPG. 2. MQMO. 3. métodos-sem-malha. 4. Teoria-Reissner-Mindlin. I.
Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE APRESENTAÇÃO E DEFESA DO
TRABALHO DE CURSO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ALUNO(A): LUCAS MARQUETTI ANDRADE DE RESENDE

Aos quatro dias do mês de março do ano de dois mil e vinte, às treze horas e trinta minutos, na Sala 107, do Campus Universitário do Araguaia – UFMT, na cidade de Barra do Garças, foi realizada a sessão pública de apresentação e defesa do Trabalho de Curso do(a) acadêmico(a) LUCAS MARQUETTI ANDRADE DE RESENDE. A banca foi composta pelos seguintes professores: orientador Prof. Dr. DANILO HIROSHI KONDA, Prof. CRISTOPHER ANTONIO MARTINS DE MOURA e Prof. KÊNIA AIKO TOGOE FERNANDES GOUVEIA. O Trabalho de Curso tem como título: **ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS ESPESSAS ATRAVÉS DO MÉTODO LOCAL DE PETROV-GALERKIN COM A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS ORTOGONALIS**. Após explanação no prazo regulamentar o(a) aluno(a) foi interrogado pelos componentes da banca. Terminada a etapa, os membros, de forma confidencial avaliaram o(a) aluno(a) e conferiram o(a) mesmo(a) o seguinte resultado aprovado, proclamado pelo presidente da sessão. Dados por encerrados os trabalhos, lavrou-se a presente Ata, que será assinada pela banca e pelo(a) aluno(a).

Barra do Garças, 04 de março de 2020.

Aluno(a): Lucas Marquetti A. Resende,

Banca:


Prof. Dr. Danilo Hiroshi Konda (orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso


Prof. Christopher Antonio Martins de Moura (membro)
Universidade Federal de Mato Grosso


Prof. Kênia Aiko Togoe Fernandes Gouveia (membro)
Universidade Federal de Mato Grosso

*Aos meus pais e avós,
que não mediram esforços, ao me assistir, em toda jornada acadêmica.*

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, saúde e inteligência, a Nossa Senhora pela interseção.

Ao meu orientador Danilo por não medir esforços em me auxiliar em todos os processos de elaboração deste trabalho. Por sua amizade, conselhos e ensinamentos.

Aos meus pais Nilzo e Maísa, meus avós Maurides e Maria, por me mostrarem a importância do estudo em qualquer aspecto da vida, por ensinarem os valores morais que me moldaram desde a infância, a ter paciência, foco e perseguir meus objetivos, mesmo que tudo não ocorra como planejado. Também por todo o suporte emocional e financeiro.

Ao amigo Cristiano por me ensinar as virtudes da discrição, prudência e temperança. Por toda orientação religiosa e moral. Por sua amizade sincera.

A Marcela, por me ajudar a respeitar limitações e deficiências, próprias ou alheias. A compreender que a curva de aprendizado é diferente para cada pessoa, mas que com esforço e empenho todos somos capazes de coisas extraordinárias. Por me ensinar a amar o próximo por suas qualidades, e relevar todos os defeitos. Por me fazer compreender que o mundo não funciona a minha maneira, pela motivação em buscar ser melhor a cada dia.

Ao meu irmão Marcus, aos amigos Pedro e Thiago, por toda a paciência, companhia, e auxílio nos momentos mais difíceis.

A todos que passaram por minha vida no decorrer desses quatro anos, me ensinando novas coisas, ou aprendendo comigo, e que contribuíram para minha formação.

"Sem uma procura consciente da beleza, arriscamo-nos a cair num mundo de prazeres que causam dependência e na banalização dos atos de dessacralização, um mundo em que já não se percebe bem por que vale a pena a vida humana."

(Roger Scruton)

Nota: Entenda por beleza tudo aquilo que, de certa forma, transcende (excede, extrapola) a natureza humana

RESUMO

Métodos sem malhas tem se tornado uma alternativa ao Método de Elementos Finitos (MEF) por sua capacidade de modelar fenômenos com uma nuvem de pontos desconexos. Um breve histórico dos métodos sem malhas é discutido evidenciando suas principais vantagens, e também, suas limitações. Com base na Teoria de Reissner para solução de placas espessas, este trabalho faz uso do Método Local sem Malhas de Petrov-Galerkin(MLPG) utilizando o Método de Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais (MQMO), que consiste em aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt na matriz de momentos, para aproximação das variáveis.

Análises são feitas considerando placas de formato quadrado, retangular e esconso com diferentes condições de contorno (tipos de apoio). A influência do tipo de aproximação na obtenção dos resultados, também é analisada, para aproximações com um base polinomial linear, quadrática e cúbica. O MLPG utilizando o MQMO é comparado ao MEF e ao MLPG utilizando o Método de Mínimos Quadrados Móveis convencional para validação do dos resultados. Por fim, é estudado o efeito de *shear locking* para cada caso, reduzindo a espessura da placa gradativamente, com o uso de bases monomiais de diferentes ordens.

Alguns erros ocorreram para ordens de base monomial muito grandes, também para casos mais complexos de placas de formato esconso, sendo necessária uma nuvem mais refinada. No entanto, os resultados obtidos foram bons, acredita-se que o MQMO tenha potencial para se tornar competitivo pela sua redução expressiva no custo computacional e boa precisão de resultados.

Palavras-chaves: métodos-sem-malhas, MSM, Teoria-de-Reissner-Mindlin, Mínimos-Quadrados Móveis, MQM, Mínimos-Quadrados-Móveis-Ortogonais, MQMO, Método-Local-de-Petrov-Galerkin, MLPG

ABSTRACT

Meshless methods have become an alternative to the Finite Element Method (FEM) for its ability to model phenomena with a cloud of disconnected nodes. A brief history of meshless methods is discussed, highlighting their main advantages, as well as their limitations. Based on the Reissner Theory of thick plates, this work uses the Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) by the Orthogonal Moving Least Squares (OMLS), which consists of applying the Gram-Schmidt process in stiffness matrix to approximate variables.

Analyses are made considering square, rectangular and hidden plates with different boundary conditions (types of support). The influence of the type of approximation, in obtaining the results, is analyzed yet, for approximations with a linear, quadratic and cubic polynomial basis. The OMLS is compared to the FEM and the Moving Least Squares Method to validate the results. Finally, the shear locking effect for each case is studied, gradually reducing the thickness of the plate, using monomial bases of different orders.

Some errors occurred for hight orders monomial basis, also for more complex cases of hidden format plates, requiring a more refined cloud. However, the results obtained were good, it is believed that the MQMO has potential to become competitive due to its significant reduction in computational cost and good accuracy of results.

Key-words: meshfree. meshless. reissner-theory. mls.improved-mls. mls-orthogonal. Meshless-Local-Petrov-Galerkin. MLPG.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Função peso aplicada a pontos base	5
Figura 2 – Diferença entre u , u aproximado, u fictício e u conhecido	6
Figura 3 – Sistema de coordenadas da placa.	13
Figura 4 – Tensões e forças de volume em um volume infinitesimal da placa.	14
Figura 5 – Tensões e forças de superfície.	15
Figura 6 – Componentes de tensão de uma placa sujeita a flexão simples.	16
Figura 7 – Esforços resultantes de momento fletor e esforço cortante na placa.	17
Figura 8 – Domínio de quadratura na superfície média da placa	22
Figura 9 – Esquema dos tipos de Contorno	24
Figura 10 – Possíveis Posições para um domínio de suporte	31
Figura 11 – Padronização da região triangular	32
Figura 12 – Orientação do Contorno	33
Figura 13 – Aproximação simplificada utilizando um mesmo subdomínio de suporte	35
Figura 14 – FLuxograma: Pré-Processamento de Dados	39
Figura 15 – FLuxograma: Processamento de Dados MS. Excel	40
Figura 16 – Nuvem de pontos para cada discretização de placa quadrada	41
Figura 17 – Discretizações Placa Quadrada ANSYS	42
Figura 18 – Custo computacional para placa quadrada - 1	42
Figura 19 – Custo computacional para placa quadrada - 2	43
Figura 20 – Placa Apoiada	43
Figura 21 – Deslocamentos Obtidos: Placa Quadrada Apoiada - estudo de convergência	44
Figura 22 – Erro Relativo: Placa Quadrada Apoiada - estudo de convergência	44
Figura 23 – Deslocamentos obtidos para diferentes ordens de base monomiais: Placa Quadrada Apoiada	45
Figura 24 – Erro relativo para diferentes ordens de base monomiais: Placa Quadrada Apoiada	45
Figura 25 – Deslocamentos Obtidos: Placa Quadrada Apoiada - validação	46
Figura 26 – Erro Relativo: Placa Quadrada Apoiada - validação	46
Figura 27 – Erro Relativo Total: Placa Quadrada Apoiada	47
Figura 28 – Influência da base polinomial no custo computacional	48
Figura 29 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma placa apoiada	48
Figura 30 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma placa apoiada - 2	49
Figura 31 – Placa Engastada	50
Figura 32 – Deslocamentos Obtidos: Placa Quadrada Engastada - estudo de convergência	50
Figura 33 – Erro Relativo: Placa Quadrada Engastada - estudo de convergência	51
Figura 34 – Deslocamentos obtidos para diferentes ordens de base monomiais: Placa Quadrada Engastada	51
Figura 35 – Erro relativo para diferentes ordens de base monomiais: Placa Quadrada Engastada	52
Figura 36 – Deslocamentos Obtidos: Placa Quadrada Engastada - validação	52
Figura 37 – Erro Relativo: Placa Quadrada Engastada - validação	53
Figura 38 – Erro Relativo Total: Placa Quadrada Engastada	53
Figura 39 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma placa engastada	54
Figura 40 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma placa engastada	55

Figura 41 – Nuvem de pontos para cada discretização de placa retangular	56
Figura 42 – Discretizações placa retangular ANSYS	56
Figura 43 – Custo computacional para placa retangular - 1	57
Figura 44 – Custo computacional para placa retangular - 2	57
Figura 45 – Placa em Balanço	58
Figura 46 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - estudo de convergência	58
Figura 47 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - estudo de convergência	59
Figura 48 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - Tipos de Aproximação	59
Figura 49 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - Tipos de Aproximação	60
Figura 50 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - validação	61
Figura 51 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - validação	61
Figura 52 – Erro Relativo Total: Placa Retangular em Balanço - engaste no maior lado - corte X	62
Figura 53 – Erro Relativo Total: Placa Retangular em Balanço - engaste no maior lado - corte Y	62
Figura 54 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma Placa em Balanço	63
Figura 55 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma Placa em Balanço	64
Figura 56 – Placa em Balanço	64
Figura 57 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - estudo de convergência	65
Figura 58 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - estudo de convergência	65
Figura 59 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - Tipos de Aproximação	66
Figura 60 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - Tipos de Aproximação	66
Figura 61 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - validação	67
Figura 62 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - validação	68
Figura 63 – Erro Relativo Total: Placa Retangular em Balanço - engaste no menor lado - corte X	68
Figura 64 – Erro Relativo Total: Placa Retangular em Balanço - engaste no menor lado - corte Y	69
Figura 65 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma Placa em Balanço	70
Figura 66 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma Placa em Balanço	70
Figura 67 – Nuvem de pontos para cada discretização de placa esconsa	71
Figura 68 – Discretizações placa esconsa ANSYS	71
Figura 69 – Custo computacional para placa esconsa - 1	72
Figura 70 – Custo computacional para placa esconsa - 2	72
Figura 71 – Placa Esconsa Bi-Engastada	73
Figura 72 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa Bi-Engastada - estudo de convergência	74
Figura 73 – Erro Relativo: Placa Esconsa Bi-Engastada - estudo de convergência	74
Figura 74 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa Bi-Engastada - Tipos de Aproximação	75
Figura 75 – Erro Relativo: Placa Esconsa Bi-Engastada - Tipos de Aproximação	75
Figura 76 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa Bi-Engastada - validação	76
Figura 77 – Erro Relativo: Placa Esconsa Bi-Engastada - validação	76
Figura 78 – Erro Relativo Total: placa esconsa bi-engastada nos lados esconsos	77
Figura 79 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma placa bi-engastada	78
Figura 80 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma placa bi-engastada	78
Figura 81 – Placa Esconsa L-Engastada	79
Figura 82 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa L-Engastada - estudo de convergência	80
Figura 83 – Erro Relativo: Placa Esconsa L-Engastada - estudo de convergência	80

Figura 84 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa L-Engastada - Tipos de Aproximação	81
Figura 85 – Erro Relativo: Placa Esconsa L-Engastada - Tipos de Aproximação	81
Figura 86 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa L-Engastada - Tipos de Aproximação - Detalhe dos deslocamentos obtidos em bases monomiais de ordem cúbica	82
Figura 87 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa L-Engastada - validação	82
Figura 88 – Erro Relativo: Placa Esconsa L-Engastada - validação	83
Figura 89 – Erro Relativo Total: placa esconsa L-engastada	83
Figura 90 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma placa L-engastada	84
Figura 91 – Efeito de <i>Shear Locking</i> em uma placa L-engastada	85
 Figura 92 – Placa Quadrada Bi-Engastada	94
Figura 93 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Quadrada Bi-Engastada - corte Y	95
Figura 94 – Erro Relativo – Placa Quadrada Bi-Engastada - Corte Y	95
Figura 95 – Erro Relativo Total: Placa Quadrada Bi-Engastada	96
Figura 96 – Erro Relativo Total: Placa Quadrada Bi-Engastada	96
 Figura 97 – Placa Retangular Engastada	97
Figura 98 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Retangular Engastada .	98
Figura 99 – Erro Relativo – Placa Retangular Engastada	98
Figura 100 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Engastada - Corte X	99
Figura 101 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Engastada - Corte Y	99
Figura 102 – Placa Retangular Apoiada	100
Figura 103 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Retangular Apoiada .	100
Figura 104 – Erro Relativo – Placa Retangular Apoiada	101
Figura 105 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Apoiada - Corte X	101
Figura 106 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Apoiada - Corte Y	102
Figura 107 – Placa Retangular L-Engastada	102
Figura 108 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Retangular L-Engastada	103
Figura 109 – Erro Relativo – Placa Retangular L-Engastada	103
Figura 110 – Erro Relativo Total: Placa Retangular L-Engastada	104
Figura 111 – Erro Relativo Total: Placa Retangular L-Engastada	104
Figura 112 – Placa Retangular Bi-Apoiada	105
Figura 113 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Retangular Bi-Apoiada .	105
Figura 114 – Erro Relativo – Placa Retangular Bi-Apoiada	106
Figura 115 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Bi-Apoiada	106
Figura 116 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Bi-Apoiada	107
 Figura 117 – Placa Esconsa Engastada	108
Figura 118 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Esconsa Engastada .	108
Figura 119 – Erro Relativo – Placa Esconsa Engastada	109
Figura 120 – Erro Relativo Total: Placa Esconsa Engastada	109
Figura 121 – Placa Esconsa Tri-Engastada	110
Figura 122 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Esconsa Tri-Engastada	110
Figura 123 – Erro Relativo – Placa Esconsa Tri-Engastada	111
Figura 124 – Erro Relativo Total: Placa Esconsa Tri-Engastada	111
Figura 125 – Problemas Constatados para Placa Esconsa Tri-Engastada	112
Figura 126 – Placa Esconsa Bi-Engastada	113
Figura 127 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Esconsa Bi-Engastada	113

Figura 128 – Erro Relativo – Placa Esconsa Bi-Engastada	114
Figura 129 – Erro Relativo Total: Placa Esconsa Bi-Engastada nos Lados Retos	114
Figura 130 – Placa Esconsa Em Balanço	115
Figura 131 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Esconsa Em Balanço . .	115
Figura 132 – Erro Relativo – Placa Esconsa Em Balanço	116
Figura 133 – Erro Relativo Total: Placa Esconsa em Balanço - engaste no lado reto . .	116
Figura 134 – Problemas Constatados para Placa Esconsa em Balanço	117
Figura 135 – Problemas Constatados para Placa Esconsa Engastada	118

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

DEM *Diffuse Element Method*

EDP Equação Diferencial Parcial

EFGM *Element Free Galerkin Method*

EICL Equação Integral de Contorno Local

FBR Funções de Base Radial

FFSL Forma Fraca Simétrica Local

GFEM *Galerkin Finite Element Method*

IMLS Mínimos Quadrados Móveis Aprimorado

MEC Método dos Elementos de Contorno

MEF Método de Elementos Finitos

MLPG *Meshless Local Petrov-Galerkin* – Método Local sem Malhas de Petrov-Galerkin

MQM Método dos Mínimos Quadrados Móveis

MQMO Método de Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais

MQMO Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais

PP Parâmetro de Penalidade

RKPM *Reproducing Kernel Particle Method*

SPH *Smoothed Particle Hydrodynamics*

LISTA DE SÍMBOLOS

p	Base Polinomial
a	Parâmetro a Determinar Associado a p
$J(x)$	Erro Quadrado Ponderado Acumulado
$\varphi(\mathbf{x})$	Função de Forma
$u^h(\mathbf{x})$	Valores Aproximados
Ω_s	Domínio de Suporte Compacto
$u(\mathbf{x})$	Valores Prescritos da Função
$\hat{u}(\mathbf{x})$	Valores Nodais Fictícios Indeterminados de $u(\mathbf{x})$
$\bar{u}(\mathbf{x})$	Valores Nodais Conhecidos
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Vetor de Parâmetros Indeterminados
$\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$	Base Pascal
$w(\mathbf{x})$	Função de Peso do MQM
$q(\mathbf{x})$	Base Polinomial Ortogonalizada
w	Deslocamento Transversal na Direção de z
g	Carregamento Transversal Aplicado à Placa
t	Espessura da Placa
σ	Tensões Axiais
τ	Tensões Cisalhantes
u	Deslocamento na direção x
v	Deslocamento na direção y
ϕ_y	rotação que ocorre no plano yz (em torno de $x,$)
ϕ_x	rotação que ocorre no plano xz (em torno de $y,$)
β_y^v	Deformação Devido ao Efeito de Cisalhamento
M	Momentos Solicitantes na Seção
Q	Esforço Cortante na Seção
I	Momento de Inercia da Seção Transversal
U_{EI}	Energia de Deformação Relacionada aos Esforços Internos
U_0	Energia de Deformação Específica
U_{EE}	Energia Potencial das Solicitações Externas
π	Funcional de Energia Potencial Total
U_{EI}^*	Energia de Deformação Complementar
E	Módulo de Elasticidade
ν	Coeficiente de Poisson
G	Módulo de Elasticidade Transversal
Ω_q	Domínio de Quadratura
W_I	Função de Ponderação
Γ_t	Borda com esforço prescrito
Γ_u	Borda com deslocamento prescrito

SUMÁRIO

Lista de ilustrações	ix
1 Introdução	1
1.1 METODOLOGIA	1
1.2 OBJETIVOS	1
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
1.3.1 Métodos Sem Malhas	2
1.3.2 Teoria de Placas	4
2 Funções de Aproximação	5
2.1 APROXIMAÇÃO COM MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS	5
2.1.1 Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM)	6
2.1.2 Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais (MQMO)	9
3 Problema de Flexão de Placas	12
3.1 INTRODUÇÃO A TEORIA DE REISSNER-MINDLIN	12
3.2 RELAÇÃO EQUILÍBRIO-ELASTICIDADE	13
3.3 TENSÕES E ESFORÇOS SOLICITANTES NA PLACA	15
3.4 RELAÇÃO DESLOCAMENTO-DEFORMAÇÃO	18
3.5 RELAÇÃO ESFORÇOS-DESLOCAMENTOS	18
3.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO	20
4 Método Local Sem Malhas Petrov-Galerkin	22
4.1 FORMA FRACA SIMÉTRICA LOCAL	22
4.2 SISTEMA DE EQUAÇÕES DISCRETIZADO	25
4.3 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS	28
4.3.1 Método da Interpolação Direta	29
4.3.2 Método das Penalidades	29
4.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	30
4.4.1 Transformação de Coordenadas para Discretização de Gauss-Legendre	31
4.4.2 Integrais de Domínio	34
4.4.3 Integrais de Contorno	34
4.5 APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS	35
5 Implementação Numérica	37
5.1 ARQUIVO DE ENTRADA	37
5.2 ARQUIVO DE SAÍDA	38
5.3 DISCRETIZAÇÕES REALIZADAS NO ANSYS	38
5.4 PROCESSAMENTO DE DADOS	38
6 Resultados e Discussões	41
6.1 PLACA QUADRADA	41
6.1.1 Exemplo 01 - Placa Quadrada Totalmente Apoiada	43
6.1.1.1 Estudo de Convergência	44

6.1.1.2	Influência do tipo de Aproximação	44
6.1.1.3	Validação de Resultados	45
6.1.1.4	Variação de Espessura	47
6.1.2	Exemplo 02 - Placa Quadrada Totalmente Engastada	49
6.1.2.1	Estudo de Convergência	50
6.1.2.2	Influência do tipo de Aproximação	51
6.1.2.3	Validação de Resultados	52
6.1.2.4	Variação de Espessura	54
6.2	PLACA RETANGULAR	55
6.2.1	Exemplo 03 - Placa Retangular em Balanço – Engaste maior lado	57
6.2.1.1	Estudo de Convergência	58
6.2.1.2	Influência do tipo de Aproximação	59
6.2.1.3	Validação de Resultados	60
6.2.1.4	Variação de Espessura	63
6.2.2	Exemplo 04 - Placa Retangular em Balanço – Engaste menor lado	64
6.2.2.1	Estudo de Convergência	65
6.2.2.2	Influência do tipo de Aproximação	66
6.2.2.3	Validação de Resultados	67
6.2.2.4	Variação de Espessura	69
6.3	PLACA ECONSA	71
6.3.1	Exemplo 05 - Placa Econsa Bi-Engastada	73
6.3.1.1	Estudo de Convergência	73
6.3.1.2	Influência do tipo de Aproximação	75
6.3.1.3	Validação de Resultados	76
6.3.1.4	Variação de Espessura	77
6.3.2	Exemplo 06 - Placa Econsa L-Engastada	79
6.3.2.1	Estudo de Convergência	79
6.3.2.2	Influência do tipo de Aproximação	81
6.3.2.3	Validação de Resultados	82
6.3.2.4	Variação de Espessura	84
Conclusão	86	
6.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	86	
REFERÊNCIAS	87	
APÊNDICES	93	
APÊNDICE A Placa Quadrada	94	
A.1 BI-ENGASTADA	94	
APÊNDICE B Placa Retangular	97	
B.1 TOTALMENTE ENGASTADA	97	

B.2 TOTALMENTE APOIADA	100
B.3 L-ENGASTADA	102
B.4 BI-APOIADA	105
APÊNDICE C Placa Esconsa	108
C.1 TOTALMENTE ENGASTADA	108
C.2 TRI-ENGASTADA	110
C.3 BI-ENGASTADA	112
C.4 EM BALANÇO	115

1 INTRODUÇÃO

Softwares comerciais já consolidados como EBERICK, CYPECAD ou até mesmo ANSYS, são bastante difundidos para análise estrutural, dimensionamento e modelagem de fenômenos físicos relacionados a engenharia civil. Em geral, os softwares utilizam métodos baseados em malhas, sendo o Método de Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC) os mais utilizados.

Em casos onde há deformações excessivas, faz-se necessário uma nova malha em cada estágio de deformação do elemento, ou em uma análise de propagação de fissuras, para cada estágio de fissuração gera-se uma nova malha. Logo, descontinuidades no elemento geram um oneroso custo computacional, pois para representatividade do elemento um processo iterativo de criação de malhas é utilizado, aumentando muito o tempo computacional na resolução das equações.

Uma alternativa para contornar o problema são os métodos sem malha, que consistem em avaliar o comportamento do problema através de operadores integro-diferenciais e obter os esforços solicitantes ou deslocamentos, por aproximações utilizando pontos totalmente desconexos. Para a aproximação de variáveis em pontos desconexos o Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) e a interpolação com o uso de Funções de Base Radial (FBR) são os mais conhecidas.

Nos métodos sem malhas uma função de forma correlaciona o valor de uma variável em um dado ponto com os valores nodais desta variável em pontos próximos. Para obter essa função é necessário a resolução de um sistema linear que comuta na inversão da matriz de rigidez. Decorre que o processo de inversão de matrizes pode ocasionar o surgimento de uma matriz singular ou mal condicionada, que prejudica a obtenção de bons resultados.

Aplicando o processo de Gram-Schmidt no MQM tem-se origem o Método de Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais (MQMO). No MQMO o processo de Gram-Schmidt diagonaliza a matriz de momentos \mathbf{A} formando uma matriz diagonal definida positiva, isto é, tornando ortogonais entre si base polinomial, sua forma transposta e as funções peso ($\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}$). O uso do MQMO embora não vá eliminar os problemas de mal condicionamento na matriz de rigidez, facilitará a avaliação dos coeficientes de aproximação.

Neste capítulo será abordado a metodologia utilizada, os objetivos deste trabalho e a revisão bibliográfica.

1.1 METODOLOGIA

Para análise de resultados foi utilizado como depurador o software *Microsoft Visual Studio Community 2017* operando em modo *Release 64bits* para compilar o programa, que foi escrito em linguagem FORTRAN.90. Em seguida os dados são organizados em um banco de dados no *Microsoft Excel Office 2019*.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo a aplicação do Método de Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais (MQMO) como método para aproximação de variáveis. O MQMO é empregado no Método Local de Petrov Galerkin (MLPG), utilizado para enfraquecimento das equações diferenciais de equilíbrio empregadas na teoria de Reissner. Logo, tem-se como objetivo comprovar a eficiência do MQMO, em diversas discretizações, comprovando-se pelas seguintes análises:

- Verificar a convergência e precisão do MQMO;
- medir-se o custo computacional;
- comparar os resultados com o MEF e MQM tradicional;
- reduzir a espessura das placas para análise do efeito de *shear-locking*

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção será apresentado um histórico dos principais métodos sem malhas que se tem registro. Também, as principais teorias utilizadas para solução do problema de flexão de placas.

1.3.1 Métodos Sem Malhas

O primeiro método que se tem registro foi proposto por Lucy em 1977 [1], onde utilizou a teoria de Monte Carlo para obter as integrais de domínio e assim formular hipóteses para o problema de fissão de protoestrelas opticamente grossas. Os resultados foram apresentados mostrando a evolução de uma dessas proto-estrelas, partindo de um estado inicial com uma única estrela, para um estado final para um sistema triplo cujos componentes contêm apenas 60% da massa original, que segundo o autor demonstra a importância desse tipo fenômeno para os sistemas estelares binários.

No mesmo ano Gingold e Monaghan, [2] criaram o método *Smoothed Particle Hydrodynamics*(SPH) . No modelo baseado em partículas, uma nova formulação para hidrodinâmica foi aplicada a um espaço com um número arbitrário de dimensões, sendo utilizado na solução de problemas astrofísicos de elementos fluídos. Novos trabalhos foram publicados posteriormente por Monaghan *et.al.* onde apresentaram mais detalhes aprimorando o SPH em [3], [4] e [5].

Em 1981 Lancaster e Salkauskas apresentaram as primeiras teorias sobre o método de mínimos quadrados[6], utilizando interpolantes MQM para a aproximação de superfícies de pontos. Na ocasião, foram tomadas funções peso únicas para cada ponto de base, tornando o método uma verdadeira interpolação. A adoção de funções peso únicas produz um aumento exponencial do custo computacional em função da quantidade de dados do problema, inviabilizando esta abordagem. Desta forma, para a maioria dos casos, o MQM é utilizado como uma ferramenta para aproximação de variáveis.

Em 1996 o *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) é apresentado por Liu *et. al.* [7] que incluiram uma função de correção ao SPH. No mesmo ano [8] o RKPM foi melhor desenvolvido aplicando uma análise de Fourier a um sistema discretizado e em 1997 [9] utilizaram MQM como aproximantes de função.

Em paralelo, Nayroles *et. al.* [10] apresentaram o *Diffuse Element Method*(DEM) em 1992, onde apenas um conjunto de nós e uma descrição de contorno foram necessários para desenvolver as equações de Galerkin. Os aproximantes são polinômios que se ajustam aos valores nos pontos por uma aproximação de mínimos quadrados móveis. No entanto, Nayroles *et. al.* não reconheceram ainda o método como uma aproximação de MQM, chamando-os de "diffuse elements", colocaram o DEM apenas como uma generalização do MEF.

Em 1994, Belytschko *et.al.* [11] modificaram e refinaram o DEM, reconhecendo a discretização espacial como MQM, nomearam a nova abordagem como Método Galerkin Livre de Elementos (*Element Free Galerkin Method*, EFGM) , aplicado em problemas de elasticidade e condução de calor. Segundo os autores a taxa de convergência para o método, poderia exceder significativamente, a taxa do MEF e portanto, notam-se algumas vantagens para o EFGM em relação aos elementos finitos. Apenas uma nuvem de pontos e uma descrição de contorno seriam necessários para desenvolver as equações discretas, isto é, pode-se definir o problema sem construir uma malha.

No EFGM a variável dependente, e seu gradiente, é contínua em todo o domínio logo, o pós-processamento para obter um campo de gradientes suavizado, é totalmente desnecessário, no entanto, um conjunto de equações algébricas lineares deve ser resolvido, para todo ponto espacial no qual os valores das variáveis dependentes primárias devem ser calculados. Uma matriz $m \times m$ chamada \mathbf{A} – a qual será definida posteriormente – deve ser invertida para a obtenção de cada função de aproximação. No pós-processamento, \mathbf{A} deve ser invertida novamente, caso a função de aproximação seja necessária para transformar valores fictícios em valores aproximados, ou seja, na determinação dos valores finais dos deslocamentos. Em geral o processo de inversão de matrizes é computacionalmente oneroso, devendo ser evitado. Também, é interessante observar que a função de aproximação obtida com o MQM introduz erro de forma direta na formulação, sendo assim, a matriz \mathbf{A} deve ser invertida de forma precisa.

Ainda em 1994, Lu *et.al.* [12], identificando todos estes problemas, propuseram algumas mudanças no EFGM – será a partir daqui, convenientemente chamado *Improved MLS* ou apenas IMLS . Tendo em vista as dificuldades apresentadas que podem ocorrer durante o processo de inversão de matrizes, torna-se interessante trabalhar estas dificuldades objetivando tornar o método mais competitivo. Para tanto, faz-se o uso de uma base ortogonalizada entre si, sua forma transposta e a função peso para a obtenção de uma matriz de rigidez diagonal. A ortogonalização é feita através do processo de Gram-Schmidt, reduzindo significativamente o custo computacional. Outro ajuste é aplicado dentro do variacional de energia, onde substituem-se os multiplicadores de Lagrange por seu significado físico, uma vez que, multiplicadores de Lagrange podem ser identificados como quantidades físicas (em problemas de elasticidade como a tração limite, e fluxo limite para problemas de condução de calor).

O uso dos princípios variacionais de energia modificados não funcionam muito bem com o MEF, particularmente aqueles de ordem baixa já que, o princípio do multiplicador implícito de Lagrange é um campo de ordem inferior à variável restrita. No entanto, com os aproximantes de MQM, o variacional modificado parece ter um desempenho muito bom para números razoáveis de incógnitas, desde que este resulte em uma matriz positiva definida em faixas, torna-se bastante atraente ser utilizado.

Em 1996, Beissel e Belytschko [13] demonstraram algumas considerações, sobretudo sobre a avaliação das integrais da forma fraca local, onde se divide o domínio que compreende o elemento como um todo, em subdomínios locais, que são regiões conhecidas, já definidas pelas condições de contorno. Além disso, segundo os autores para a aplicação do IMLS é necessária uma regularidade entre as funções de aproximação e de peso.

Em 2010, Carley [14] fez uso de polinômios ortogonais, que segundo o autor são capazes de evitar singularidades e desagregações. Testes foram feitos aplicando a primeira e segunda derivada da função de aproximação em uma distribuição de pontos aleatórios, em duas e três dimensões, com a avaliação da segunda derivada em uma configuração selecionada. Zhuang e Augarde [15] demonstraram que alguns termos da derivada são omitidos nessa nova implementação o que pode levar a erros, assim propuseram uma abordagem capaz de evitar a inversão de matriz e também manter a precisão. Em 2015, Mohamed e Ahmed [16] utilizaram o IMLS para solução de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). No mesmo ano utilizando o método das penalidades para as CCEs e o processo de Ritz para derivar as equações discretizadas de governo Zhang et.al. [17] propuseram um modelo denominado IMLS-Ritz em que o algoritmo é solucionado sem inversão de matrizes.

Até agora, não pode-se dizer que os métodos são totalmente livre de malhas, uma vez que necessitam de elementos ou células para possibilitar a avaliação das integrais de domínio e energia, sobre todo o domínio do problema.

Em 1998, combinando os recursos mais vantajosos do MEC, EFGM e o Método Galerkin de Elementos Finitos (*Galerkin Finite Element Method*, GFEM) utilizando uma aproximação por MQM, Zhu et.al. [18] apresentaram um método verdadeiramente sem malhas, que envolve apenas a integração do contorno sobre um subdomínio local centralizado no ponto em questão e por se tratar de um método local, não apresenta dificuldades em satisfazer as CCEs. O método é baseado em uma abordagem de Equação Integral de Contorno Local (EICL), semelhante ao modelo proposto por Beissel e Belytschko [13], facilmente aplicável à problemas não lineares e domínios não homogêneos. No entanto, para integrais singulares a EIFL apresenta uma série de complicações.

Assim, no mesmo ano, uma nova abordagem proposta por Zhu e Atluri [19], baseando-se na forma fraca simétrica local (FFSL) e em uma aproximação por MQM, o que resultou no método local sem malhas de Petrov-Galerkin (*Meshless Local Petrov-Galerkin*, MLPG) apresentado pelos mesmos autores [20] em que as CCEs são impostas pelo método das penalidades. Logo, o MLPG não necessita de uma malha, seja para a interpolação de variáveis da solução, ou até mesmo, para a solução das integrais de domínio (que estão relacionadas fisicamente à energia de deformação). Para a avaliação das integrais utilizaram domínios de formatos regulares (como esferas para casos tridimensionais) e segundo os autores uma vez que os MQM já obtêm uma solução suavizada, são desnecessárias técnicas de pós-suavização.

Com o sucesso dos métodos sem malhas começam a surgir diversos estudos para análise estrutural. Em 1998, Jun e Liu [21] utilizaram o RPKM para problemas de grandes deformações e Grinmeanu et.al. [22] analisaram estruturas hiper-elásticas (um tubo de borracha infinitamente longo, um elástico bidimensional e um suporte de motor respectivamente) com novos resultados publicados no ano seguinte [23].

Em 1998, Donning e Liu [24] utilizaram a teoria de Reissner-Mindlin [25] [26] para análise de estruturas delgadas e moderadamente espessas, apresentando alguns exemplos para vigas e placas e assim, evidenciando a precisão do método de Galerkin para uma discretização grosseira. No ano seguinte Krysl e Belytschko [27] utilizaram o EFGM para análise do problema de flexão de placas delgadas de Kirchhoff [28].

Já em 2001, Leitão[29] apresentou uma solução para o problema de flexão de placas com o uso de interpolantes por FBRs, através do método de colocação Hermite. No entanto, o autor não apresenta critérios para definir quantidade, posição do centro e dos pontos de colocação das FBRs. Uma formulação baseado no EICL, foi proposta no ano seguinte por Long e Zhang [30].

Quanto ao método Local Petrov-Galerkin, um estudo foi publicado, em 2002, por Shen e Atluri[31] explorando cinco funções de aproximação e seis funções de ponderação distintas, o que resulta em seis abordagens para o MLPG. Devido à velocidade, precisão e robustez do método MLPG-5 (no qual a função

de ponderação utilizada é função de Heaviside), assim há uma expectativa real de que o MLPG seja mais vantajoso que o MEF em um futuro próximo. Tomando m esquemas de aproximação, n funções de ponderação, o formatos de domínio para a função de ponderação, p formatos para o domínio da função de aproximação, q formatos para o subdomínio local resultaria em $[m \times n \times o \times p \times q]$ diferentes abordagens para o MLPG, tornam-se bastante atrativas para modelagem de fenômenos físicos por sua capacidade de adaptação.

Logo, diversos outros artigos são publicados explorando o MLPG: em 2004, Yuan-Bo e Shu-Yao utilizaram o MLPG [32] para flexão de placas esbeltas enquanto Soric *et.al.* [33] já consideraram as deformações cisalhantes; em 2006 Sladek *et.al.* [34] utilizaram o método para solução de problemas estáticos e dinâmicos da teoria de placas espessas e ortotrópicas, uma vez que os efeitos de cisalhamento transversal são mais significativos para placas ortotrópicas do que para isotrópicas, no estudo as equações de governo da teoria de Reissner-Mindlin, juntamente com uma função de ponderação são transformadas em integrais para os subdomínios locais na superfície média da placa (processo semelhante ao EICL), consideraram também fundação elástica de Winkler (ver [35]) e uma aproximação por MQM onde é possível avaliar a variação de espessura do elemento.

Placas de compósitos laminados também podem exibir fluência, que pode ser descrito na forma de uma viscoelasticidade linear. Considerações sobre viscoelasticidade foram apresentadas em 2008 por Sladek, Sladek e Zhang [36], onde o problema pode ser resolvido em um domínio transformado por Laplace, se uma técnica precisa de inversão de Laplace estiver disponível.

1.3.2 Teoria de Placas

O primeiro problema de Flexão de Placas foi proposto em 1859 por Kirchhoff [28], comumente chamado de Teoria Clássica de Kirchhoff, onde apenas deformações provocadas por flexão são consideradas, o que a torna limitada, sendo utilizada apenas para placas delgadas e pequenas deformações. A teoria de Mindlin [26] acresce ao problema de flexão de placas deformações ocasionadas por esforços de cisalhamento, e é empregada também para placas de pequena espessura e deformação.

Para grandes deformações, emprega-se a teoria de Von Kármán [37], que embora não se utilize as deformações por cisalhamento, leva em conta a trajetória de equilíbrio estável da placa considerando uma deformação inicial, ocorrida após a flambagem do elemento, uma vez que, para grandes deflexões as relações de deformação e deslocamento assumem um comportamento não linear.

A teoria de Mindlin também é conhecida por teoria de Reissner-Mindlin, embora tenham sido desenvolvidas de forma independente, pela semelhança entre as relações de esforços e deslocamentos e proximidade dos resultados obtidos. No entanto, algumas diferenças são notadas, Reissner [25] baseia-se em um variacional de energia de deformação considerando, ao longo da espessura da placa, uma distribuição linear para tensões axiais e quadrática para tensões cisalhantes.

Já a teoria de Mindlin não considera deformação na espessura da placa e embora as equações obtidas na teoria de Mindlin sejam válidas, verifica-se empiricamente a necessidade de fatores de correção em alguns termos. Os fatores de correção acabam aproximando para o sistema de equações obtido no final da teoria de Reissner.

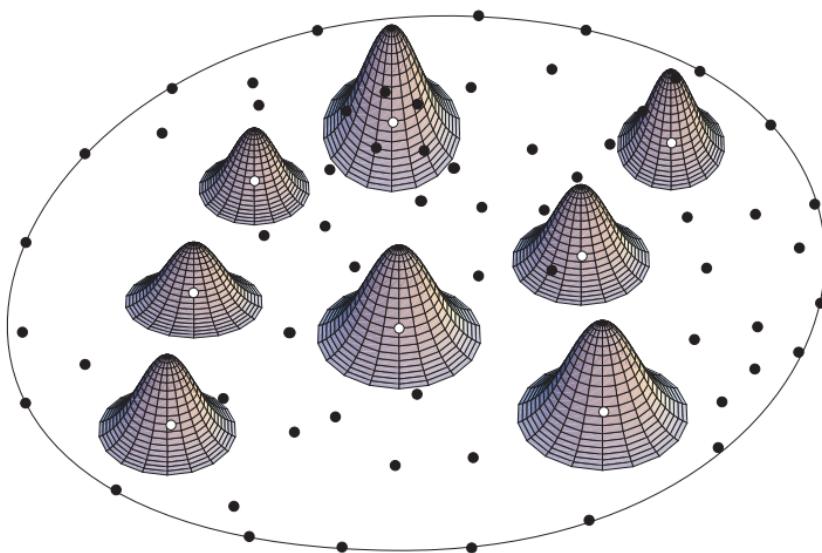
Vale ressaltar que a teoria de Kármán pode ser empregada juntamente com a teoria de Reissner para análise de grandes deflexões. Na teoria de Reissner, utiliza-se um funcional de energia pra avaliar a trajetória de equilíbrio da placa do seu estado natural até um estágio de deformação inicial. Já a teoria de Kármán considera a trajetória partindo de uma deformação inicial até o estado de pós-flambagem do elemento. Faz-se necessária esta divisão uma vez que no segundo estágio (pós-flambagem), perde-se a relação linear entre deformação e deslocamentos.

2 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

As funções de aproximação utilizadas em métodos sem malhas são fundamentadas em pontos ou nós desconexos, onde a obtenção de uma função de forma que se ajuste ao problema é necessária para descrever o fenômeno. Basicamente um processo de aproximação para os valores prescritos em um local onde a função é conhecida, obtidos por uma condição de contorno.

Além das funções de aproximação, as funções de peso ou ponderação são importantes para convergência dos resultados, esse tipo de função se comporta como uma função janela, tendo seu valor máximo em seu centro, que coincide com o ponto de base que está sendo calculado, e decaindo rapidamente para zero a medida que se afasta do ponto central. Através da função peso é possível ponderar o valor da variável em um ponto, definindo a relevância deste valor nodal no processo de aproximação da variável no ponto base. Um exemplo, de como uma função peso do tipo Gaussiana pode ser disposta em pontos base é ilustrado pela Figura 1.

FIGURA 1 – Função peso aplicada a pontos base



Fonte: Atluri e Zhu [20, p. 4]

Neste capítulo será abordado o Método dos Mínimos Quadrados Móveis, onde será aplicado processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, dando origem ao Método dos Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais.

2.1 APROXIMAÇÃO COM MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS

Uma aproximação por MQM pode ser ilustrada tomando um ponto base \mathbf{x} e mais n pontos campo \mathbf{x}_I , ($I = 1, 2, 3, \dots, n$) próximo ao ponto \mathbf{x} dando origem ao subdomínio local (Ω_s) para o problema.

O objetivo inicial é utilizar uma base de polinômios p associada a um parâmetro a capaz de se ajustar a variável de interesse, escrevendo esta variável no ponto \mathbf{x} , em função dos valores nodais da própria variável nos pontos campo. O erro em cada ponto campo é escrito como sendo a diferença entre o valor aproximado e o valor da variável no próprio ponto campo.

Não há nenhuma limitação no formato geométrico do subdomínio local utilizado para selecionar os pontos campo, sendo mais comum a utilização de formas geométricas regulares, como por exemplo, esféricas e cúbicas para casos tridimensionais, circulares e retangulares para bidimensionais.

Definida a aproximação da variável, a função erro pode ser obtida, possibilitando assim, a determinação de uma função de erro quadrático ponderado acumulado $J(\mathbf{x})$, através da utilização de uma função de ponderação que considera a norma euclidiana. A norma euclideana pode ser obtida por: $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|_2 =$

$$\sqrt{\sum_{I=1}^n |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|^2}$$

A função erro quadrático $J(\mathbf{x})$ é minimizada com relação ao parâmetro $a(\mathbf{x})$, justificando assim a nomenclatura do método e garantido que a solução aproximada esteja suficientemente próxima da solução do problema.

Para a aproximação das variáveis, obtém-se um sistema linear, onde os coeficientes podem ser determinados e uma função de forma $\varphi(\mathbf{x})$ que correlaciona os valores aproximados $u^h(\mathbf{x})$ e prescritos $\hat{u}(\mathbf{x})$ é obtida.

2.1.1 Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM)

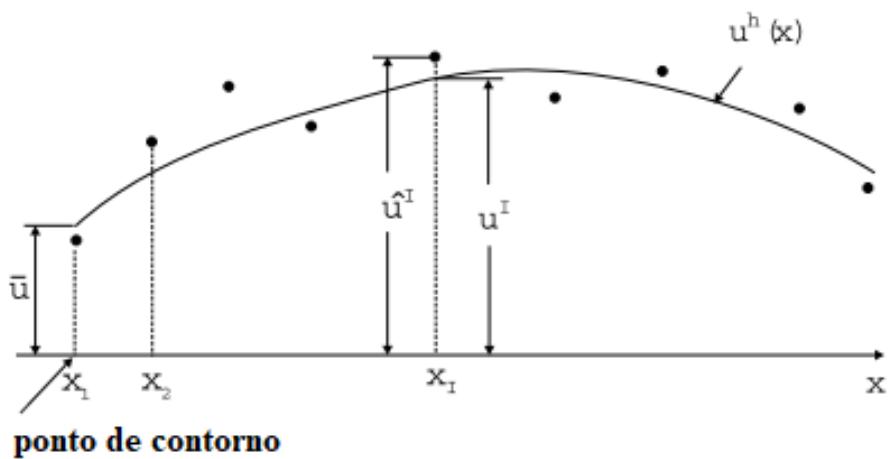
Seja um subdomínio local Ω_s centrado no ponto base \mathbf{x} e $\mathbf{U} = (u_I, \mathbf{x}_I)$, $I = 1, 2, 3, \dots, n$ um conjunto de n pontos. Deseja-se aproximar $u(\mathbf{x})$ por uma função :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I^n \varphi_I(\mathbf{x}) \hat{u}_I = \Phi(\mathbf{x}) \hat{u} \quad (2.1)$$

onde $\varphi_I(\mathbf{x})$ é o i -ésimo termo da função de forma do ponto \mathbf{x} , ou seja, é o termo correlacionado ao ponto \mathbf{x}_i . $\Phi(\mathbf{x})$ é uma matriz linha que contém todos os termos da função de forma e \hat{u} o vetor que contém os valores fictícios indeterminados.

Os termos $u^h(\mathbf{x})$, $\hat{u}_I(\mathbf{x})$, $\bar{u}_I(\mathbf{x})$ e $\bar{u}_I(\mathbf{x})$, aparecem diversas vezes no desenvolvimento das equações e seu significado pode se tornar confuso. Com o auxílio da Figura 2 observa-se que $u^h(\mathbf{x})$ é o valor aproximado da variável $u_I(\mathbf{x})$, no entanto, uma vez que u^h ainda não foi determinado, supõem-se valores nodais fictícios indeterminados para $u_I(\mathbf{x})$ chamados de $\hat{u}_I(\mathbf{x})$. O ponto campo pode ser também um valor conhecido $\bar{u}_I(\mathbf{x})$, como no caso de um nó de contorno.

FIGURA 2 – Diferença entre u , u aproximado, u fictício e u conhecido



Fonte: Shen e Atluri [38, p. 6]

Para aproximar-se $u^h(\mathbf{x})$ utiliza-se uma base polinomial, onde u^h pode ser representado pelo produto interno entre a base polinomial linearmente independente e um vetor de parâmetros a se determinar

$\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \rangle$. Assim a Equação 2.1 toma a seguinte forma:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}); \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_s \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é o vetor contendo os parâmetros $a_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, m$ que são as incógnitas no problema de aproximação. $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})]$, transposta de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, é uma base monomial completa de conteúdo m termos, sendo m o número de termos monomiais, que depende da ordem da base polinomial e do número de dimensões, construída usando triângulo de Pascal, para casos bidimensionais, ou pirâmide Pascais, para tridimensional. Por conveniência $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ é comumente chamado base Pascal.

Tomando como exemplo, um caso unidimensional a base pascal assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{base linear, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x], & m = 2 \\ \text{base quadrática, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, x^2], & m = 3 \\ \text{base cúbica, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, x^2, x^3], & m = 4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

para um caso bidimensional:

$$\begin{aligned} \text{base linear, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y], & m = 3 \\ \text{base quadrática, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2], & m = 6 \\ \text{base cúbica, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3], & m = 10 \end{aligned} \quad (2.4)$$

ou para um caso tridimensional:

$$\begin{aligned} \text{base linear, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, z]; & m = 4 \\ \text{base quadrática, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz]; & m = 10 \\ \text{base cúbica, } \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx, x^3, y^3, z^3, x^2y, xy^2, y^2z, yz^2, z^2x, zx^2, xyz] & m = 20 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Os parâmetros $a_i(\mathbf{x})$ na Equação 2.2 são determinados através de um ajuste mínimo quadrado ponderado acumulado para a aproximação local, que é obtido minimizando a diferença entre a aproximação local e a expressão:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - \hat{u}_I]^2 \quad (2.6)$$

Substituindo a Equação 2.2 na Equação 2.6 temos:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \left[\sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}_I) a_i(\mathbf{x}) - \hat{u}_I \right]^2 \\ &\equiv \sum_I^n w_I(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_I]^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Na Equação 2.7, $w_I(\mathbf{x}) \equiv w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ é a função peso do ponto base associada ao ponto campo, com $w_I(\mathbf{x}) > 0$ para todo \mathbf{x} no domínio de $w_I(\mathbf{x})$, \mathbf{x}_I corresponde ao valor de \mathbf{x} no I -ésimo ponto, m é o número de monômios e n o número de pontos para o subdomínio Ω_s para o qual a função peso $w_I(\mathbf{x}) > 0$, e as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{W} definidas por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & p_3(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & p_3(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ p_1(\mathbf{x}_3) & p_2(\mathbf{x}_3) & p_3(\mathbf{x}_3) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & p_3(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \begin{bmatrix} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \\
&\equiv \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w_3(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

e

$$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n] \tag{2.10}$$

Assim pode-se escrever a Equação 2.7 de forma matricial como:

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}) \tag{2.11}$$

Na Equação 2.7 o parâmetro $a_i(\mathbf{x})$ é livre para assumir qualquer valor. Desta forma, o resíduo é minimizado em relação a tal parâmetro a fim de garantir que a solução $u^h(\mathbf{x})$ seja próxima de $\hat{u}(\mathbf{x})$. Assim,

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_I) = 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(\mathbf{x}_I)} \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(\mathbf{x}_I)} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}_I} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(\mathbf{x}_I)} \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) - \mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(\mathbf{x}_I)} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}_I} = 0 \tag{2.13}$$

A Equação 2.13 pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}_I} = 0 \tag{2.14}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}_I} \tag{2.15}$$

onde as matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ são descritas por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})_{m \times m} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{P} = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \tag{2.16}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})_{m \times n} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} = [w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \tag{2.17}$$

Se \mathbf{A} não for singular, a aproximação de MQM é bem definida, ocorrendo se e somente se, $n \geq m$. O que significa que pelo menos m funções peso são diferentes de zero, para cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ e que os nós no domínio de suporte Ω_s não serão organizados em um padrão especial, como em uma linha reta.

Invertendo \mathbf{A} na Equação 2.15, os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ são encontrados:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I) \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}_I} \tag{2.18}$$

Reescrevendo a Equação 2.2 substituindo $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ obtido na Equação 2.18:

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I) \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}_I} \tag{2.19}$$

onde a variável aproximada $u^h(\mathbf{x}_I)$ está em função dos valores nodais fictícios indeterminados $\hat{\mathbf{u}}$. Tomando uma função de forma que relate essas duas funções, tem-se a matriz $\Phi^T(\mathbf{x}_I)_{n \times 1}$ definida por.

$$\Phi^T(\mathbf{x}_I) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I) \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \quad (2.20)$$

ou,

$$\varphi_{\mathbf{x}_I} = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I) \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)]_{iI} \quad (2.21)$$

onde I é a quantidades de pontos no domínio de suporte Ω_s avaliado no ponto \mathbf{x}_I e i o número de termos da base monomial. Substituindo a Equação 2.21 na Equação 2.19 obtém-se a Equação 2.1, inicialmente apresentada:

$$u(\mathbf{x}) \cong u^h(\mathbf{x}) = \sum_I^n \varphi_I(\mathbf{x}) \hat{u}_I = \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}$$

2.1.2 Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais (MQMO)

Para diagonalizar a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ em um ponto \mathbf{x} qualquer em que $a(\mathbf{x})$ deve ser obtido, a seguinte condição ortogonal é imposta:

$$\sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) q_k(\mathbf{x}_I) q_j(\mathbf{x}_I) = 0, \quad k \neq j \quad (2.22)$$

onde n é o número de pontos pertencentes ao subdomínio local de \mathbf{x} , $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ é a função peso centrada no ponto base \mathbf{x} e avaliada no ponto campo \mathbf{x}_I diferente de zero, e $q_j(\mathbf{x}_I)$ o j -ésimo termo da base polinomial do ponto campo.

Se a condição for satisfeita, o aproximante de MQMO pode ser obtido da Equação 2.2 em que a base polinomial $p_j(\mathbf{x})$ é substituída pela base ortogonalizada $q(\mathbf{x})$:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m q_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}); \quad (2.23)$$

Para uma base polinomial $p_k(\mathbf{x})$, ($k = 1, 2, 3, \dots, m$), a base ortogonal $q_k(\mathbf{x})$ pode ser obtida pelo processo de Gram-Schmidt sendo:

$$q_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj}(\mathbf{x}) q_j(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.24)$$

onde

$$\alpha_{kj}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{x}_I) q_j(\mathbf{x}_I, \mathbf{x})}{\sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) q_j^2(\mathbf{x}_I, \mathbf{x})} \quad (2.25)$$

Aplicando a base ortogonal $q_k(\mathbf{x})$ no triângulo de Pascal, para o caso unidimensional (ver Equação 2.3):

$$\begin{aligned} q_1(\mathbf{x}) &= 1 \\ q_2(\mathbf{x}) &= x - \beta_1(x) \\ q_{j+2}(\mathbf{x}) &= (x - \beta_{j+1}(x)) q_{j+1}(x) - \gamma_j(x) q_j(x); \quad j = (1, 2, \dots, m-2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde:

$$\beta_{j+1}(x) = \frac{\sum_{I=1}^n w_I(x) x_I q_{j+1}^2(x_I, x)}{\sum_{I=1}^n w_I(x) q_{j+1}^2(x_I, x)}; \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-2 \quad (2.27)$$

e

$$\gamma_j(x) = \frac{\sum_{I=1}^n w_I(x) q_{j+1}^2(x_I, x)}{\sum_{I=1}^n w_I(x) q_j^2(x_I, x)}; \quad j = 1, 2, 3, \dots, m-2 \quad (2.28)$$

A condição ortogonal da Equação 2.23 torna \mathbf{A} uma matriz diagonal, assim os parâmetros $a_j(\mathbf{x})$ podem ser obtidos diretamente da Equação 2.18:

$$a_j(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) q_j(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) \hat{u}_i}{b_j(\mathbf{x})} \quad (2.29)$$

onde:

$$b_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) q_j^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) \quad (2.30)$$

Uma vez obtidos os parâmetros $a_j(\mathbf{x})$ para os N pontos pode-se reescrever a Equação 2.29 na Equação 2.23, obtendo4:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) \hat{u}_I \quad (2.31)$$

onde a função de forma φ passa a ser definida por:

$$\varphi_I(\mathbf{x}) = w_I(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^m C_{jI}(\mathbf{x}) \quad (2.32)$$

$$C_{jI}(\mathbf{x}) = \frac{q_j(\mathbf{x}) q_j(\mathbf{x}_I, \mathbf{x})}{b_j(\mathbf{x})} \quad (2.33)$$

As derivadas parciais de $\varphi_I(\mathbf{x})$ podem ser obtidas por:

$$\frac{\partial \varphi_I(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial w_I(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \sum_{j=1}^m C_{jI}(\mathbf{x}) + w_I(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^m \frac{\partial C_{jI}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.34)$$

onde

$$\frac{\partial C_{jI}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\frac{\partial q_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} q_j(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) + q_j(\mathbf{x}) \frac{\partial q_j(\mathbf{x}_I, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial b_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} C_{jI}(\mathbf{x})}{b_j(\mathbf{x})} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial b_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{J=1}^n \left(\frac{\partial w_J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} q_j^2(\mathbf{x}_J, \mathbf{x}) + 2w_J(\mathbf{x}) q_j(\mathbf{x}_J, \mathbf{x}) \frac{\partial q_j(\mathbf{x}_J, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (2.36)$$

Segundo Lu, Belytschko e Gu[12], adotar uma base polinomial ortogonalizada, não só evita a inversão da matriz \mathbf{A} , reduzindo o custo computacional na minimização, mas também, aumenta consideravelmente a precisão da aproximação por MQM (outros trabalhos que também abordam as vantagens de se utilizar o MQMO como método de aproximação [13], [14], [15] e [16]).

3 PROBLEMA DE FLEXÃO DE PLACAS

A abordagem tomada para um problema de flexão de placas depende da sua espessura e grandeza de deflexão. Em placas espessas ocorrerão deformações ocasionadas por esforços cortantes e algumas considerações são necessárias sobre as tensões perpendiculares a superfície média da placa. Já para grandes deflexões perde-se a relação linear entre deformação e deslocamento. Logo, é necessária a avaliação do elemento indeformado e uma reavaliação após a deformação da geometria e propriedades físicas do material.

Em casos de grandes deflexões pode ser aplicada a teoria de Von Kármán [37], que leva em conta a trajetória de equilíbrio estável da placa considerando uma deformação inicial, ocorrida após a flambagem do elemento (pós-flambagem).

No entanto, a análise de placas espessas não pode ser feita pela teoria clássica de Kirchhoff[28], uma vez que não considera as deformações ocorridas por esforços cisalhantes. Assim a teoria de Kirchhoff, também chamada de teoria clássica, se aplica apenas à placas delgadas. Para avaliação de placas moderadamente espessas utiliza-se a teoria de Reissner, que leva em consideração as deformações por esforços cisalhantes.

Neste capítulo será discutido a teoria de Reissner-Mindlin [25] e [26], apresentando seus principais aspectos e evidenciando as equações necessárias para satisfazer as condições de contorno naturais e essenciais, utilizadas no MLPG para obtenção da forma fraca simétrica local, construídas sobre o domínio e contorno da placa.

3.1 INTRODUÇÃO A TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

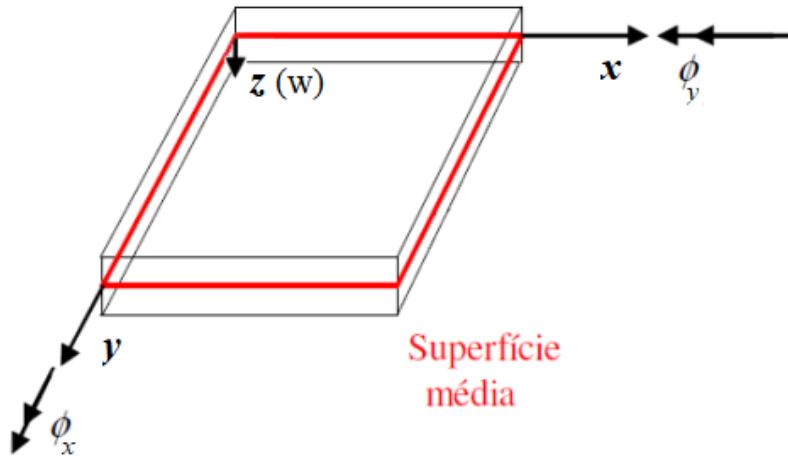
Na teoria de Reissner, as deformações cisalhantes são consideradas através de hipótese inicial, permitindo que uma seção transversal plana, perpendicular a superfície média na posição indeformada, permaneça plana, mas não necessariamente perpendicular a superfície média após a deformação, possibilitando a análise de flexão para placas moderadamente espessas. A teoria baseia-se em um sistema diferencial de sexta ordem que permite o atendimento de três condições de contorno, são elas o deslocamento transversal, rotação no plano normal e rotação no plano tangente.

Dentre as considerações para desenvolvimento da teoria de Reissner, cabe destacar que a espessura deve ser pequena se comparada as demais dimensões, os deslocamentos transversais w também são considerados pequenos comparados à espessura. A placa deve ser constituída de material isotrópico, homogêneo e com comportamento elástico-linear, ou seja, independente das direções consideradas na placa, o material possuirá as mesmas propriedades físicas.

Além disso tomando-se uma reta perpendicular a superfície média da placa esta permanece reta após a deformação, embora não será necessariamente perpendicular a superfície deformada. Considerando um carregamento transversal g aplicado em uma placa de espessura t , nas faces da placa ($z = \pm t/2$) as componentes tangenciais são consideradas nulas isto é, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. As componentes normais na face podem ser dadas por $\sigma_{zz} = \pm g/2$.

A superfície ou plano médio, como mostra a Figura 3, aproxima as duas superfícies planas do elemento, tornando o problema bi-dimensional, onde predominam os esforços de flexão. No modelo as coordenadas x e y coincidem com o plano médio da placa em sua configuração indeformada, com seus deslocamentos transversais u e v respectivamente na direção perpendicular ao plano médio da placa.

FIGURA 3 – Sistema de coordenadas da placa.



Fonte: Konda [39, p. 30], adaptado

Na Figura 3 ϕ_y é a rotação em torno de x , que ocorre no plano yz ; ϕ_x a rotação em torno do eixo y , que ocorre no plano xz e w deslocamento transversal em z .

Agora, tomando a placa em seu estado deformado, a rotação da seção transversal deixa de ser igual a inclinação da superfície média da placa, em função das deformações ocorridas por esforços cisalhantes. Logo, a rotação ϕ_y é dada por:

$$\phi_y = \frac{\partial v}{\partial z} = -w_{,y} + \beta_y^v \quad (3.1)$$

onde que β_y^v é a deformação devido ao esforço cisalhante em y , v é o deslocamento na direção de y e w o deslocamento transversal da placa, na direção de z .

A deformação cisalhante pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta_x^u \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta_y^v \end{aligned} \quad (3.2)$$

ou ainda

$$\beta_x^u = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.3)$$

e

$$\beta_y^v = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.4)$$

A Equação 3.2, Equação 3.3 e Equação 3.4 embora sejam importantes para o entendimento das deformações ocorridas por cisalhamento, não necessitam ser desenvolvidas na teoria de Reissner. Nesta teoria a relação esforços-deslocamentos se manifesta naturalmente, a partir de um funcional definido para a placa, imposto pelas condições de equilíbrio resultantes de uma equação diferencial de sexta ordem.

3.2 RELAÇÃO EQUILÍBRIO-ELASTICIDADE

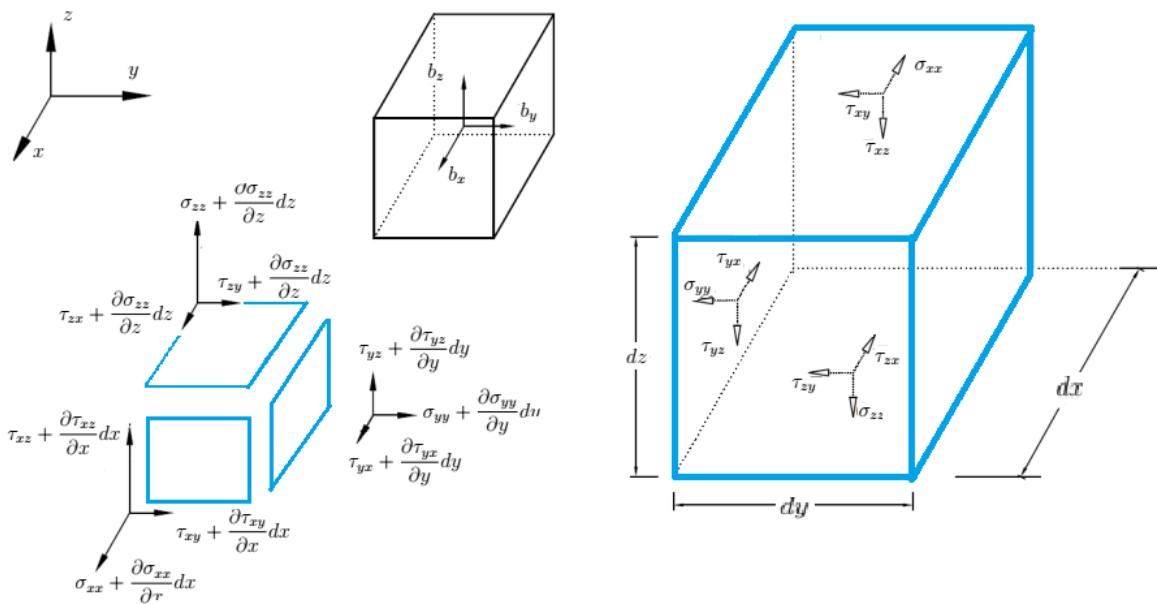
Uma notação semelhante a indicial será empregada para o desenvolvimento da teoria, onde os termos variam segundo as direções x, y, z ao invés de x_1, x_2, x_3 como de costume.

Para obterem-se as relações de equilíbrio e elasticidade, considera-se o elemento de volume infinitesimal dV , como expresso na Figura 4. As tensões atuando nas faces do elemento, onde a componente de tensão σ_{ij} ; $i = j$ e $\tau_{i,j}$; $i \neq j$ com o incremento segundo o eixo $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ são relacionados pelo operador diferencial $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial i}$ e $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial i}$. Onde os índices i, j variam para as direções x, y, z .

Pode-se assim, obter as relações para tensões cisalhantes τ , considerando o equilíbrio de momentos nas direções $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$, sendo:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}; \quad i, j = x, y, z \quad (3.5)$$

FIGURA 4 – Tensões e forças de volume em um volume infinitesimal da placa.



Fonte: Konda [39, p. 32], adaptado

Equilibrando as forças nas direções de x , y e z , obtém-se:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0; \quad i, j = x, y, z \quad (3.6)$$

A Equação 3.6 pode ser escrita de forma não compacta, assumindo a forma:

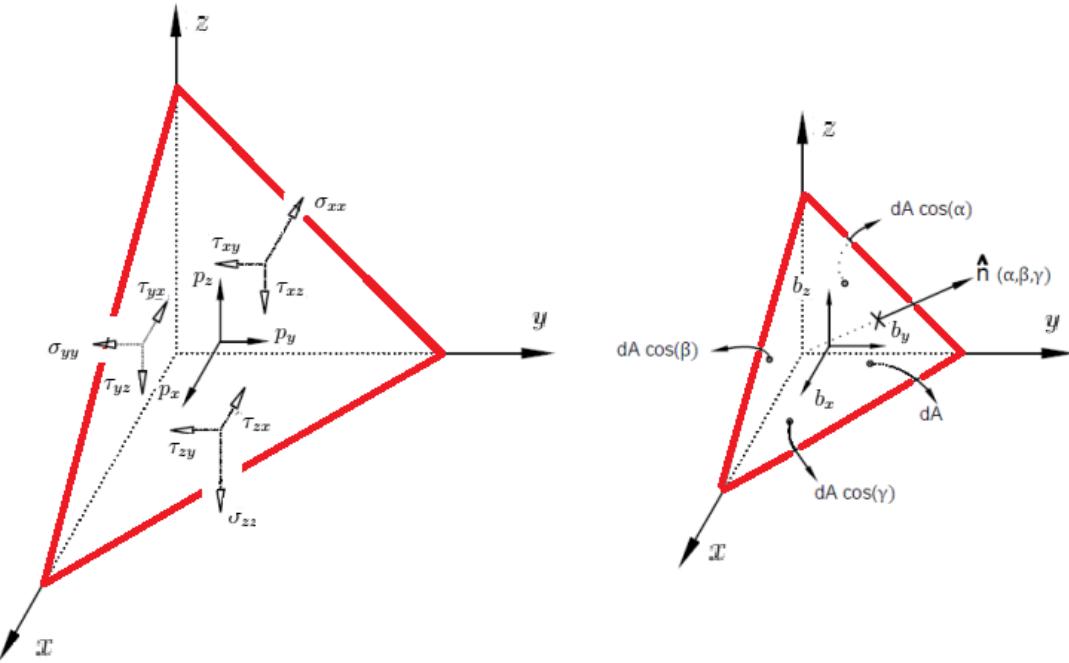
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0; \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde b_x representam as forças de volume na direção $\mathbf{x} = [x, y, z]$, σ são as tensões normais e τ as tensões cisalhantes.

A Equação 3.6 é comumente chamada equação diferencial de equilíbrio e deve ser satisfeita em qualquer ponto do domínio.

Nos pontos de contorno devem-se ainda considerar as forças de superfície.

FIGURA 5 – Tensões e forças de superfície.



Fonte: Konda [39, p. 33], adaptado

Na Figura 5: p_x são forças de superfície por unidade de área na direção de $\mathbf{x} = [x; y; z]$. $n_{\alpha, \beta, \gamma}$ é o versor normal à superfície de contorno, sendo α, β e γ seus cosenos diretores.

A medida que a altura do tetraedro aproxima-se de zero ($dh \rightarrow 0$), as equações de equilíbrio assumem a seguinte forma:

$$\sigma_{ij}n_j = p_x \quad (3.8)$$

A Equação 3.8 pode ser escrita de forma não compacta, assumindo a forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= p_x \\ \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z &= p_y \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z &= p_z \end{aligned} \quad (3.9)$$

A Equação 3.8, chamada Equação de Cauchy deve ser satisfeita em todos os pontos de contorno do corpo, em que n_x são componentes da normal ao contorno que aponta para fora do domínio.

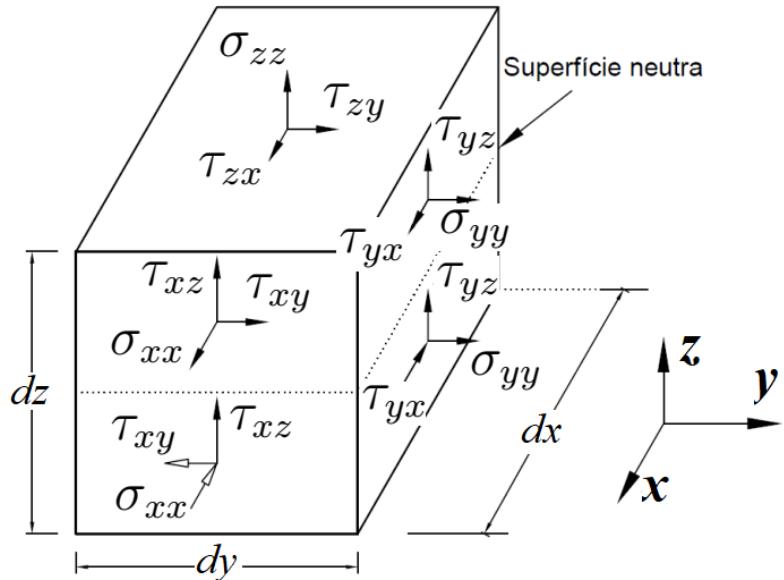
Com a Equação 3.6 e a Equação 3.8 pode-se determinar o estado de tensão para a placa. Assim, partindo-se de pontos onde as componentes de tensão são conhecidas, pode-se determinar a tensão para qualquer orientação e elemento de superfície neste ponto.

3.3 TENSÕES E ESFORÇOS SOLICITANTES NA PLACA

Considerando que a placa esteja submetida a flexão simples como apresentado na Figura 6, os esforços tangenciais externos nas faces e os esforços normais nas bordas do elemento não são considerados, permitindo assim que a superfície neutra se torne coincidente à superfície média da placa.

Para esta situação admite-se uma relação linear entre componentes de tensão e espessura da placa. Integrando as componentes de tensão e multiplicando pelo braço de alavanca, ao longo da espessura, obtém-se resultantes de tensão:

FIGURA 6 – Componentes de tensão de uma placa sujeita a flexão simples.



Fonte: Konda [39, p. 34], adaptado

$$\sigma_{ij} = \frac{M_{ij}}{I} z; \quad i, j = x, y \quad (3.10)$$

onde M é o momento solicitante na seção e I o momento de inércia da seção transversal.

Expressando os esforços por unidade de comprimento obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{12}{t^3} M_{ij} z; \quad i, j = x, y \quad (3.11)$$

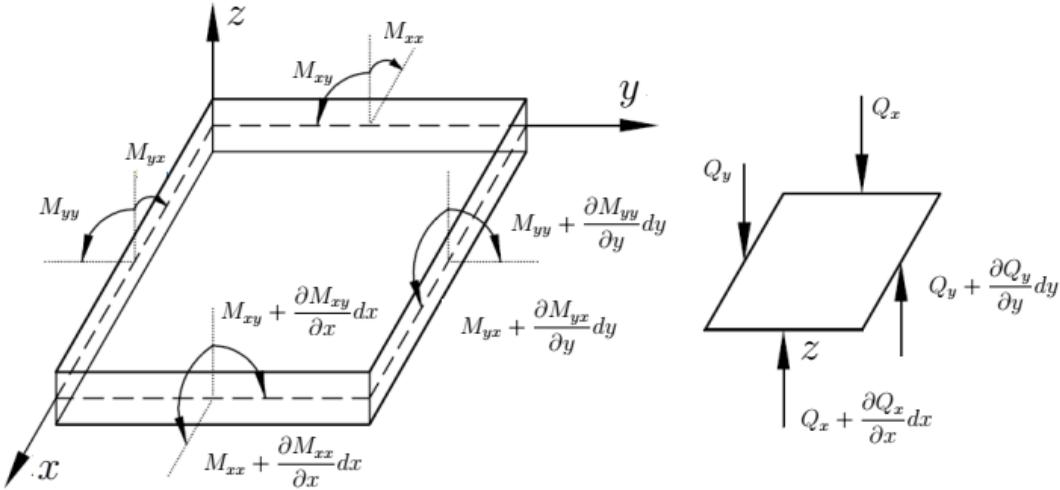
As equações de equilíbrio, no entanto, são representadas por sua resultante, dadas pelo momento fletor e esforço cortante na superfície média da placa, como mostrado na Figura 7. Para flexão simples, tem-se uma variação linear de esforços na espessura da placa, podem-se obter os momentos fletores por meio da integral pela espessura, onde considera-se a força elementar ($dF = \sigma dA$) correspondente a uma área elementar de largura unitária na direção normal ($dA = 1 \cdot dz$), multiplicada pelo braço de momento, assim:

$$M_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ij} \cdot 1 \cdot z dz; \quad i, j = x, y \quad (3.12)$$

E para os esforços cortantes:

$$Q_i = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ij} \cdot 1 dz; \quad i, j = x, y \quad (3.13)$$

FIGURA 7 – Esforços resultantes de momento fletor e esforço cortante na placa.



Fonte: Konda [39, p. 35], adaptado

Sendo g um carregamento distribuído sobre a placa, ao impor as condições de equilíbrio de forças verticais e momentos em torno de x e y , obtém-se:

$$Q_{i,i} + g = 0; \quad i, j = x, y \quad (3.14)$$

e

$$M_{ij,i} - Q_j = 0; \quad i, j = x, y \quad (3.15)$$

As condições de equilíbrio (Equação 3.14 e Equação 3.15) são o ponto de partida para o desenvolvimento do método local de aproximação a ser utilizado para representar o problema de flexão de placas, para isso as condições de equilíbrio devem ser satisfeitas à cada ponto da placa.

Agora, para a direção z , desprezando-se as forças de volume e utilizando a Equação 3.15, pode-se substituir a Equação 3.12 na Equação 3.6 obtendo assim, as tensões na direção z :

$$\frac{12}{t^3} Q_{iz} z + \frac{\partial \tau_{iz}}{\partial z} = 0; \quad i = x, y \quad (3.16)$$

Integrando a Equação 3.16 em z pode-se determinar as tensões para τ_{xz} e τ_{yz} , no qual:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \\ \tau_{yz} &= \frac{3Q_y}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Considerando a Equação 3.14 pode-se determinar a componente σ_{zz} substituindo a Equação 3.17 na Equação 3.6:

$$\sigma_{zz} = \frac{gz}{2t} \left[3 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \quad (3.18)$$

Observa-se, no entanto, um comportamento de terceiro e segundo grau na direção de z . Assim, a variação de tensões na espessura da placa, será obrigatoriamente não linear.

3.4 RELAÇÃO DESLOCAMENTO-DEFORMAÇÃO

Podem-se definir os deslocamentos generalizados ϕ_x , ϕ_y e w na superfície média da placa, enquanto para os demais pontos ao longo da espessura da placa são representados por u , v e w para as direções x , y e z respectivamente, sendo $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

Segundo o princípio de conservação de energia o trabalho realizado por uma componente de tensão deve ser igual ao trabalho realizado pela resultante dessa tensão logo, obtém-se o seguinte sistema:

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ij} \mathbf{u} dz = M_{ij} \phi_j \quad (3.19)$$

e

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \tau_{iz} w dz = Q_i w \quad (3.20)$$

Assim, pode-se obter a relação entre os deslocamentos generalizados e deformações, substituindo a Equação 3.11 na Equação 3.19, e a Equação 3.17 na Equação 3.20:

$$\phi_x = \frac{12}{t^3} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} u z dz \quad (3.21)$$

$$\phi_y = \frac{12}{t^3} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} v z dz \quad (3.22)$$

e

$$w = \frac{3}{2t} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} w \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \quad (3.23)$$

3.5 RELAÇÃO ESFORÇOS-DESLOCAMENTOS

A teoria de Reissner considera que a energia potencial total na placa é estacionária para se obter as condições de equilíbrio. Partindo de uma estrutura deformada até a situação em que a placa está sem carregamento pode-se medir a energia potencial total da placa, sendo o trabalho realizado pelos esforços atuantes na estrutura, que compreendem tanto solicitações externas quanto internas.

A energia de deformação (U_{EI}) é a energia de deformação relacionada aos esforços internos, definida por:

$$U_{EI} = \int_V U_0 dV \quad (3.24)$$

sendo U_0 a energia de deformação específica e V o volume.

Para material isotrópico, elástico-linear e em regime de pequenas deformações U_0 é dado por:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \tau_{xy} \epsilon_{xy} + \tau_{xz} \epsilon_{xz} + \tau_{yz} \epsilon_{yz}) \quad (3.25)$$

Já o trabalho realizado pelos esforços externos é dado pela energia potencial das solicitações externas:

$$U_{EE} = - \int_V b_i u_i dV - \int_A p_i u_i dA; \quad i = x, y, z \quad (3.26)$$

onde u_i são deslocamentos correspondentes a cada uma das forças p_i .

A energia potencial total pode ser definida pelo funcional de energia:

$$\pi = U_{EI} + U_{EE} \quad (3.27)$$

onde os parâmetros U_{EI} e U_{EE} são dados em termos dos deslocamentos $\mathbf{u} = (u, v, w)$, o que produz o funcional para o princípio da energia potencial mínima:

$$\pi = U_{EI} - \int_V \bar{b}_i u_i dV - \int_{A_t} \bar{p}_i u_i dA; \quad i = x, y, z \quad (3.28)$$

onde A_t representa a superfície de contorno da estrutura com força prescrita.

Colocando-se os parâmetros U_{EI} e U_{EE} em termos de tensões, pode-se obter o funcional para o princípio da energia complementar mínima é :

$$\pi_c = U_{EI}^* - \int_{A_u} p_i \bar{u}_i dA; \quad i = x, y, z \quad (3.29)$$

em que U_{EI}^* é a energia de deformação complementar e S_u representa a parcela do contorno da estrutura com deslocamento prescrito.

O princípio de Hellinger-Reissner, define um funcional de energia híbrido, escrito em termos de tensões e deformações. Embora o princípio seja obtido da energia complementar mínima, não apresenta tal característica podendo assim, ser considerado um princípio estacionário.

Desconsiderando as forças de volume, pode-se expressar o funcional híbrido de Hellinger-Reissner por:

$$\pi_R = -U_{EI}^* - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} u_i dV + \int_{A_t} (p_i - \bar{p}_i) u_i dA; \quad i, j = x, y, z \quad (3.30)$$

onde as tensões $\sigma_{ij,j}$, os deslocamentos u_i e as forças de superfície p_i podem assumir valores quaisquer, com a possibilidade de variação simultânea. Já a relação tensão-deformação são restrições variacionais.

Na teoria de Reissner considera-se que o material da placa é isotrópico, de comportamento elástico linear e apresenta de pequenas deformações. Com uma aplicação lenta e gradual das solicitações. Pode-se considerar, portanto, que a energia de deformação complementar U_{EI}^* seja igual a energia de deformação U_{EI} .

Logo, para se escrever U_{EI}^* apenas em função das componentes de tensão, são utilizadas as seguintes relações entre tensão e deformação, para um dado material com comportamento elástico linear:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij}; \quad i, j, k = x, y, z \quad (3.31)$$

e

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right); \quad i, j, k = x, y, z \quad (3.32)$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν o coeficiente de Poisson e G o módulo de elasticidade transversal definido por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.33)$$

A energia complementar, partindo da Equação 3.24, Equação 3.25, Equação 3.32, Equação 3.33, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} U_{EI}^* = \frac{1}{2E} \int_V & [\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}\sigma_{yy}\sigma_{zz}) \\ & + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] dV \end{aligned} \quad (3.34)$$

O funcional π_R deve ser escrito apenas em função dos esforços e deslocamentos generalizados para obter as relações esforços-deslocamentos. Logo a Equação 3.11 e a Equação 3.17 são substituídas na Equação 3.34. Integrando ao longo da espessura da placa ($dV = dzd\Omega$)

$$\begin{aligned} U_{EI}^* = & \frac{1}{2E} \int_{\Omega} \frac{12}{t^3} [(M_{xx} + M_{yy})^2 + 2(1+\nu)(M_{xy}^2 + M_{xx}\sigma_{yy}) \\ & + \frac{1+\nu}{5} t^2 (Q_x^2 + Q_y^2) - \frac{\nu t^2}{5} g(M_{xx} + M_{yy}) + \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{zz}^2 dz] d\Omega \end{aligned} \quad (3.35)$$

Considerando:

$$dV = dzd\Omega \quad (3.36)$$

e

$$dA = dzd\Gamma \quad (3.37)$$

pode-se reescrever o funcional de energia potencial em função dos esforços na superfície média e substituir por deslocamentos generalizados. Assim, o funcional fica em função apenas dos esforços solicitantes M_{xx}, M_{xy}, M_{yy} , Q_x, Q_y e dos deslocamentos generalizados ϕ_x, ϕ_y e w .

Aplicando o teorema de Green, aos termos que sofrem variação, e assumindo valores quaisquer para os esforços solicitantes no contorno, a relação entre esforços e deslocamentos generalizados é dada por:

$$M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\phi_{ij} + \phi_{ji} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{k,k} \delta_{ij} \right) + \frac{\nu g}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{ij}; \quad i, j, k = x, y, z \quad (3.38)$$

e

$$Q_i = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_i + w_{,i}); \quad i = x, y, z \quad (3.39)$$

onde D é o módulo de rigidez à flexão da placa

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.40)$$

e λ uma constante que assume o valor

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{t} \quad (3.41)$$

Para uma descrição mais detalhada, quanto a obtenção do funcional de energia, consulte [39, pp. 15–23].

3.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Na teoria de Reissner podem-se obter para cada ponto de contorno um conjunto de seis variáveis, que podem estar na direção normal n ou tangencial s onde basicamente partindo de um deslocamento conhecido em um ponto do contorno, pode-se obter um esforço correspondente, ou também, obter um deslocamento a partir de um esforço conhecido. As variáveis generalizadas, são apresentadas da seguinte forma:

$$U_x = \phi_n \quad (3.42)$$

$$U_y = \phi_s \quad (3.43)$$

$$U_z = w \quad (3.44)$$

$$P_x = M_n \quad (3.45)$$

$$P_y = M_{ns} \quad (3.46)$$

$$P_z = Q_n \quad (3.47)$$

onde $P_i(i = x, y, z)$ é o esforço conhecido em um ponto do contorno associado a um deslocamento U_i , ou vice-versa.

Quanto as restrições impostas ao problema de flexão de placas, esta depende das condições de apoio do elemento, podendo ser:

- Borda Livre

Para o caso da borda livre o elemento está livre para se movimentar, isto é, não há reações e consequentemente, os esforços solicitantes são inexistentes. Logo, os deslocamentos tornam-se as incógnitas do problema.

$$M_n = M_{ns} = Q_n = 0 \quad (3.48)$$

- Borda Engastada

Para uma situação de engastamento, tem-se o oposto ao caso da borda livre, uma vez engastada a borda fica impossibilitada de qualquer deslocamento ou rotação o que torna nulo os deslocamentos e consequentemente podem-se tomar os esforços solicitantes como incógnitas;

$$\phi_n = \phi_s = w = 0 \quad (3.49)$$

- Borda Simplesmente Apoiada

Para uma borda simplesmente apoiada são necessárias algumas considerações, no entanto para simplificação dos cálculos pode-se assumir duas condições para este caso;

- *Soft Condition*

Trata-se de uma condição não restritiva onde as variáveis w , M_n e M_{ns} possuem valores conhecidos, geralmente tomados como nulos, isto é, as bordas da placa podem rotacionar tanto na direção normal quanto tangencial, sendo assim:

$$M_n = M_{ns} = w = 0 \quad (3.50)$$

- *Hard Condition*

Condição restritiva, comumente utilizada na teoria clássica de Kirchhoff, onde o deslocamento w a rotação tangencial ϕ_s e momento normal M_n são variáveis de valores conhecidos, enquanto na direção normal a borda é livre para rotacionar, na direção tangencial, em função da continuidade do elemento, a borda apresenta um comportamento semelhante a um engastamento gerando um momento tangencial M_{ns} desconhecido, geralmente assume-se;

$$M_n = \phi_s = w = 0 \quad (3.51)$$

4 MÉTODO LOCAL SEM MALHAS PETROV-GALERKIN

O Método Local de Petrov-Galerkin (MLPG) é desenvolvido utilizando a forma fraca simétrica local. Diferentes abordagens podem ser adotadas para o MLPG, que dependem basicamente da escolha da funções de peso e aproximação, e também para a ponderação além da escolha do tamanho e do formato do domínio de suporte.

Neste capítulo será apresentado o MLPG, assim como, o sistema de equações discretizado, comumente chamado de Forma Fraca Simétrica Local (FFSL) e o método da penalidade.

4.1 FORMA FRACA SIMÉTRICA LOCAL

Considerando uma placa moderadamente espessa, onde na superfície média o domínio dado por Ω e o contorno (bordas da placa) por Γ , pode-se expressar a seguinte equação de equilíbrio para os esforços solicitantes:

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial j} - Q_i + m_i = 0; \quad i, j = x, y \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial i} + g = 0; \quad i = x, y \quad (4.2)$$

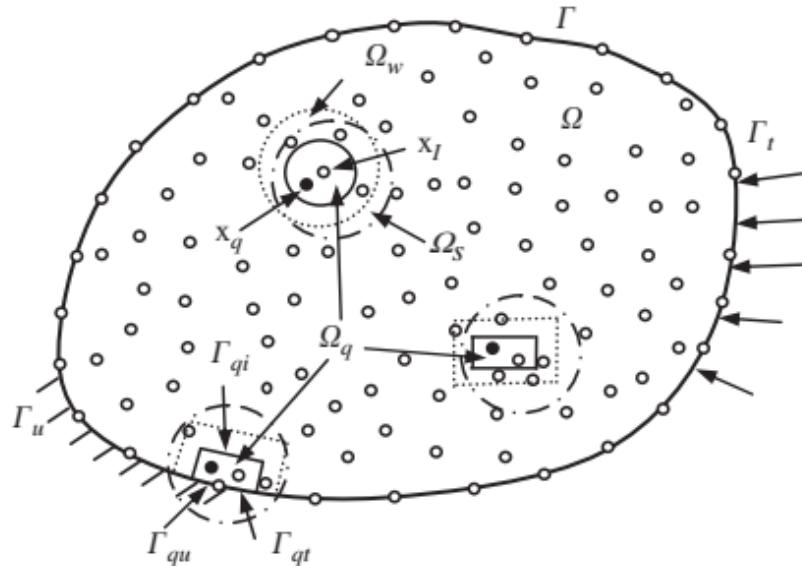
Aplicando o método dos resíduos ponderados na Equação 4.2 para um subdomínio local Ω_q , tem-se:

$$\int_{\Omega_q} W_I \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial j} - Q_i + m_i \right) d\Omega = 0; \quad i, j = x, y \quad (4.3)$$

onde W_I é a função de ponderação centrada em I .

O domínio Ω deve ser totalmente coberto pelos subdomínios Ω_q , permitindo-se a sobreposição. A Figura 8 ilustra um domínio de quadratura na superfície média da placa, onde Ω_w é o domínio da função de ponderação, Ω_q o domínio de quadratura e Ω_s o subdomínio local ou domínio de suporte.

FIGURA 8 – Domínio de quadratura na superfície média da placa



Fonte: Zhu, Zhang e Atluri [40, p. 3]

Utilizando o teorema da divergência, técnica de integração por partes, obtém-se:

$$\int_{\Omega_q} \frac{\partial W_I}{\partial j} M_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_q} W_I M_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I (Q_i - m_i) d\Omega = 0; \quad i, j = x, y \quad (4.4)$$

ou de forma matricial:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_q} \begin{bmatrix} W_{I,x} & 0 & W_{I,y} \\ 0 & W_{I,y} & W_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Gamma_q} W_I \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} d\Gamma \\ & + \int_{\Omega_q} W_I \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega_q} W_I \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ g \end{Bmatrix} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

De maneira análoga, para a Equação 4.2, aplicando o método dos resíduos ponderados e o teorema da divergência, obtém-se:

$$\int_{\Omega_q} [W_{I,x} \quad W_{I,y}] \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Gamma_q} W_I [n_x \quad n_y] \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I g d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

Combinando a Equação 4.5 e a Equação 4.6 pode-se escrever:

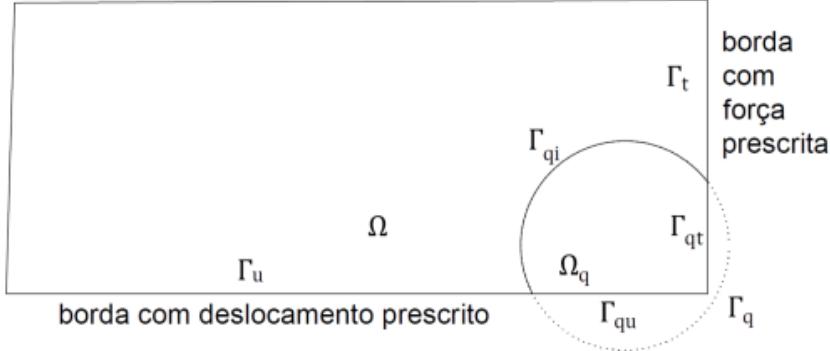
$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_q} \begin{bmatrix} W_{I,x} & 0 & W_{I,y} \\ 0 & W_{I,y} & W_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega_q} \begin{bmatrix} w_I & 0 \\ 0 & w_I \\ W_{I,x} & W_{I,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma_q} W_I \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma_q} W_I \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega_q} W_I \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ g \end{Bmatrix} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para o sistema obtido na Equação 4.7, o contorno (Γ_q) do subdomínio Ω_q , é composto por três parcelas, o contorno interno Γ_{qi} , contorno externo com deslocamentos generalizados prescritos Γ_{qu} e o contorno externo com esforços generalizados prescritos Γ_{qt} . Equacionando essas parcelas, obtém-se:

$$\begin{cases} \Gamma_q = \Gamma_{qi} \cup \Gamma_{qu} \cup \Gamma_{qt} \\ \Gamma_{qu} = \Gamma_q \cap \Gamma_u \\ \Gamma_{qt} = \Gamma_q \cap \Gamma_t \end{cases} \quad (4.8)$$

onde Γ_t é o contorno de uma placa com força prescrita e Γ_u o contorno de uma placa com deslocamento prescrito. Os tipos de contorno podem ser melhor visualizados na Figura 9.

FIGURA 9 – Esquema dos tipos de Contorno



Fonte: Konda [39, p. 42]

Para casos em que não são conhecidas as condições de contorno internas a solução da Equação 4.7 pode-se tornar bastante complexa. Assim, é interessante escolher uma função de ponderação que assuma um valor nulo para as bordas internas da placa (Γ_{qi}), o que faz com que a integral de contorno interno desapareça, no entanto a função definida para W_I deve ser avaliada pela norma euclideana entre o ponto base e o ponto campo. Uma norma euclideana pode ser obtida por:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|_2 = \sqrt{\sum_{I=1}^n |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|^2}$$

Pode-se reescrever a Equação 4.7, expandindo-se o contorno Γ_q , que assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_q} \begin{bmatrix} W_{I,x} & 0 & W_{I,y} \\ 0 & W_{I,y} & W_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega_q} \begin{bmatrix} w_I & 0 \\ 0 & w_I \\ W_{I,x} & W_{I,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} d\Omega \\
 & - \int_{\Gamma_{qu}} W_I \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} W_I \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma_{qt}} W_I \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_{xy} \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} W_I \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_x \\ \bar{Q}_y \end{Bmatrix} d\Gamma \\
 & - \int_{\Omega_q} W_I \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ g \end{Bmatrix} d\Omega = 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde podem-se definir os seguintes termos, a fim de obter uma equação simplificada:

$$\mathbf{V}_{fI} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W_I}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial W_I}{\partial y} & \frac{\partial W_I}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{V}_{sI} = \begin{bmatrix} W_I & 0 & \frac{\partial W_I}{\partial x} \\ 0 & W_I & \frac{\partial W_I}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{n}_f = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{n}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f^T = [M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy}] \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s^T = [Q_x \quad Q_y] \quad (4.16)$$

$$\mathbf{g}^T = [g \quad 0 \quad 0] \quad (4.17)$$

Logo, substituindo os termos (Equação 4.10 a 4.17) no sistema dado pela Equação 4.9, pode-se escrever a equação de equilíbrio (Equação 4.1 e Equação 4.2) apresentadas no início da seção, na forma fraca matricial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \boldsymbol{\sigma}_f d\Omega + \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{sI}^T \boldsymbol{\sigma}_s d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \boldsymbol{\sigma}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f d\Gamma - \\ - \int_{\Omega_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \boldsymbol{\sigma}_s d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s d\Gamma \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.2 SISTEMA DE EQUAÇÕES DISCRETIZADO

Para discretização do problema é feita uma distribuição preliminar dos pontos, deve-se ainda atentar-se à regiões que necessitem de mais detalhes colocando mais pontos.

Uma vez que a aproximação MQMO, tal como o MLPG, são métodos sem malhas, o conjunto de pontos que compõem o elemento não apresentam nenhuma conectividade.

O domínio do problema é dado por Ω e contorno por Γ , além disso, à cada ponto utilizado na modelagem do problema, é associado um subdomínio local Ω_q . Para discretização representam-se os deslocamentos generalizados através de valores nodais, sendo necessária realizar uma aproximação desses valores, que será feita pelo método de MQMO.

Como os deslocamentos são desconhecidos nos pontos avalizados, a solução do problema resultará na obtenção de valores fictícios, ou seja, sem sentido físico. A solução aproximada do problema é obtida com a utilização da função de forma sobre os valores fictícios. Logo, para um ponto x_q qualquer pode-se escrever:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_q) = \varphi_{\mathbf{x}_q} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}_q} \quad (4.19)$$

de forma matricial:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_q) &= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}_x(\mathbf{x}_q) \\ \tilde{\phi}_y(\mathbf{x}_q) \\ \tilde{w}(\mathbf{x}_q) \end{array} \right\} \\ &= \left[\begin{array}{ccccccc} \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 & \cdots & \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) & \cdots & 0 & 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^1) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^1) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_q^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^N) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^N) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_q^N) \end{array} \right\} \quad (4.20)\end{aligned}$$

onde N é o número de pontos do subdomínio local do ponto \mathbf{x}_q , $\hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^j)$, $\hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^j)$ e $\hat{w}(\mathbf{x}_q^j)$ os deslocamentos generalizados fictícios no j -ésimo ponto do domínio de suporte Ω_q , $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_q)$ é o valor aproximado de \mathbf{u} no ponto \mathbf{x}_q e $\varphi_i(\mathbf{x}_q)$ o i -ésimo termo da função de aproximação no ponto \mathbf{x}_q .

Para o desenvolvimento da forma fraca das equações de equilíbrio, os deslocamentos generalizados devem ser as únicas incógnitas envolvidas para a solução do problema de placas. Logo as relações esforços-deslocamentos apresentadas na Equação 3.38 e na Equação 3.39 podem ser descritas pela seguinte :

$$\boldsymbol{\sigma}_f = D_f \boldsymbol{\epsilon}_f + \mathbf{R} \quad (4.21)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}_s = D_s \boldsymbol{\epsilon}_s \quad (4.22)$$

onde os operadores matriciais são dados por :

$$D_f = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$D_s = D \begin{bmatrix} \frac{5Et}{12(1+\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{5Et}{12(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{R} = q \begin{bmatrix} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \\ \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \begin{bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

A fim de simplificar as equações de equilíbrio obtidas para forma fraca, podem-se escrever os seguintes operadores:

$$\mathfrak{B}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathfrak{B}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

e assim, a Equação 4.26 e a Equação 4.27 tomam a seguinte forma :

$$\epsilon_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\epsilon_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

escrevendo os deslocamentos obtidos, para um ponto de quadratura qualquer (\mathbf{x}_q), em função dos valores nodais fictícios tem-se :

$$\epsilon_f(\mathbf{x}_q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^1) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^1) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_q^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^N) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^N) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_q^N) \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\epsilon_s(\mathbf{x}_q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^1) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^1) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_q^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^N) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^N) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_q^N) \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Escrevendo a Equação 4.32 e a Equação 4.33 na forma compacta, tem-se:

$$\epsilon_f(\mathbf{x}_q) = \mathfrak{B}_f \varphi_{\mathbf{x}_q} \hat{u}_{\mathbf{x}_q} \quad (4.34)$$

e

$$\epsilon_s(\mathbf{x}_q) = \mathfrak{B}_s \varphi_{\mathbf{x}_q} \hat{u}_{\mathbf{x}_q} \quad (4.35)$$

Substituindo a Equação 4.34 na Equação 4.21 e a Equação 4.35 na Equação 4.22 obtém-se:

$$\sigma_f(\mathbf{x}_q) = D_f \mathfrak{B}_f \varphi_{\mathbf{x}_q} \hat{u}_{\mathbf{x}_q} + R \quad (4.36)$$

e

$$\sigma_s(x_q) = D_s \mathfrak{B}_s \varphi_{x_q} \hat{u}_{x_q} \quad (4.37)$$

Logo, para determinar a equação na forma fraca generalizada basta substituir a Equação 4.36 e a Equação 4.37 na Equação 4.18 :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \mathbf{D}_f \mathfrak{B}_f \varphi \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \mathbf{R} d\Omega + \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{sI}^T \mathbf{D}_s \mathfrak{B}_s \varphi \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \mathbf{D}_f \mathfrak{B}_f \varphi \hat{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \mathbf{R} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \bar{\sigma}_f d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \mathbf{D}_s \mathfrak{B}_s \varphi \hat{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \bar{\sigma}_s d\Gamma - \int_{\Omega_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{g} d\Omega \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde a matriz φ e o vetor \mathbf{u} estão generalizados.

Tomando \mathbf{k}_I como uma matriz de rigidez nodal relacionada ao nó I , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_I = & \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \mathbf{D}_f \mathfrak{B}_f \varphi d\Omega + \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{sI}^T \mathbf{D}_s \mathfrak{B}_s \varphi d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \mathbf{D}_f \mathfrak{B}_f \varphi d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \mathbf{D}_s \mathfrak{B}_s \varphi d\Gamma \end{aligned} \quad (4.39)$$

associando a matriz de rigidez \mathbf{k}_I ao vetor deslocamento $\hat{\mathbf{u}}_I$, com os pontos utilizados para aproximar as variáveis no subdomínio de integração, em que I é o ponto base. Pode-se obter o vetor de cargas nodal \mathbf{f}_I associado ao campo do nó I , expresso por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_I = & \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \mathbf{R} d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \mathbf{R} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \bar{\sigma}_f d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \bar{\sigma}_s d\Gamma - \int_{\Omega_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{g} d\Omega \end{aligned} \quad (4.40)$$

logo, substituindo a matriz de rigidez (Equação 4.39) e o vetor de cargas (Equação 4.40) na Equação 4.38, obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\mathbf{k}_I \hat{\mathbf{u}}_I = \mathbf{f}_I \quad (4.41)$$

Ao escrever a Equação 4.38 para todos os pontos que compõem o domínio e contorno, forma-se um novo sistema linear, que envolve o deslocamento de todos os pontos.

De maneira análoga à Equação 4.41, pode-se expressar:

$$\mathbf{K}_{(3N_T \times 3N_T)} \hat{\mathbf{U}}_{(3N_T \times 1)} = \mathbf{F}_{(3N_T \times 1)} \quad (4.42)$$

em que N_T representa o número total de pontos utilizados para discretização do problema.

A solução da Equação 4.42 permite determinar $\hat{\mathbf{U}}$. Logo, obtém-se $\hat{\mathbf{u}}$ que possibilita aproximar os deslocamentos em qualquer ponto do domínio ou contorno do problema através da Equação 4.19 obtida pelo MQMO. A Equação 4.42 representa o sistema global de equações do MLPG para o problema de flexão de placas de Reissner.

4.3 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS

As CCEs, ou condições de contorno de Dirichlet, não se manifestam naturalmente na formulação de placas, necessitando de tratamento especial. Assim, para imposição das CCEs pode-se utilizar duas abordagens distintas descritas nesta seção:

4.3.1 Método da Interpolação Direta

No MLPG tem-se três deslocamentos impostos para cada ponto, ϕ_x, ϕ_y e w , com o sistema de equações construído nó por nó, cada conjunto de três linhas na matriz de rigidez global representa um ponto de discretização. Logo, uma função de aproximação pode ser aplicada diretamente na matriz de rigidez global, permitindo que o vetor de forças nodais seja modificado para atender ao valor prescrito. O método é portanto conhecido como método da interpolação direta, ou método da colocação.

Para imposição das CCEs, considere um nó $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I)^T$ com as três CCEs prescritas, dados pela seguinte equação:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) = \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_x(\mathbf{x}_I) \\ \bar{\phi}_y(\mathbf{x}_I) \\ \bar{w}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

onde a variável \mathbf{u} já é previamente conhecida para o nó (\mathbf{x}_I) .

Para se escreverem os valores prescritos em função dos valores nodais fictícios da própria variável nos pontos vizinhos pertencentes ao subdomínio do ponto \mathbf{x}_I . Utilizando a Equação 4.4 deseja-se encontrar a solução prepositiva aproximada, que seja igual ao valor de $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I)$. Logo,

$$\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_x(\mathbf{x}_I) \\ \bar{\phi}_y(\mathbf{x}_I) \\ \bar{w}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}_I) & 0 & 0 & \cdots & \varphi_{NP}(\mathbf{x}_I) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_I) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_{NP}(\mathbf{x}_I) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_I) & \cdots & 0 & 0 & \varphi_{NP}(\mathbf{x}_I) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_I^1) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_I^1) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_I^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_I^{NP}) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_I^{NP}) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_I^{NP}) \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

ou de simplesmente:

$$\varphi_{\mathbf{x}_I} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}_I} = \bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{x}_I} \quad (4.45)$$

Pode-se substituir a Equação 4.45 na Equação 4.41, para a montagem do sistema global de equações lineares, uma vez que possuem exatamente a mesma forma. Obtendo assim as condições de contorno de Dirichlet, ou CCEs.

Generalizando, para o caso onde o ponto \mathbf{x}_I não possua as três CCE's prescritas, a Equação 4.45 é utilizada de forma associada com a Equação 4.41, onde é substituída uma quantidade de equações equivalente ao número de prescrições de Dirichlet.

Neste trabalho, foi usado o método da interpolação direta para imposição das CCEs, uma vez que o método da penalidade degradou a matriz de rigidez, não produzindo resultados satisfatórios. Mais informações sobre como foi utilizado o método podem ser vistas em [39, pp. 49–51].

4.3.2 Método das Penalidades

As CCEs podem ser impostas através do método dos resíduos ponderados e da utilização de um parâmetro de penalidade, caracterizando o método das penalidades, que é incorporado à formulação após a obtenção da forma fraca das equações de equilíbrio.

Considerando que a solução propositiva $\tilde{\mathbf{u}}$ seja suficientemente próxima dos valores prescritos $\bar{\mathbf{u}}$ no ponto I , tem-se:

$$\tilde{\mathbf{u}}(I) = \bar{\mathbf{u}}(I) \quad (4.46)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados à Equação 4.46

$$\int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{\mathbf{u}}(I) - \bar{\mathbf{u}}(I)) W_I d\Gamma = 0 \quad (4.47)$$

A fim de limitar a violação das restrições individuais da Equação 4.47 multiplica-se a equação por um número muito grande (da ordem de 10^8 a 10^{20}), que é o parâmetro de penalidade(PP) . Se o PP é muito pequeno as restrições individuais podem ser violadas. Já para PP, de ordem demasiadamente grande, ocorre uma degradação dos resultados.

Aplicando os deslocamentos generalizados na Equação 4.47 e multiplicando pelo parâmetro de penalidade α_p , obtém-se:

$$\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{\phi}_x(I) - \bar{\phi}_x(I)) W_I d\Gamma = 0 \quad (4.48)$$

$$\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{\phi}_y(I) - \bar{\phi}_y(I)) W_I d\Gamma = 0 \quad (4.49)$$

$$\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{w}(I) - \bar{w}(I)) W_I d\Gamma = 0 \quad (4.50)$$

sendo W_I a função de ponderação, centrada em I , α_p o parâmetro de penalidade e Γ_{qu} a borda com deslocamento prescrito.

Escrevendo os deslocamentos $\tilde{\phi}_x, \tilde{\phi}_y$ e \tilde{w} em função dos valores fictícios $\hat{\mathbf{u}}$, nos pontos do domínio de suporte de I , e agrupando a Equação 4.48, Equação 4.49 e Equação 4.50 obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} & \left[\begin{matrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^1) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^1) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_q^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_x(\mathbf{x}_q^N) \\ \hat{\phi}_y(\mathbf{x}_q^N) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_q^N) \end{Bmatrix} d\Gamma \\ & - \alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} \left[\begin{matrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_x \\ \bar{\phi}_y \\ \bar{w} \end{Bmatrix} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Assim, pode-se obter o MLPG para o problema de flexão de placas espessas, com o método das penalidades aplicado ao sistema de equações locais, para impor as CCEs. Reescrevendo a Equação 4.38 incluindo o método das penalidades, combinando a Equação 4.51 e a Equação 4.38 , tem-se:

$$\mathbf{k}_I^{\alpha_p} = \alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} \left[\begin{matrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(\mathbf{x}_q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(\mathbf{x}_q) \end{bmatrix}^T d\Gamma \quad (4.52)$$

e

$$\mathbf{f}_I^{\alpha_p} = -\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} \left[\begin{matrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_x \\ \bar{\phi}_y \\ \bar{w} \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (4.53)$$

sendo $\mathbf{k}_I^{\alpha_p}$ a contribuição na matriz de rigidez local e $\mathbf{f}_I^{\alpha_p}$ contribuição no vetor de forças nodais local.

4.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

O processo de quadratura de Gauss-Legendre é desenvolvido tomando n pontos de quadratura para avaliação da integral de $f(\mathbf{x})$, sendo representado por:

$$\int_{-1}^1 f(\mathbf{x}) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(\mathbf{x}_i) \quad (4.54)$$

onde x_i é a abscissa do ponto e w_i a ponderação correlacionada.

No entanto o processo só pode ser aplicado se o intervalo de integração estiver definido entre -1 e 1 , para isso utilizam-se algumas transformações de coordenadas às integrais de formulação do MLPG (Equação 4.38 e Equação 4.51) e assim, o problema de flexão de placas pode ser resolvido.

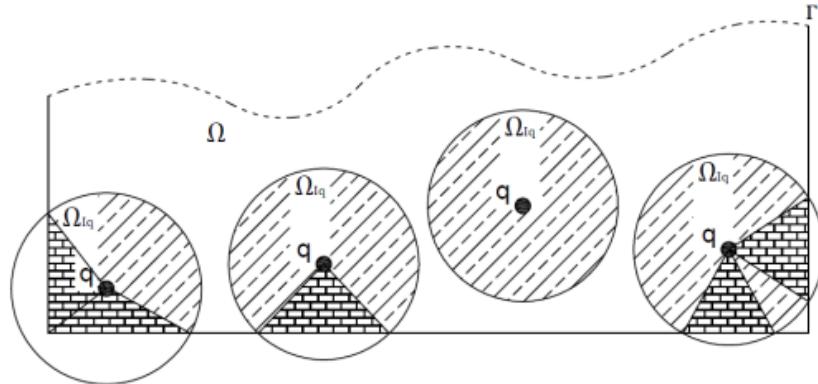
Para a aplicação do MLPG, não há restrições para o formato dos domínios de integração, que podem ou não se sobrepor, desde que haja a cobertura de toda a placa.

Embora possa se adotar qualquer formato para o subdomínio, a fim de preservar a característica local do método, evitam-se domínios demasiadamente grandes. Logo, o tamanho do domínio é escrito em função do espaçamento entre os pontos, já que quanto mais a placa é refinada maior torna-se o número de pontos, consequentemente menor o tamanho dos subdomínios de integração, mantendo a característica local do MLPG.

4.4.1 Transformação de Coordenadas para Discretização de Gauss-Legendre

Ao subdividir-se a placa Ω em subdomínios locais Ω_{Iq} , com parcelas de formatos circulares e triangulares, observando a Figura 10 há a ocorrência de quatro casos distintos. Sendo q o ponto base, seu domínio de integração Ω_{Iq} , de raio R_q , centrado nas coordenadas $(x_q; y_q)$.

FIGURA 10 – Possíveis Posições para um domínio de suporte



Fonte: Konda [39, p. 54]

Para parcela Ω_{Iq} de formato circular, escrevendo uma coordenada qualquer $(x; y)$ em função de r e θ , esta transforma-se em uma coordenada polar, logo:

$$\begin{aligned} x &= x_q + r \cos \theta \\ y &= y_q + r \sin \theta \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde $0 \leq r \leq R_q$ e $\theta_x \leq \theta \leq \theta_y$.

O determinante da matriz jacobiana de transformação dado por:

$$|\mathbf{J}_{r,\theta}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r \quad (4.56)$$

Limitando as variáveis ao intervalo $[-1; 1]$, a transformação para coordenadas homogêneas $(\xi; \eta)$ dada por:

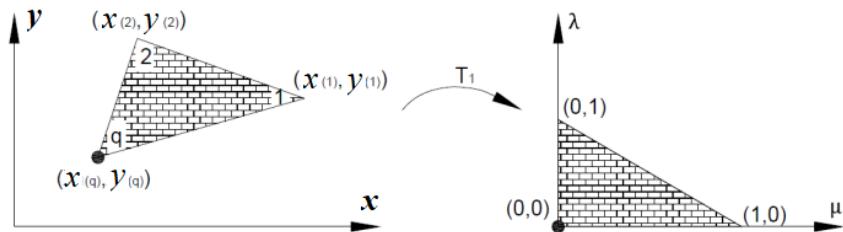
$$\begin{aligned} r &= \frac{R_q}{2}(\xi + 1) \\ \theta &= \frac{\theta_x}{2}(1 - \eta) + \frac{\theta_y}{2}(1 - \eta) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Logo, o determinante da matriz Jacobiana pode ser dado por:

$$|\mathbf{J}_{\xi, \eta}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{R_q}{4} |(\theta_y - \theta_x)| \quad (4.58)$$

Como pode ser visualizado na Figura 11, para a parcela Ω_{Iq} de formato triangular, a transformação tem como base as coordenadas nos vértices. Além disso, uma vez que se tem disposições aleatórias para os formatos de triângulo no domínio, é necessária uma transformação de coordenadas T_1 para se padronizar a região triangular.

FIGURA 11 – Padronização da região triangular



Fonte: Konda [39, p. 55]

Dadas as seguintes funções de forma nodais:

$$\begin{aligned} N_1(\mu; \lambda) &= 1 - \mu - \lambda \\ N_2(\mu; \lambda) &= \mu \\ N_3(\mu; \lambda) &= \lambda \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde $0 \leq \mu \leq 1$ e $0 \leq \lambda \leq 1$. Logo, escreve-se uma coordenada qualquer $(x; y)$ em função de μ e λ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_q N_3 \\ y &= y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_q N_3 \end{aligned} \quad (4.60)$$

O determinante da matriz Jacobiana dado por:

$$|\mathbf{J}_{\mu, \lambda}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \mu} & \frac{\partial r}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mu} & \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 2A \quad (4.61)$$

onde A é a área do triângulo.

Limitando as variáveis ao intervalo $[-1; 1]$, a transformação para coordenadas homogêneas $(\xi; \eta)$ dada por:

$$\begin{aligned}\mu &= \left(1 - \frac{1+\eta}{4}\right) \left(\frac{1+\xi}{2}\right) \\ \lambda &= \left(1 - \frac{1+\xi}{4}\right) \left(\frac{1+\eta}{2}\right)\end{aligned}\quad (4.62)$$

O determinante da matriz Jacobiana pode ser dado por:

$$|\mathbf{J}_{\xi, \eta}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} & \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} & \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left| \left(1 - \frac{1+\xi}{4}\right) - \left(\frac{1+\eta}{4}\right) \right| \quad (4.63)$$

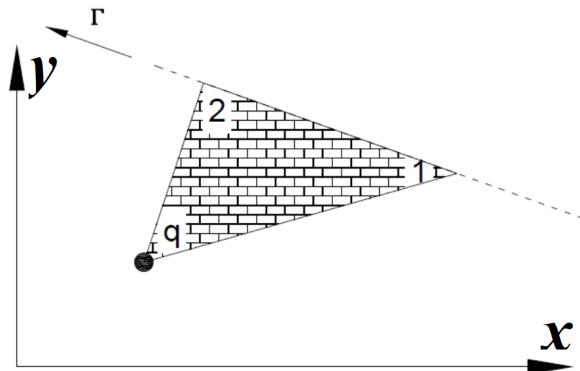
As integrais de contorno são expressas por:

$$I = \int_{P_1}^{P_2} f(x, y) dS \quad (4.64)$$

onde P_1 e P_2 representam o ponto inicial e final do contorno que se deseja integrar e dS um elemento infinitesimal do contorno dado por:

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (4.65)$$

FIGURA 12 – Orientação do Contorno



Fonte: Konda [39, p. 56]

Partindo da Equação 4.60 para a transformação de coordenadas, onde o contorno a ser integrado é representado na Figura 12 pela aresta do triângulo sobre o eixo μ , orientado da origem $(0; 0)$ para o ponto $(1; 0)$. Logo, pode-se admitir $\lambda = d\lambda = 0$ e as componentes dx e dy expressas por:

$$\begin{aligned}dx &= \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda = (x_2 - x_1) d\mu \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda = (y_2 - y_1) d\mu\end{aligned}\quad (4.66)$$

A partir da Equação 4.66 obtém-se:

$$\begin{aligned}x &= x_1(1 - \mu) + x_2\mu \\ y &= y_1(1 - \mu) + y_2\mu\end{aligned}\quad (4.67)$$

Substituindo-se a Equação 4.66 na Equação 4.64, obtém-se o jacobiano de transformação:

$$dS = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} d\mu \quad (4.68)$$

A mudança para coordenadas homogêneas, sendo $-1 \leq \xi \leq 1$, é dada por:

$$\mu = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.69)$$

Derivando a Equação 4.69 obtém-se o jacobiano de transformação:

$$d\mu = \frac{1}{2} d\xi \quad (4.70)$$

Definidas todas as mudanças de coordenadas, a quadratura de Gauss-Legendre para cada região de $\Omega_I q$ pode ser obtida pelas seguintes integrais:

4.4.2 Integrais de Domínio

Para as integrais de domínio pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_s} f(x; y) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f[K_x(\xi, \eta); K_y(\xi, \eta)] |J_{\xi, \eta}| d\xi d\eta \quad (4.71)$$

onde, para setores de formato circular têm-se:

$$\begin{aligned} K_x(\xi; \eta) &= x_q + \frac{R_q}{2}(1 + \xi) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}(1 - \eta) + \frac{\theta_2}{2}(1 + \eta)\right) \\ K_y(\xi; \eta) &= y_q + \frac{R_q}{2}(1 + \xi) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}(1 - \eta) + \frac{\theta_2}{2}(1 + \eta)\right) \\ |J_{\xi, \eta}| &= \frac{R_q^2}{8}(1 + \xi)|\theta_2 - \theta_1| \end{aligned} \quad (4.72)$$

e, para o caso de setores de formato triângular, tem-se:

$$\begin{aligned} K_x(\xi; \eta) &= x_1 + (x_2 - x_1) \left(\frac{3 + 3\xi - \eta - \eta\xi}{8} \right) + \\ &\quad + (x_q - x_1) \left(\frac{3 + 3\eta - \xi - \eta\xi}{8} \right) \\ K_y(\xi; \eta) &= y_1 + (y_2 - y_1) \left(\frac{3 + 3\xi - \eta - \eta\xi}{8} \right) + \\ &\quad + (y_q - y_1) \left(\frac{3 + 3\eta - \xi - \eta\xi}{8} \right) \\ |J_{(\xi, \eta)}| &= \frac{A}{2} \left| 1 - \frac{2 + \xi + \eta}{4} \right| \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde A é a área do triângulo.

4.4.3 Integrais de Contorno

Para as bordas do elemento a integral pode ser dada por:

$$\int_{\Gamma} f(x; y) d\Gamma = \int_{-1}^1 [K_x(\xi); K_y(\xi)] |J_{\xi}| d\xi \quad (4.74)$$

onde:

$$\begin{aligned}
K_x(\xi) &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \xi(x_2 - x_1)) \\
K_y(\xi) &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + \xi(y_2 - y_1)) \\
|J_\xi| &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Para implementação computacional, pode-se reescrever a Equação 4.71 e a Equação 4.64 na forma da Equação 4.54 (Equação de Gauss-Legendre, apresentada no início desta seção), tomando a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f[K_x(\xi, \eta); K_y(\xi, \eta)] |J_{\xi, \eta}| d\xi d\eta \cong \\
&\cong \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} w_i w_j f[K_x(\xi_i, \eta_j); K_y(\xi_i, \eta_j)] |J_{\xi_i, \eta_j}| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.76}$$

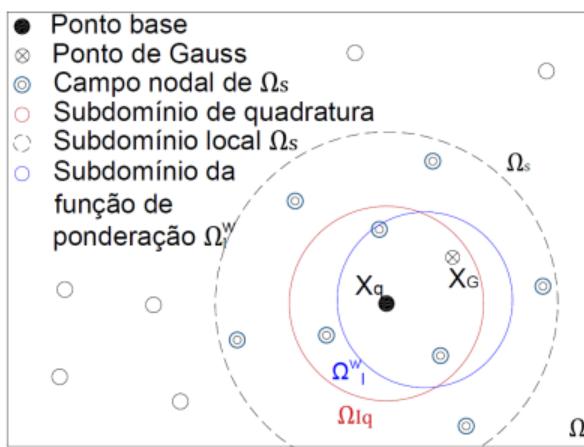
$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 [K_x(\xi); K_y(\xi)] |J_\xi| d\xi \cong \\
&\cong \sum_{i=1}^{N_\xi} w_i f[K_x(\xi_i); K_y(\xi_i)] |J_{\xi_i}| d\xi
\end{aligned} \tag{4.77}$$

onde N_ξ e N_η são o número de abscissas de Gauss-Legendre, representadas por ξ_i e η_j , com suas ponderações correlacionadas w_i e w_j .

4.5 APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS

Para aproximação das variáveis este trabalho faz o uso de uma aproximação simplificada no ponto de quadratura proposta por Konda (ver [39, pp. 61–63]). Na aproximação simplificada é utilizado um único subdomínio, centrado no ponto x_q , para todos os pontos de Gauss x_g pertencentes ao subdomínio de integração do ponto base, como é mostrado na Figura 13.

FIGURA 13 – Aproximação simplificada utilizando um mesmo subdomínio de suporte



Fonte: Konda [39, p. 62]

Para que a precisão do método seja satisfatória, o subdomínio de integração Ω_{Iq} deve ser pequeno se comparado ao suporte Ω_S e também, a fim de preservarem-se as características locais do método, o suporte Ω_S não deve ser demasiadamente grande.

Em decorrência do processo de aproximação simplificada podem ocorrer perdas na precisão das variáveis aproximadas. No entanto, as perdas não são tão significativas para os resultados finais obtidos, enquanto o custo computacional reduzido no processo é bastante satisfatório.

5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho, o MLPG é utilizado para resolução do problema de flexão de placas, feito em linguagem *Fortran.90*, utilizando como compilador o *Microsoft Visual Studio Community 2017* operando em modo *Release 64bits*.

Todas as análises foram realizadas em ambiente *Windows 10 Home Single Language 64bits version 1903*, processador *Intel(R) Core(TM) i5-3337U CPU 1,80GHz* e memória RAM DDR3 com 9,90GB utilizáveis.

Foram feitas análises definindo primeiramente um espaçamento de 1,00m entre os pontos na primeira discretização (discretização 1), em seguida se acresce um ponto entre cada nó gerando uma nova discretização, isto é com um espaçamento entre nós de 0,50m, 0,25m e 0,125m para as discretizações 2, 3 e 4 respectivamente. Para as discretizações 1, 2, 3 e 4 são feitas análises com aproximação linear, quadrática e cúbica (a, b e c respectivamente) para obtenção das funções de forma.

Para discretização do problema é necessário ajustar um arquivo de entrada, onde constam todas as informações necessárias à discretização do problema.

5.1 AQUIVO DE ENTRADA

Especificam-se primeiramente:

- número de pontos de contorno, que representam as bordas da placa;
- número de pontos de domínio, interior da placa;
- máximo de pontos utilizados no suporte para obtenção das funções de aproximação. Caso o programa identifique um provável problema na inversão da matriz A, como por exemplo um elemento nulo na diagonal principal, a matriz A é recalculada considerando um novo suporte através do incremento de um novo ponto;
- número de cantos, que será sempre 4 para as discretizações desse trabalho;
- o tipo de aproximação utilizada na obtenção da função de forma, podendo ser desde uma aproximação linear até uma de sexto grau.

Logo em seguida definidas as propriedades da placa:

- número de pontos de Gauss, utilizado 35 pontos em todas as discretizações;
- módulo de elasticidade de placa;
- coeficiente de Poisson;
- espessura da placa;
- carregamento aplicado;
- números de pontos com valores prescritos diferentes de zero. O programa prescreve valor nulo para todas as demais prescrições;
- pontos adicionais na interpolação do suporte local. O programa permite o ajuste da quantidade inicial de pontos para obtenção das funções de forma. Caso nenhum ponto adicional seja considerado, o mínimo de pontos é calculado em função da ordem da base monomial escolhida.

Deve-se ressaltar, que a medida que se aumenta a ordem da base monomial utilizada, um número maior de pontos deve ser considerado para obtenção de sistema de equações. Caso não seja utilizado um número adequado de pontos, o sistema obtido se torna indeterminado.

A quantidade de pontos utilizados foi a mínima possível, para se tentar um bom condicionamento da matriz de rigidez e também, preservar as características locais do método. Para as discretizações realizadas, o número de pontos no suporte é geralmente 7 para uma aproximação linear, 10 para quadrática e 19 para cúbica.

Mais algumas informações são ainda necessárias:

- Mínimo de pontos no suporte ;
- forma de imposição das condições de contorno, podendo-se escolher entre o método da penalidade e o método de interpolação direta;
- O programa permite ainda um ajuste do tamanho do subdomínio de integração. Neste trabalho, o subdomínio de integração foi de 1,1 vezes a distância do ponto de vizinhança mais próximo.

O método da penalidade apresenta uma desvantagem quanto à escolha do parâmetro de penalidade, pois um número muito grande degrada a matriz de rigidez e um parâmetro pequeno pode não ser capaz de impor a condição de contorno desejada. Por este motivo, neste trabalho, utilizou-se apenas o método da interpolação direta, também conhecido como método de colocação.

Feito isso são inseridos os pontos com suas respectivas coordenadas. Primeiramente são inseridos os pontos de contorno onde se especifica o número do nó, coordenada x , coordenada y ambas em metros, se o nó em questão é um nó de canto e em seguida o número do nó de canto anterior, por último são estabelecidas as prescrições para os pontos de contorno, que podem ser prescrições de força (M_n, M_{ns}, V_n) ou de deslocamentos (ϕ_n, ϕ_s, w).

Para o caso de nós com valores prescritos diferentes de zero, devem ser inseridos após os pontos do contorno.

Finalmente, são definidos os pontos de domínio, onde constam apenas o número do nó e suas coordenadas x e y . Com isso, tem-se o arquivo de entrada pronto para alimentar o programa. Ao final dos cálculos, um arquivo de saída é gerado.

5.2 ARQUIVO DE SAÍDA

Uma vez executado o programa, é gerado um arquivo de saída com algumas informações e descrição do problema, onde são apresentados os deslocamentos nodais obtidos (ϕ_x, ϕ_y e w).

Após passar por um tratamento, os deslocamentos obtidos são incluídos em um banco de dados para análise de resultados, onde foi utilizado o *Microsoft Excel Office 2019*. A planilha gera os gráficos para os deslocamentos obtidos em cada discretização, onde pode-se comparar o erro relativo e análise de convergência do método. Para validação dos resultados, o mesmo exemplo foi calculado pelo MEF utilizando o software *ANSYS* (versão 18.1). O custo computacional também foi computado para cada discretização imposta, com o tempo de processamento medido em segundos.

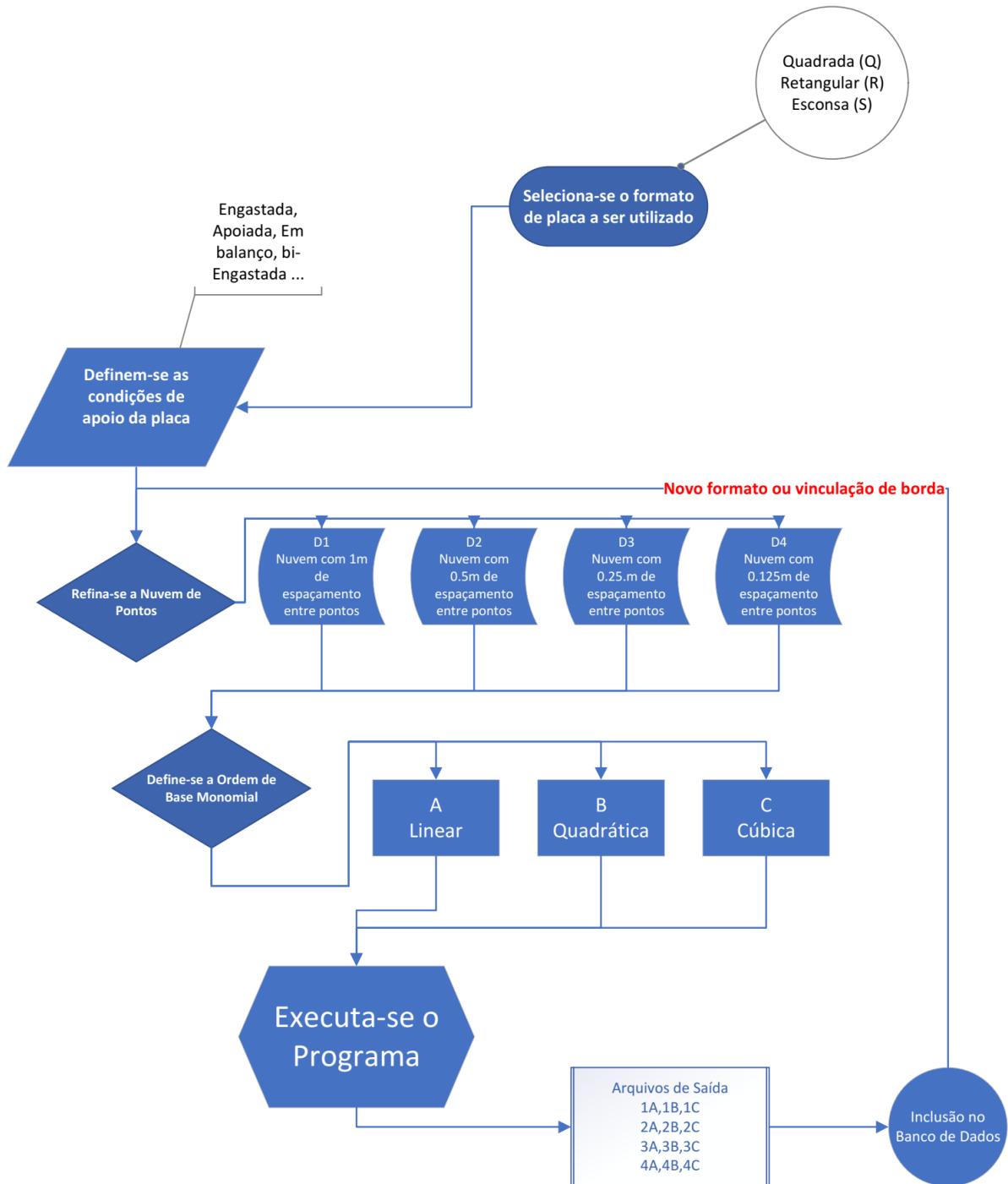
5.3 DISCRETIZAÇÕES REALIZADAS NO ANSYS

Para a validação, foram discretizadas as mesmas placas no ambiente *Mechanical Enterprise Utility Menu - APDL*. Utilizou-se o sólido *Shell 8node 281* trabalhando em regime elástico, linear e isotrópico, com módulo de elasticidade $2 \times 10^6 kN/m^2$ e coeficiente de Poisson 0,3. O elemento do tipo *Shell* com espessura de $1.0m$ e 5 pontos de integração. A malha utilizada com elementos de formato quadrado com $0.125m$ de lado, tal como na discretização 4 do MQMO, embora para o MEF tenha-se verificado que a convergência é atingida a partir de uma malha de elementos quadrados com $0,5m$ de lado mas, como o custo computacional é pouco afetado, optou-se por uma malha mais refinada.

5.4 PROCESSAMENTO DE DADOS

A Figura 14 ilustra como são selecionados os parâmetros no arquivo de entrada e como são processados os dados do arquivo de saída, exportados para o banco de dados.

FIGURA 14 – FLuxograma: Pré-Processamento de Dados



Fonte: O autor

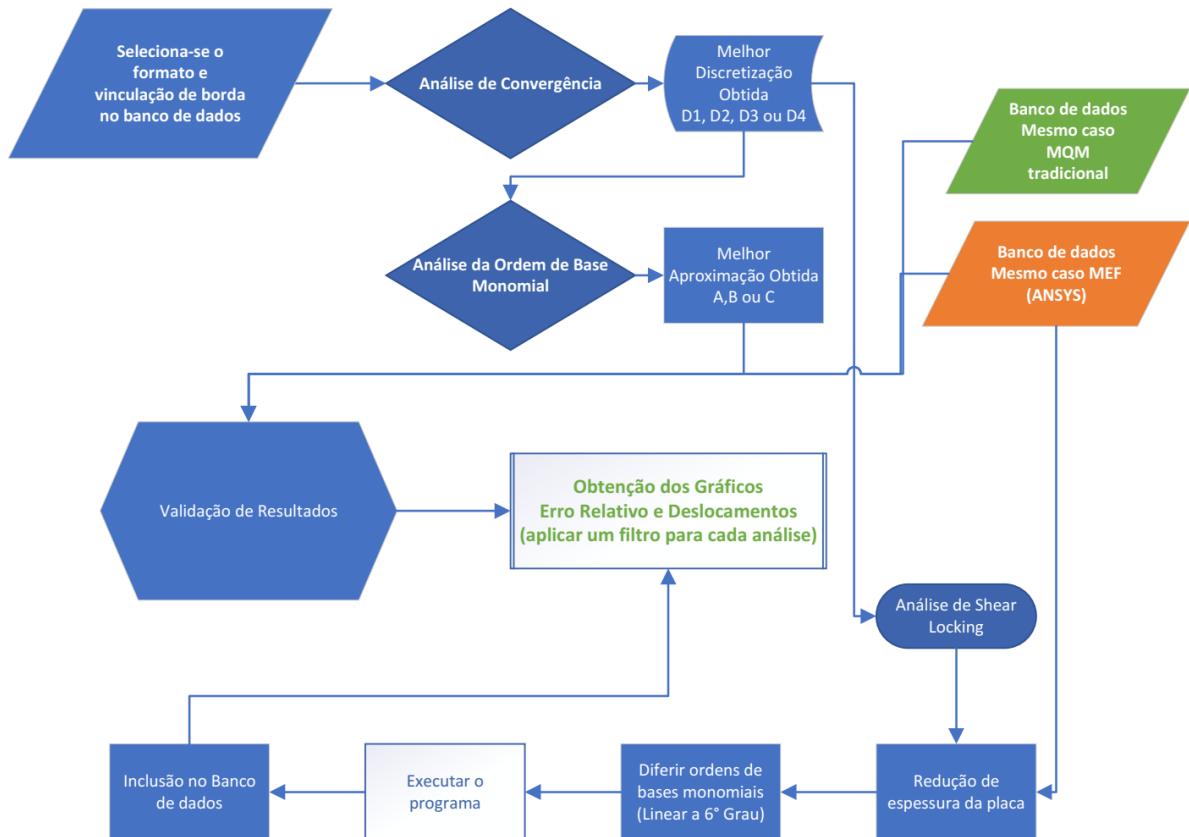
Como é exibido no fluxograma da Figura 14 primeiramente seleciona-se o formato da placa, logo em seguida seleciona-se as vinculações de borda, são montados 4 arquivos um para cada uma das discretizações onde faz-se o aumento do número de pontos, para cada discretização são ainda empregadas três diferentes ordens de base monomiais, o que resulta para cada exemplo num total de 12 arquivos de entrada.

Uma vez montados estes arquivos (em formato .TXT), executa-se o programa e obtém-se 12 arquivos de saída com os deslocamentos (em formato .TXT). Estes arquivos são incluídos em um banco de

dados no *Microsoft Excel Office 2019* com o auxílio da extensão de busca *Power Querry Edition*. Nesta etapa é preciso se atentar aos resultados obtidos, uma vez que a extensão apresentou uma série de erros e portanto, é sempre bom verificar se os resultados são os mesmos do arquivo de saída (.TXT).

A Figura 15 mostra como são selecionados os resultados no banco de dados, tal como as análises subsequentes.

FIGURA 15 – Fluxograma: Processamento de Dados MS. Excel



Fonte: O autor

Como é exibido no fluxograma da Figura 15 primeiramente faz-se a seleção do exemplo que se vai trabalhar no banco de dados e são exportados os dados com que se irá trabalhar. Com os dados obtidos são construídos gráficos para os deslocamentos e para o erro relativo da aproximação. Aplicando um filtro, pode-se selecionar os resultados pertinentes, fazendo a comparação quanto a melhor nuvem de pontos e a melhor ordem de base monomial obtida.

Tomando o caso em que melhor se obtiveram os resultados, executa-se novamente o programa, agora utilizando uma aproximação de MQM tradicional. Os resultados obtidos no MQM ortogonal e MQM tradicional são comparados aos valores obtidos no ANSYS para uma placa de mesmo formato e condições de apoio, e assim, obtém-se a validação dos resultados.

Para a análise de shear locking toma-se a nuvem de pontos que apresentou os melhores resultados e faz-se a redução da espessura da placa até a relação t/l desejada. São ainda variadas as ordens de base monomial para cada relação t/l utilizando bases de ordem linear até sexto grau. Uma vez montados os arquivos de entrada, o programa é executado novamente com os resultados incluídos em um novo banco de dados. No ANSYS uma placa de mesmo formato e condições de apoio, tem sua espessura reduzida, da mesma forma como foi feito para o MQMO. Comparando-se os resultados obtidos no MQMO e ANSYS para uma placa de mesma espessura obtém-se o erro relativo.

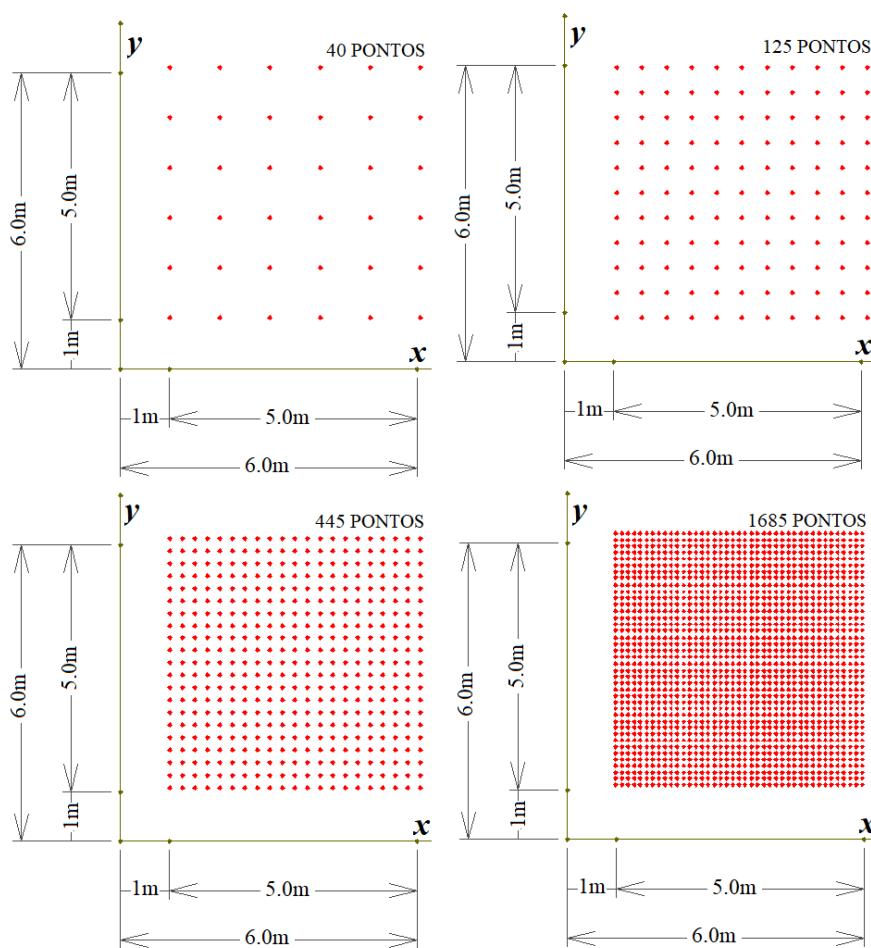
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 PLACA QUADRADA

Para fins de simplificação, os gráficos apresentam os números 1, 2, 3, 4 para as discretizações de 40, 125, 445, 1685 pontos respectivamente, seguidas pelas letras *a*, *b*, *c* para aproximação linear, quadrática e cúbica respectivamente.

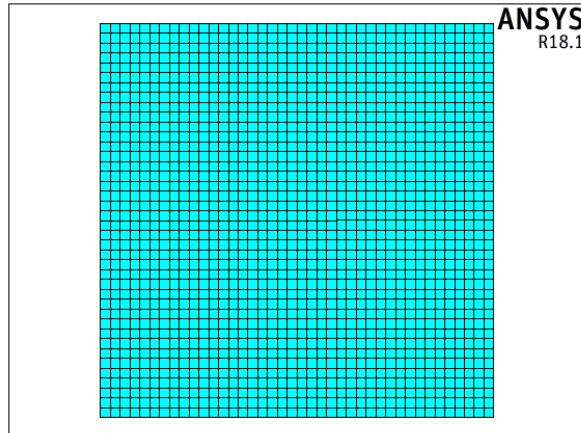
Para o MQMO, foi discretizada uma placa quadrada de $5m \times 5m$, utilizando aproximação linear, quadrática e cúbica com 40, 125, 445 e 1685 pontos (ver Figura 16). Enquanto no ANSYS uma malha com 1600 elementos de formato quadrado (com $0.125m$ de lado), semelhante a discretização 4 (ver Figura 17)

FIGURA 16 – Nuvem de pontos para cada discretização de placa quadrada



Fonte: O autor

FIGURA 17 – Discretizações Placa Quadrada ANSYS

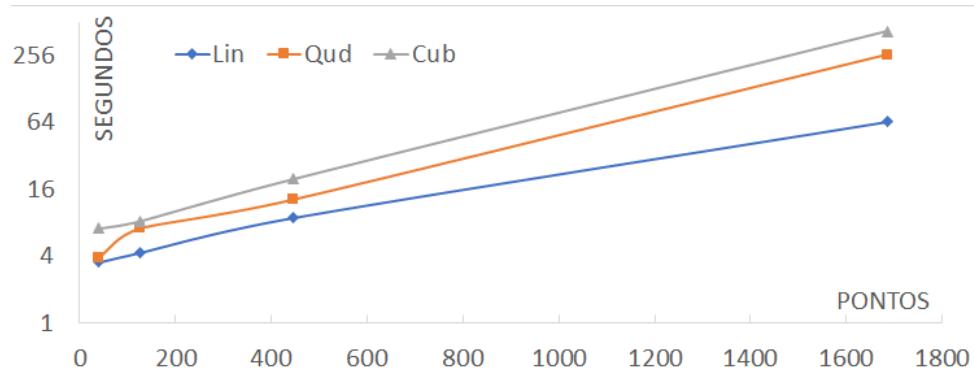


Fonte: O Autor

Inicialmente as placas possuem 1.0m de espessura e um carregamento aplicado de $0,64kN/m^2$. Uma vez que se está trabalhando em regime elástico linear não faz sentido alterar o carregamento, a espessura no entanto é avaliada, onde foi feita uma análise para o efeito de *shear locking*.

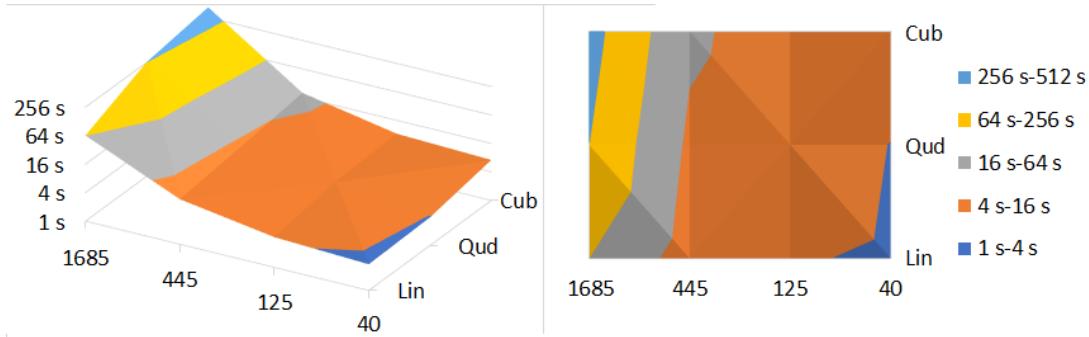
O custo computacional, foi medido em segundos, contando desde a leitura do arquivo de entrada até a gravação do arquivo de saída, verificou-se um aumento proporcional ao número de pontos e o tipo de aproximação. No entanto, com a variação das vinculações de borda, foram constatadas variações insignificantes nos tempos de processamento, sendo assim, foi utilizado como referência apenas uma placa engastada. Um comparativo entre o custo computacional, em função do número de pontos, para uma aproximação linear, quadrática e cúbica pode ser vista na Figura 18 e outro comparativo, em função do número de pontos e do tipo da aproximação, na Figura 19.

FIGURA 18 – Custo computacional para placa quadrada - 1



Fonte: O Autor

FIGURA 19 – Custo computacional para placa quadrada - 2



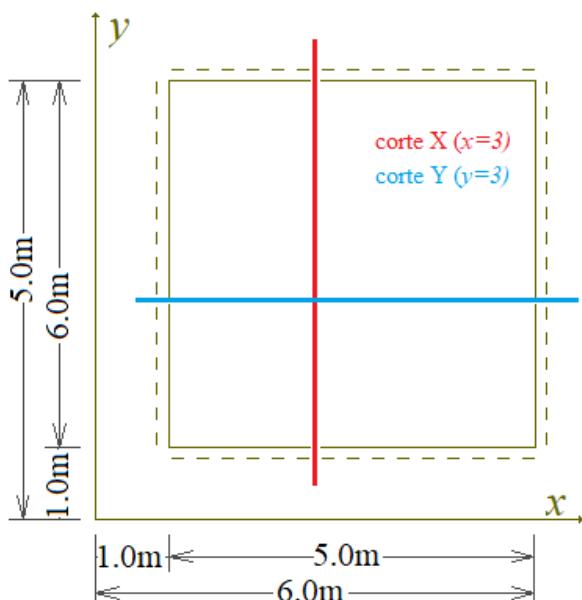
Fonte: O Autor

Conforme pode ser observado na Figura 18 e na Figura 19, o custo computacional aumenta com a consideração de uma base monomial de maior ordem. Vale ressaltar que, a quantidade de pontos utilizados em cada subdomínio local é diretamente dependente da ordem da base monomial utilizada. Uma base monomial de ordem superior, exige a utilização de mais pontos no subdomínio local, a fim de se produzir um sistema de equações bem possível de ser determinado. Nos exemplos utilizados neste trabalho, a quantidade de pontos no suporte do ponto de Gauss foi de 7, 10 e 19 pontos para base linear, quadrática e cúbica respectivamente.

6.1.1 Exemplo 01 - Placa Quadrada Totalmente Apoiada

Neste exemplo tem-se uma placa apoiada em todos os lados, como pode ser visto na Figura 20. Em função da simetria do problema, foi feita a análise apenas para o corte Y ($y = 3$), uma vez que para o corte X seriam obtidos os mesmos resultados.

FIGURA 20 – Placa Apoiada

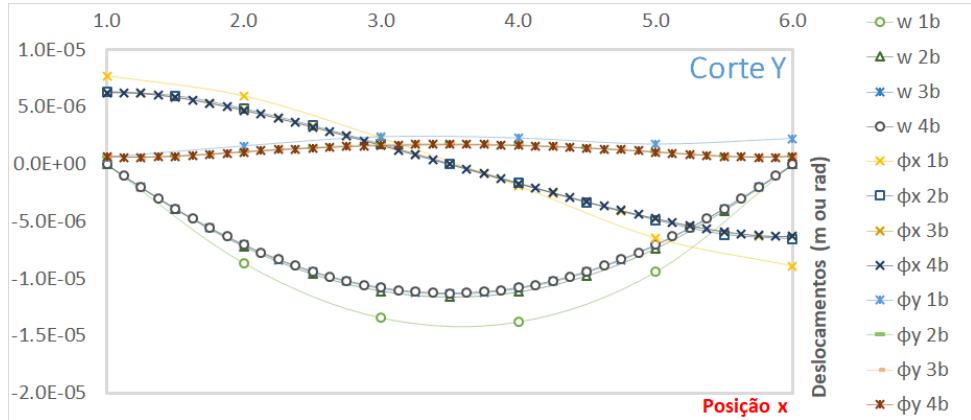


Fonte: O Autor

6.1.1.1 Estudo de Convergência

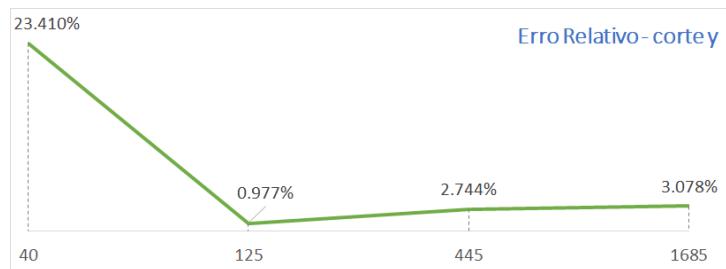
A Figura 21 mostra os deslocamentos obtidos para uma nuvem de 40(1), 125(2), 445(3) e 1685(4) pontos. O erro relativo para cada discretização analisada, pode ser visto na Figura 22.

FIGURA 21 – Deslocamentos Obtidos: Placa Quadrada Apoiada - estudo de convergência



Fonte: O Autor

FIGURA 22 – Erro Relativo: Placa Quadrada Apoiada - estudo de convergência



Fonte: O Autor

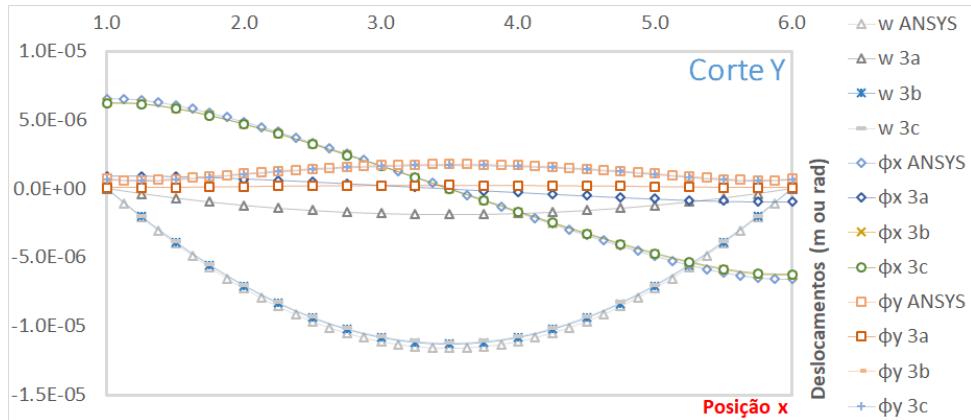
Observou-se que para a nuvem de 40 pontos, o erro obtido é considerável. Para uma nuvem de 125 pontos começa-se a atingir a convergência, com resultados com baixo erro relativo. Na terceira discretização, de 445 pontos, confirma-se a convergência e a partir daí, aumentar o número de pontos não irá causar mudanças significativas nos resultados obtidos. Dobrando mais uma vez o número de pontos, tem-se uma malha de 1685 pontos, o que se percebe é que os resultados são quase os mesmos que para a discretização 3, ainda levando-se em conta o custo computacional, que é muito maior para a discretização 4, a melhor escolha seria a utilização de 445 pontos para representação do problema. Para este exemplo, que apresenta certa simplicidade por sua simetria, tanto no formato quanto nas condições de contorno, poderia-se também adotar a discretização de 125 pontos, no entanto o custo para se calcular uma nuvem de 445 pontos é quase o mesmo. Assim, optou-se pela utilização da terceira discretização, para as demais análises.

6.1.1.2 Influência do tipo de Aproximação

Como visto na subseção anterior (ver Subsubseção 6.1.1.1), para este exemplo, a discretização de 445 pontos se mostrou a mais eficiente, por seu baixo custo e precisão dos resultados. Tomando-a

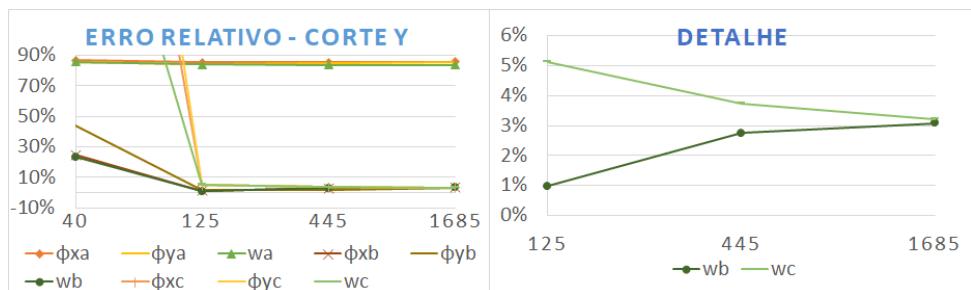
como referência, os deslocamentos para o corte Y podem ser visualizados na Figura 23 e o erro relativo na Figura 24, onde foi feita uma variação no tipo de aproximação, levando-se em conta aproximações lineares(a), quadráticas(b) e cúbicas(c). Como valor de referência foram utilizados os resultados obtidos pelo MEF.

FIGURA 23 – Deslocamentos obtidos para diferentes ordens de base monomiais: Placa Quadrada Apoiada



Fonte: O Autor

FIGURA 24 – Erro relativo para diferentes ordens de base monomiais: Placa Quadrada Apoiada



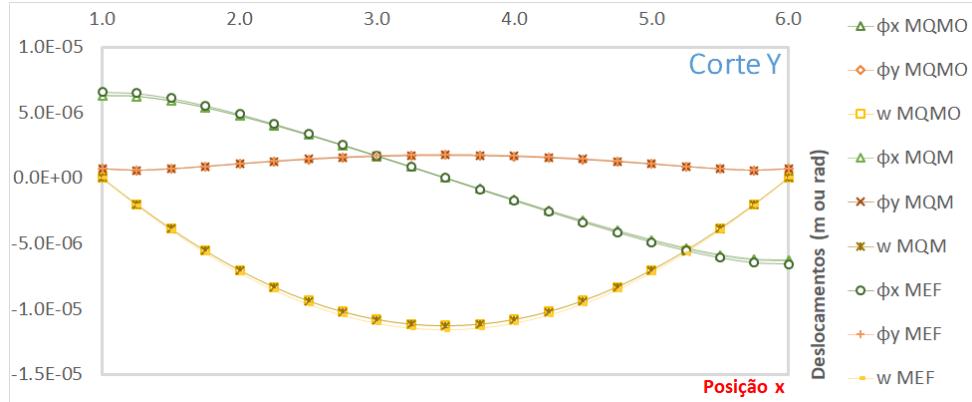
Fonte: O Autor

Como pode ser visto na Figura 23 e Figura 24, para a aproximação linear, o que se verificou foi a convergência para um resultado distante do esperado. Tal fato pode ser explicado pela baixa ordem dos monômios utilizados na obtenção da função de aproximação, produzindo funções de aproximação deficientes. A utilização de aproximação quadrática produziu bons resultados, bem como a utilização de aproximação cúbica. Também se verificou, uma perda de precisão para a aproximação cúbica quando a nuvem de pontos é pequena. Em outras palavras, a aproximação quadrática é capaz de atingir a convergência mais rápido, se mostrando mais eficiente.

6.1.1.3 Validação de Resultados

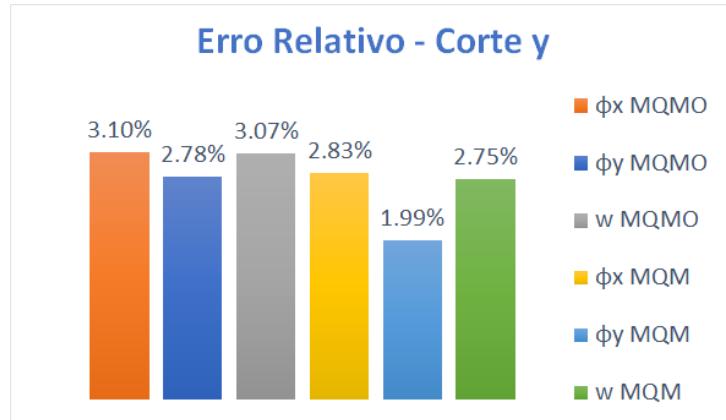
Utilizando uma nuvem de 445 pontos e uma aproximação quadrática foram comparados o MEF, MLPG utilizando o Método de Mínimos Quadrados Móveis com o MLPG utilizando o MQMO. Na Figura 25 são mostrados os deslocamentos para cada metodologia aplicada e na Figura 26 o erro relativo para o MQM e MQMO, comparados ao MEF que já é um método consolidado.

FIGURA 25 – Deslocamentos Obtidos: Placa Quadrada Apoiada - validação



Fonte: O Autor

FIGURA 26 – Erro Relativo: Placa Quadrada Apoiada - validação



Fonte: O Autor

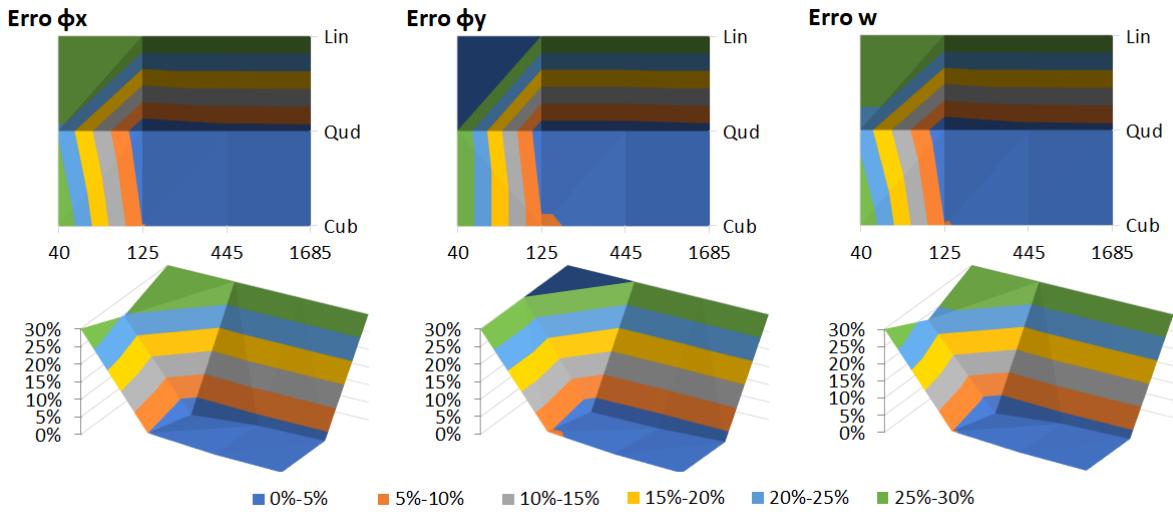
Os resultados obtidos são bastante satisfatórios, como ilustrado na Figura 25, os deslocamentos foram muito próximos para as aproximações com MQMO, tanto da outra abordagem do MLPG utilizando MQM, quanto dos deslocamentos obtidos pelo MEF. Os erros obtidos (ver Figura 26) foram pequenos, embora maiores que os obtidos no MQM. Desta forma, pode-se acreditar que MQMO pode ser utilizado para substituir o MQM no MLPG, com a vantagem de se reduzir expressivamente o custo computacional.

Por fim, a Figura 27 mostra o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas.

Os erros foram calculados como uma média do erro mostrado na Equação 6.1, onde leva-se em conta os resultados obtidos nos pontos em cada corte com o MLPG utilizando MQMO, e os resultados obtidos para os mesmos pontos utilizando o MEF (ANSYS).

$$\text{erro}_{\text{relativo}} = \left| \frac{\text{valorMQMO} - \text{valorMEF}}{\text{valorMEF}} \right| \times 100 \quad (6.1)$$

FIGURA 27 – Erro Relativo Total: Placa Quadrada Apoiada



Fonte: O Autor

Observando a Figura 27 pode-se notar todos os pontos discutidos anteriormente. A aproximação de ordem linear converge para resultados distantes dos esperados, a aproximação cúbica demora um pouco mais a atingir a convergência e a aproximação quadrática é a que melhor se comporta, apresentando uma convergência mais rápida e também resultados mais precisos.

Vale ressaltar que, foram considerados resultados bons foram aqueles que apresentaram erros de até 5%, resultados medianos pra um erro de até 10%, aceitáveis, apenas para analisar o comportamento do método, valores com um erro de até 30%, e resultados ruins para um erro maior que 30%.

6.1.1.4 Variação de Espessura

Conforme é reduzida a espessura de uma placa, a rigidez à flexão também diminui seguindo uma relação cúbica, a rigidez ao cisalhamento no entanto, diminui linearmente. Para o problema de flexão de placas, as deformações cisalhantes deveriam ser desprezíveis para uma placa muito fina logo, quando a espessura da placa tende a zero a rigidez ao cisalhamento tende a infinito, tornando-se demasiadamente grande se comparada à rigidez de flexão.

A ocorrência deste fenômeno é identificada por Reissner como *shear locking*, onde a medida que a espessura da placa diminui, a rigidez ao cisalhamento tende a aumentar. Quando a rigidez ao cisalhamento se torna grande perante a rigidez à flexão, a formulação apresenta dificuldade de representação, produzindo soluções espúrias devido a influência excessiva dos termos correlacionados ao esforço cisalhante. Dentro da formulação do MLPG, o efeito de *shear locking* pode ser contornado como o uso de uma base polinomial de ordem maior, porém com limitações.

Assim, tomando como referência a nuvem de 445 pontos, tem-se na Figura 28 um comparativo do custo computacional para cada tipo de aproximação, na Figura 29 a variação do erro relativo a medida que se diminui a relação t/L da placa, e na Figura 30 o erro relativo em função do tipo de aproximação e da relação t/L .

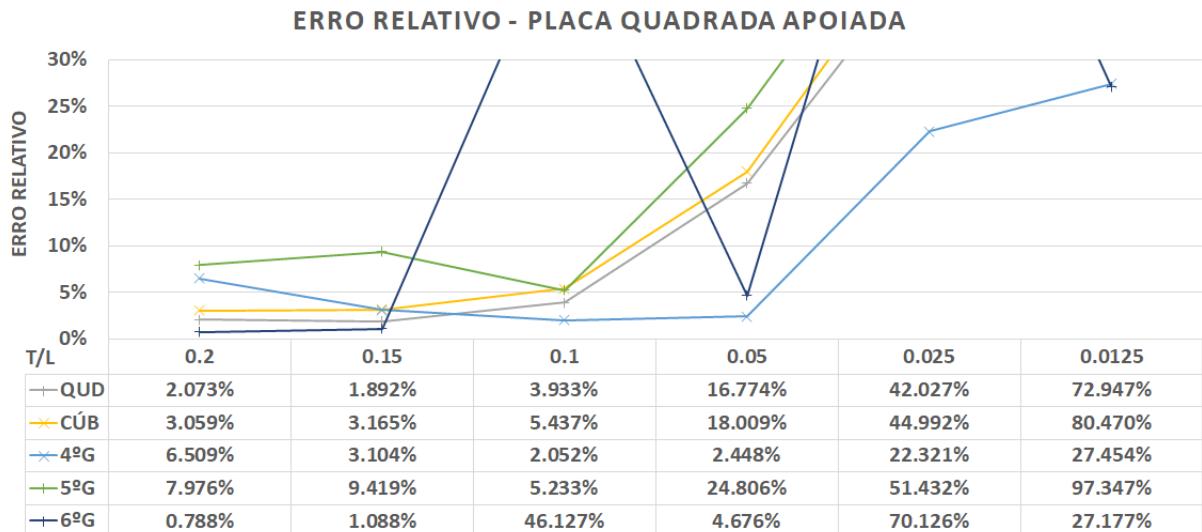
FIGURA 28 – Influência da base polinomial no custo computacional



Fonte: O autor

Na Figura 28 pode-se observar que o custo computacional aumenta com o aumento do grau da base polinomial utilizada na obtenção das funções de aproximação. Conforme já mencionado, tal fato decorre da necessidade da utilização de um número maior de pontos no subdomínio local do ponto base, quando se utiliza uma base polinomial de ordem maior. Vale ressaltar que, uma vez que o objetivo foi de apenas mostrar o aumento de custo em função do aumento da ordem das bases monomiais, não foram medidos os resultados para outros formatos e condições de vinculação de borda.

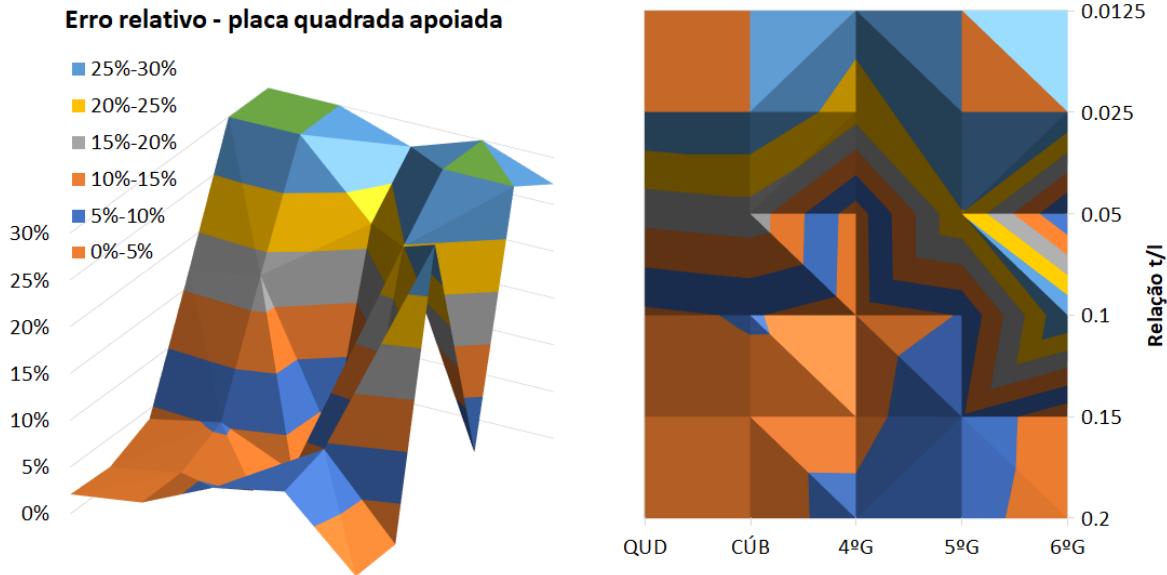
FIGURA 29 – Efeito de *Shear Locking* em uma placa apoiada



Fonte: O autor

Na Figura 29 observa-se o efeito de *shear locking*. Para a base monomial de sexto grau, a relação $t/l = 0.1$ não apresentou bom resultado, porém em $t/l = 0.05$ um baixo erro foi obtido. Nesta situação, a avaliação do fenômeno de *shear locking* em $t/l = 0.1$ fica prejudicada, pois o erro apresentado no gráfico também pode ser decorrente de alguma matriz mal condicionada.

FIGURA 30 – Efeito de *Shear Locking* em uma placa apoiada - 2



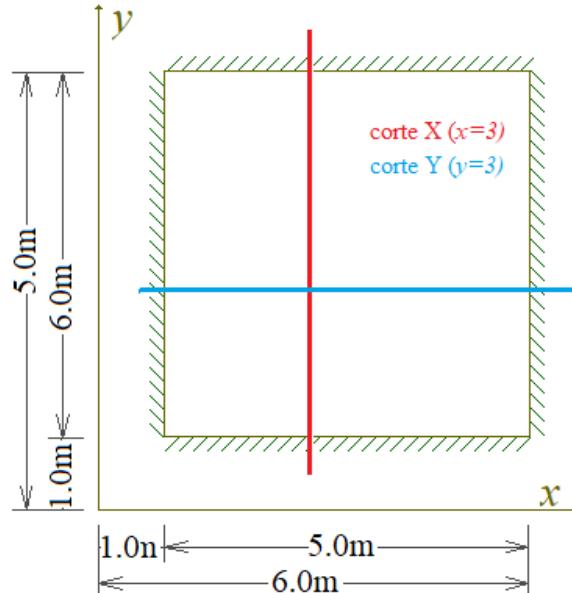
Fonte: O autor

Assim como na Figura 29, a Figura 30, apresenta os resultados variando, de acordo com que se reduz a espessura da placa e também, aumenta-se a ordem da base monomial. O que foi verificado é que aumentar a base monomial resolve o problema, mas com algumas ressalvas. No geral, pode-se afirmar que a formulação se mostrou eficiente para representar a placa com uma relação t/l de até 0.1.

6.1.2 Exemplo 02 - Placa Quadrada Totalmente Engastada

Neste exemplo tem-se uma placa engastada em todos os lados, como pode ser visto na Figura 31. Em função da simetria do problema, foi feita a análise apenas para o corte Y ($y = 3$), uma vez que para o corte X seriam obtidos os mesmos resultados.

FIGURA 31 – Placa Engastada

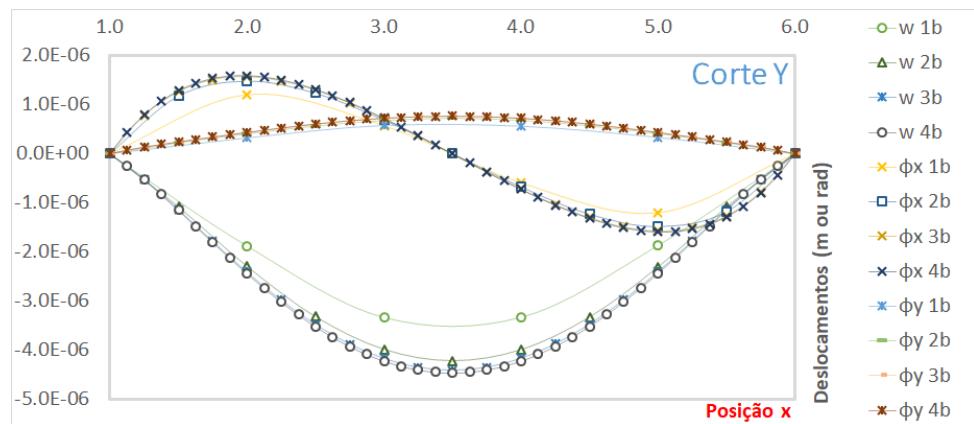


Fonte: O Autor

6.1.2.1 Estudo de Convergência

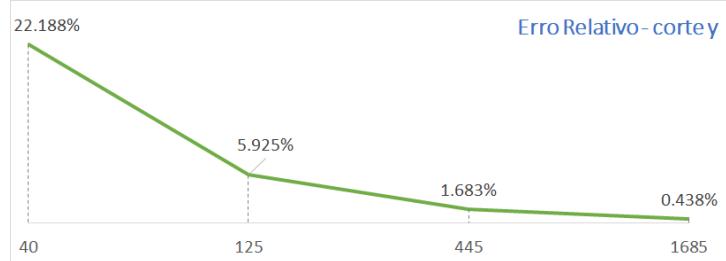
A Figura 32 mostra os deslocamentos obtidos para uma nuvem de 40(1), 125(2), 445(3) e 1685(4) pontos. O erro relativo para cada discretização analisada pode ser visto na Figura 33.

FIGURA 32 – Deslocamentos Obtidos: Placa Quadrada Engastada - estudo de convergência



Fonte: O Autor

FIGURA 33 – Erro Relativo: Placa Quadrada Engastada - estudo de convergência



Fonte: O Autor

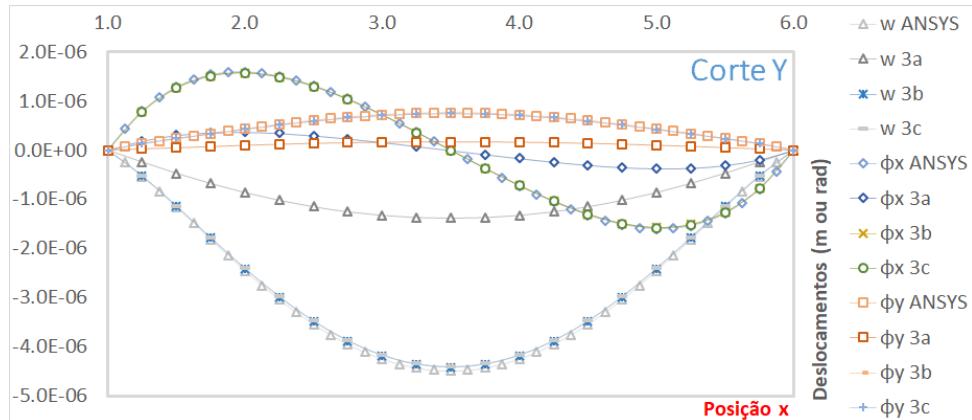
Assim como no exemplo anterior, aqui também se verificou que a nuvem de 125 pontos atingiu boa convergência. A discretização de 445 pontos apresentou resultados muito próximos, um pouco melhores, e levando em consideração que o custo computacional não se eleva tanto, será utilizada a terceira discretização como referência.

Embora na Figura 33 o erro relativo seja menor par a nuvem de 125 pontos, isso se deve as diferenças entre os métodos numéricos utilizados no MLPG e no MEF para obtenção dos deslocamentos, mas que são desprezíveis, como atestado pela Figura 36 onde a diferença entre esses valores é imperceptível.

6.1.2.2 Influência do tipo de Aproximação

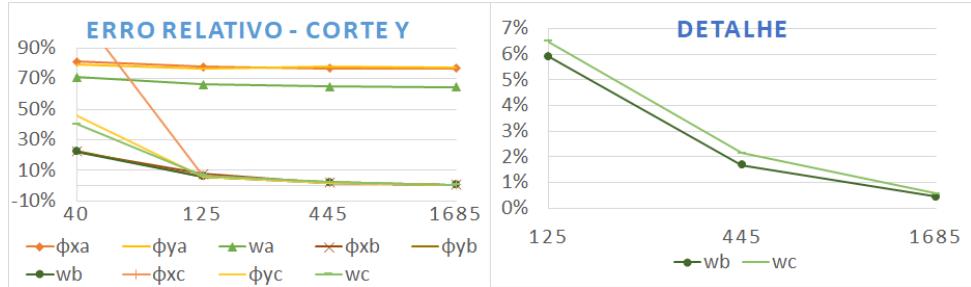
Como visto na subseção anterior (ver Subsubseção 6.1.2.2), para este exemplo a discretização de 445 pontos se mostrou a mais eficiente, por seu baixo custo e precisão dos resultados. Tomando-a como referência, os deslocamentos para o corte Y podem ser visualizados na Figura 34, e o erro relativo na Figura 35, onde foi feita uma variação no tipo de aproximação, levando-se em conta aproximações lineares(a), quadráticas(b) e cúbicas(c). Como valor de referência foram utilizados os resultados obtidos pelo MEF (ANSYS).

FIGURA 34 – Deslocamentos obtidos para diferentes ordens de base monomiais: Placa Quadrada Engastada



Fonte: O Autor

FIGURA 35 – Erro relativo para diferentes ordens de base monomiais: Placa Quadrada Engastada



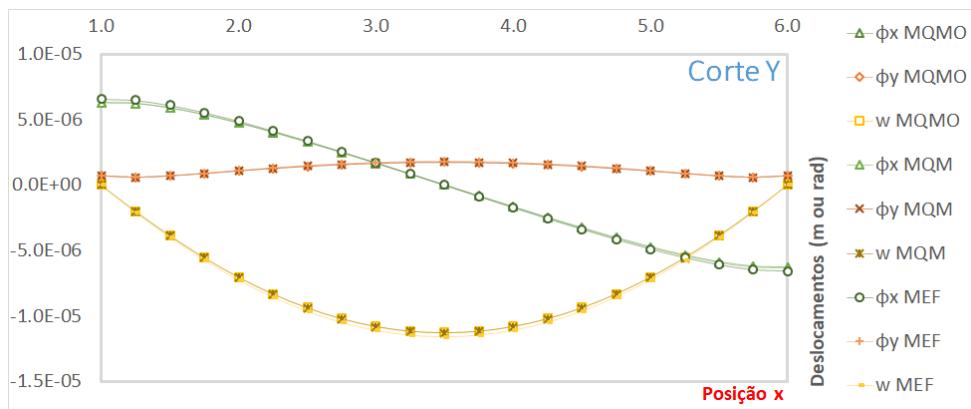
Fonte: O Autor

Neste exemplo a aproximação com base monomiais de ordem cúbica apresentou um melhor resultado, para a nuvem de 445 pontos que está sendo utilizada como referência, os erros obtidos foram ligeiramente menores para aproximações quadráticas. Logo, a aproximação com bases monomiais de ordem quadrática também será utilizada como valor de referência para este exemplo.

6.1.2.3 Validação de Resultados

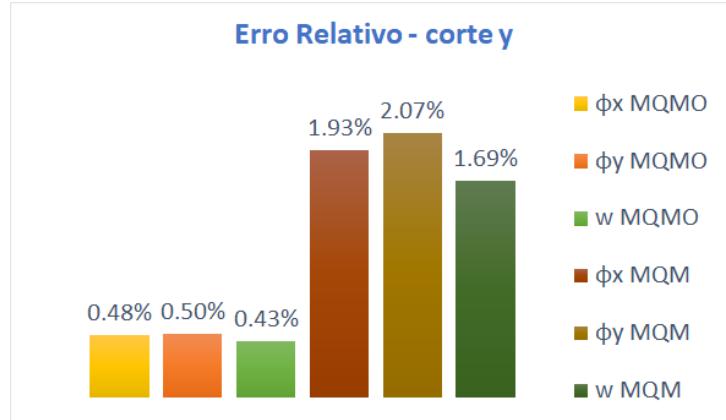
Utilizando uma nuvem de 445 pontos e uma aproximação quadrática, foram comparados o MEF, MLPG utilizando o Método de Mínimos Quadrados Móveis com o MLPG utilizando o MQMO. Na Figura 36 são mostrados os deslocamentos para cada metodologia aplicada e na Figura 37 o erro relativo para o MQM e MQMO comparado ao MEF, que já é um método consolidado.

FIGURA 36 – Deslocamentos Obtidos: Placa Quadrada Engastada - validação



Fonte: O Autor

FIGURA 37 – Erro Relativo: Placa Quadrada Engastada - validação



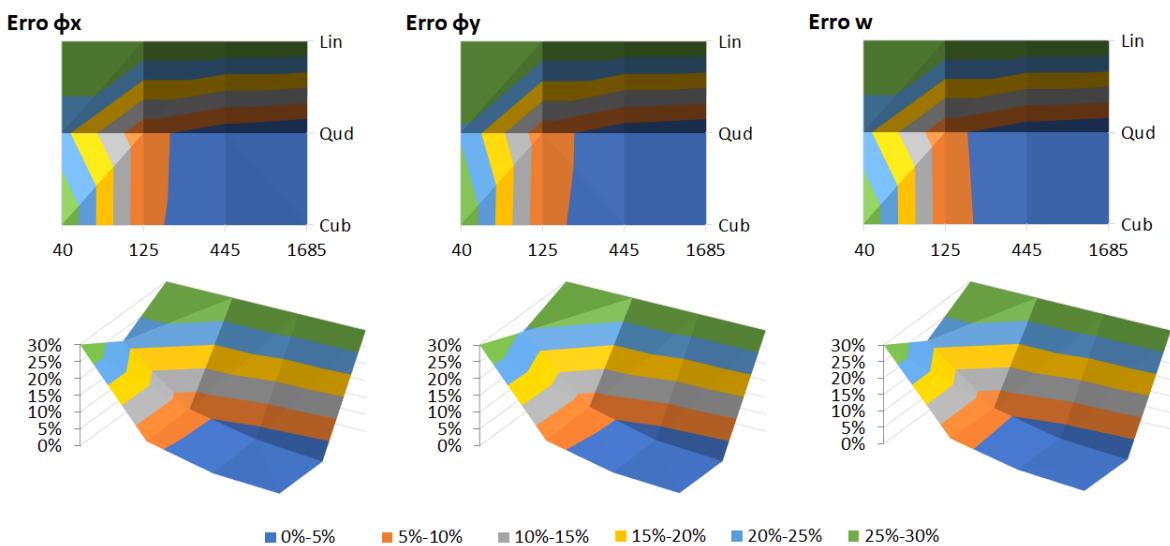
Fonte: O Autor

Ao contrário do exemplo anterior (ver Subseção 6.1.1), para este caso, o MLPG utilizando MQMO para aproximação das variáveis teve resultados superiores ao MQM, como pode ser visualizado na Figura 37. Os deslocamentos obtidos, também apresentam pouca variação se comparados ao MEF. O que reafirma a vantagem de se utilizar o MQMO pela redução expressiva no custo computacional.

Por fim, a Figura 38 mostra o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas.

Os erros foram calculados como uma média do erro mostrado na Equação 6.1, onde leva-se em conta os resultados obtidos nos pontos em cada corte, com o MLPG utilizando MQMO e os resultados obtidos para os mesmos pontos utilizando o MEF(ANSYS).

FIGURA 38 – Erro Relativo Total: Placa Quadrada Engastada



Fonte: O Autor

Observando a Figura 38, pode-se notar todos os pontos discutidos anteriormente. A aproximação de ordem linear converge para resultados distantes dos esperados, a aproximação cúbica apresenta uma boa convergência, no entanto, para a nuvem de 445 pontos utilizada como referência, a aproximação com bases monomiais de ordem quadrática, apresenta resultados ligeiramente superiores (erro de 1.683% para 445 pontos quadrática e de 2.143% para 445 pontos cúbica) .

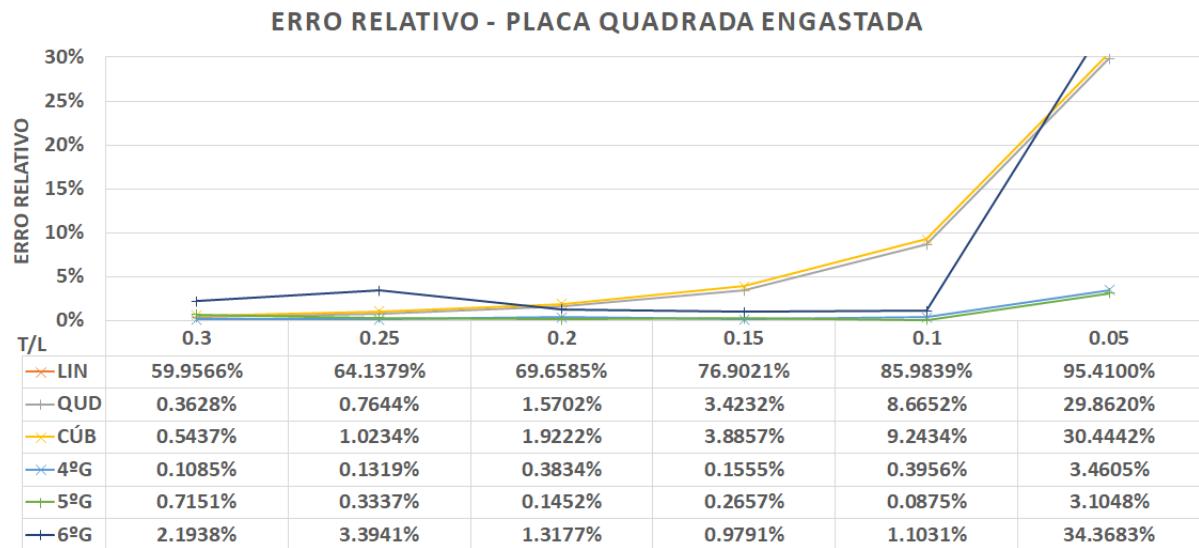
Vale ressaltar que, foram considerados resultados bons foram aqueles que apresentaram erros de até 5%, resultados medianos pra um erro de até 10%, aceitáveis, apenas para analisar o comportamento do método, valores com um erro de até 30%, e resultados ruins para um erro maior que 30%.

6.1.2.4 Variação de Espessura

Tomando como referência a nuvem de 445 pontos, tem-se na Figura 39 a variação do erro relativo a medida que se diminui a relação t/L da placa, e na Figura 40 o erro relativo em função do tipo de aproximação e da relação t/L .

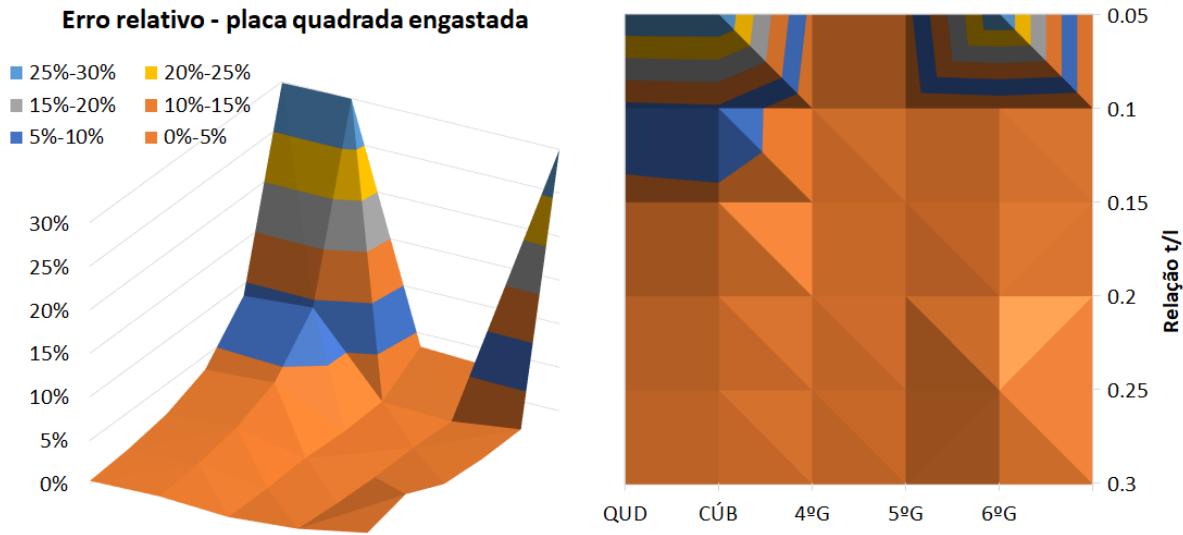
Na Figura 39 e na Figura 39, constataram-se os mesmos problemas para a aproximação de sexto grau, nas relações $t/l = 0.1$ e $t/l = 0.025$. Reforçando a hipótese de um possível matriz mal condicionamento. Em geral aumentar a base monomial ajudou na redução do erro, como nas relações $t/l = 0.05$ e $t/l = 0.0125$. Avaliando o conjunto de resultados obtidos, pode-se afirmar que o método se comporta bem neste exemplo, obtendo resultados relevantes, para uma relação de até $t/l = 0.1$, e a aproximação quártica produzindo um erro aceitável para $t/l = 0.05$. Como já discutido anteriormente, sobre as deficiências da aproximação linear, os resultados foram desconsiderados neste estudo.

FIGURA 39 – Efeito de *Shear Locking* em uma placa engastada



Fonte: O autor

FIGURA 40 – Efeito de *Shear Locking* em uma placa engastada



Fonte: O autor

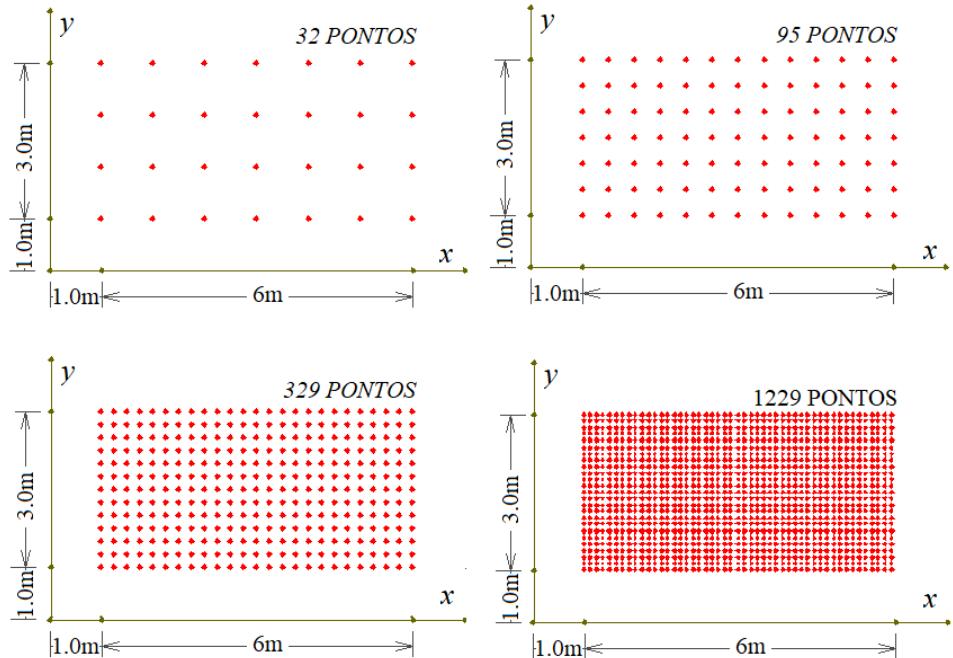
Outros exemplos de placas quadradas podem ser vistos no Apêndice A.

6.2 PLACA RETANGULAR

Para fins de simplificação os gráficos apresentam os números 1, 2, 3, 4 para as discretizações de 32, 95, 329, 1229 pontos respectivamente, seguidas pelas letras *a*, *b*, *c* para aproximação linear, quadrática e cúbica respectivamente.

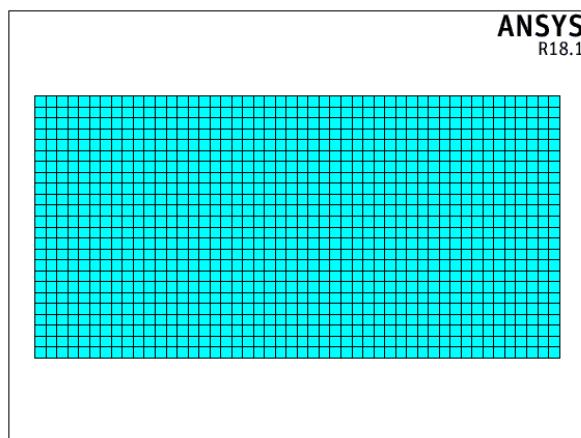
Para aplicação do MLPG, utilizando MQMO para aproximação das variáveis, foi discretizada uma placa retangular de $6m \times 3m$, para aproximação com uma base polinomial linear, quadrática e cúbica cada uma delas para nuvens de 32, 95, 329 e 1229 pontos, (ver Figura 41). Enquanto no ANSYS uma malha com elementos de formato quadrado de $0.125m$ de lado, semelhante a discretização 4, (ver Figura 42).

FIGURA 41 – Nuvem de pontos para cada discretização de placa retangular



Fonte: O autor

FIGURA 42 – Discretizações placa retangular ANSYS

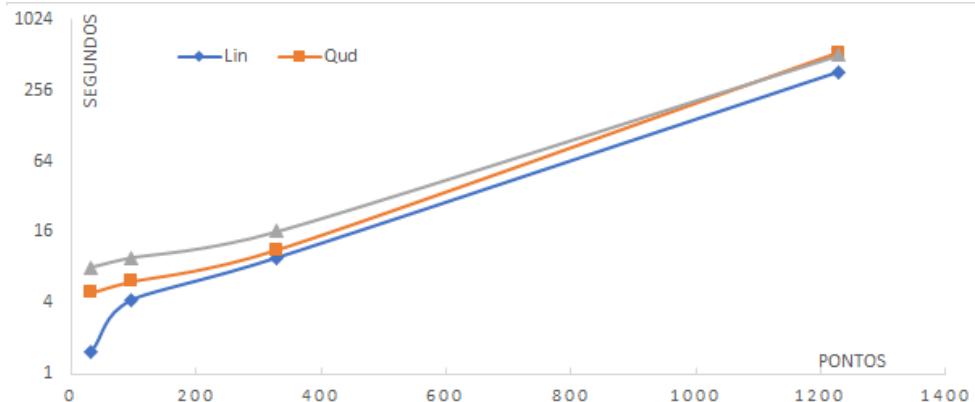


Fonte: O Autor

As placas possuem 1.0m de espessura e um carregamento aplicado de $0,64kN/m^2$.

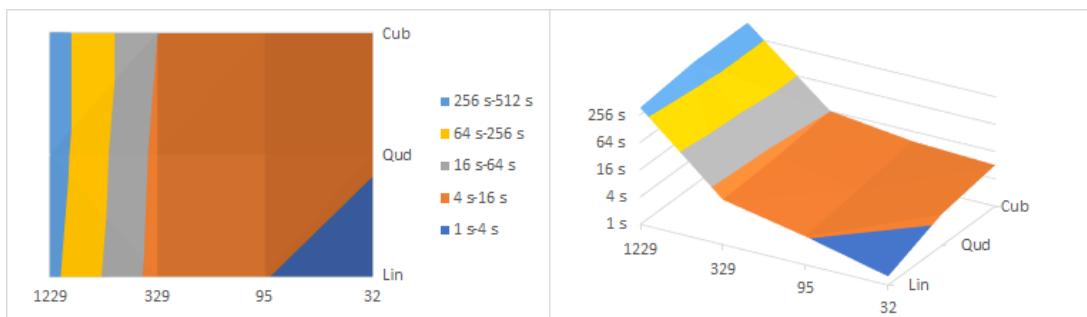
O custo computacional, foi medido em segundos, contando desde a leitura do arquivo de entrada até a gravação do arquivo de saída, considerando uma placa retangular apoiada, verificou-se um aumento diretamente proporcional ao número de pontos e o tipo de aproximação, mas irrelevante quando se variam as vinculações de borda. Um comparativo entre o custo computacional em função do número de pontos para uma aproximação linear, quadrática e cúbica pode ser vista na Figura 43 e outro comparativo em função do número de pontos e do tipo da aproximação na Figura 44.

FIGURA 43 – Custo computacional para placa retangular - 1



Fonte: O Autor

FIGURA 44 – Custo computacional para placa retangular - 2



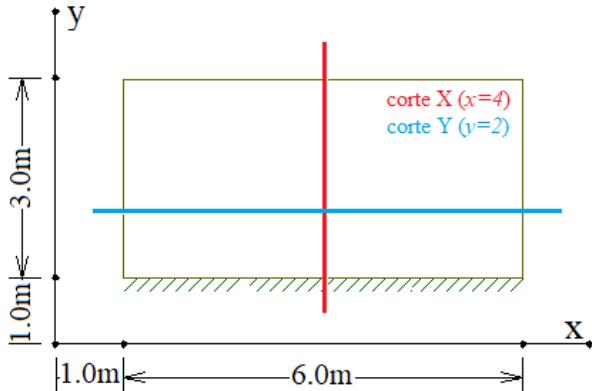
Fonte: O Autor

Na Figura 43 e na Figura 44, o custo computacional aumenta de forma exponencial, isto por que o número de pontos também aumenta exponencialmente de uma discretização para outra (ver Figura 41). Com o aumento da ordem da base monomial, também é aumentado o número de nós necessários para obtenção da função de aproximação. A quantidade foi a mesma que para as placas de formato quadrado, com 7, 10 e 19 pontos para base linear, quadrática e cúbica respectivamente.

6.2.1 Exemplo 03 - Placa Retangular em Balanço – Engaste maior lado

Neste exemplo tem-se uma placa em balanço, como pode ser visto na Figura 45. Os resultados são apresentados para os cortes X ($x = 4m$) e para o corte Y ($y = 2m$).

FIGURA 45 – Placa em Balanço

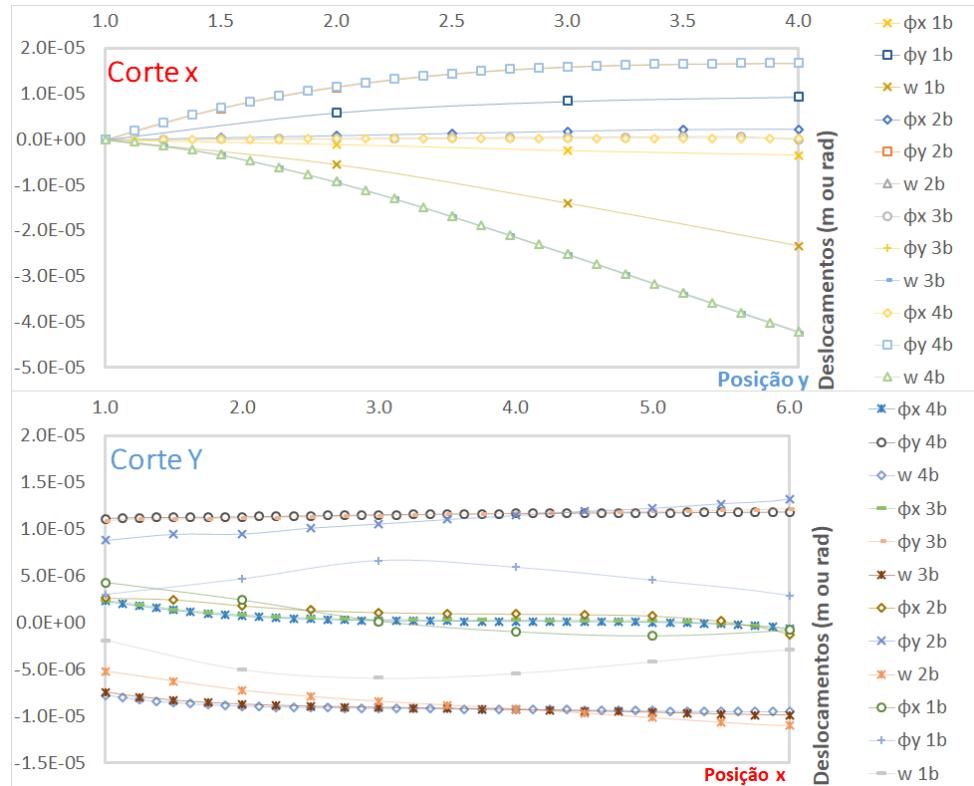


Fonte: O Autor

6.2.1.1 Estudo de Convergência

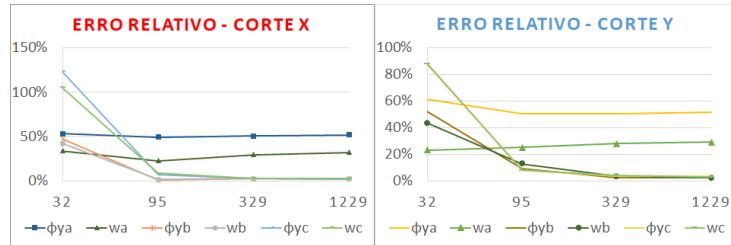
A Figura 46 mostra os deslocamentos obtidos para uma nuvem de 32(1), 95(2), 329(3) e 1229(4) pontos. O erro relativo para cada discretização analisada pode ser visto na Figura 47. Como o corte X é um eixo de simetria, as rotações na direção x ϕ_x apresentam valores próximos de zero, e por se tratarem de números de uma ordem de grandeza muito pequena, ocorrem erros de arredondamento da máquina.

FIGURA 46 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - estudo de convergência



Fonte: O Autor

FIGURA 47 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - estudo de convergência



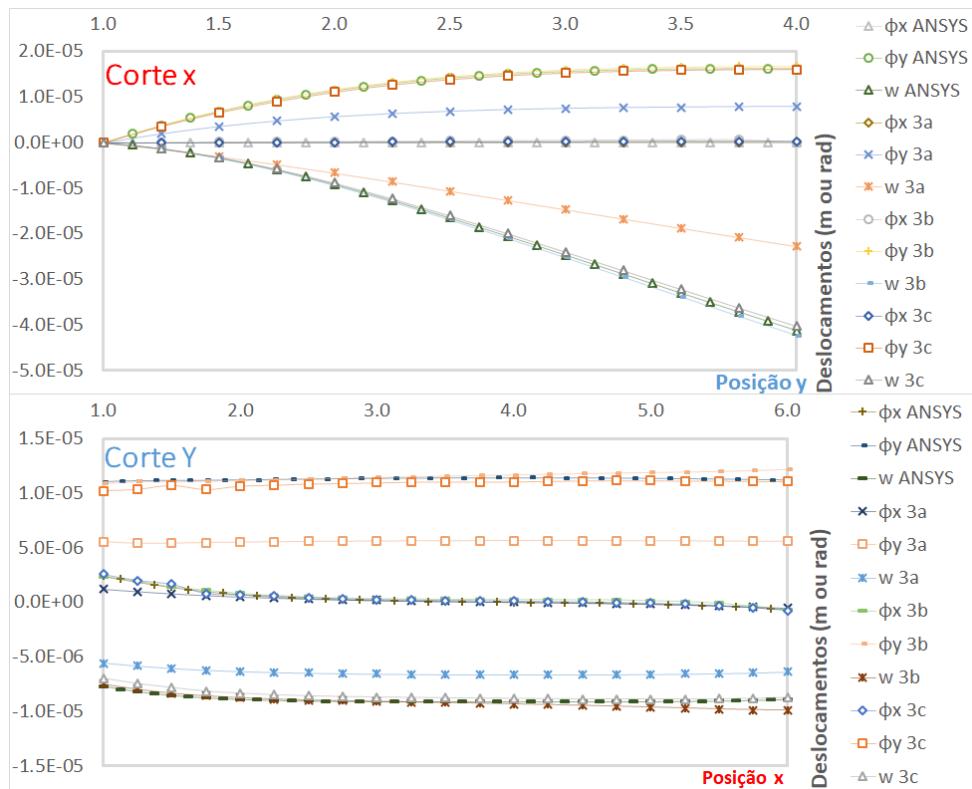
Fonte: O Autor

Na Figura 46 e na Figura 47 a nuvem de 32 pontos apresenta deslocamentos bem distantes dos demais e a partir da discretização com 95 nós, os resultados já se aproximam da convergência. Levando-se em conta a precisão dos resultados, quando comparados ao MEF, e o custo computacional, a nuvem de 329 pontos se mostrou a melhor opção para discretização do problema de flexão de placas.

6.2.1.2 Influência do tipo de Aproximação

Tomando a nuvem de 329 pontos como referência, os deslocamentos para o corte X e Y podem ser visualizados na Figura 48, e erro relativo na Figura 49, onde foi feita uma variação no tipo de aproximação, levando-se em conta aproximações lineares(a), quadráticas(b) e cúbicas(c). Como valor de referência foram utilizados os resultados obtidos pelo MEF.

FIGURA 48 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - Tipos de Aproximação



Fonte: O Autor

FIGURA 49 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - Tipos de Aproximação



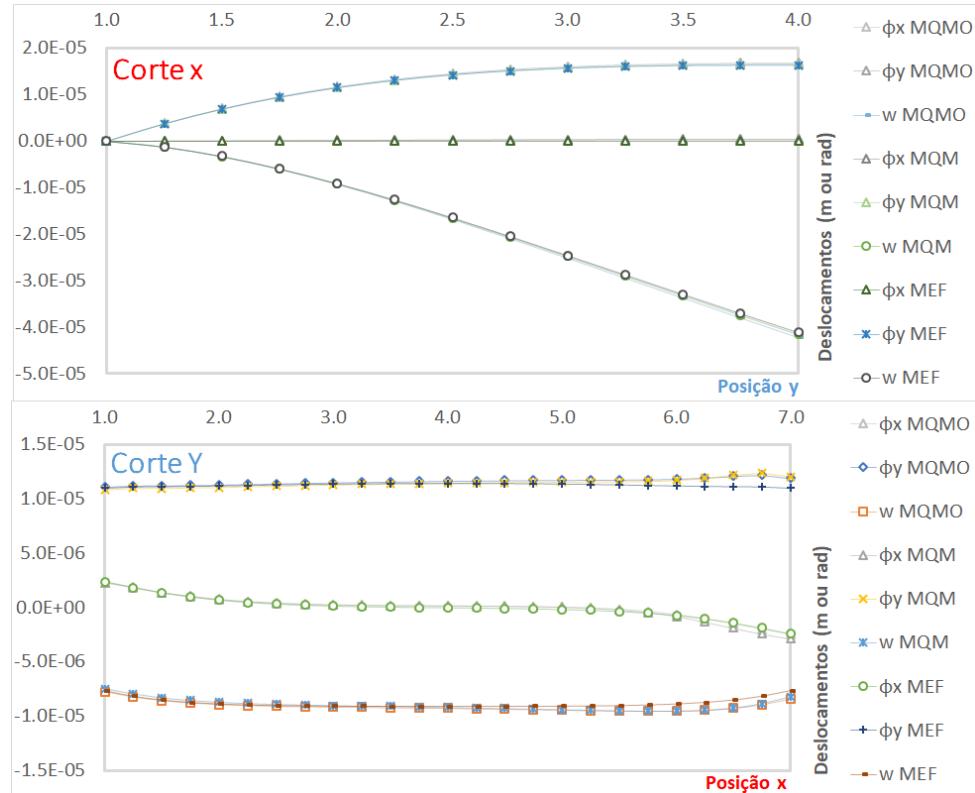
Fonte: O Autor

Como pode ser visto na Figura 48 e Figura 49, a aproximação quadrática foi a mais eficiente para resolução do problema, apresentando uma convergência mais rápida e resultados mais precisos. A aproximação linear continua convergindo para um resultado distante do esperado.

6.2.1.3 Validação de Resultados

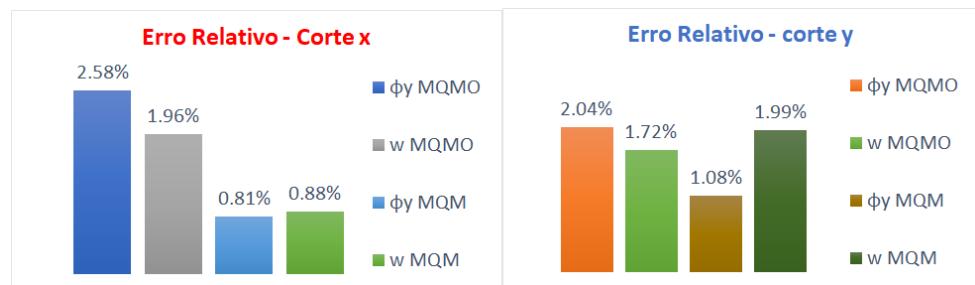
Utilizando uma nuvem de 329 pontos e uma aproximação quadrática foram comparados o MEF, MLPG utilizando o Método de Mínimos Quadrados Móveis com o MLPG utilizando o MQMO. Na Figura 50 são mostrados os deslocamentos para cada metodologia aplicada e na Figura 51 o erro relativo para o MQM e MQMO comparado ao MEF.

FIGURA 50 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - validação



Fonte: O Autor

FIGURA 51 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - validação



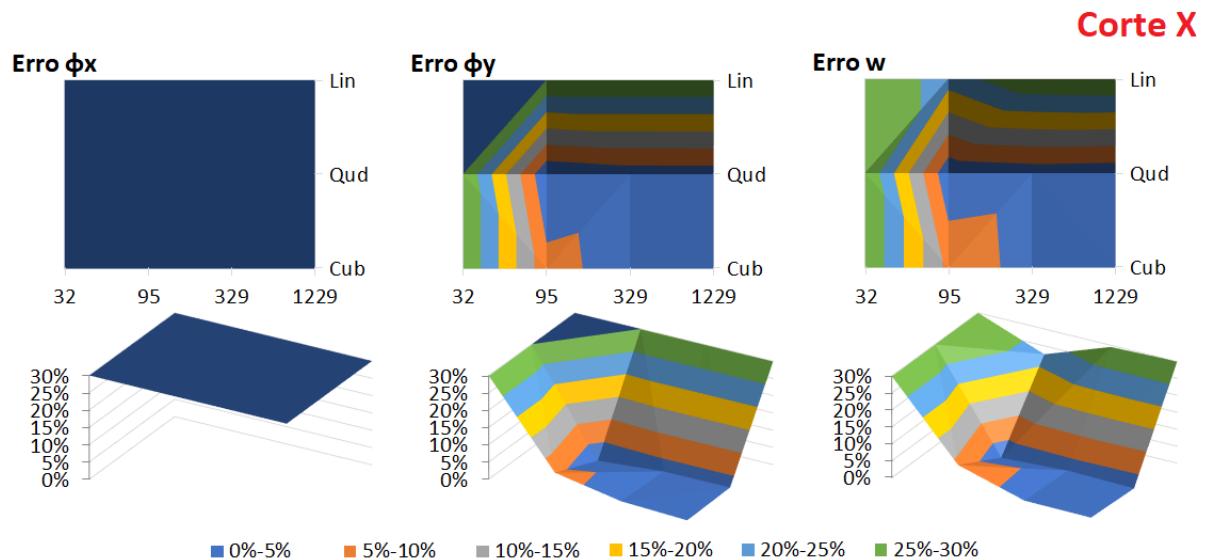
Fonte: O Autor

Os resultados obtidos são bastante satisfatórios, como ilustrado na Figura 50 os deslocamentos foram muito próximos para as aproximações com MQMO, tanto da outra abordagem do MLPG utilizando MQM, quanto do MEF. Os erros obtidos (ver Figura 51) foram pequenos, embora maiores que os obtidos no MQM. Mas se considerando a redução expressiva no custo computacional, o MQMO apresenta potencial de se tornar mais competitivo. Como já explicado anteriormente, em função do eixo de simetria da placa, a rotação ϕ_x por se tratar de um número muito pequeno, carrega um grande erro, em função de arredondamentos da máquina, sendo assim omitido nos gráficos de erro relativo.

Por fim, a Figura 52 e a Figura 53 mostram o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas.

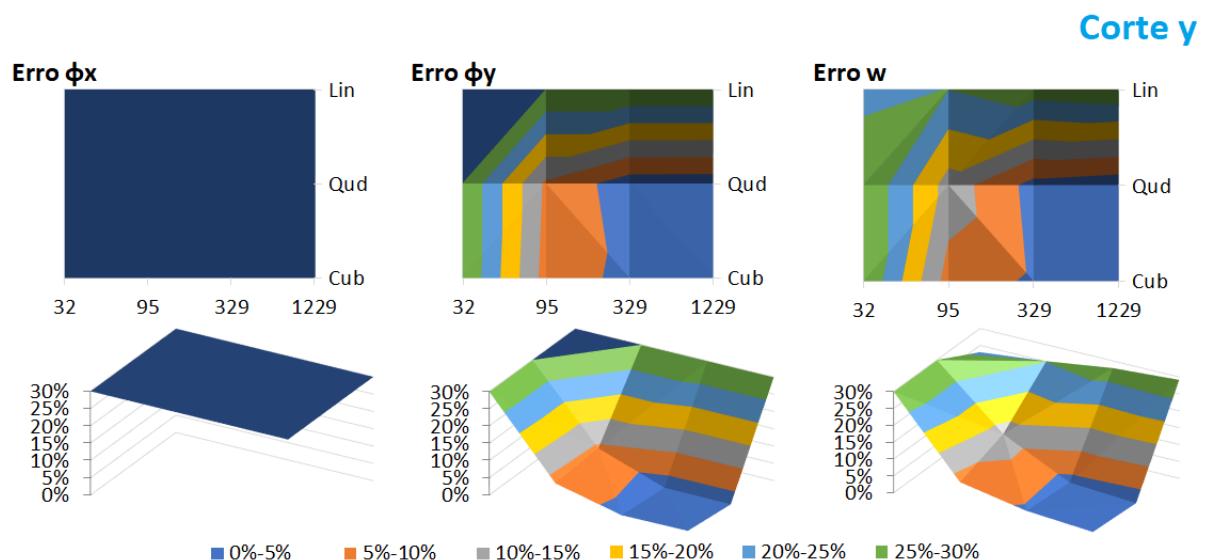
Vale ressaltar que os erros foram calculados como uma média do erro mostrado na Equação 6.1, onde leva-se em conta os resultados obtidos nos pontos em cada corte com o MLPG utilizando MQMO, e os resultados obtidos para os mesmos pontos utilizando o MEF (ANSYS).

FIGURA 52 – Erro Relativo Total: Placa Retangular em Balanço - engaste no maior lado - corte X



Fonte: O Autor

FIGURA 53 – Erro Relativo Total: Placa Retangular em Balanço - engaste no maior lado - corte Y



Fonte: O Autor

Observando a Figura 52 e a Figura 53 pode-se notar todos os pontos discutidos anteriormente. A aproximação de ordem linear converge para resultados distantes dos esperados, a aproximação cúbica demora

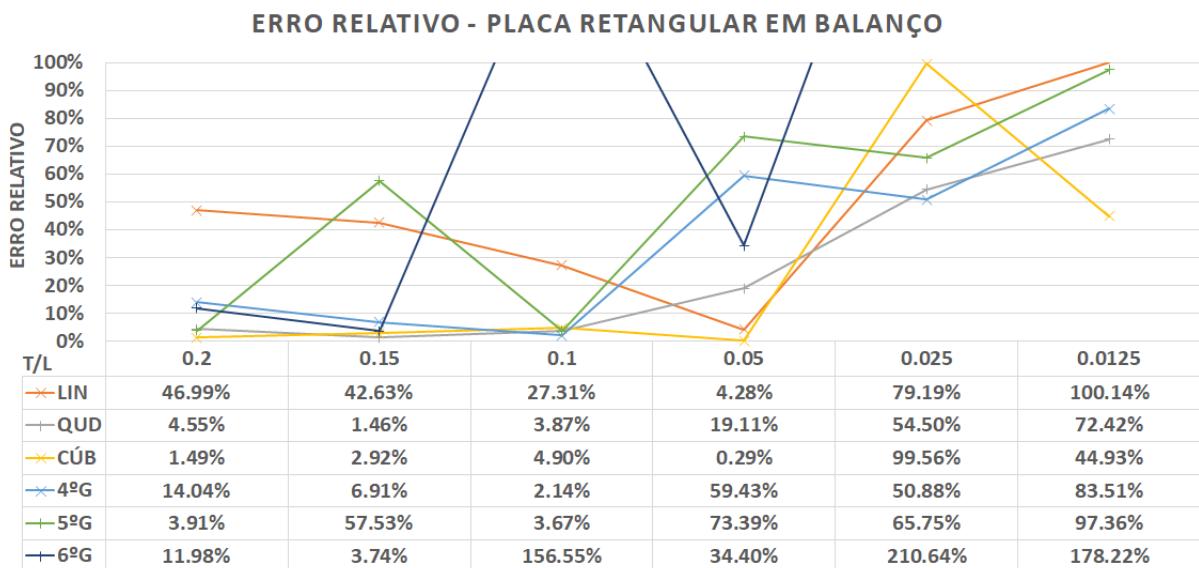
um pouco mais a atingir a convergência e a aproximação quadrática é a que melhor se comporta, apresentando uma convergência mais rápida e também resultados mais precisos. Como neste caso tem-se um eixo de simetria para o corte X, o erro para a rotação ϕ_x é alto em função de arredondamento da máquina para valores com uma ordem de grandeza muito pequena.

Vale ressaltar que resultados bons foram aqueles que apresentaram erros de até 5%, resultados medianos pra um erro de até 10%, aceitáveis, apenas para analisar o comportamento do método, valores com um erro de até 30%, e resultados ruins para um erro maior que 30%.

6.2.1.4 Variação de Espessura

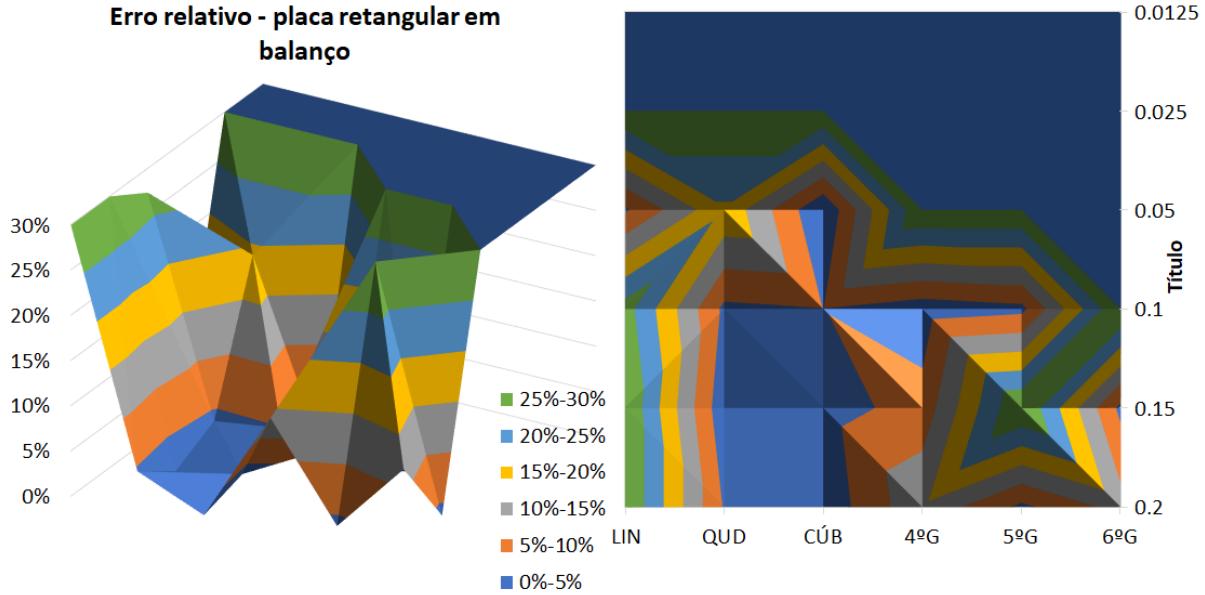
Tomando como referência a nuvem de 329 pontos, tem-se na Figura 54 a variação do erro relativo a medida que se diminui a relação t/L da placa, e na Figura 55 o erro relativo em função do tipo de aproximação e da relação t/L .

FIGURA 54 – Efeito de *Shear Locking* em uma Placa em Balanço



Fonte: O autor

FIGURA 55 – Efeito de *Shear Locking* em uma Placa em Balanço



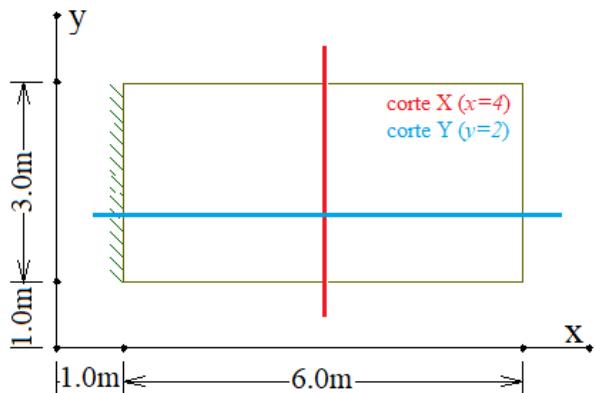
Fonte: O autor

Na Figura 54 e na Figura 55 observa-se o efeito de *shear locking*. Neste exemplo as aproximações são boas para uma relação de até $t/l = 0.1$ com as bases de quarta ordem atingindo resultados satisfatórios para uma razão $t/l = 0.05$. A base monomial de sexta ordem apresentou resultados ruins para relação superior a $t/l = 0.15$, o que prejudica a avaliação do efeito de *shear locking*. Para a base monomial de quinta ordem, no entanto, os resultados são bons para $t/l = 0.1$ e ruins para $t/l = 0.15$ o que reforça a hipótese de surgirem matrizes mal condicionadas.

6.2.2 Exemplo 04 - Placa Retangular em Balanço – Engaste menor lado

Neste exemplo tem-se uma placa em balanço, com o engaste no lado menor, como pode ser visto na Figura 45. Os resultados são apresentados para os cortes X ($x = 4m$) e para o corte Y ($y = 2$)

FIGURA 56 – Placa em Balanço

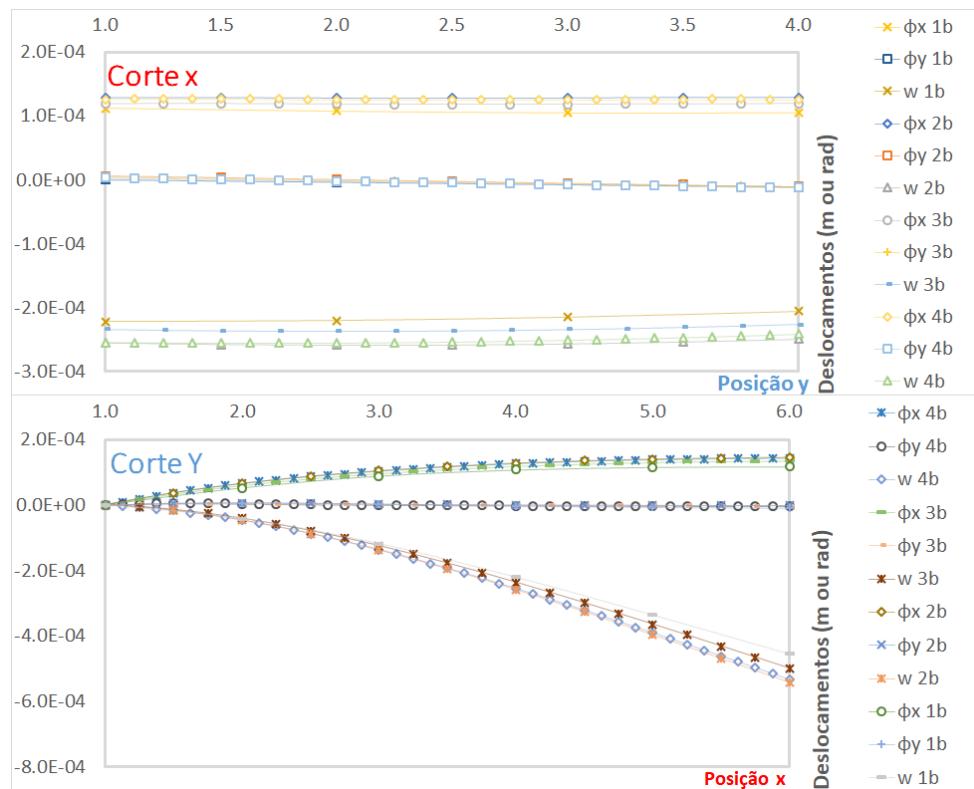


Fonte: O Autor

6.2.2.1 Estudo de Convergência

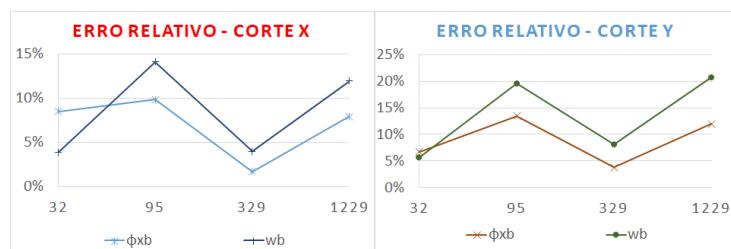
A Figura 57 mostra os deslocamentos obtidos para uma nuvem de 32(1), 95(2), 329(3) e 1229(4) pontos. O erro relativo para cada discretização analisada pode ser visto na Figura 58. Como o corte X é um eixo de simetria, as rotações na direção x ϕ_x apresentam valores próximos de zero, e por se tratarem de números de uma ordem de grandeza muito pequena, ocorrem erros de arredondamento da máquina, sendo omitidos nos gráficos.

FIGURA 57 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - estudo de convergência



Fonte: O Autor

FIGURA 58 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - estudo de convergência



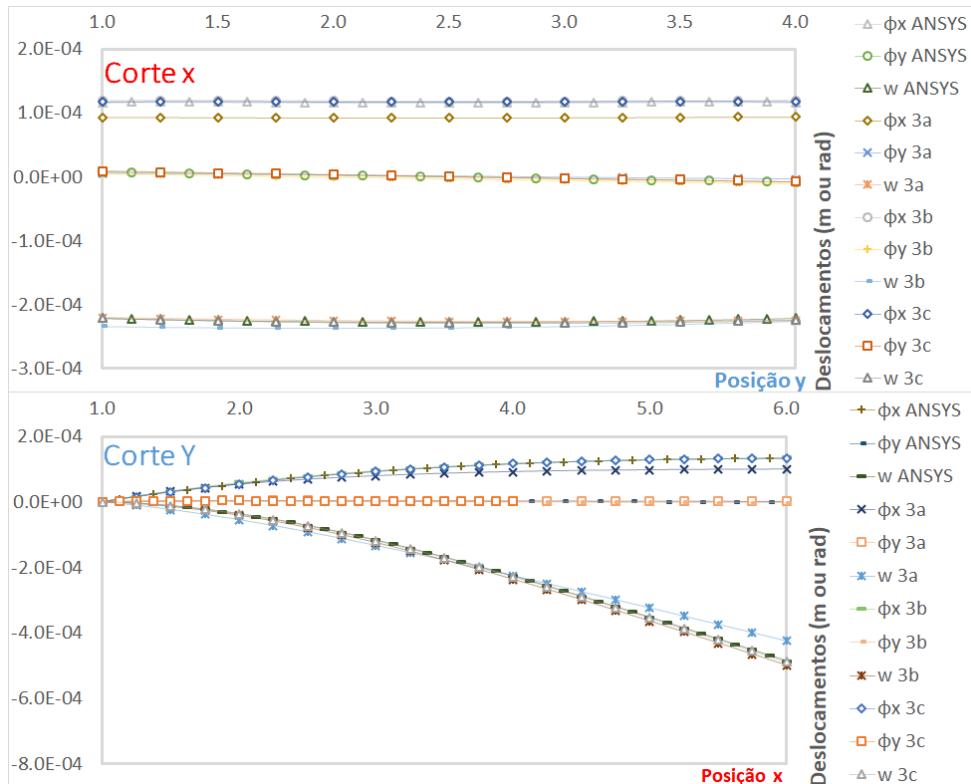
Fonte: O Autor

Levando-se em custo a precisão dos resultados, quando comparados ao MEF, e o custo computacional, a nuvem de 329 pontos se mostrou a melhor opção para discretização do problema de flexão de placas.

6.2.2.2 Influência do tipo de Aproximação

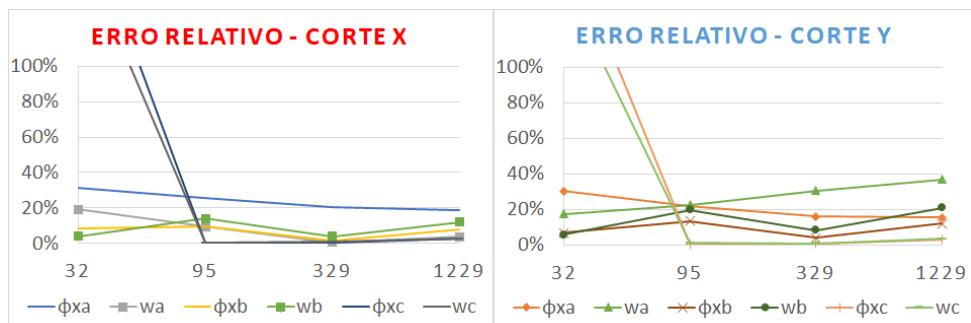
Tomando a nuvem de 329 pontos como referência os deslocamentos para o corte X e Y podem ser visualizados na Figura 59, e erro relativo na Figura 60, onde foi feita uma variação no tipo de aproximação, levando-se em conta aproximações lineares(a), quadráticas(b) e cúbicas(c). Como valor de referência foram utilizados os resultados obtidos pelo MEF.

FIGURA 59 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - Tipos de Aproximação



Fonte: O Autor

FIGURA 60 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - Tipos de Aproximação



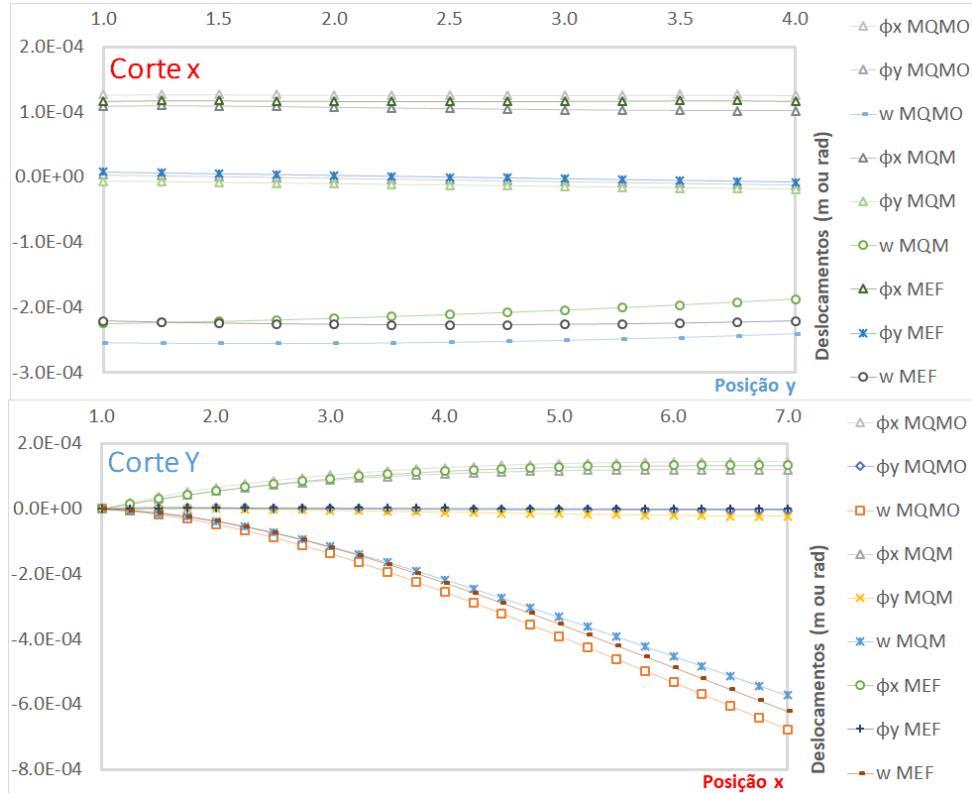
Fonte: O Autor

Como pode ser visto na Figura 59 e Figura 60 a aproximação quadrática foi a mais eficiente para resolução do problema. Para este exemplo, e outros onde o vão é maior, começam a ocorrer erros nos resultados, em parte pelo efeito de *shear locking*, mas considerando uma espessura maior, os erros continuam a ocorrer, sendo não apenas relacionados ao *shear locking*. Discretizações com um maior número de pontos não foram possíveis de ser calculadas por limitação da máquina, não sendo capaz de resolver o sistema para uma nuvem de 4747 pontos.

6.2.2.3 Validação de Resultados

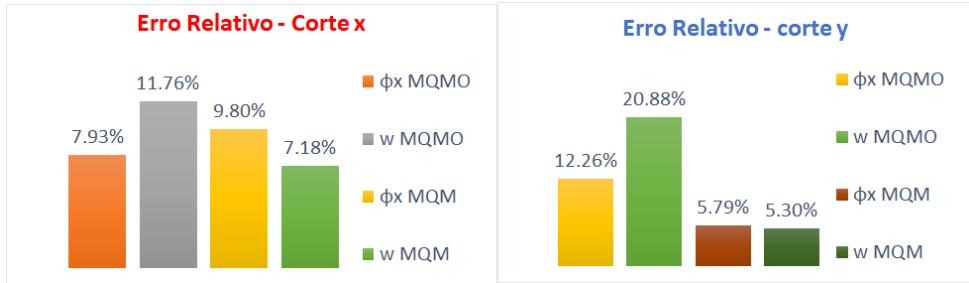
Utilizando uma nuvem de 329 pontos e uma aproximação quadrática foram comparados o MEF, MLPG utilizando o Método de Mínimos Quadrados Móveis com o MLPG utilizando o MQMO. Na Figura 61 são mostrados os deslocamentos para cada metodologia aplicada e na Figura 62 o erro relativo para o MQM e MQMO comparado ao MEF.

FIGURA 61 – Deslocamentos Obtidos: Placa Retangular em Balanço - validação



Fonte: O Autor

FIGURA 62 – Erro Relativo: Placa Retangular em Balanço - validação



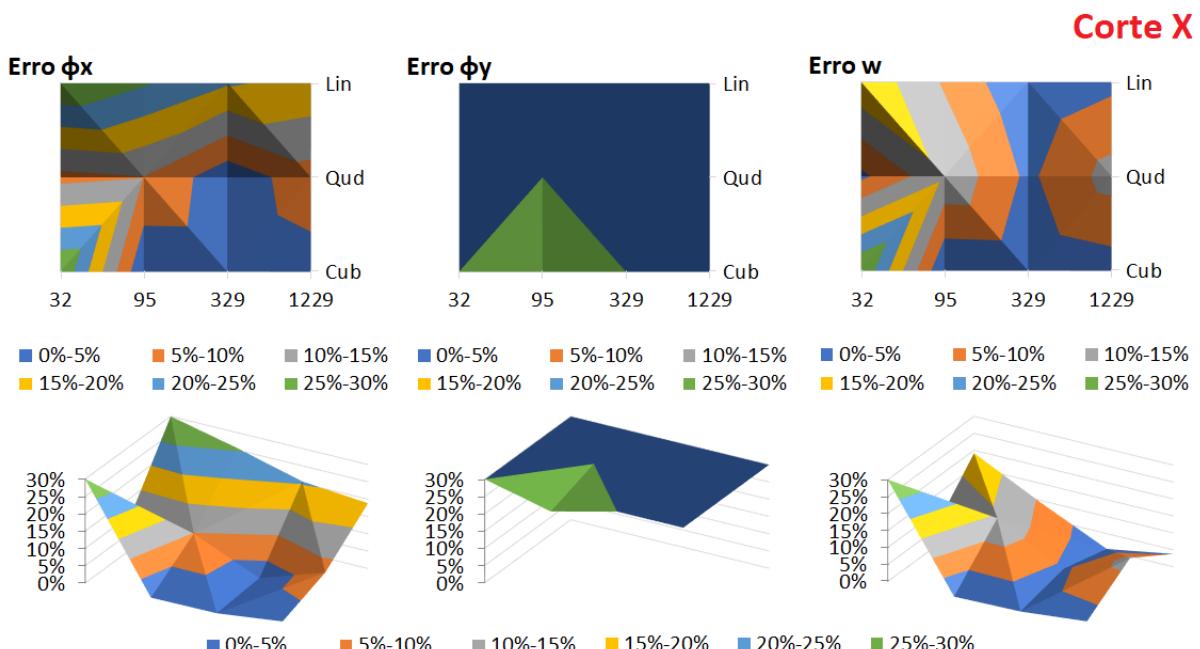
Fonte: O Autor

Os resultados obtidos se tornaram bem distantes dos valores de referência, como ilustrado na Figura 61 os deslocamentos se tornaram distantes aproximações com MQMO, relacionado ao problema identificado em casos com vãos maiores. Os erros obtidos (ver Figura 62) foram grandes, se comparados a outros exemplos, sendo necessária uma avaliação mais aprofundada a fim de corrigir estas deficiências do método.

Por fim, a Figura 63 e a Figura 64 mostram o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas.

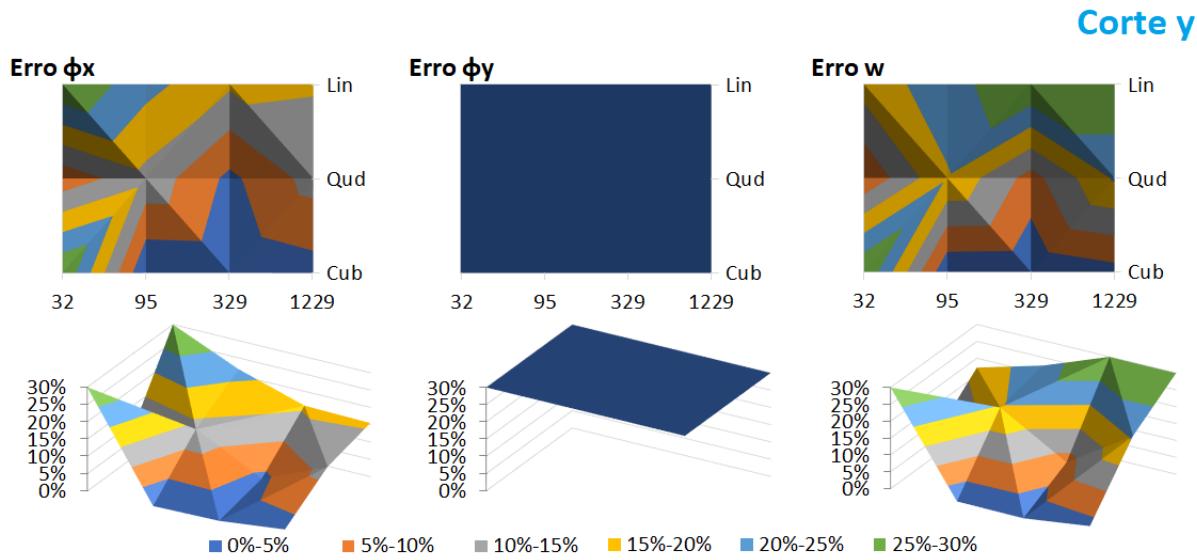
Vale ressaltar que os erros foram calculados como uma média do erro mostrado na Equação 6.1, onde leva-se em conta os resultados obtidos nos pontos em cada corte com o MLPG utilizando MQMO, e os resultados obtidos para os mesmos pontos utilizando o MEF (ANSYS).

FIGURA 63 – Erro Relativo Total: Placa Retangular em Balanço - engaste no menor lado - corte X



Fonte: O Autor

FIGURA 64 – Erro Relativo Total: Placa Retangular em Balanço - engaste no menor lado - corte Y



Fonte: O Autor

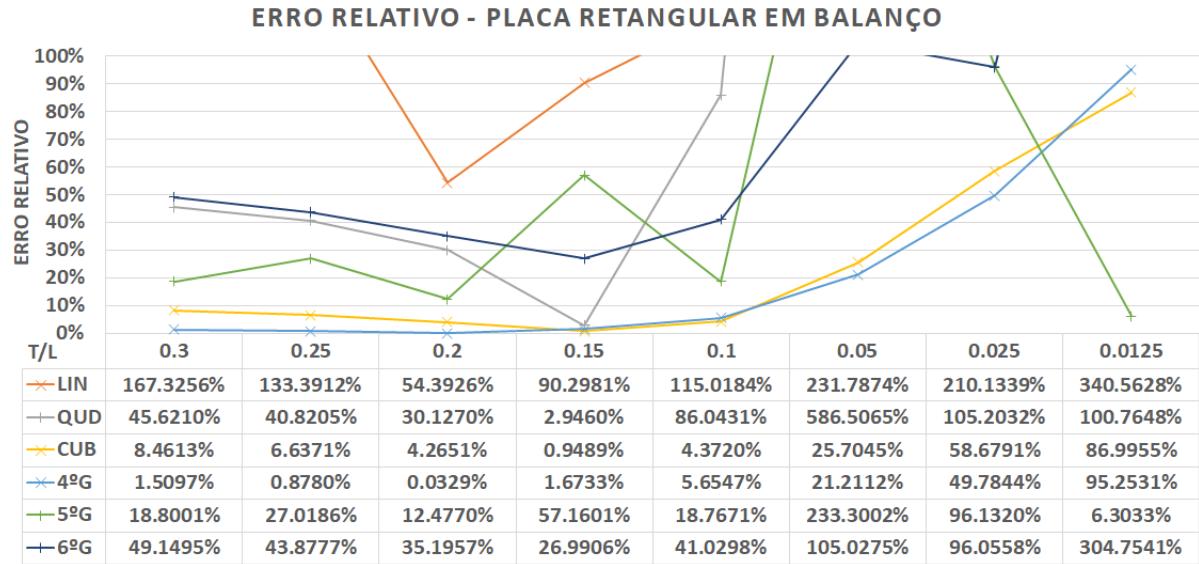
Observando a Figura 63 e a Figura 64 pode-se notar todos os pontos discutidos anteriormente. A aproximação de ordem linear converge para resultados distantes dos esperados, a aproximação cúbica demora um pouco mais a atingir a convergência e a aproximação quadrática é a que melhor se comporta, apresentando uma convergência mais rápida e também resultados mais precisos. Como neste caso tem-se um eixo de simetria para o corte X, o erro para a rotação ϕ_y é alto em função de arredondamento da máquina para valores com uma ordem de grandeza muito pequena.

Vale ressaltar que resultados bons foram aqueles que apresentaram erros de até 5%, resultados medianos pra um erro de até 10%, aceitáveis, apenas para analisar o comportamento do método, valores com um erro de até 30%, e resultados ruins para um erro maior que 30%.

6.2.2.4 Variação de Espessura

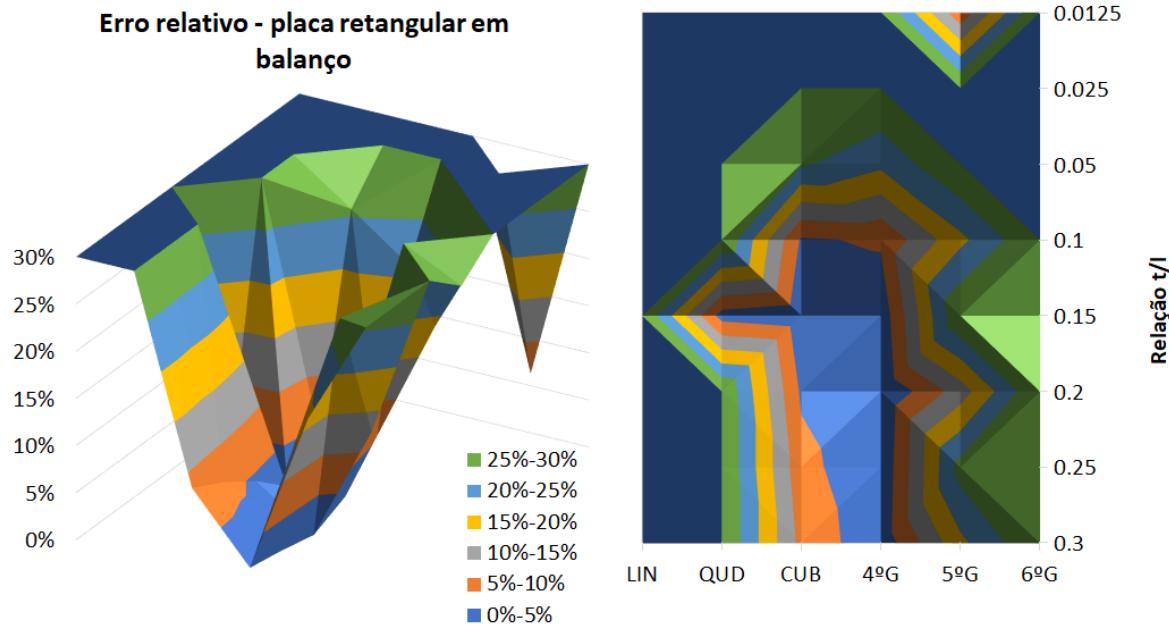
Tomando como referência a nuvem de 329 pontos, tem-se na Figura 65 a variação do erro relativo a medida que se diminui a relação t/L da placa, e na Figura 66 o erro relativo em função do tipo de aproximação e da relação t/L .

FIGURA 65 – Efeito de *Shear Locking* em uma Placa em Balanço



Fonte: O autor

FIGURA 66 – Efeito de *Shear Locking* em uma Placa em Balanço



Fonte: O autor

Na Figura 65 e na Figura 66 observa-se o efeito de *shear locking*. Novamente o método se mostrou satisfatório para uma relação de até $t/l = 0.1$, com as aproximações cúbicas e quârticas chegando a bons resultados para razão $t/l = 0.05$. Para relação $t/l = 0.05$ as aproximações quadráticas, de quinto e sexto grau, apresentam uma perda significativa de precisão, com a aproximação quadrática chegando a 600%.

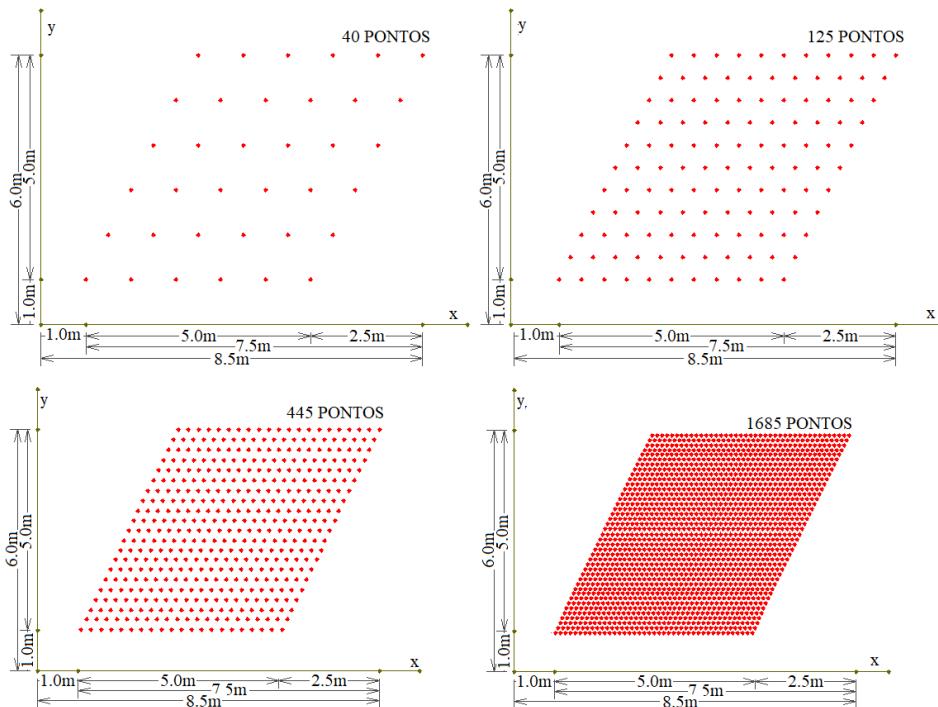
Outros exemplos para placa retangular podem ser vistos no Apêndice B.

6.3 PLACA ECONSA

Para fins de simplificação os gráficos apresentam os números 1, 2, 3, 4 para as discretizações de 40, 125, 445, 1685 pontos respectivamente, seguidas pelas letras *a*, *b*, *c* para aproximação linear, quadrática e cúbica respectivamente.

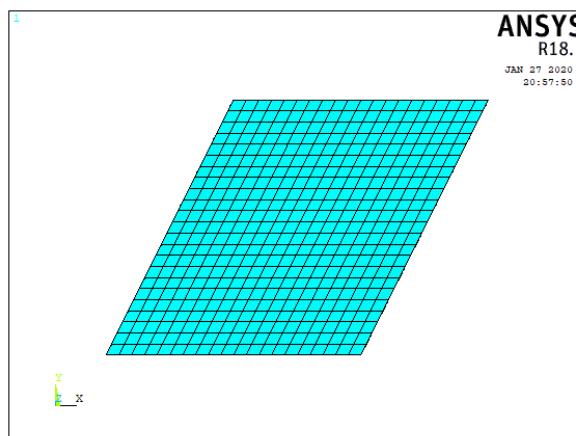
Para o MQMO foi discretizada uma placa esconsa de $5m \times 5.6m$, utilizando aproximação linear, quadrática e cúbica com 40, 125, 445 e 1685 pontos, (ver Figura 67). Enquanto no ANSYS uma malha com elementos de formato esconso de $0.125m$ de lado semelhante a discretização 4, (ver Figura 68)

FIGURA 67 – Nuvem de pontos para cada discretização de placa esconsa



Fonte: O autor

FIGURA 68 – Discretizações placa esconsa ANSYS

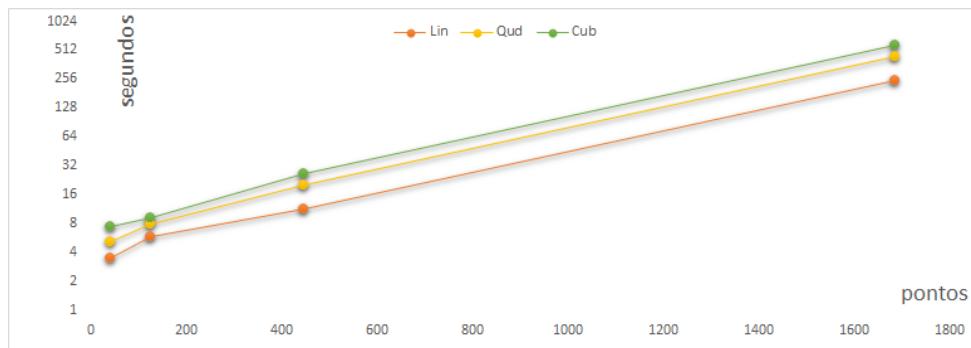


Fonte: O Autor

As placas possuem $1.0m$ de espessura e um carregamento aplicado de $0,64kN/m^2$.

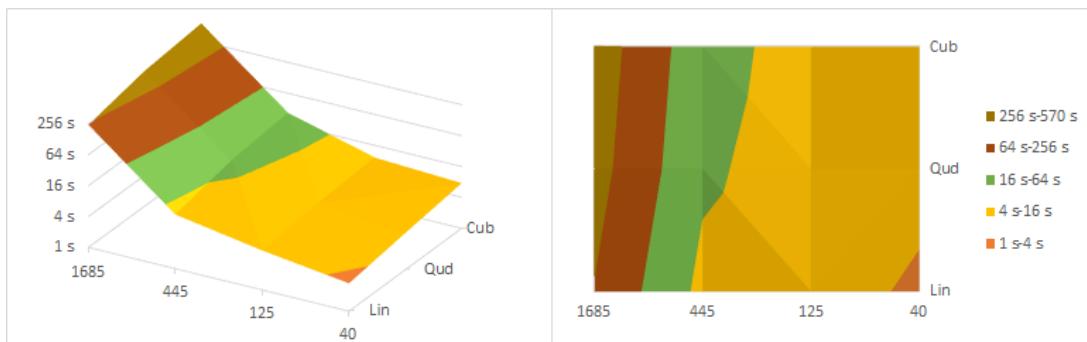
O custo computacional, foi medido em segundos, contando desde a leitura do arquivo de entrada até a gravação do arquivo de saída, tomando como referência uma placa engastada nos lados esconsos. Verificou-se um aumento diretamente proporcional ao número de pontos e o tipo de aproximação, mas insignificante com a variação das vinculações de borda. Um comparativo entre o custo computacional em função do número de pontos para uma aproximação linear, quadrática e cúbica pode ser vista na Figura 69 e outro comparativo em função do número de pontos e do tipo da aproximação na Figura 70.

FIGURA 69 – Custo computacional para placa esconsa - 1



Fonte: O Autor

FIGURA 70 – Custo computacional para placa esconsa - 2



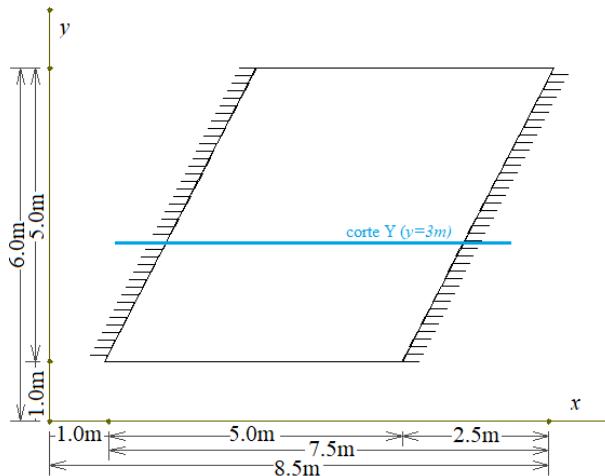
Fonte: O Autor

Na Figura 69 e na Figura 70 são mostrados o custo computacional dado em segundos, para aproximação linear, quadrática e cúbica; utilizando as nuvens de 45, 125, 445 e 1685 nós. O comportamento foi o mesmo apresentado para os demais formatos de placas, com o tempo aumentando de acordo com a ordem da base monomial uma vez que são necessários um número maior de nós no subdomínio local.

6.3.1 Exemplo 05 - Placa Esconsa Bi-Engastada

Neste exemplo tem-se uma placa bi-engastada nos lados esconsos, como pode ser visto na Figura 71. Foi feita a análise apenas para o corte Y ($y = 3m$), traçar um corte X na placa não foi possível em função do lado esconso, uma possível solução seria alterar a formulação adotando uma nova direção x' paralela ao lado esconso da placa e assim, obter as coordenadas para o eixo.

FIGURA 71 – Placa Esconsa Bi-Engastada

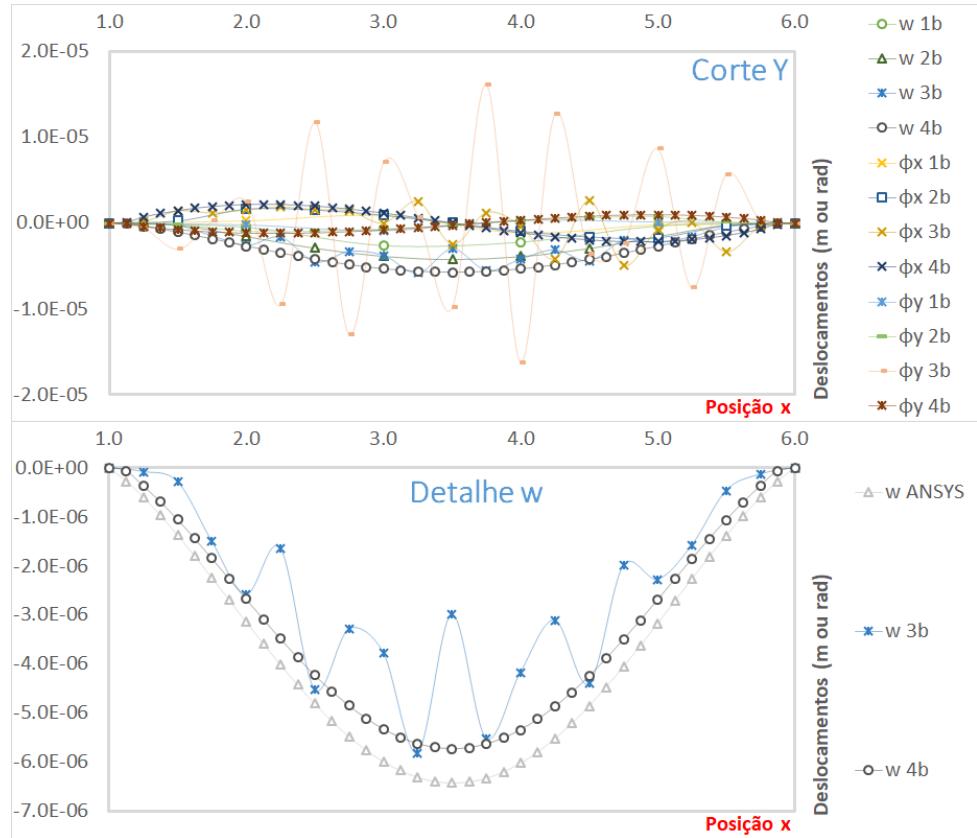


Fonte: O Autor

6.3.1.1 Estudo de Convergência

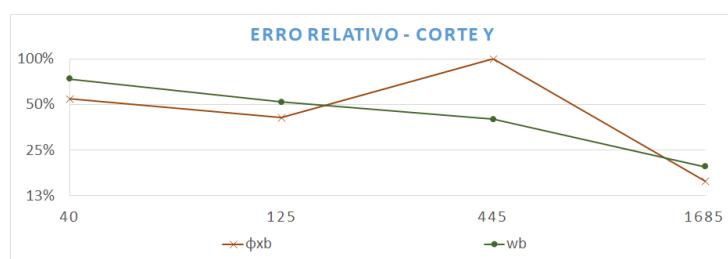
A Figura 72 mostra os deslocamentos obtidos para uma nuvem de 40(1), 125(2), 445(3) e 1685(4) pontos. O erro relativo para cada discretização analisada pode ser visto na Figura 73.

FIGURA 72 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa Bi-Engastada - estudo de convergência



Fonte: O Autor

FIGURA 73 – Erro Relativo: Placa Esconsa Bi-Engastada - estudo de convergência



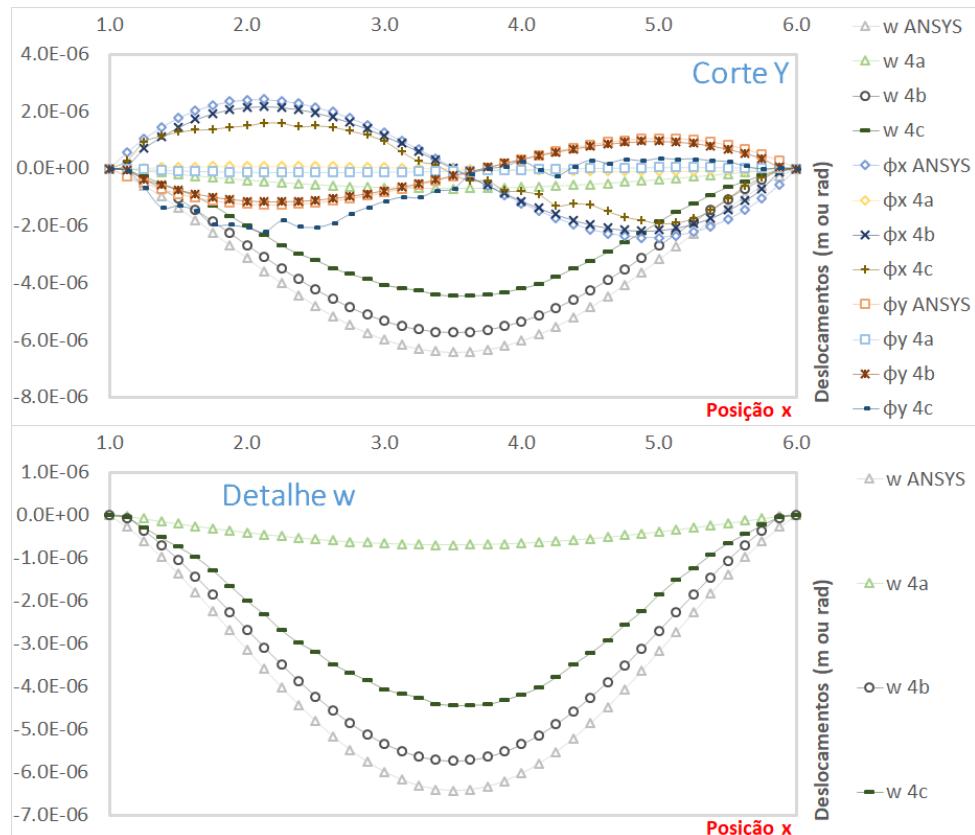
Fonte: O Autor

Na Figura 72 a terceita discretização (445 nós) apresentou resultados inesperados, os valores dos deslocamentos oscilam em torno dos valores reais. Como pode ser visto na Figura 73 o erro para a nuvem de 445 pontos foi maior. A causa desse fenômeno não foi identificada, mas como se pode notar a convergência é atingida na nuvem de 1685 nós. Uma discretização para uma nuvem de 6565 nós, não foi possível ser calculada por limitações da máquina. Sendo assim foi utilizada a discretização de 1685 nós como referência, embora esta ainda esteja distante dos valores obtidos no MEF, o que mostra uma deficiência no MQMO para representar este exemplo.

6.3.1.2 Influência do tipo de Aproximação

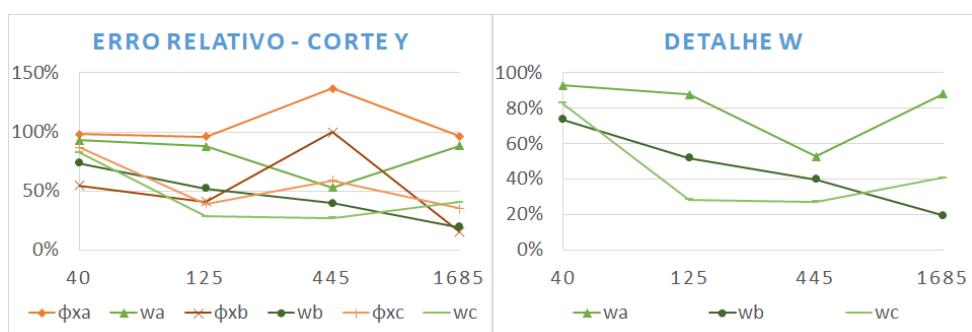
Tomando como referência a nuvem de 1685 pontos os deslocamentos para o corte Y podem ser visualizados na Figura 74, e erro relativo na Figura 75, onde foi feita uma variação no tipo de aproximação, levando-se em conta aproximações lineares(a), quadráticas(b) e cúbicas(c). Como valor de referência foram utilizados os resultados obtidos pelo MEF.

FIGURA 74 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa Bi-Engastada - Tipos de Aproximação



Fonte: O Autor

FIGURA 75 – Erro Relativo: Placa Esconsa Bi-Engastada - Tipos de Aproximação



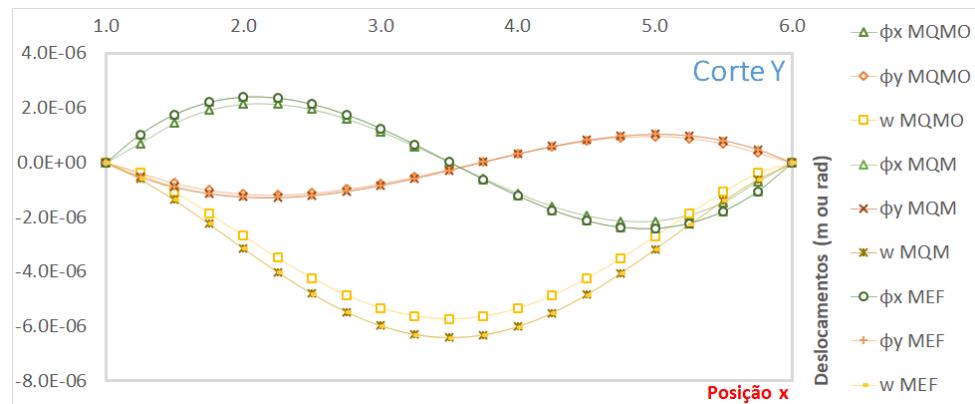
Fonte: O Autor

Na Figura 74 o valor dos deslocamentos obtidos variou bastante para cada tipo de aproximação, embora tenha sido semelhante a outros casos, com a aproximação linear muito distante dos valores de referência, obtidos no MEF, para a aproximação cúbica estes valores não estão tão distantes, mas ainda não são aceitáveis. Os melhores resultados foram os obtidos para aproximação quadrática, embora não tenham coincidido com os valores de referência, apresentando uma variação de 0.001mm para o ponto máximo de deslocamento transversal. Fica evidente portanto uma deficiência no MQMO para este exemplo específico, resultados semelhantes também foram constatados para placa esconsa em balanço (ver Figura 132, erro para 445 pontos).

6.3.1.3 Validação de Resultados

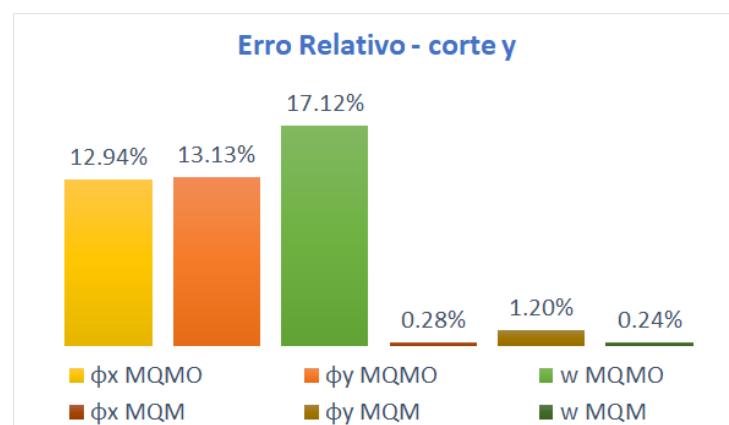
Utilizando uma nuvem de 1685 pontos e uma aproximação quadrática foram comparados o MEF, MLPG utilizando o Método de Mínimos Quadrados Móveis com o MLPG utilizando o MQMO. Na Figura 76 são mostrados os deslocamentos para cada metodologia aplicada e na Figura 77 o erro relativo para o MQM e MQMO comparado ao MEF que já é um método consolidado.

FIGURA 76 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa Bi-Engastada - validação



Fonte: O Autor

FIGURA 77 – Erro Relativo: Placa Esconsa Bi-Engastada - validação



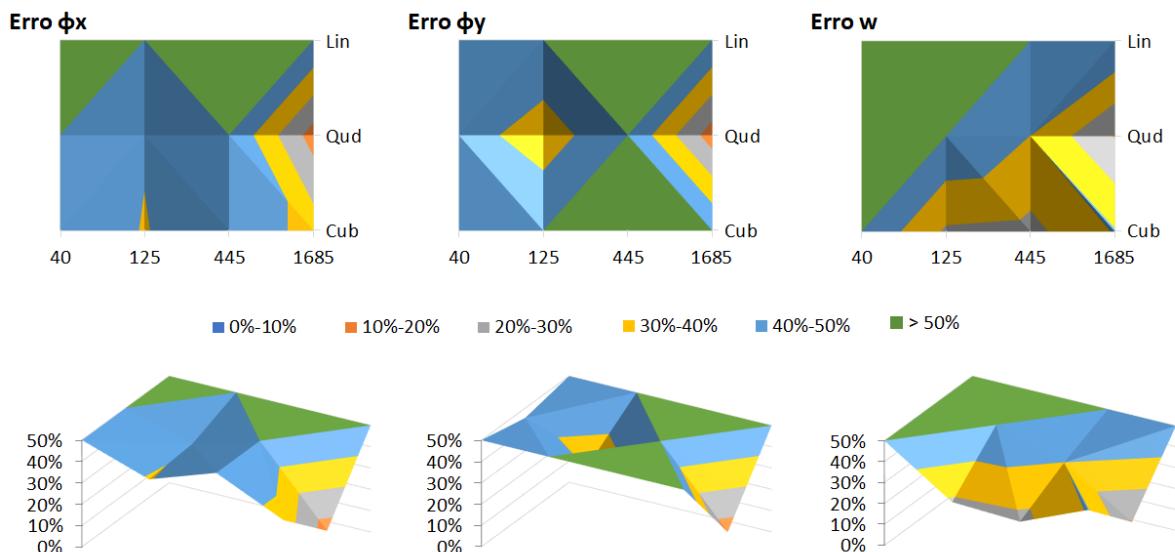
Fonte: O Autor

Neste exemplo os deslocamentos começaram a se distanciar, e os erros se tornaram grandes quando comparados ao MQM. Além disso, problemas foram constatados na discretização de 445 pontos onde os valores dos deslocamentos obtidos oscilam muito. A fim de identificar os erros numéricos que resultaram em todos esse problemas, uma análise mais aprofundada seria necessária para este caso, tal como para placa esconsa em balanço (ver Seção C.4).

Por fim, a Figura 78 mostra o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas.

Vale ressaltar que os erros foram calculados como uma média do erro mostrado na Equação 6.1, onde leva-se em conta os resultados obtidos nos pontos em cada corte com o MLPG utilizando MQMO, e os resultados obtidos para os mesmos pontos utilizando o MEF (ANSYS).

FIGURA 78 – Erro Relativo Total: placa esconsa bi-engastada nos lados esconsos



Fonte: O Autor

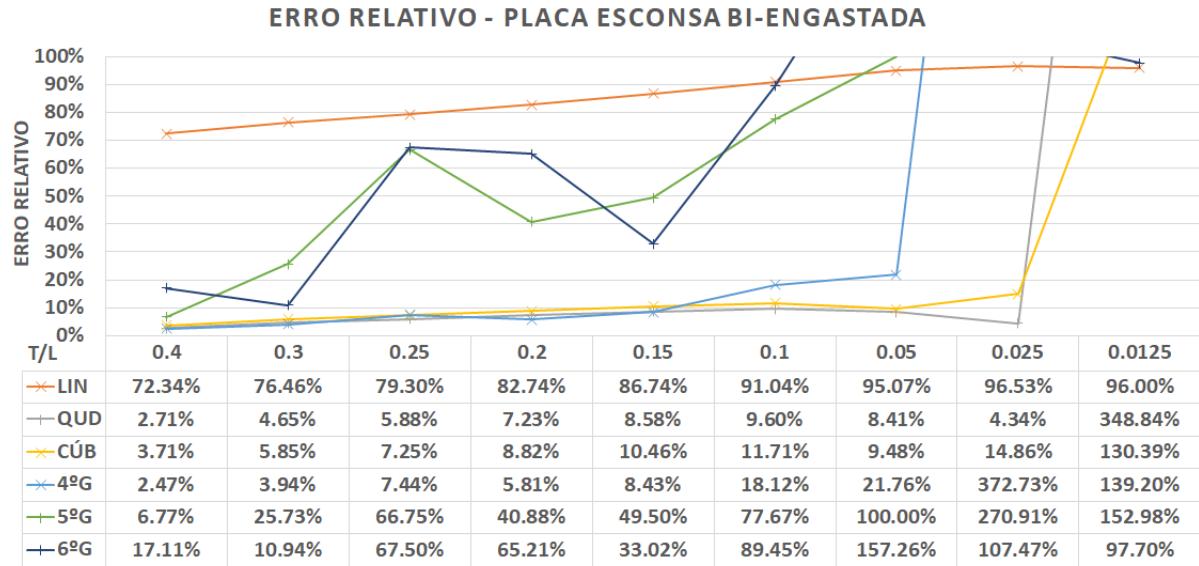
Observando a Figura 78 pode-se notar todos os pontos discutidos anteriormente. A aproximação de ordem linear converge para resultados distantes dos esperados, a aproximação cúbica demora um pouco mais a atingir a convergência e a aproximação quadrática é a que melhor se comporta, apresentando uma convergência mais rápida e também resultados mais precisos. Também percebe-se que os resultados para a nuvem de 445 pontos ainda estão distantes, justificando a escolha de se utilizar uma discretização com 1685 pontos. A deficiência do método para este problema pode ser percebida pelo alto erro obtido em todas as discretizações realizadas, infelizmente uma discretização com um maior número de pontos não foi possível por limitações da máquina, que não foi capaz de fazer os cálculos para nuvem de 6565 pontos.

Vale ressaltar que resultados bons foram aqueles que apresentaram erros de até 5%, resultados medianos pra um erro de até 10%, aceitáveis, apenas para analisar o comportamento do método, valores com um erro de até 30%, e resultados ruins para um erro maior que 30%.

6.3.1.4 Variação de Espessura

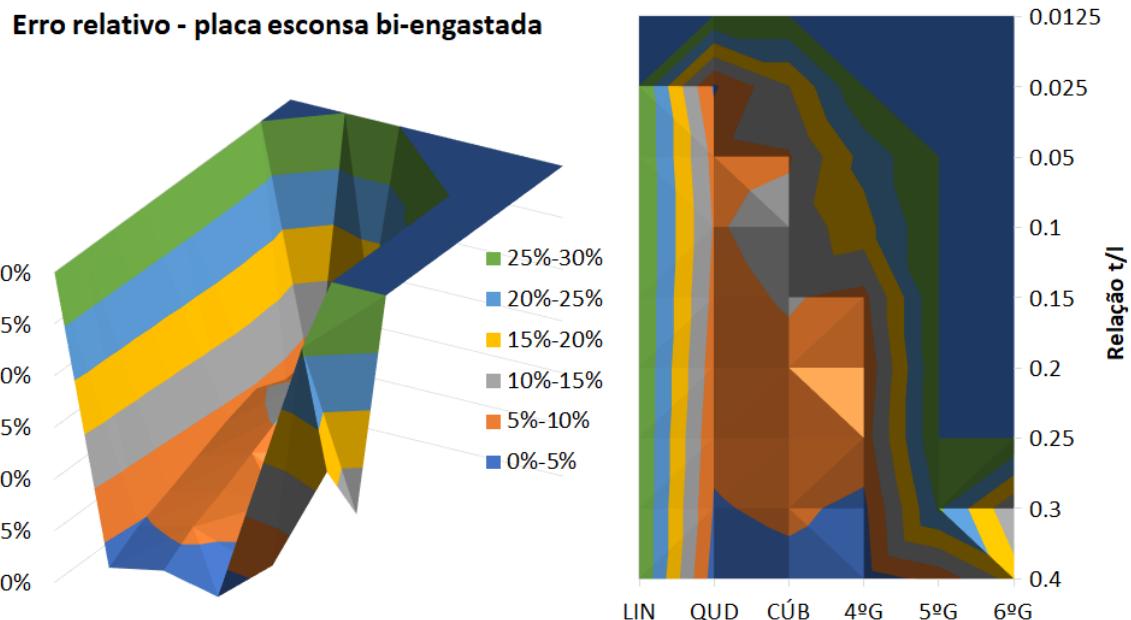
Tomando como referência a nuvem de 1685 pontos, tem-se na Figura 79 a variação do erro relativo a medida que se diminui a relação t/L da placa, e na Figura 80 o erro relativo em função do tipo de aproximação e da relação t/L .

FIGURA 79 – Efeito de *Shear Locking* em uma placa bi-engastada



Fonte: O autor

FIGURA 80 – Efeito de *Shear Locking* em uma placa bi-engastada



Fonte: O autor

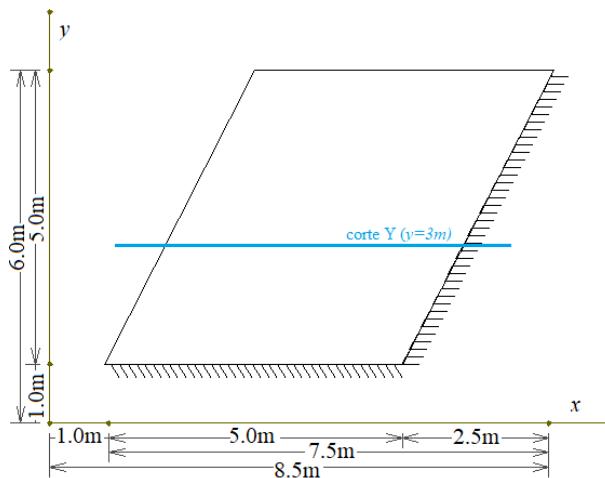
Na Figura 79 e na Figura 80 é mostrado o efeito de *shear locking* para uma discretização com 1685 pontos. Os resultados para aproximação quadrática apresentou bons resultados para uma razão $t/l = 0.025$.

A aproximação com base monomial de ordem cúbica também conseguiu obter um erro pequeno para relação de $t/l = 0.05$. As demais ordens não apresentam resultados satisfatórios, provavelmente em decorrência dos erros ao aplicar o MLPG neste exemplo citados anteriormente. O comportamento observado foi semelhante aos casos de vãos grandes como observado no Exemplo 04 (ver Subseção 6.2.2).

6.3.2 Exemplo 06 - Placa Esconsa L-Engastada

Neste exemplo tem-se uma placa engastada em dois lados não simétricos, que será convenientemente chamada de L-engastada, como pode ser visto na Figura 81. Foi feita a análise para o corte Y ($y = 3m$).

FIGURA 81 – Placa Esconsa L-Engastada

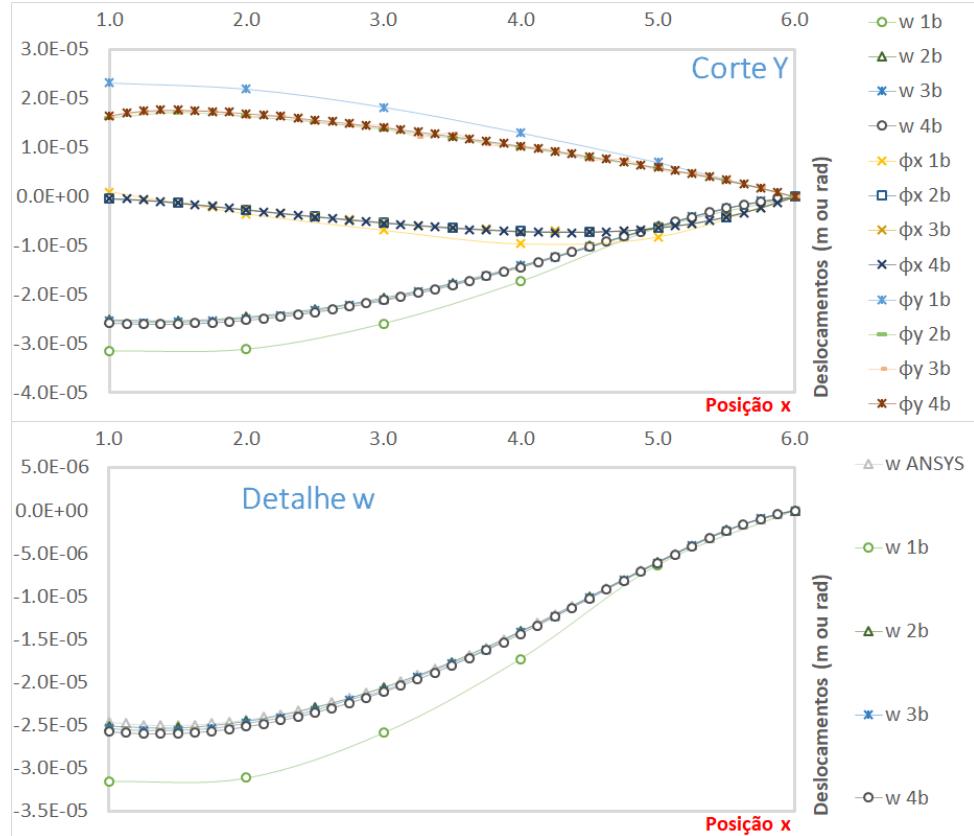


Fonte: O Autor

6.3.2.1 Estudo de Convergência

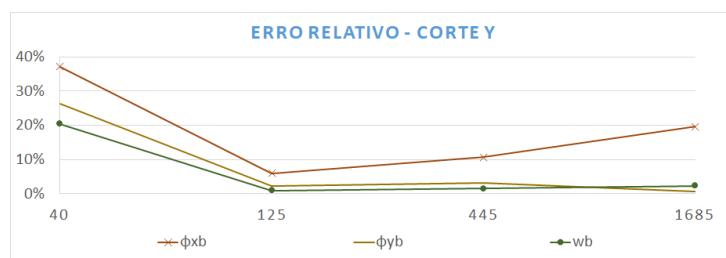
A Figura 82 mostra os deslocamentos obtidos para uma nuvem de 40(1), 125(2), 445(3) e 1685(4) pontos. O erro relativo para cada discretização analisada pode ser visto na Figura 83.

FIGURA 82 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa L-Engastada - estudo de convergência



Fonte: O Autor

FIGURA 83 – Erro Relativo: Placa Esconsa L-Engastada - estudo de convergência



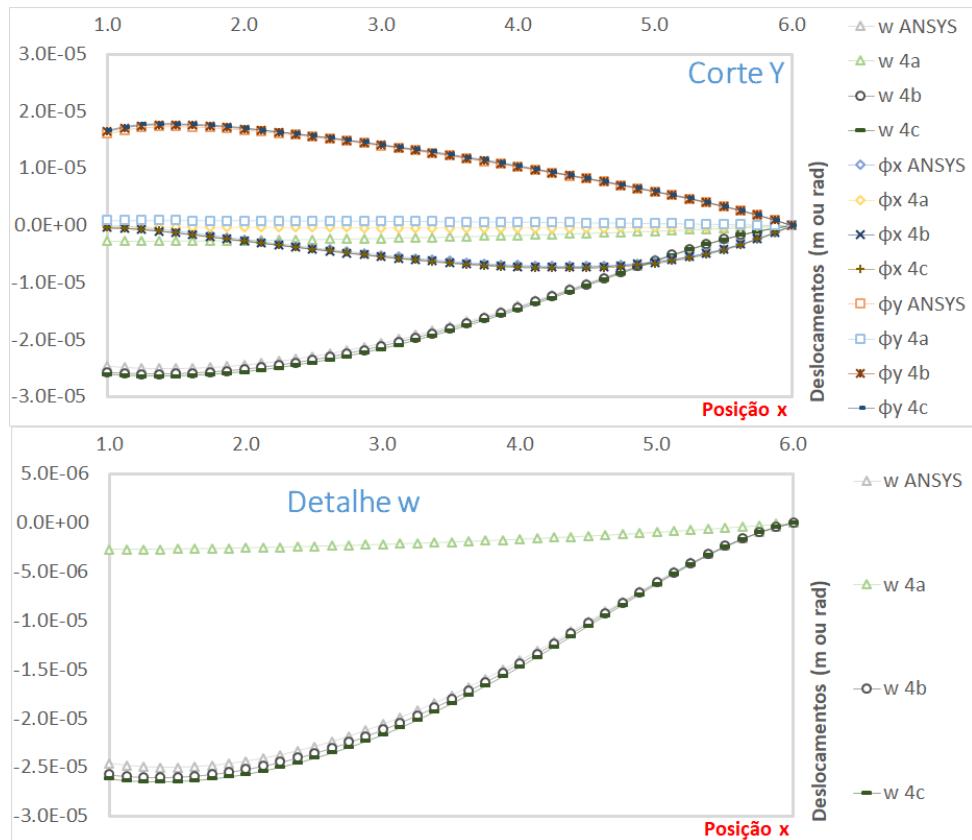
Fonte: O Autor

Na Figura 82 e na Figura 83 foram apresentados os deslocamentos obtidos em cada nuvem de pontos. Os resultados, ao contrário do exemplo anterior (ver Subseção 6.3.1), foram bem comportados. para a discretização 2 já foi atingida a convergência, apresentando resultados bons. A discretização de 445 pontos, também apresentou resultados muito próximos aos obtidos no MEF, por apresentar um custo pouco maior que a discretização 2, será utilizada como referência nas análises seguintes, uma vez que se tem maior precisão dos resultados para um maior número de pontos.

6.3.2.2 Influência do tipo de Aproximação

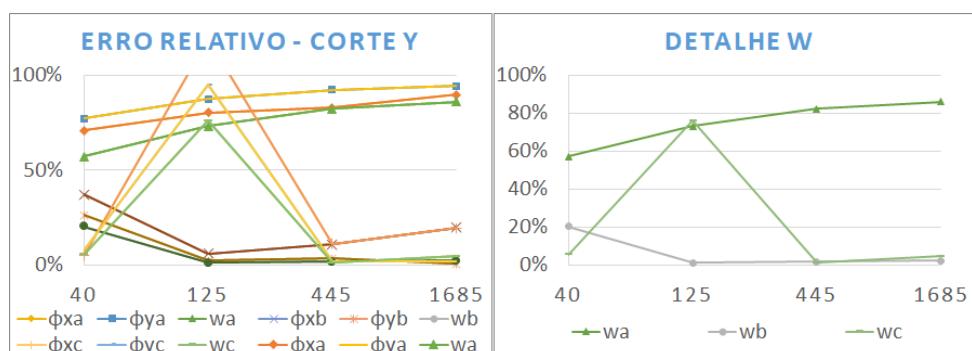
Como visto na seção anterior, para este exemplo, a discretização de 445 pontos se mostrou a mais eficiente, por seu baixo custo e precisão dos resultados. Tomando-a como referência os deslocamentos para o corte Y podem ser visualizados na Figura 84, e erro relativo na Figura 85, onde foi feita uma variação no tipo de aproximação, levando-se em conta aproximações lineares(a), quadráticas(b) e cúbicas(c). Como valor de referência foram utilizados os resultados obtidos pelo MEF.

FIGURA 84 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa L-Engastada - Tipos de Aproximação



Fonte: O Autor

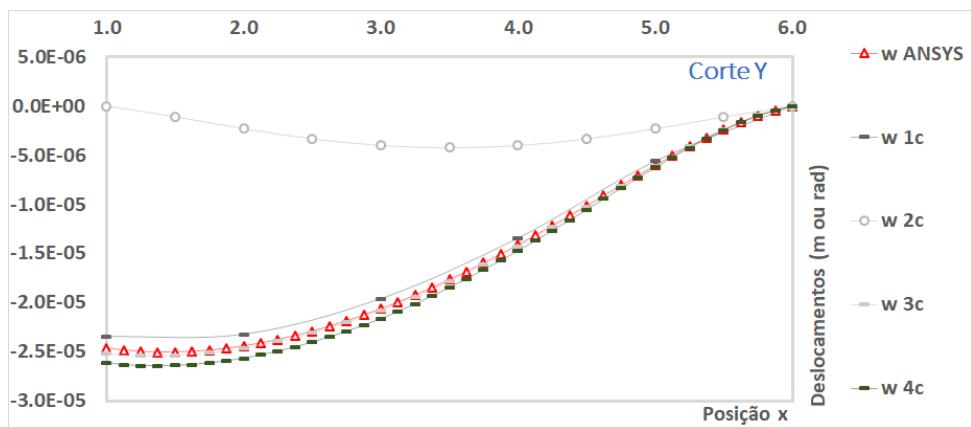
FIGURA 85 – Erro Relativo: Placa Esconsa L-Engastada - Tipos de Aproximação



Fonte: O Autor

Na Figura 84 são apresentados os deslocamentos obtidos, estes foram bastante próximos aos valores obtidos no MEF, apresentando resultados bons para bases monomiais de ordem quadráticas. Na Figura 85 os erros confirmam a eficiência do uso de uma base monomial quadrática. O comportamento das bases de ordem cúbica para a discretização de 125 pontos, chama a atenção neste exemplo. Observando os demais exemplos, este comportamento costuma ser normal para aproximações cúbicas, no entanto costuma ocorrer para a primeira discretização e neste exemplo ocorreu na segunda nuvem de pontos como pode ser visto na Figura 86. Mais uma vez a aproximação quadrática se mostra a mais eficiente para obtenção dos deslocamentos e será assim utilizada como referência para validação dos resultados.

FIGURA 86 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa L-Engastada - Tipos de Aproximação - Detalhe dos deslocamentos obtidos em bases monomiais de ordem cúbica

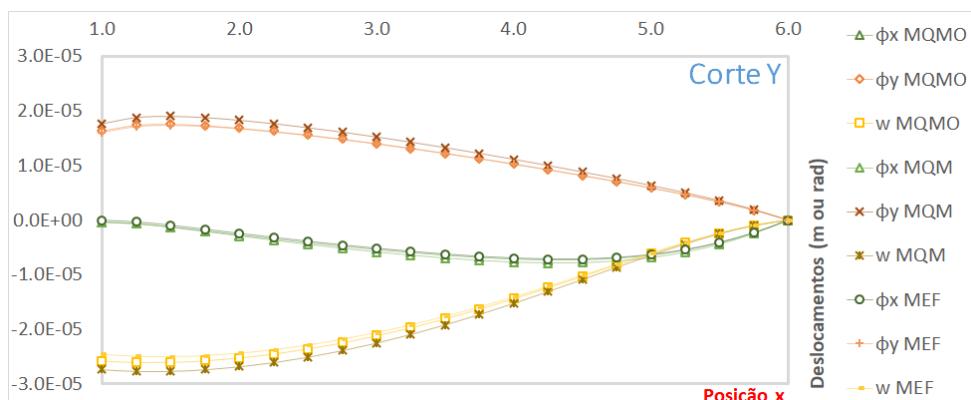


Fonte: O Autor

6.3.2.3 Validação de Resultados

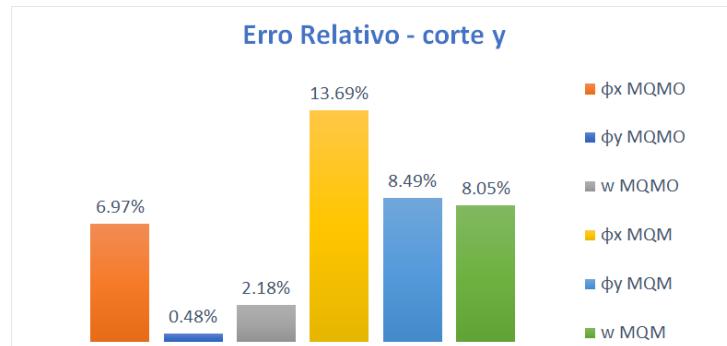
Utilizando uma nuvem de 445 pontos e uma aproximação quadrática foram comparados o MEF, MLPG utilizando o Método de Mínimos Quadrados Móveis com o MLPG utilizando o MQMO. Na Figura 87 são mostrados os deslocamentos para cada metodologia aplicada e na Figura 88 o erro relativo para o MQM e MQMO comparado ao MEF, que já é um método consolidado.

FIGURA 87 – Deslocamentos Obtidos: Placa Esconsa L-Engastada - validação



Fonte: O Autor

FIGURA 88 – Erro Relativo: Placa Esconsa L-Engastada - validação



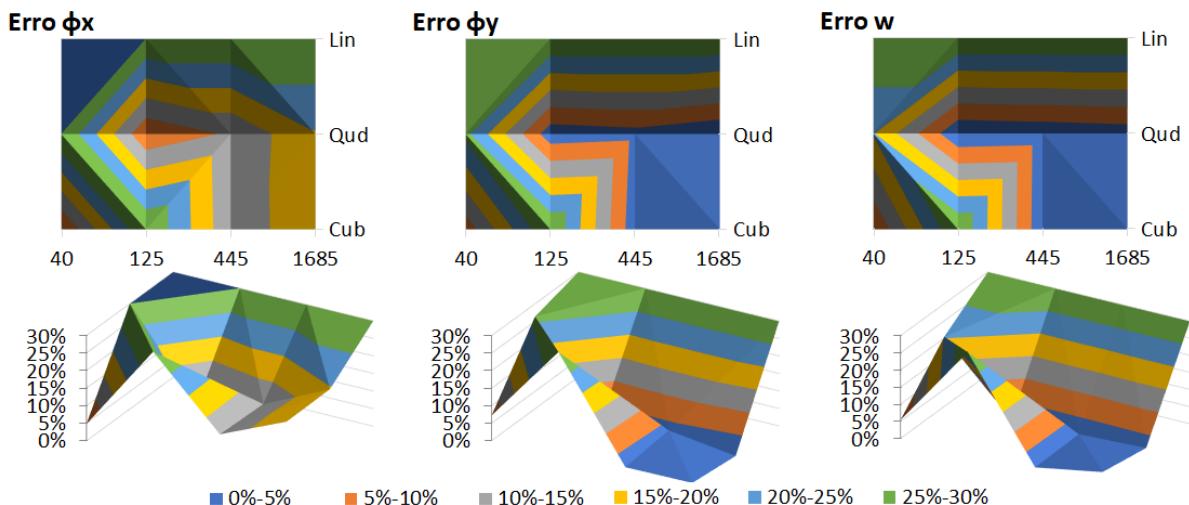
Fonte: O Autor

Ao contrário do exemplo anterior, para este caso os resultados se mostraram muito bons, inclusive com erros inferiores ao MQM. Os deslocamentos obtidos como pode ser visualizado na Figura 87 encontram-se bem próximos dos obtidos no MEF. Quanto aos erros relacionados a rotação ϕ_x , pode-se notar resultados não tão bons quanto os demais deslocamentos, observando a Figura 88 o mesmo ocorre para o MQM, inclusive com um erro relativo muito maior. Essa ocorrência no entanto, não é nada preocupante, e está relacionada a erros de arredondamento da máquina, uma vez que a ordem de grandeza para essas rotações é pequena, como pode ser observado na Figura 87, se comparado aos demais, a rotação ϕ_x está muito próxima de zero.

Por fim, a Figura 89 mostra o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas.

Vale ressaltar que os erros foram calculados como uma média do erro mostrado na Equação 6.1, onde leva-se em conta os resultados obtidos nos pontos em cada corte com o MLPG utilizando MQMO, e os resultados obtidos para os mesmos pontos utilizando o MEF (ANSYS).

FIGURA 89 – Erro Relativo Total: placa esconsa L-engastada



Fonte: O Autor

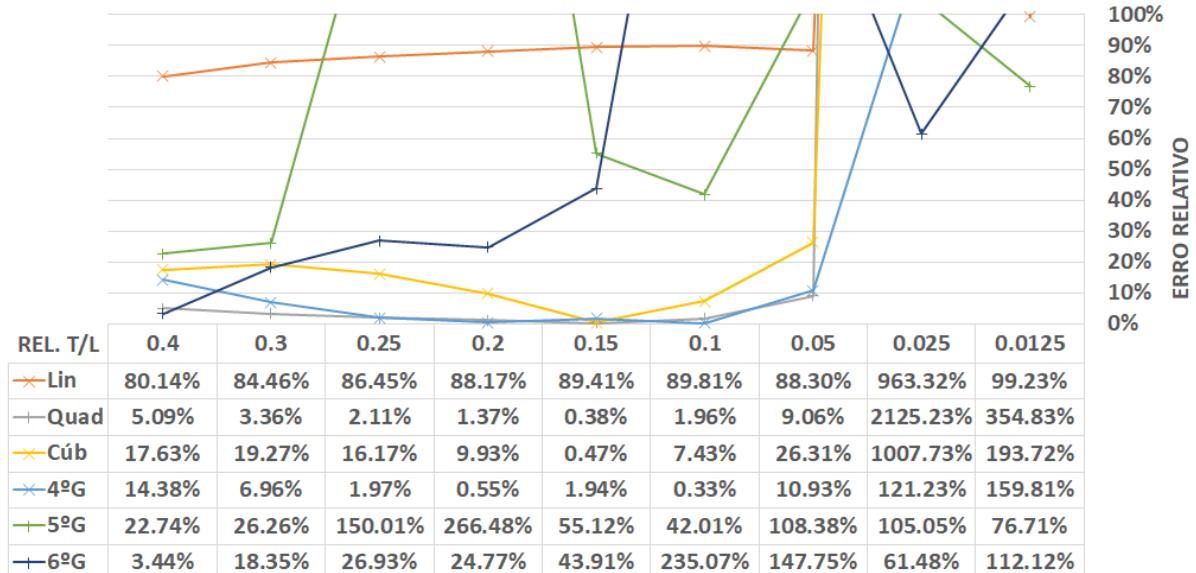
Observando a Figura 89 pode-se notar todos os pontos discutidos anteriormente. A aproximação de ordem linear converge para resultados distantes dos esperados, a aproximação cúbica demora um pouco mais a atingir a convergência e a aproximação quadrática é a que melhor se comporta, apresentando uma convergência mais rápida e também resultados mais precisos. Também, é notado o alto erro que a base monomial de ordem cúbica apresenta para a nuvem de 125 pontos.

6.3.2.4 Variação de Espessura

Tomando como referência a nuvem de 445 pontos, tem-se na Figura 90 a variação do erro relativo a medida que se diminui a relação t/L da placa, e na Figura 91 o erro relativo em função do tipo de aproximação e da relação t/L .

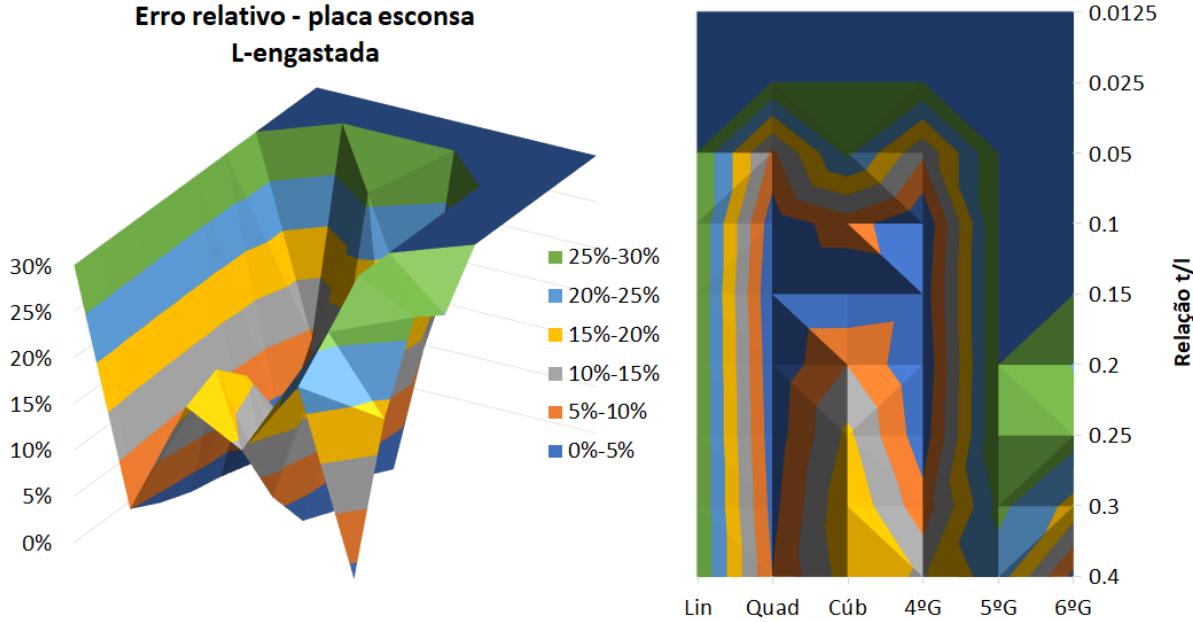
FIGURA 90 – Efeito de *Shear Locking* em uma placa L-engastada

ERRO RELATIVO - PLACA ESCONSA L-ENGASTADA



Fonte: O autor

FIGURA 91 – Efeito de *Shear Locking* em uma placa L-engastada



Fonte: O autor

O efeito de *shear locking* pode ser visto na Figura 90 e na Figura 91. Conforme os casos se tornam mais complexos, os erros se tornam mais evidentes, facilitando a avaliação do método, o que muito provavelmente esteja relacionados a matrizes mal condicionadas, que aparecem na imposição de bases monomiais de ordem superiores.

Para bases monomiais de ordem quadrática bons resultados foram obtidos para uma relação de até $t/l = 0.1$. Nas aproximações de quarta ordem o esfeito de *shear locking* só foi possível ser avaliado nos intervalos $0.25 \leq t/l \leq 0.1$. Nas aproximações de ordem cúbica apenas para uma razão $t/l = 0.15$ obtiveram-se bons resultados. Todos os demais casos apresentaram resultados ruins, com um erro relativo alto, e baixa precisão nos resultados.

Outros exemplos para placa esconsa podem ser vistos no Apêndice C.

CONCLUSÃO

No geral o MLPG utilizando o MQMO se saiu bem para solução do problema de placas espessas, mas com algumas ressalvas. Em grande parte dos casos uma discretização com nuvem de 445 pontos para placas de formato quadrado e esconso, ou 329 para as placas de formato retangular, já conseguiu obter bons resultados, com erros menores do que 5%. As bases monomiais de ordem quadráticas foram as que melhor obtiveram os deslocamentos nessas discretizações.

Quanto ao custo computacional, este foi considerado satisfatório, com uma nuvem de 445 pontos, o tempo de processamento não é maior do que 5 minutos mesmo para os casos mais complexos. No entanto, a média para realização dos cálculos, foi de 3 minutos.

Para exemplos mais complexos foram constatados erros maiores, sobretudo para as placas de formato esconso, como mostrado nos exemplos os resultados não foram bons para discretizações com um nuvem de 445 pontos, sendo necessária a utilização de uma nuvem mais refinada, com 1685 nós. Ao utilizar a malha mais refinada, o custo computacional acaba se elevando muito, com uma média de 7 minutos para realização dos cálculos.

Vale ressaltar que a máquina apresentou uma série de limitações, se realizados os mesmos cálculos em um computador melhor, os custos seriam consideravelmente inferiores. Sem deixar de mencionar o fato que nuvens mais refinadas também não puderam ser calculadas, como a de 6565 pontos.

Se comparado ao MQM, o MQMO utilizado neste trabalho, apresentou resultados bem semelhantes. No entanto, com um custo computacional significativamente inferior, tornando-o mais competitivo, e uma alternativa para substituir o MQM no MLPG. Em casos mais complexos, os mesmos erros também foram constatados utilizando o MLPG com MQM, o que demonstra que o problema não está diretamente relacionado ao MQMO.

6.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Um grande ponto para continuidade deste trabalho é realizar uma análise mais aprofundada para os casos mais complexos, como as placas de formato esconso, onde os erros acabaram se elevando muito. Seria interessante fazer uma análise para uma nuvem mais refinada, adotando um número maior de pontos, a fim de verificar a convergência, e tentar identificar a ocorrência destes erros.

Problemas também foram constatados na avaliação do efeito de *shear locking*, quando se utilizaram bases monomiais de ordens superiores. Uma análise mais aprofundada avaliando o desempenho, e buscando identificar a ocorrência destes erros, que possivelmente estão relacionados a matrizes mal condicionadas. Logo, seria um outro ponto a se considerar, dando maior atenção deve as aproximações utilizando bases monomiais de quarto, quinto e sexto grau.

Foi constatado também que boa parte do custo computacional não é relacionada ao tempo que se leva para montarem as bases monomiais, mas sim na resolução do sistema linear. Neste sistema as equações são solucionadas pelo processo de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, o que acaba elevando o custo computacional, principalmente quando se é utilizada uma nuvem com maior número de pontos. Uma revisão no código a fim de otimizar os cálculos deste sistema linear poderiam reduzir consideravelmente esse custo, tornando o método muito competitivo frente aos métodos já consolidados como o MEF. Dividir a placa em setores, onde fosse considerada a simetria da mesma, poderia também reduzir o custo pela metade, ou até em 75%, para determinados casos.

REFERÊNCIAS

- [1] L. B. Lucy, "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *The astronomical journal*, v. 82, pp. 1013–1024, 1977
(Ver p. 2).
- [2] R. A. Gingold e J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars", *Monthly notices of the royal astronomical society*, v. 181, n. 3, pp. 375–389, 1977
(Ver p. 2).
- [3] J. J. Monaghan, "Why particle methods work", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 3, n. 4, pp. 422–433, 1982
(Ver p. 2).
- [4] J. Monaghan, "An introduction to SPH", *Computer Physics Communications*, v. 48, n. 1, pp. 89–96, jan. de 1988,
ISSN: 00104655.
DOI: <10.1016/0010-4655(88)90026-4>. : <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0010465588900264>>
(Ver p. 2).
- [5] J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics", *Annual review of astronomy and astrophysics*, v. 30, n. 1, pp. 543–574, 1992
(Ver p. 2).
- [6] P. Lancaster e K. Salkauskas, "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods", *Mathematics of Computation*, v. 37, n. 155, p. 141, jul. de 1981,
ISSN: 00255718.
DOI: <10.2307/2007507>. : <<https://www.jstor.org/stable/2007507?origin=crossref>>
(Ver p. 2).
- [7] W. K. Liu, Y. Chen, C. T. Chang e T. Belytschko, "Advances in multiple scale kernel particle methods", *Computational Mechanics*, v. 18, n. 2, pp. 73–111, mar. de 1996,
ISSN: 0178-7675.
DOI: <10.1007/BF00350529>. : <<http://link.springer.com/10.1007/BF00350529>>
(Ver p. 2).
- [8] W. K. Liu, Y. Chen, R. Uras e C. T. Chang, "Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1-4, pp. 91–157, dez. de 1996,
ISSN: 00457825.
DOI: <10.1016/S0045-7825(96)01081-X>. : <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S004578259601081X>>
(Ver p. 2).

- [9] W.-K. Liu, S. Li e T. Belytschko, "Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 143, n. 1-2, pp. 113–154, abr. de 1997,
ISSN: 00457825.
DOI: <10.1016/S0045-7825(96)01132-2>. : <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782596011322>>
(Ver p. 2).
- [10] B. Nayroles, G. Touzot e P. Villon, "Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, v. 10, n. 5, pp. 307–318, 1992,
ISSN: 0178-7675.
DOI: <10.1007/BF00364252>. : <<http://link.springer.com/10.1007/BF00364252>>
(Ver p. 2).
- [11] T. Belytschko, Y. Y. Lu e L. Gu, "Element-free Galerkin methods", *International journal for numerical methods in engineering*, v. 37, n. 2, pp. 229–256, 1994
(Ver p. 2).
- [12] Y. Y. Lu, T. Belytschko e L. Gu, "Computer methods in applied mechanics and engineering A new implementation of the element free Galerkin method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 113, n. 2, pp. 397–414, 1994.
: <https://ac.els-cdn.com/0045782594900566/1-s2.0-0045782594900566-main.pdf?%7B%5C_%7Dtid=f7e9f5a8-f55a-11e7-8c30-00000aab0f6c%7B%5C&%7Dacdnat=1515515851%7B%5C_%7D1c343eff8fcf53b3f231c1815ecc8f71>
(Ver pp. 2, 11).
- [13] S. Beissel e T. Belytschko, "Nodal integration of the element-free Galerkin method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1-4, pp. 49–74, dez. de 1996,
ISSN: 00457825.
DOI: <10.1016/S0045-7825(96)01079-1>. : <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782596010791>>
(Ver pp. 3, 11).
- [14] M. Carley, "Moving Least Squares via Orthogonal Polynomials", *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 32, n. 3, pp. 1310–1322, jan. de 2010,
ISSN: 1064-8275.
DOI: <10.1137/09076711X>. : <<http://pubs.siam.org/doi/10.1137/09076711X>>
(Ver pp. 3, 11).
- [15] X. Zhuang e C. Augarde, "Aspects of the use of orthogonal basis functions in the element-free Galerkin method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, n/a-n/a, 2010,
ISSN: 00295981.
DOI: <10.1002/nme.2696>. : <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.2696>>
(Ver pp. 3, 11).

- [16] H. A. Mohamed e S. G. Ahmed, "A numerical mesh-less collocation based orthogonal M. L. S. shape function", *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, v. 2219, n. 3, pp. 152–157, 2015, ISSN: 20780958
(Ver pp. 3, 11).
- [17] L. Zhang, D. Li e K. Liew, "An element-free computational framework for elastodynamic problems based on the IMLS-Ritz method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 54, pp. 39–46, mai. de 2015, ISSN: 09557997.
DOI: <10.1016/j.enganabound.2015.01.007>. : <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S095579971500017X>>
(Ver p. 3).
- [18] T. Zhu, J. D. Zhang e S. N. Atluri, "A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and ameshless discretization approach", *Computational Mechanics*, v. 21, n. 3, pp. 223–235, 1998,
ISSN: 01787675.
DOI: <10.1007/s004660050297>
(Ver p. 3).
- [19] T. Zhu e S. N. Atluri, "A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method", *Computational Mechanics*, v. 21, n. 3, pp. 211–222, abr. de 1998,
ISSN: 0178-7675.
DOI: <10.1007/s004660050296>. : <<http://link.springer.com/10.1007/s004660050296>>
(Ver p. 3).
- [20] S. N. Atluri e T. Zhu, "A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Computational mechanics*, v. 22, n. 2, pp. 117–127, 1998
(Ver pp. 3, 5).
- [21] S. Jun e W. Liu, "Explicit reproducing kernel particle methods for large deformation problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 41, n. 1, pp. 137–166, 1998.
: <[http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19980115\)41:1%7B%5C%7D3C137::AID-NME280%7B%5C%7D3E3.0.CO;2-A/abstract](http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1097-0207(19980115)41:1%7B%5C%7D3C137::AID-NME280%7B%5C%7D3E3.0.CO;2-A/abstract)>
(Ver p. 3).
- [22] I. Grin Deanu, K.-H. Chang, K. K. Choi e J.-S. Chen, "Design Sensitivity Analysis of Hyperelastic Structures Using a Meshless Method", *AIAA Journal*, v. 36, n. 4, pp. 618–627, abr. de 1998,
ISSN: 0001-1452.
DOI: <10.2514/2.414>. : <<https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/2.414>>
(Ver p. 3).
- [23] I. Grin Deanu, K. K. Choi, J.-S. Chen e K.-H. Chang, "Shape Design Optimization of Hyperelastic Structures Using a Meshless Method", *AIAA Journal*, v. 37, n. 8, pp. 990–997, ago. de 1999,
ISSN: 0001-1452.
DOI: <10.2514/2.806>. : <<https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/2.806>>
(Ver p. 3).

- [24] B. M. Donning e W. K. Liu, "Beams and Plates", *Methods*, v. 7825, n. 97, pp. 1–5, 1998.
: <https://www.rocscience.com/help/RS3/webhelp/pdf%7B%5C_%7Dfiles/theory/Beam-Plate.pdf>
(Ver p. 3).
- [25] E. Reissner, "On the theory of bending of elastic plates", *Journal of mathematics and physics*, v. 23, n. 1-4, pp. 184–191, 1944
(Ver pp. 3 sq., 12).
- [26] R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", *J. appl. Mech.*, v. 18, pp. 31–38, 1951
(Ver pp. 3 sq., 12).
- [27] P. Krysl e T. Belytschko, "Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Method", *Engineering*, v. 17, n. 1994, pp. 1–22, 1999
(Ver p. 3).
- [28] G. Kirchhoff, "Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes", *J. reine angew. Math.*, v. 56, pp. 285–313, 1859
(Ver pp. 3 sq., 12).
- [29] V. M. A. Leitão, "A meshless method for Kirchhoff plate bending problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, n. 10, pp. 1107–1130, dez. de 2001,
ISSN: 00295981.
DOI: <10.1002/nme.244>. : <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.244>>
(Ver p. 3).
- [30] S. Long e Q. Zhang, "Analysis of thin plates by the local boundary integral equation (LBIE) method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, n. 8, pp. 707–718, set. de 2002,
ISSN: 09557997.
DOI: <10.1016/S0955-7997(02)00025-5>. : <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0955799702000255>>
(Ver p. 3).
- [31] S. Shen e S. N. Atluri, "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods", *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 3, n. 1, pp. 11–51, 2002,
ISSN: 15261492
(Ver p. 3).
- [32] X. Yuan-bo e L. Shu-yao, "LOCAL PETROV - GALERKIN METHOD FOR A THIN PLATE", V. 25, n. 2, pp. 210–218, 2004
(Ver p. 4).
- [33] J. Sorić, Q. Li, T. Jarak e S. N. Atluri, "Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) formulation for analysis of thick plates", *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 6, n. 4, pp. 349–357, 2004,
ISSN: 15261492
(Ver p. 4).

- [34] J. Sladek, V. Sladek, C. Zhang, J. Krivacek e P. H. Wen, "Analysis of orthotropic thick plates by meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 67, n. 13, pp. 1830–1850, set. de 2006,
ISSN: 0029-5981.
DOI: <10.1002/nme.1683>. : <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1683>>
(Ver p. 4).
- [35] J. Clastornik, M. Eisenberger, D. Z. Yankelevsky e M. A. Adin, "Beams on Variable Winkler Elastic Foundation", *Journal of Applied Mechanics*, v. 53, n. 4, pp. 925–928, dez. de 1986,
ISSN: 0021-8936.
DOI: <10.1115/1.3171882>. : <<https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article/53/4/925/423865/Beams-on-Variable-Winkler-Elastic-Foundation>>
(Ver p. 4).
- [36] J. Sladek, V. Sladek e C. Zhang, "Local integral equation method for viscoelastic Reissner–Mindlin plates", *Computational Mechanics*, v. 41, n. 6, pp. 759–768, mar. de 2008,
ISSN: 0178-7675.
DOI: <10.1007/s00466-007-0169-7>. : <<http://link.springer.com/10.1007/s00466-007-0169-7>>
(Ver p. 4).
- [37] T. von Kármán,
"Untersuchungen über Knickfestigkeit",
Em Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens insbesondere aus den Laboratorien der technischen Hochschulen,
Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1910,
Pp. 1–44.
DOI: <10.1007/978-3-662-01994-8_1>. : <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-01994-8%7B%5C_%7D1>
(Ver pp. 4, 12).
- [38] S. Shen e S. Atluri, "The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: a simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 3, n. 1, pp. 11–51, 2002
(Ver p. 6).
- [39] D. H. Konda,
"Análise De Felxão De Placas Espessas Através De Métodos Sem Malhas Com A Utilização De Uma Técnica Eficiente De Integração",
Tese de dout., COPPE-UFRJ, 2018.
: <<http://www.coc.ufrj.br/pt/documents2/doutorado/2018-1/3242-konda-dh-td-18-1>>
(Ver pp. 13 sqq., 20, 24, 29, 31 sqq., 35).

- [40] T. Zhu, J.-D. Zhang e S. N. Atluri, "A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach", *Computational Mechanics*, v. 21, n. 3, pp. 223–235, abr. de 1998, ISSN: 0178-7675.
DOI: <10.1007/s004660050297>. : <<http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2011.02.006>>%20<http://link.springer.com/10.1007/s004660050297>>
(Ver p. 22).

APÊNDICES

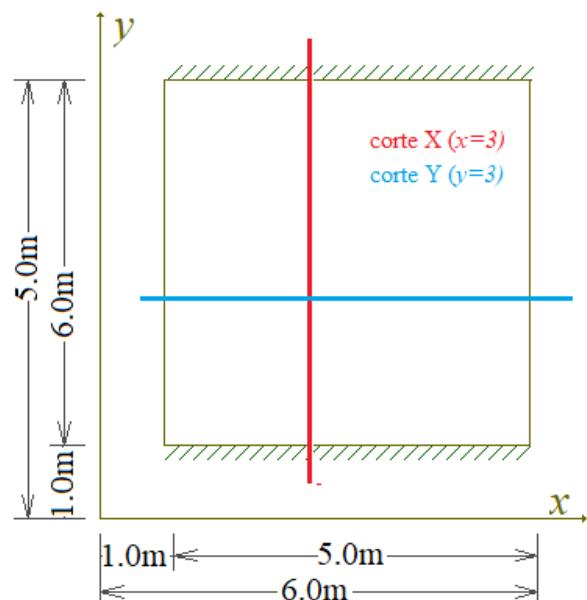
APÊNDICE A – PLACA QUADRADA

Os resultados aqui demonstrados, são uma continuação da Seção 6.1, no entanto foi realizada uma análise mais simplificada do que para os exemplos anteriores. Vale ressaltar que, foram considerados resultados bons aqueles que apresentaram erros de até 5%, resultados medianos pra um erro de até 10%, aceitáveis, apenas para analisar o comportamento do método, valores com um erro de até 30%, e resultados ruins para um erro maior que 30%.

A.1 BI-ENGASTADA

A representação da placa é apresentada pela Figura 92, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 93 e o erro relativo pela Figura 94.

FIGURA 92 – Placa Quadrada Bi-Engastada



Fonte: O Autor

FIGURA 93 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Quadrada Bi-Engastada - corte Y

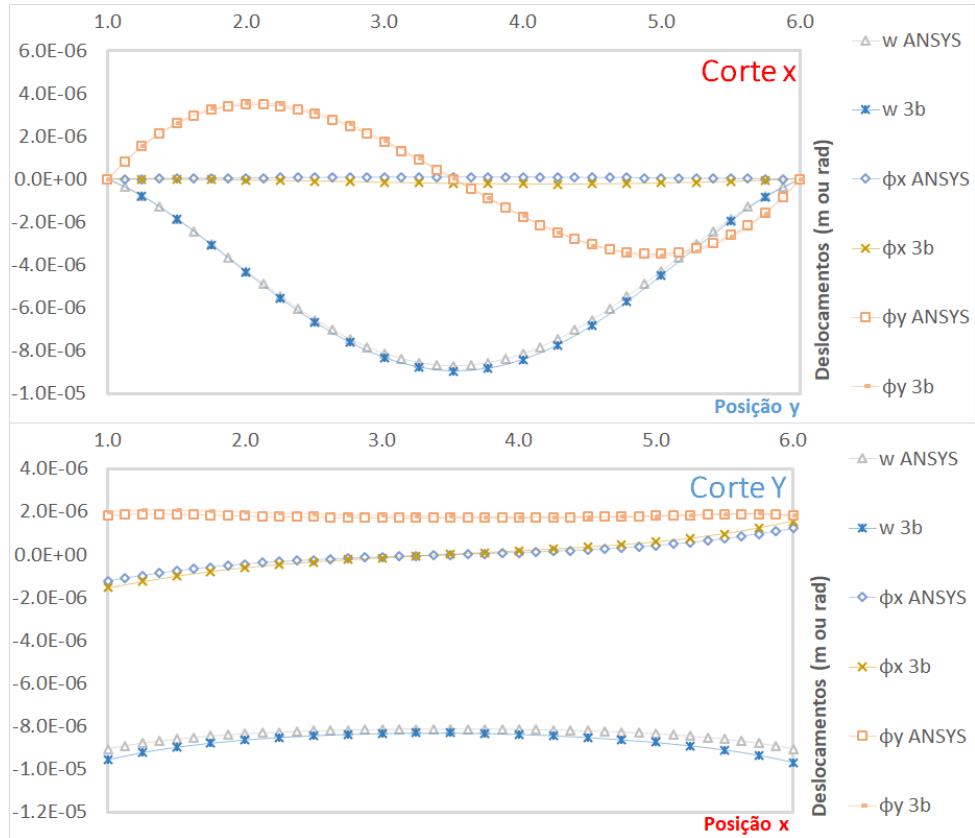
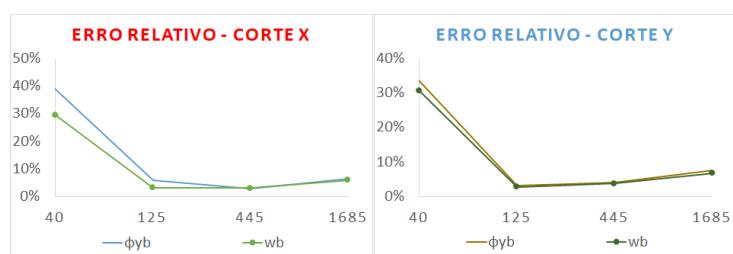


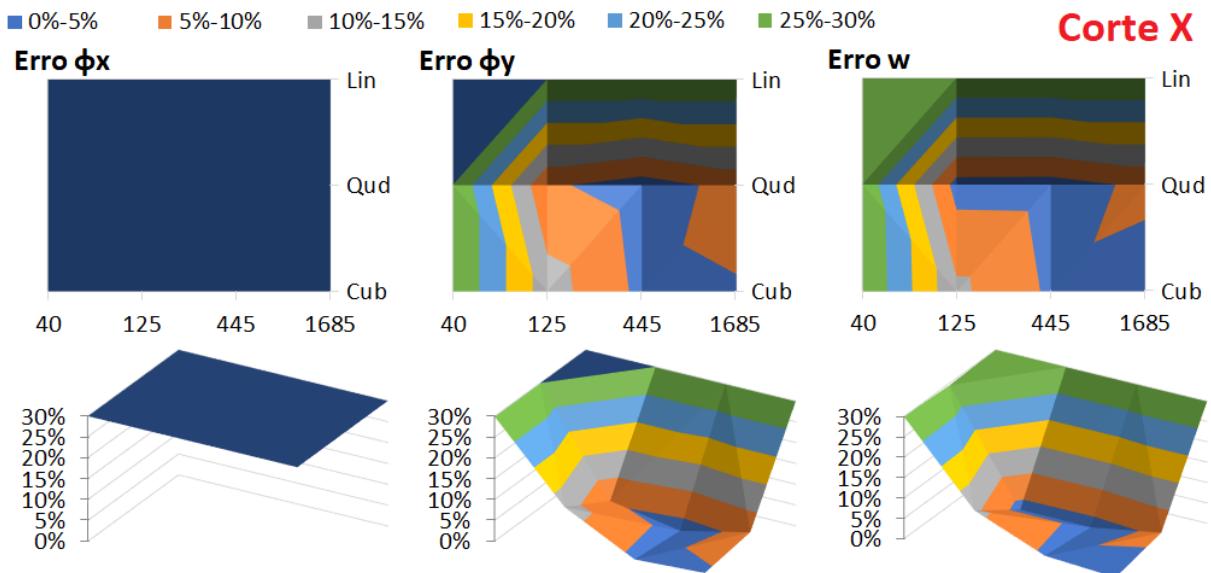
FIGURA 94 – Erro Relativo – Placa Quadrada Bi-Engastada - Corte Y



Fonte: O Autor

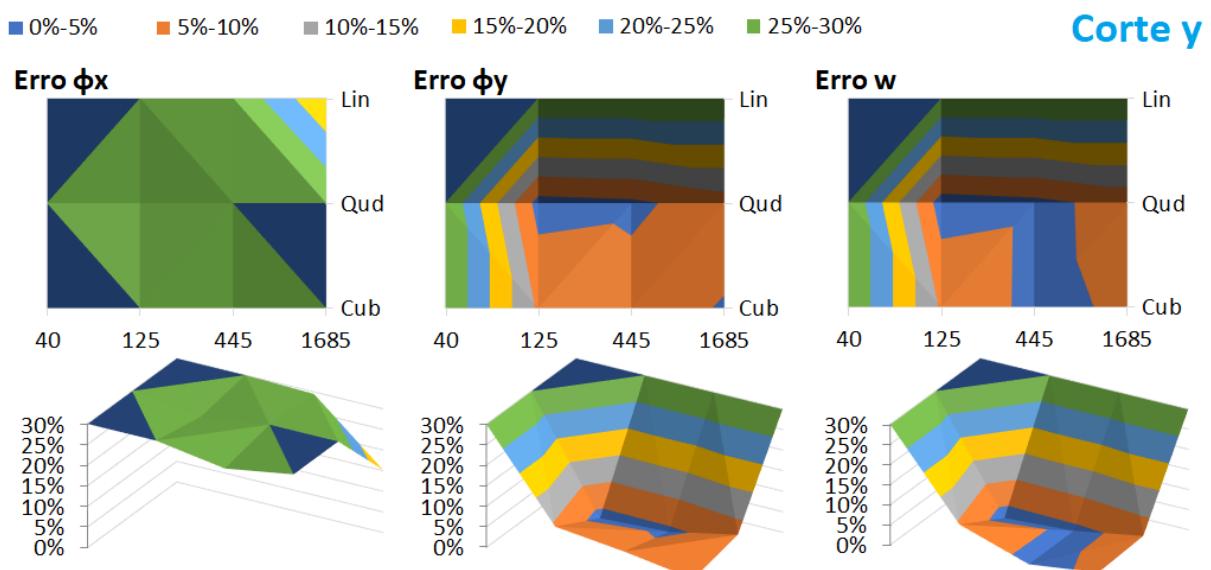
A Figura 95 e a Figura 96 mostram o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto dos cortes X e Y, como é mostrado na Equação 6.1.

FIGURA 95 – Erro Relativo Total: Placa Quadrada Bi-Engastada



Fonte: O Autor

FIGURA 96 – Erro Relativo Total: Placa Quadrada Bi-Engastada



Fonte: O Autor

Observando a Figura 95, pode-se notar que a aproximação de ordem linear apresentam resultados ruins em todas as discretizações. Para a aproximação quadrática foram obtidos bons resultados, inclusive na nuvem de 445 pontos que foi a referência utilizada para os outros exemplos. A aproximação cúbica demora um pouco mais para convergir, e apresentar bons resultados, com resultados mais precisos que a quadrática na nuvem de 1685 nós. Para o corte Y (Figura 96) a aproximação quadrática apresentou bons resultados para a nuvem de 125 e 445 pontos, enquanto a aproximação cúbica apresenta resultados medianos para a maior parte das discretizações.

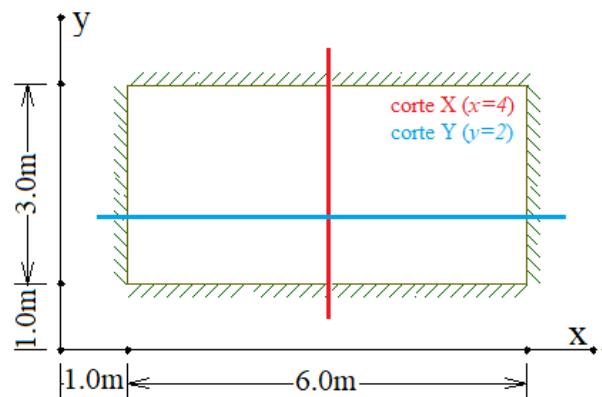
APÊNDICE B – PLACA RETANGULAR

Os resultados aqui demonstrados, são uma continuação da Seção 6.2, no entanto foi realizada uma análise mais simplificada do que para os exemplos anteriores. Vale ressaltar que, foram considerados resultados bons aqueles que apresentaram erros de até 5%, resultados medianos pra um erro de até 10%, aceitáveis, apenas para analisar o comportamento do método, valores com um erro de até 30%, e resultados ruins para um erro maior que 30%.

B.1 TOTALMENTE ENGASTADA

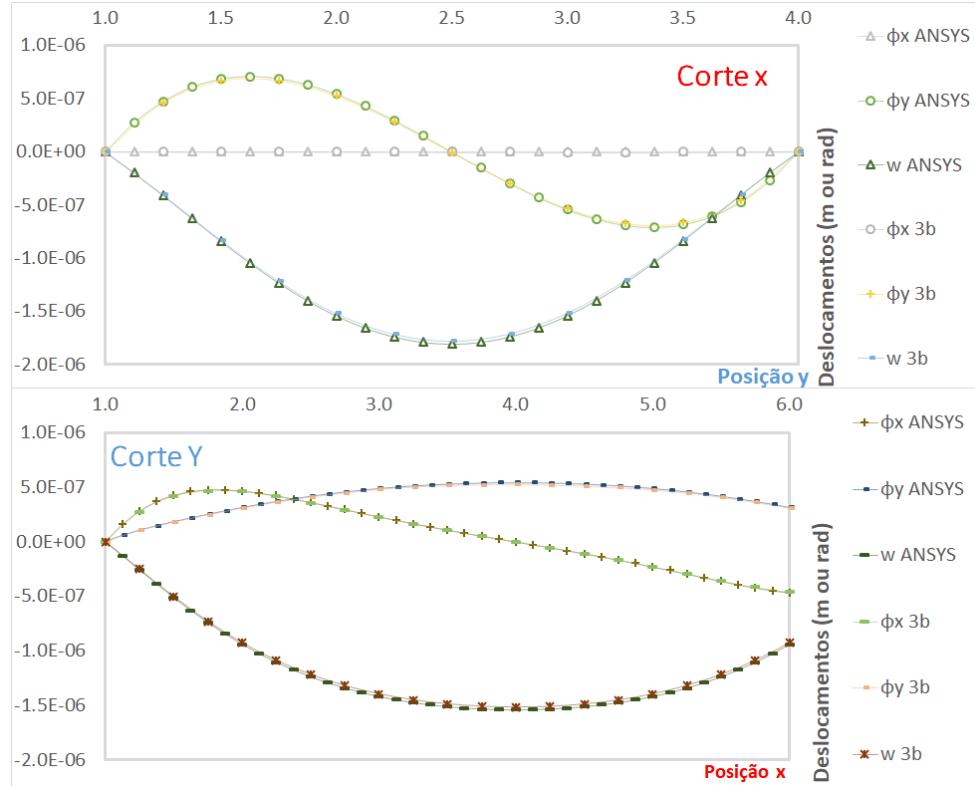
A representação da placa é apresentada pela Figura 97, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 98 e o erro relativo pela Figura 99.

FIGURA 97 – Placa Retangular Engastada



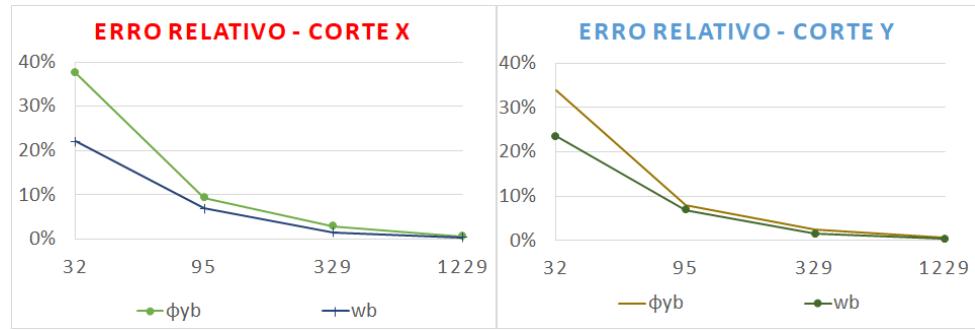
Fonte: O Autor

FIGURA 98 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Retangular Engastada



Fonte: O Autor

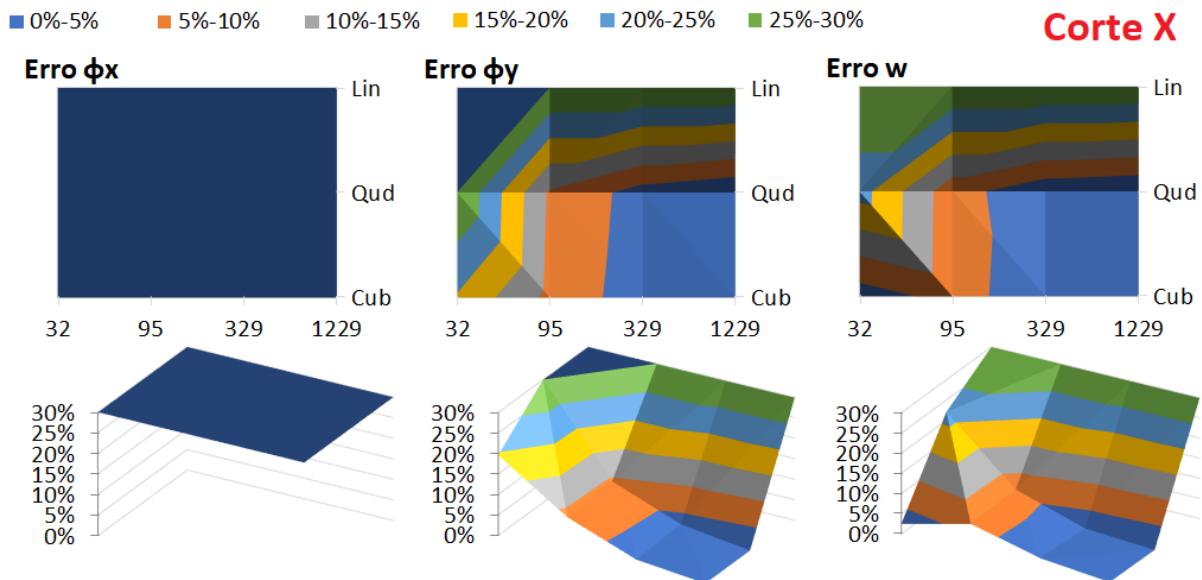
FIGURA 99 – Erro Relativo – Placa Retangular Engastada



Fonte: O Autor

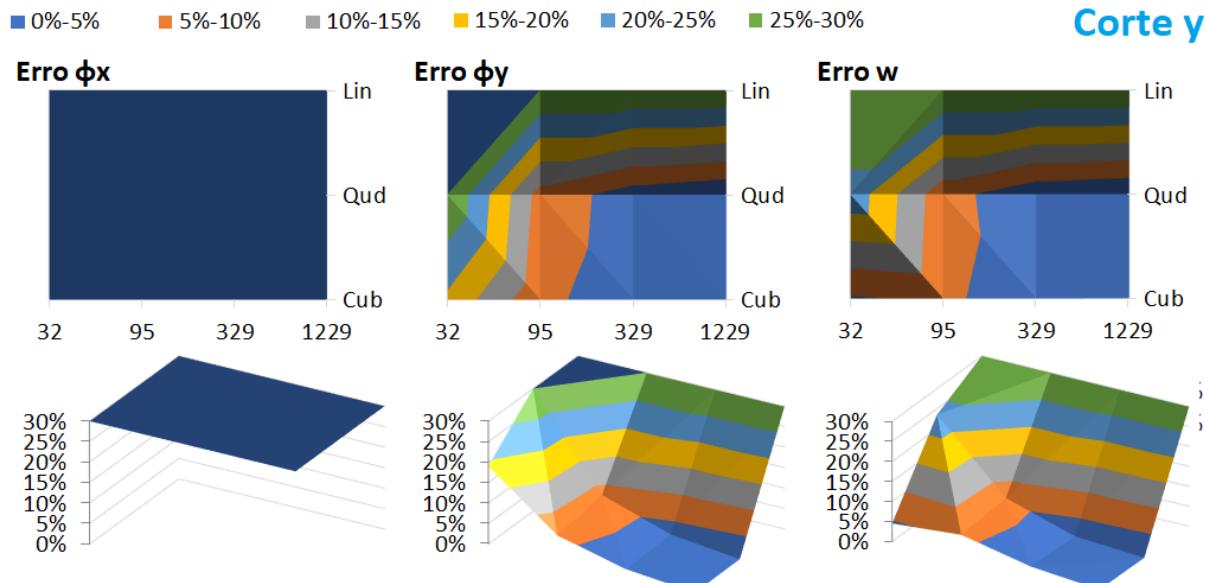
A Figura 100 e a Figura 101 mostram o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto dos cortes X e Y, como é mostrado na Equação 6.1.

FIGURA 100 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Engastada - Corte X



Fonte: O Autor

FIGURA 101 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Engastada - Corte Y



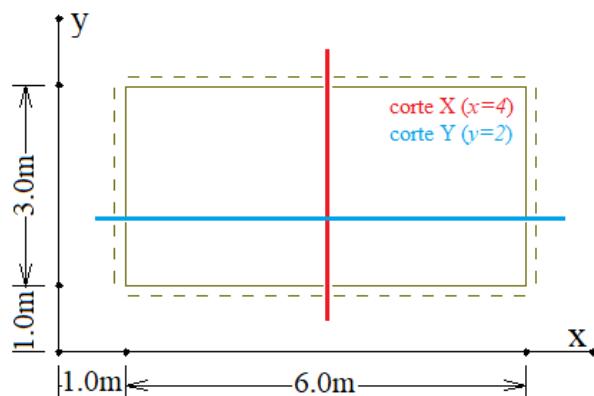
Fonte: O Autor

Observando a Figura 100, pode-se notar que a aproximação de ordem linear apresentam resultados ruins em todas as discretizações. Para a aproximação quadrática foram obtidos bons resultados, inclusive na nuvem de 329 pontos que foi a referência utilizada para os outros exemplos. A aproximação cúbica demora um pouco mais para convergir, e apresenta bons resultados. Para o corte Y (Figura 101) a aproximação com bases monomiais de ordem cúbica atingiu mais rápido a convergência, apresentando bons resultados para as nuvens de 329 e 1229 pontos, inclusive superiores ao da aproximação quadrática, embora a diferença tenha sido mínima.

B.2 TOTALMENTE APOIADA

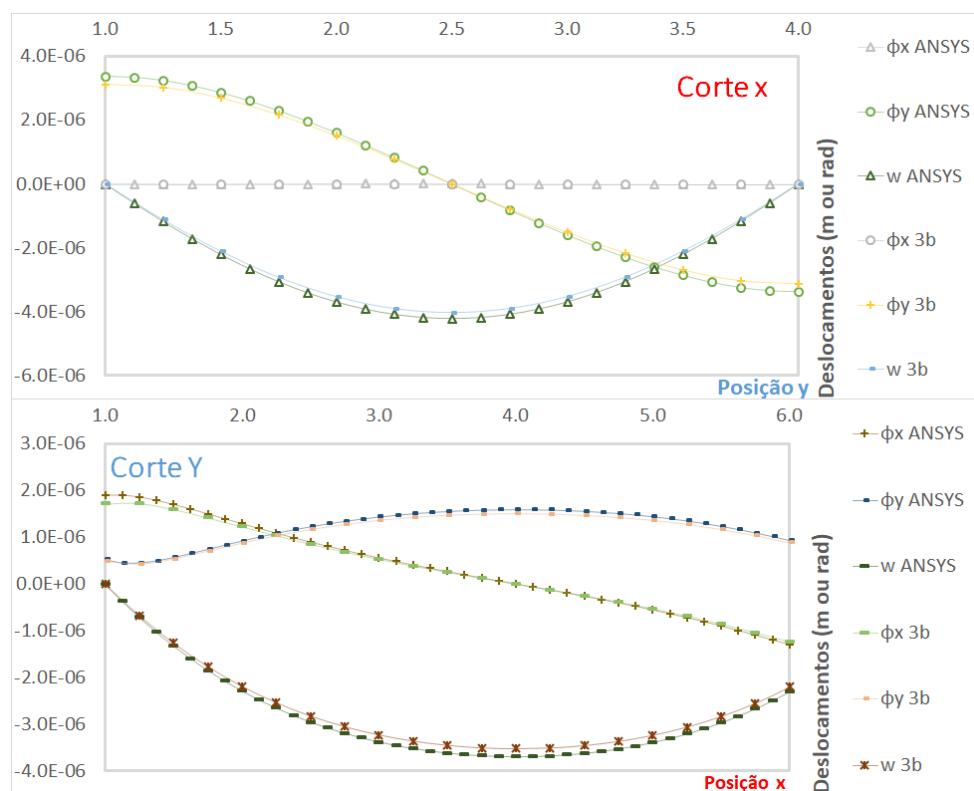
A representação da placa é apresentada pela Figura 102, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 103 e o erro relativo pela Figura 104.

FIGURA 102 – Placa Retangular Apoiada



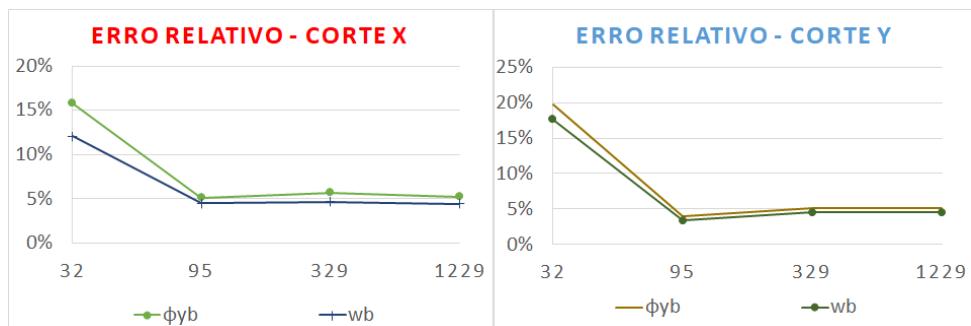
Fonte: O Autor

FIGURA 103 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Retangular Apoiada



Fonte: O Autor

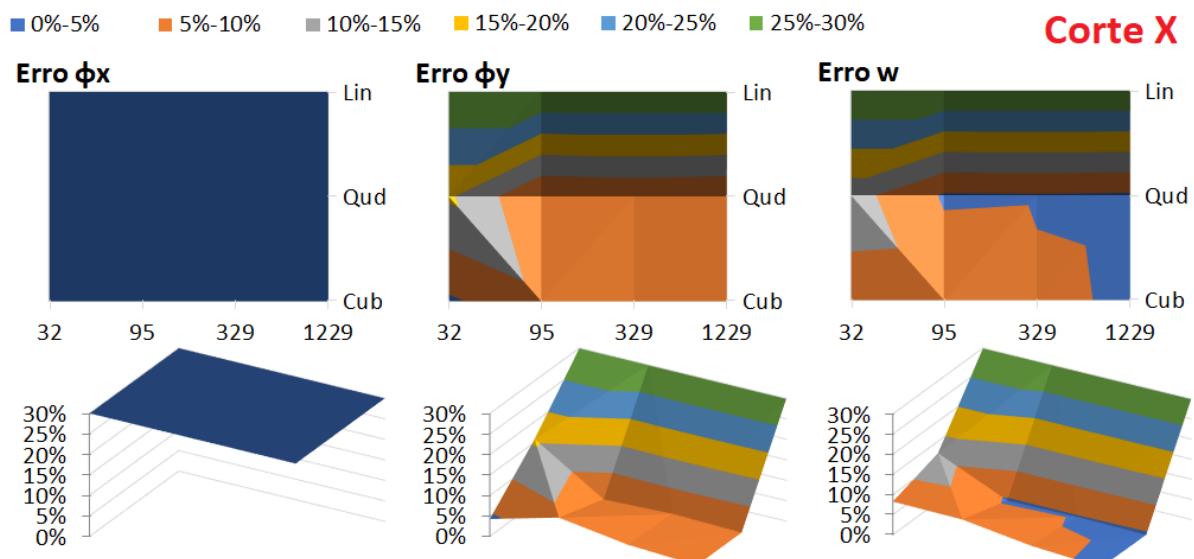
FIGURA 104 – Erro Relativo – Placa Retangular Apoiada



Fonte: O Autor

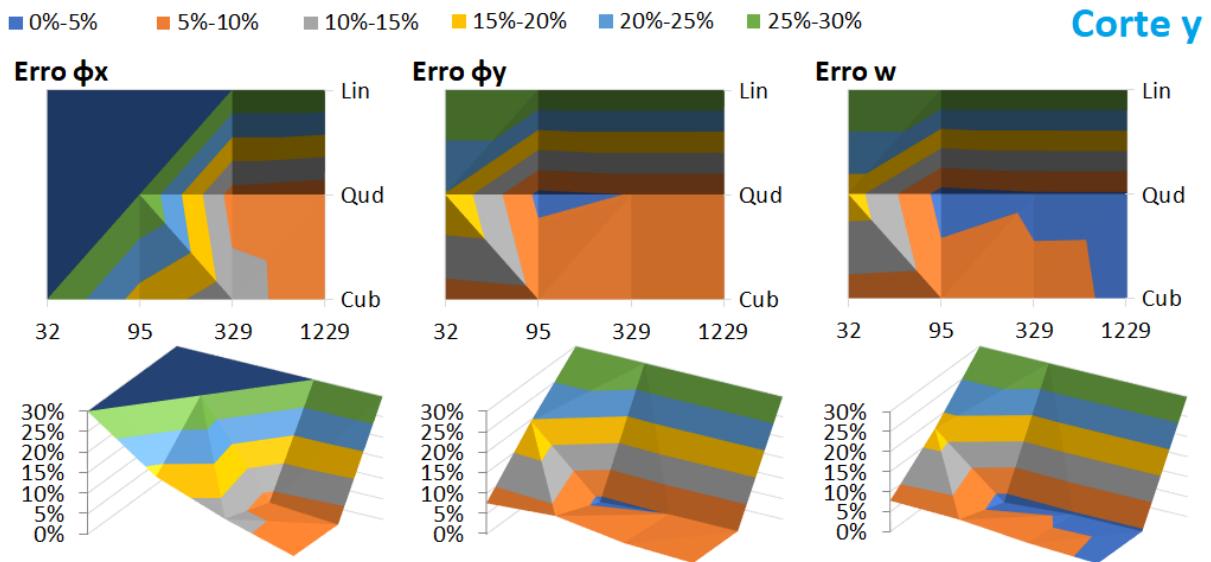
A Figura 105 e a Figura 106 mostram o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto dos cortes X e Y, como é mostrado na Equação 6.1.

FIGURA 105 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Apoiada - Corte X



Fonte: O Autor

FIGURA 106 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Apoiada - Corte Y



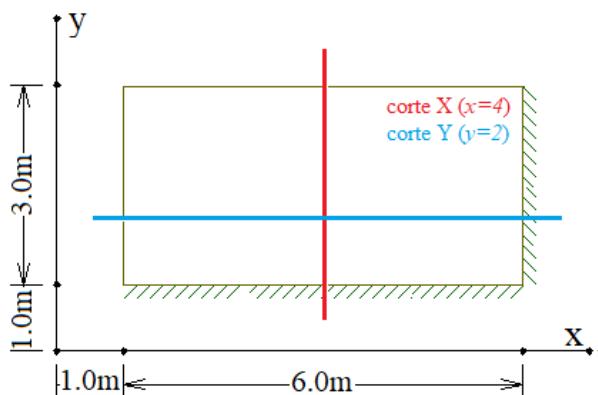
Fonte: O Autor

Observando a Figura 105, pode-se notar que a aproximação de ordem linear apresentam resultados ruins em todas as discretizações. Para a aproximação quadrática foram obtidos bons resultados apenas para os deslocamentos transversais w , na nuvem de 95, 329 e 1229 pontos. O mesmo caso se verificou para a aproximação cúbica, no entanto para o deslocamento transversal a nuvem de 95 pontos obteve resultados medianos. Para o corte Y (Figura 106) os resultados foram semelhantes, para a rotação ϕ_y foi mediana, com exceção da aproximação quadrática na malha de 95 pontos. Para o deslocamento transversal os menores erros são obtidos para as nuvens de 95, 329 e 1229 pontos utilizando uma aproximação com base monomial de ordem quadrática.

B.3 L-ENGASTADA

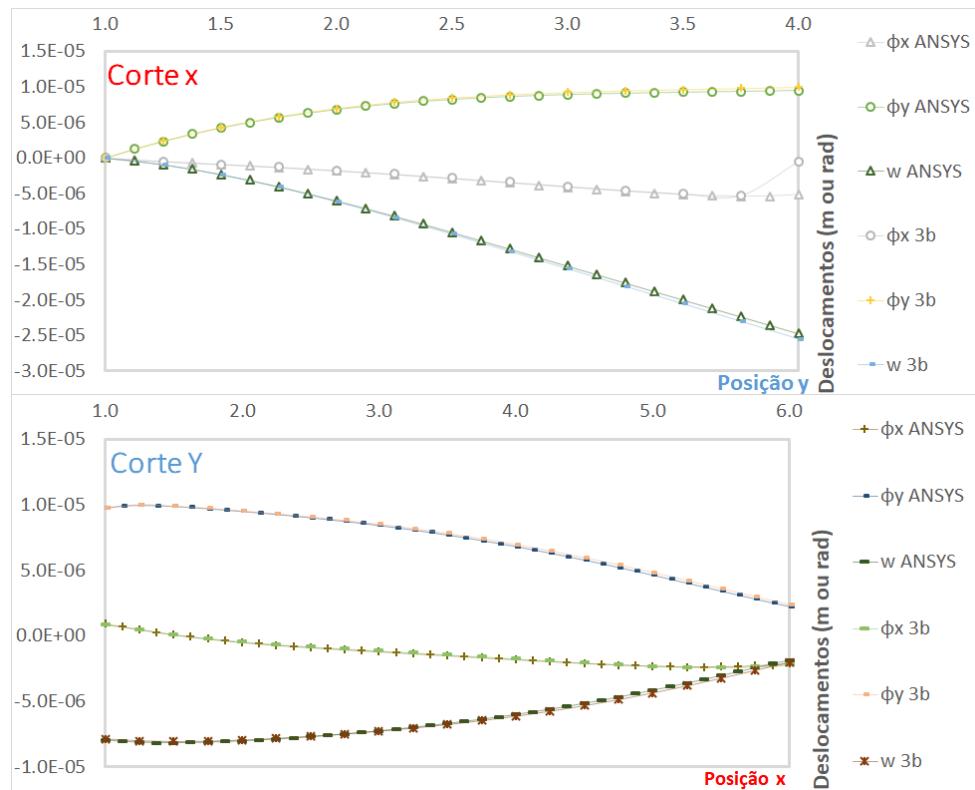
A representação da placa é apresentada pela Figura 107, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 108 e o erro relativo pela Figura 109.

FIGURA 107 – Placa Retangular L-Engastada



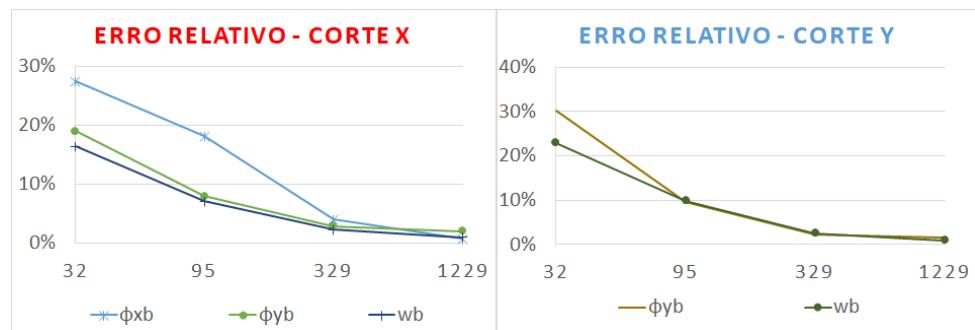
Fonte: O Autor

FIGURA 108 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Retangular L-Engastada



Fonte: O Autor

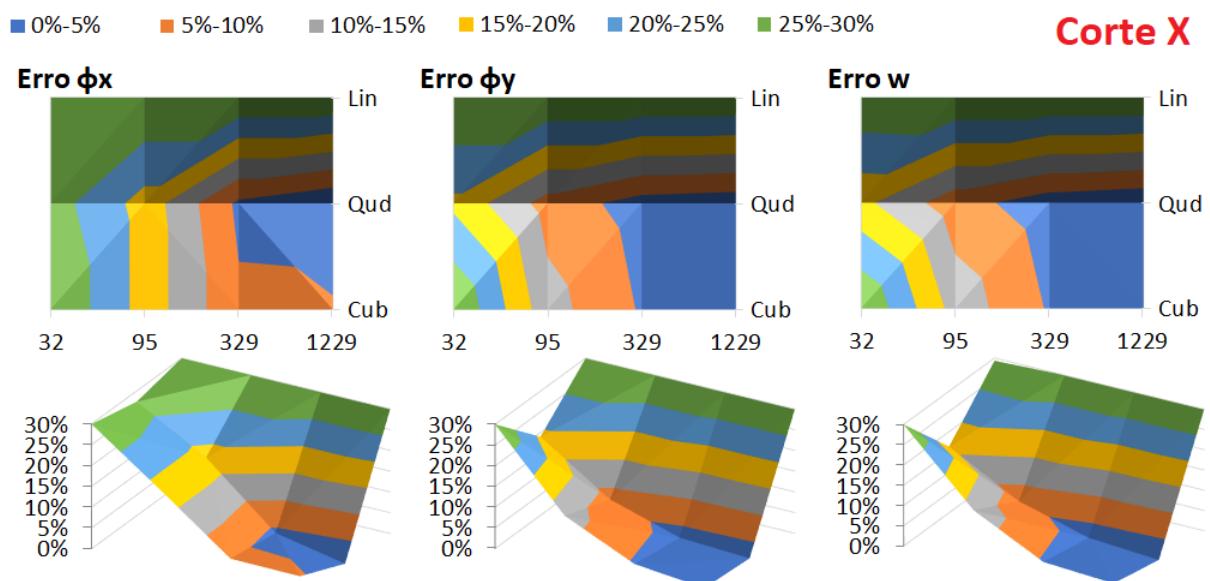
FIGURA 109 – Erro Relativo – Placa Retangular L-Engastada



Fonte: O Autor

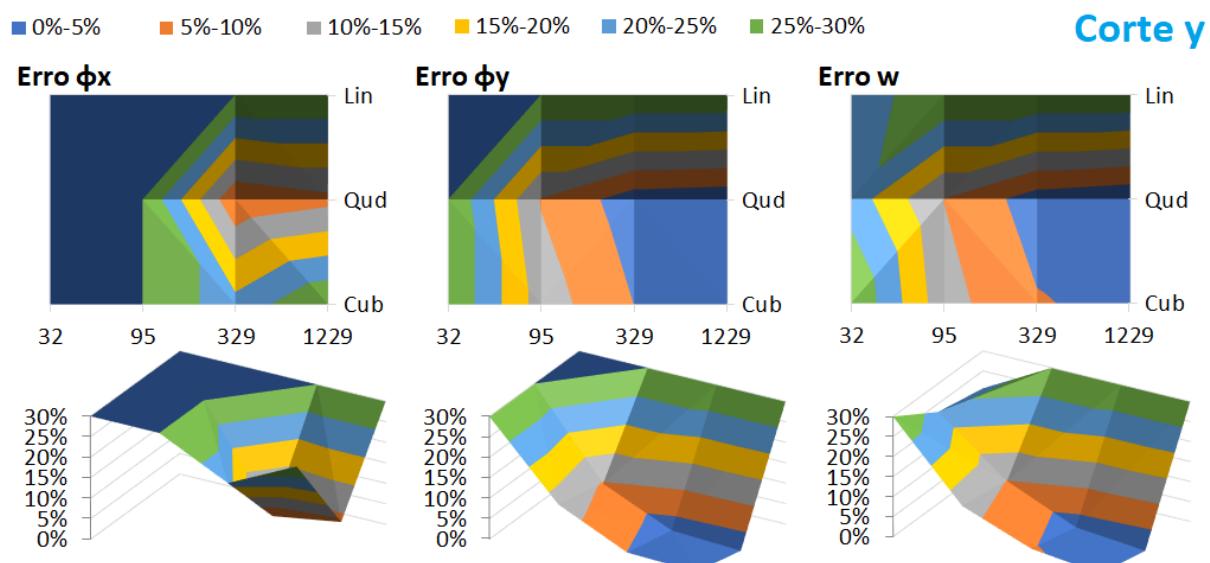
A Figura 110 e a Figura 111 mostram o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto dos cortes X e Y, como é mostrado na Equação 6.1.

FIGURA 110 – Erro Relativo Total: Placa Retangular L-Engastada



Fonte: O Autor

FIGURA 111 – Erro Relativo Total: Placa Retangular L-Engastada



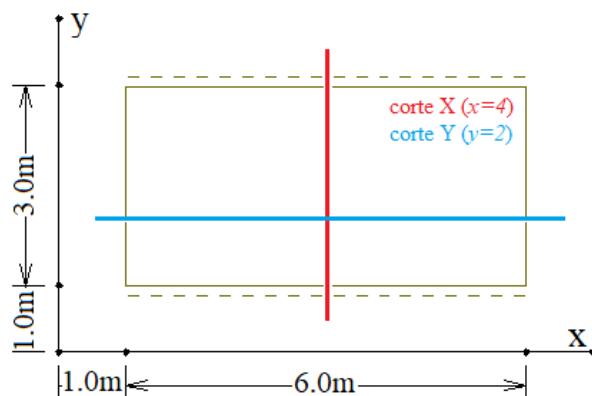
Fonte: O Autor

Observando a Figura 110, pode-se notar que a aproximação de ordem linear apresentam resultados ruins em todas as discretizações e no geral bons resultados foram obtidos pelas aproximações quadrática e cúbica nas nuvens de 329 e 1229 pontos. Para o corte Y (Figura 111) constataram-se os mesmos resultados, exeto para a rotação ϕ_x que apresenta resultados medianos para aproximação quadrática com 329 e 1229 pontos, e erros acima de 10% para as demais discretizações.

B.4 BI-APOIADA

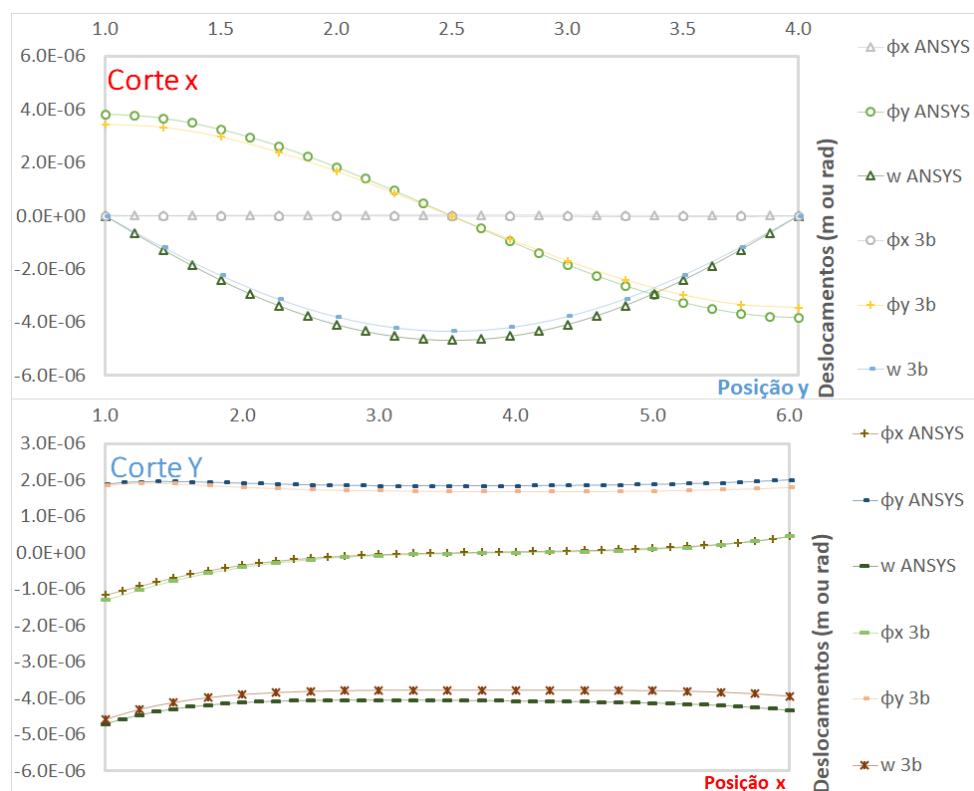
A representação da placa é apresentada pela Figura 112, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 113 e o erro relativo pela Figura 114.

FIGURA 112 – Placa Retangular Bi-Apoiada



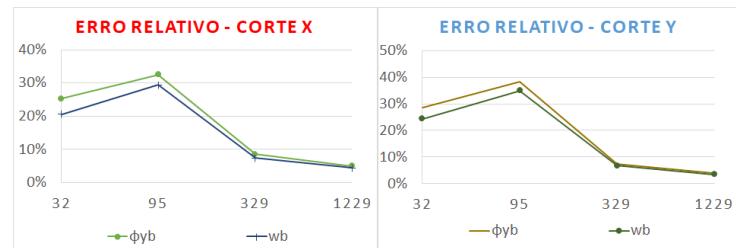
Fonte: O Autor

FIGURA 113 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Retangular Bi-Apoiada



Fonte: O Autor

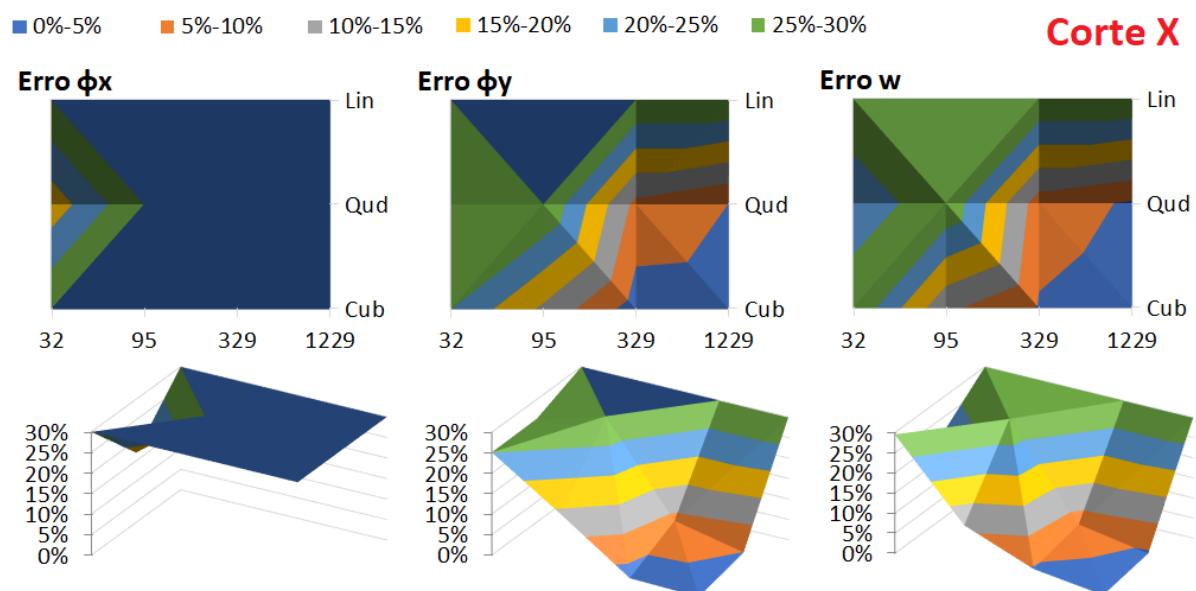
FIGURA 114 – Erro Relativo – Placa Retangular Bi-Apoiada



Fonte: O Autor

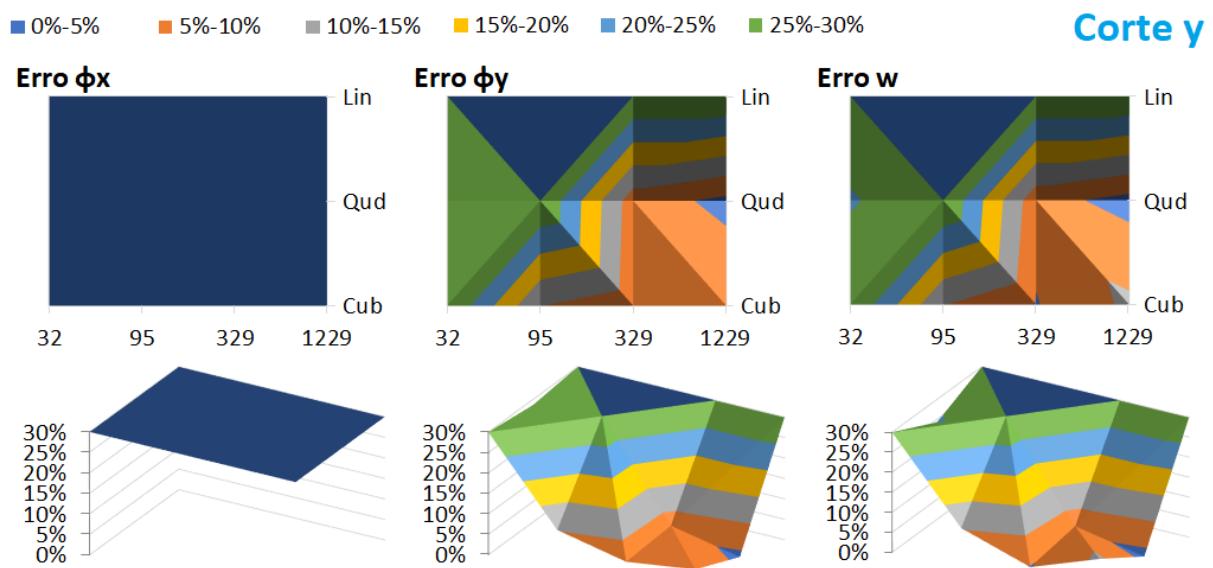
A Figura 115 e a Figura 116 mostram o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto dos cortes X e Y, como é mostrado na Equação 6.1.

FIGURA 115 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Bi-Apoiada



Fonte: O Autor

FIGURA 116 – Erro Relativo Total: Placa Retangular Bi-Apoiada



Fonte: O Autor

Observando a Figura 115, pode-se notar que não foram obtidos bons resultados para este caso, apenas a aproximação quadrática com 1229 pontos e a cúbica com 329 e 1229 nós apresentaram um erro relativo menor do que 5%. Para o corte Y (Figura 116) foram constatados resultados semelhantes, com erros um pouco maiores, e apenas na aproximação quadrática com 1229 pontos o erro foi menor que 5%.

APÊNDICE C – PLACA ESCONSA

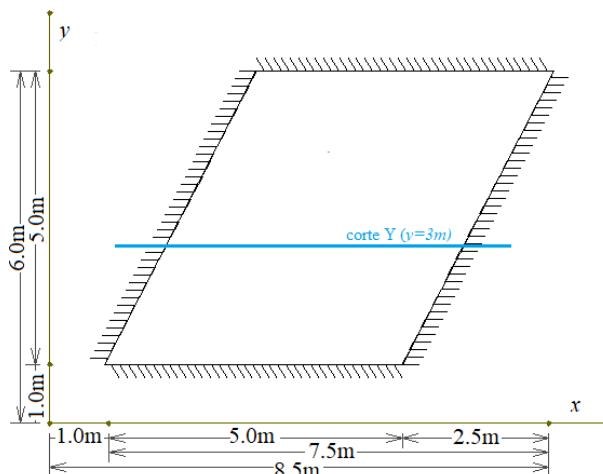
Os resultados aqui demonstrados, são uma continuação da Seção 6.3, no entanto foi realizada uma análise mais simplificada do que para os exemplos anteriores. Vale ressaltar que, foram considerados resultados bons aqueles que apresentaram erros de até 5%, resultados medianos pra um erro de até 10%, aceitáveis, apenas para analisar o comportamento do método, valores com um erro de até 30%, e resultados ruins para um erro maior que 30%.

Os casos foram organizados retirando uma vinculação de engaste em cada caso a fim de analisar a influência das vinculações de borda na obtenção dos deslocamentos.

C.1 TOTALMENTE ENGASTADA

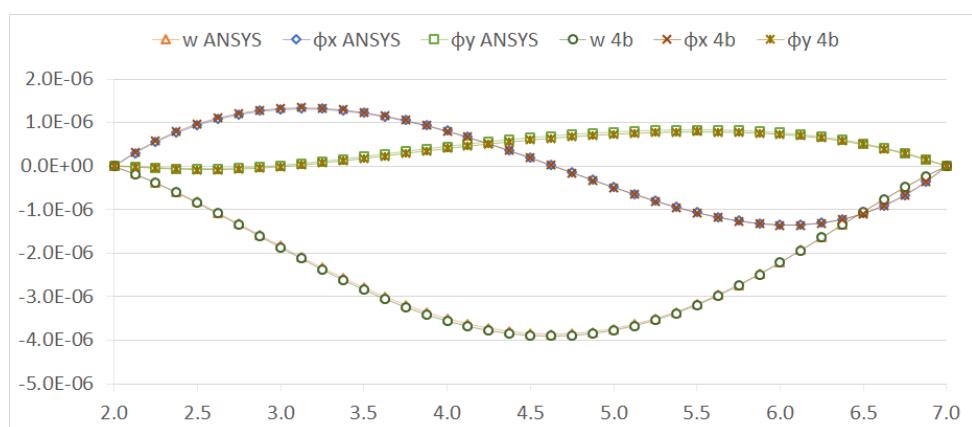
A representação da placa é apresentada pela Figura 117, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 118 e o erro relativo pela Figura 119.

FIGURA 117 – Placa Esconsa Engastada



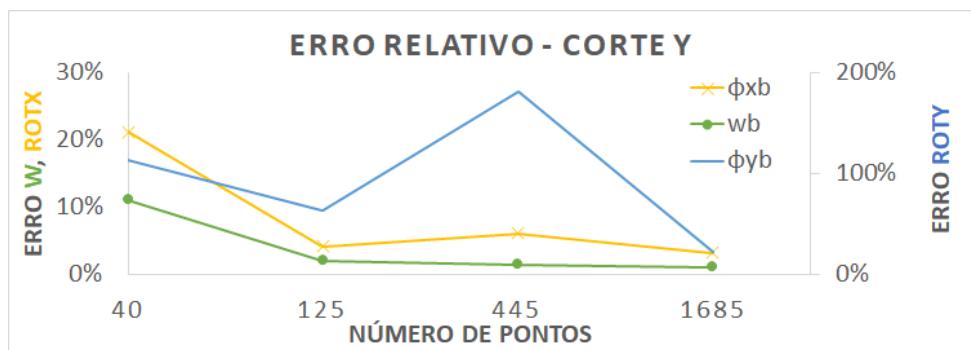
Fonte: O Autor

FIGURA 118 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Esconsa Engastada



Fonte: O Autor

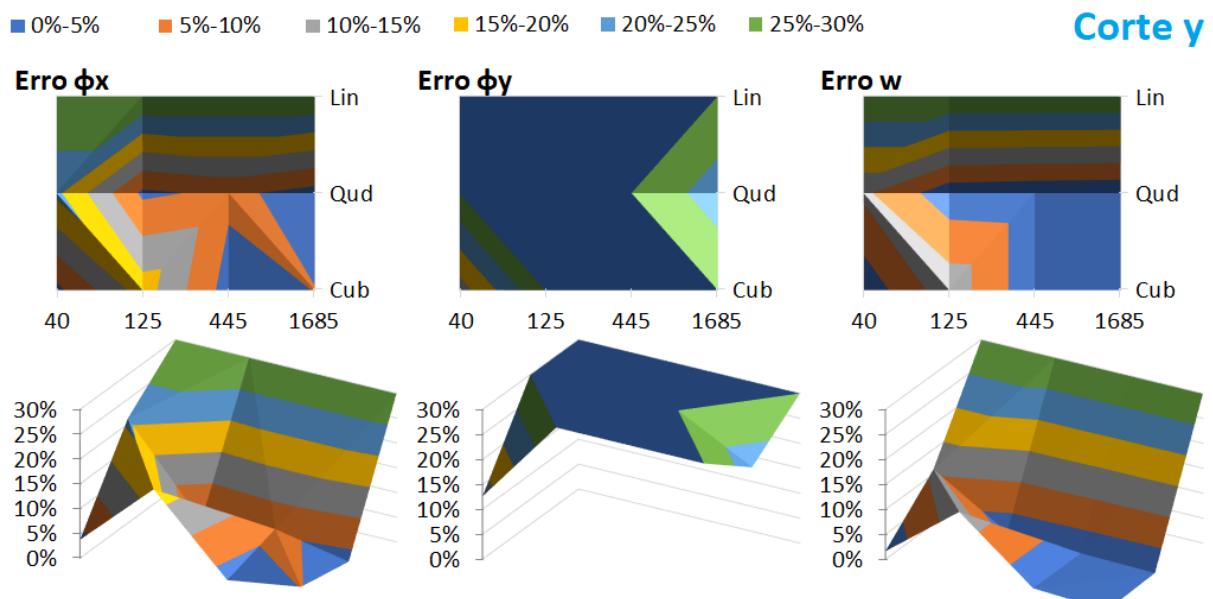
FIGURA 119 – Erro Relativo – Placa Esconsa Engastada



Fonte: O Autor

A Figura 120 mostra o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto do corte Y, como é mostrado na Equação 6.1.

FIGURA 120 – Erro Relativo Total: Placa Esconsa Engastada



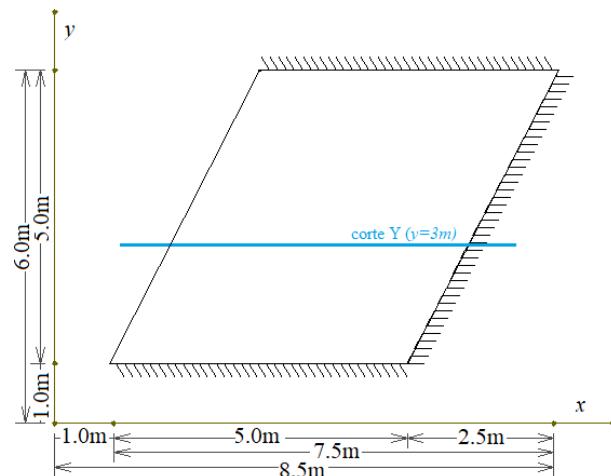
Fonte: O Autor

Como mostra a Figura 120 os resultados não foram bons para a maior parte das discretizações relacionadas a rotação ϕ_x apresentando muita oscilação nos resultados. Para o deslocamento transversal entanto obtiveram-se bons resultados com uma base monomial de ordem quadrática para a nuvem de 125, 445 e 1685 pontos, para ordem cúbica com uma nuvem de 445 e 1685. O comportamento da aproximação cúbica foi semelhante ao constatado no Exemplo 06 (ver Subseção 6.3.2), com um erro alto para a segunda discretização.

C.2 TRI-ENGASTADA

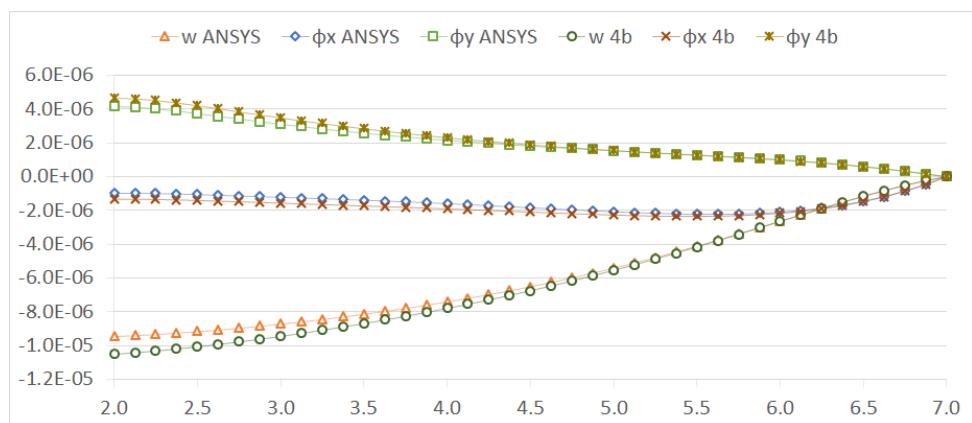
A representação da placa é apresentada pela Figura 121, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 122 e o erro relativo pela Figura 123.

FIGURA 121 – Placa Esconsa Tri-Engastada



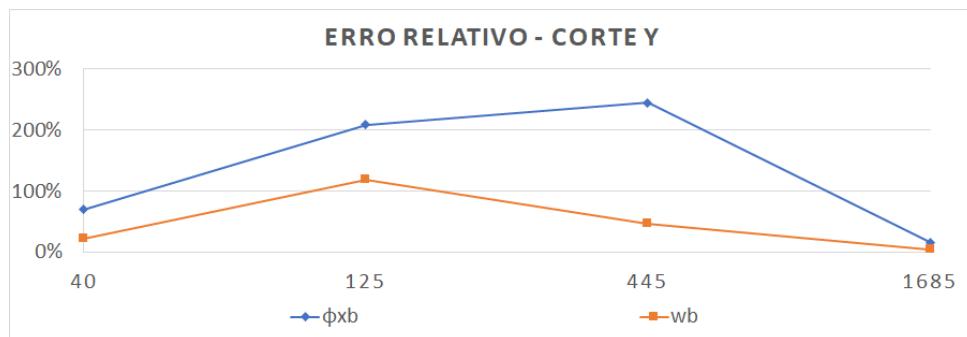
Fonte: O Autor

FIGURA 122 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Esconsa Tri-Engastada



Fonte: O Autor

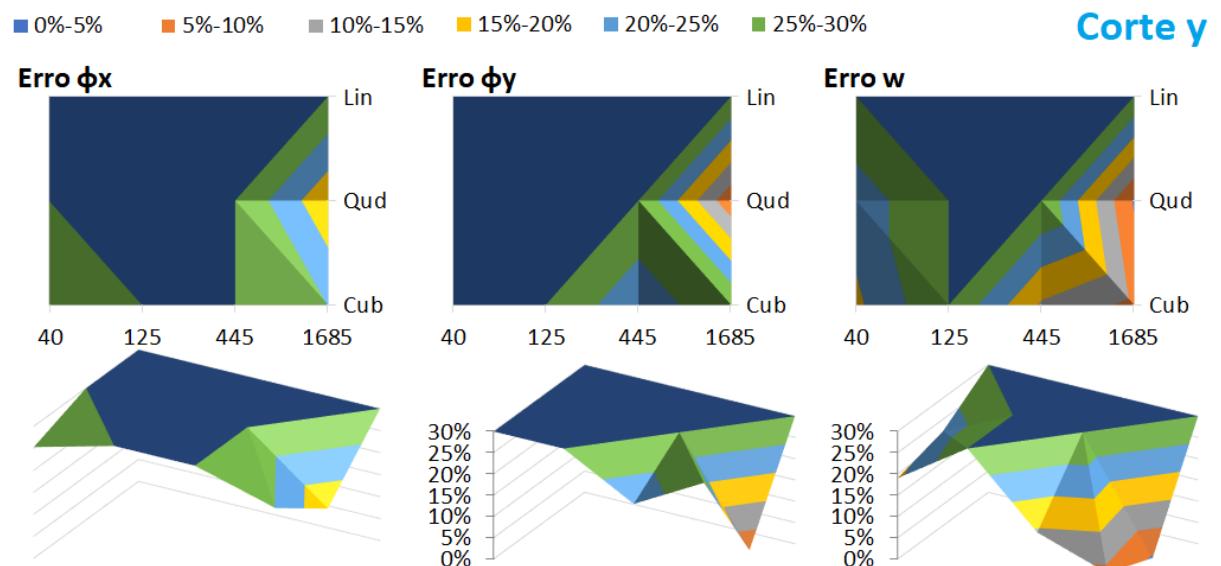
FIGURA 123 – Erro Relativo – Placa Esconsa Tri-Engastada



Fonte: O Autor

A Figura 124 mostra o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto do corte Y, como é mostrado na Equação 6.1.

FIGURA 124 – Erro Relativo Total: Placa Esconsa Tri-Engastada

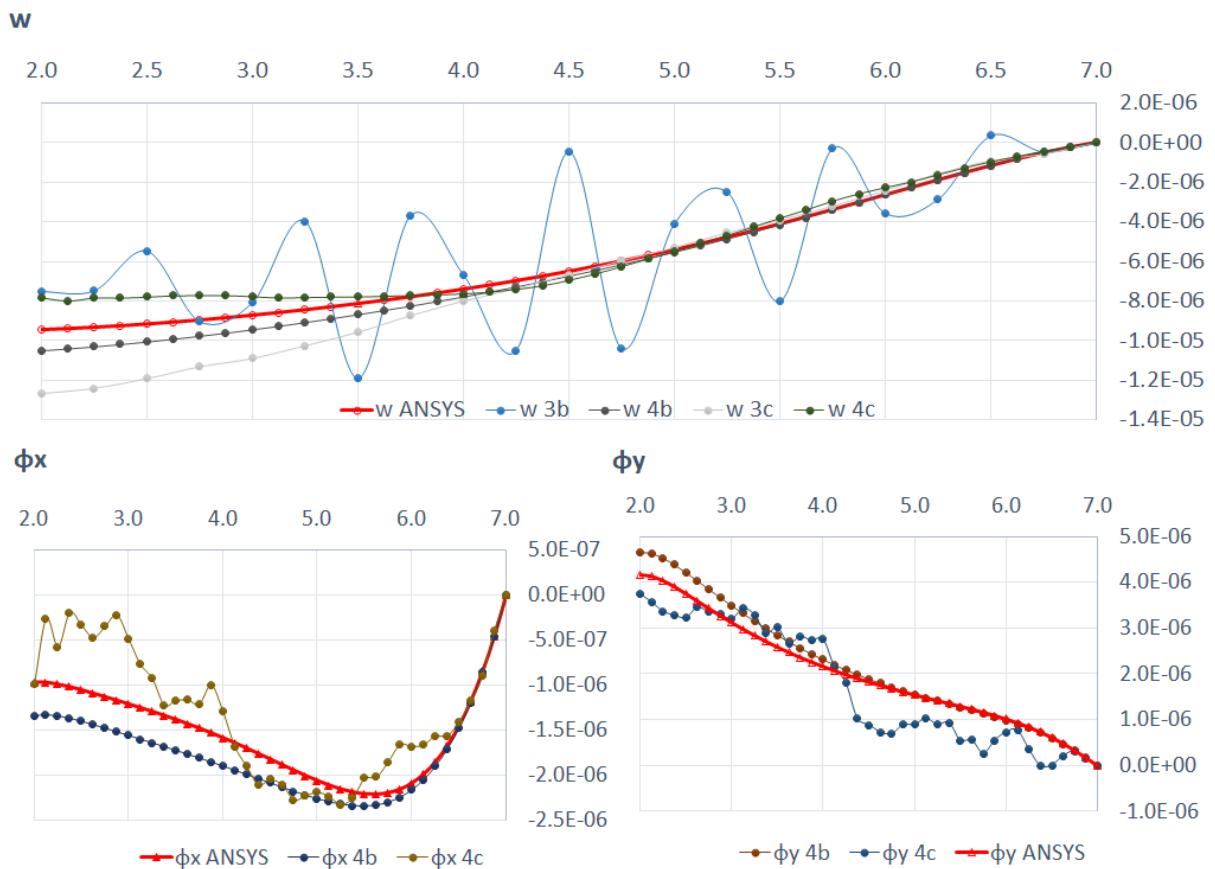


Fonte: O Autor

Como mostra a Figura 124, os resultados obtidos não foram satisfatórios, apresentando altos erros relativos, com valores medianos apenas para aproximação quadrática utilizando uma nuvem de 1685 pontos.

Observando a Figura 125 é notado um comportamento semelhante ao do Exemplo 05(ver Subseção 6.3.1) foi constatado aqui, a discretização de 445 pontos apresentou uma série de oscilações, a nuvem de 1685 pontos também apresentou oscilações para as rotações ϕ_x e ϕ_y quando utilizadas bases monomiais de ordem cúbica, tais oscilações no entanto foram menores que na nuvem de 445 nós, o que leva a crer que uma malha maior possibilitaria avaliar melhor esse comportamento. Quando empregada ordens quadráticas a quarta discretização já não apresenta mais esse erro.

FIGURA 125 – Problemas Constatados para Placa Esconsa Tri-Engastada

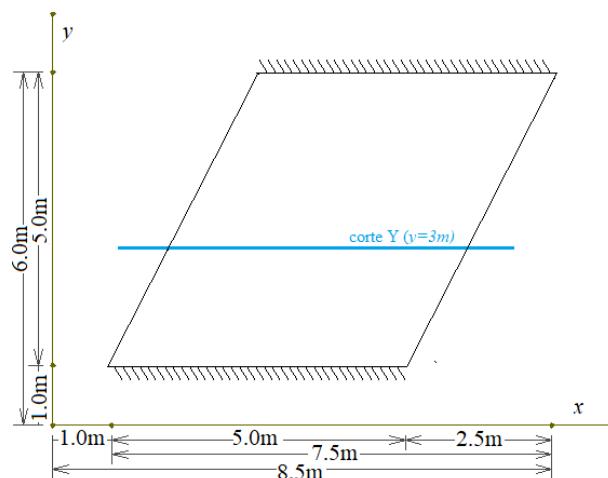


Fonte: O Autor

C.3 BI-ENGASTADA

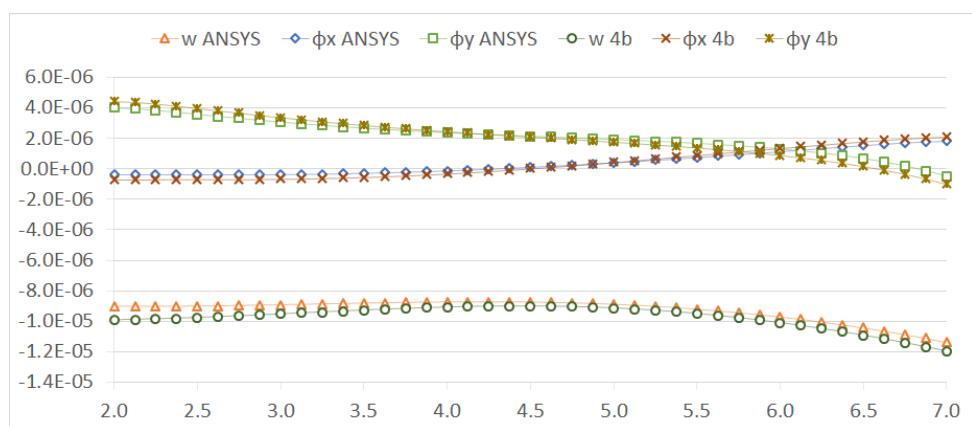
A representação da placa é apresentada pela Figura 126, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 127 e o erro relativo pela Figura 128.

FIGURA 126 – Placa Esconsa Bi-Engastada



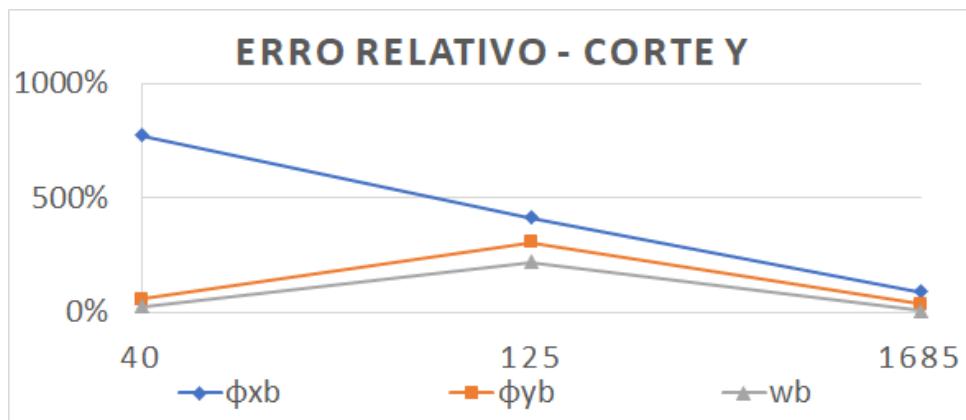
Fonte: O Autor

FIGURA 127 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Esconsa Bi-Engastada



Fonte: O Autor

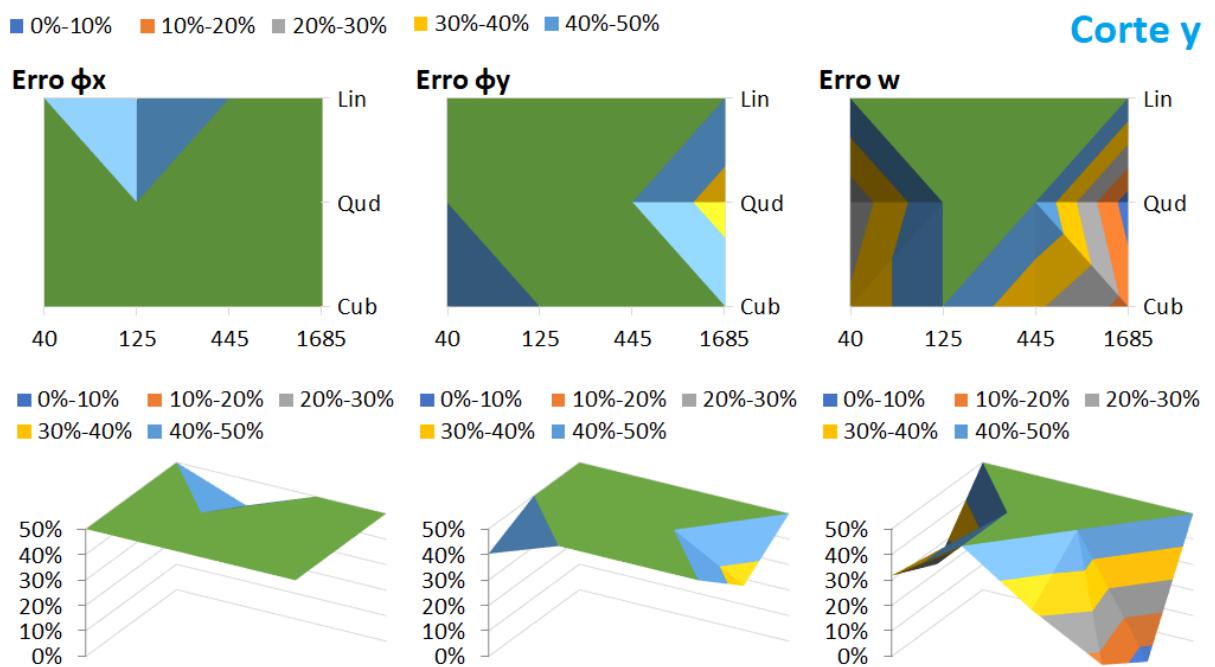
FIGURA 128 – Erro Relativo – Placa Esconsa Bi-Engastada



Fonte: O Autor

A Figura 129 mostra o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto do corte Y, como é mostrado na Equação 6.1.

FIGURA 129 – Erro Relativo Total: Placa Esconsa Bi-Engastada nos Lados Retos



Fonte: O Autor

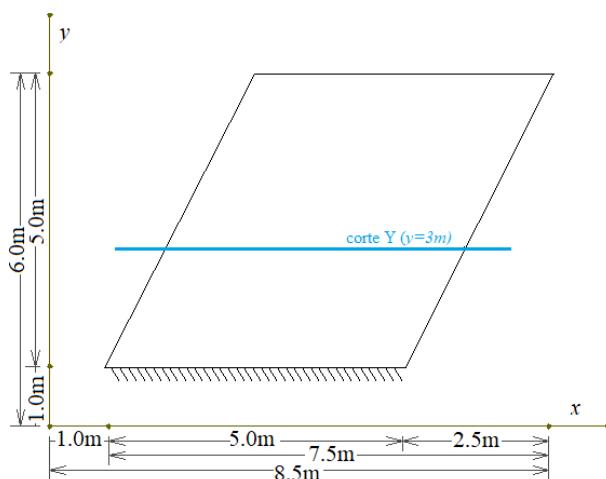
Foi notado um comportamento semelhante ao do Exemplo 05(ver Subseção 6.3.1), e ao caso anterior (ver Seção C.2), uma nuvem com 6565 nós não conseguiu ser calculado, por limitações da máquina, sendo difícil a avaliação deste erro. A Figura 129 foi colocada em uma escala de até 50% de erro relativo

máximo, para melhor visualização uma vez que, para a maior parte das discretizações obteve-se um erro relativo maior que 30%.

C.4 EM BALANÇO

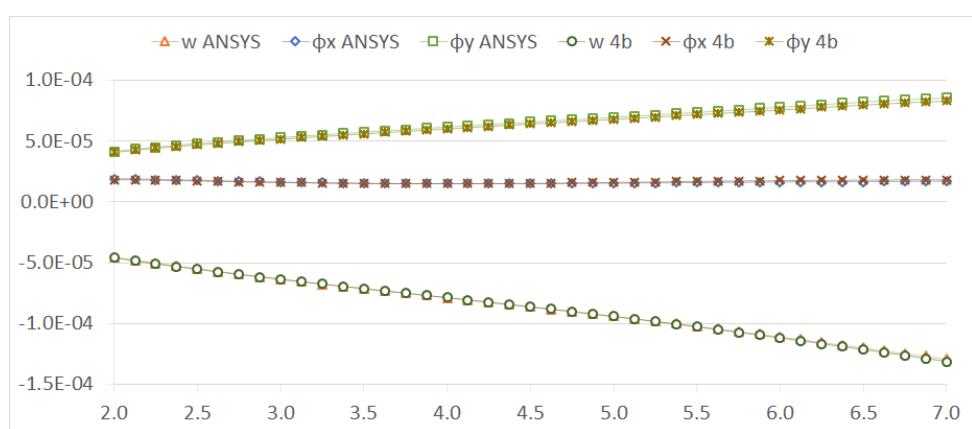
A representação da placa é apresentada pela Figura 130, um comparativo entre os deslocamentos obtidos pelo MQMO e pelo MEF apresentado pela Figura 131 e o erro relativo pela Figura 132.

FIGURA 130 – Placa Esconsa Em Balanço



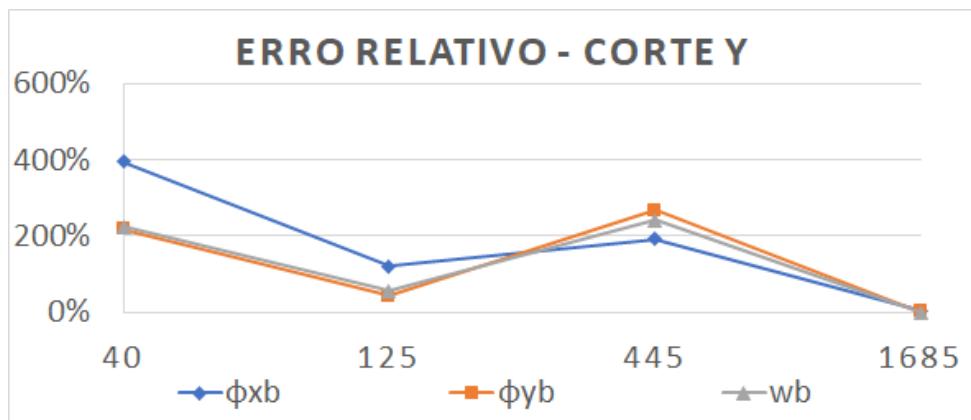
Fonte: O Autor

FIGURA 131 – Deslocamentos obtidos no MQMO e MEF – Placa Esconsa Em Balanço



Fonte: O Autor

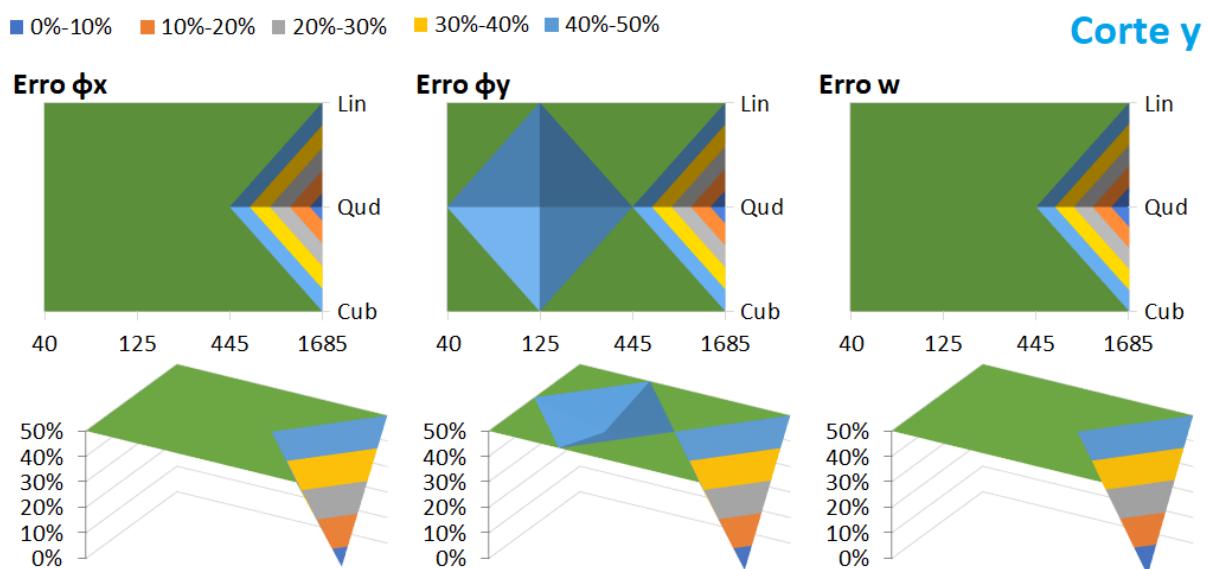
FIGURA 132 – Erro Relativo – Placa Esconsa Em Balanço



Fonte: O Autor

A Figura 133 mostra o erro relativo variando em função do número de pontos e também da ordem de base monomial, a fim de ilustrar melhor a eficiência do MQMO em cada uma das discretizações realizadas. Os erros foram calculados como uma média do erro para cada ponto dos cortes X e Y, como é mostrado na Equação 6.1.

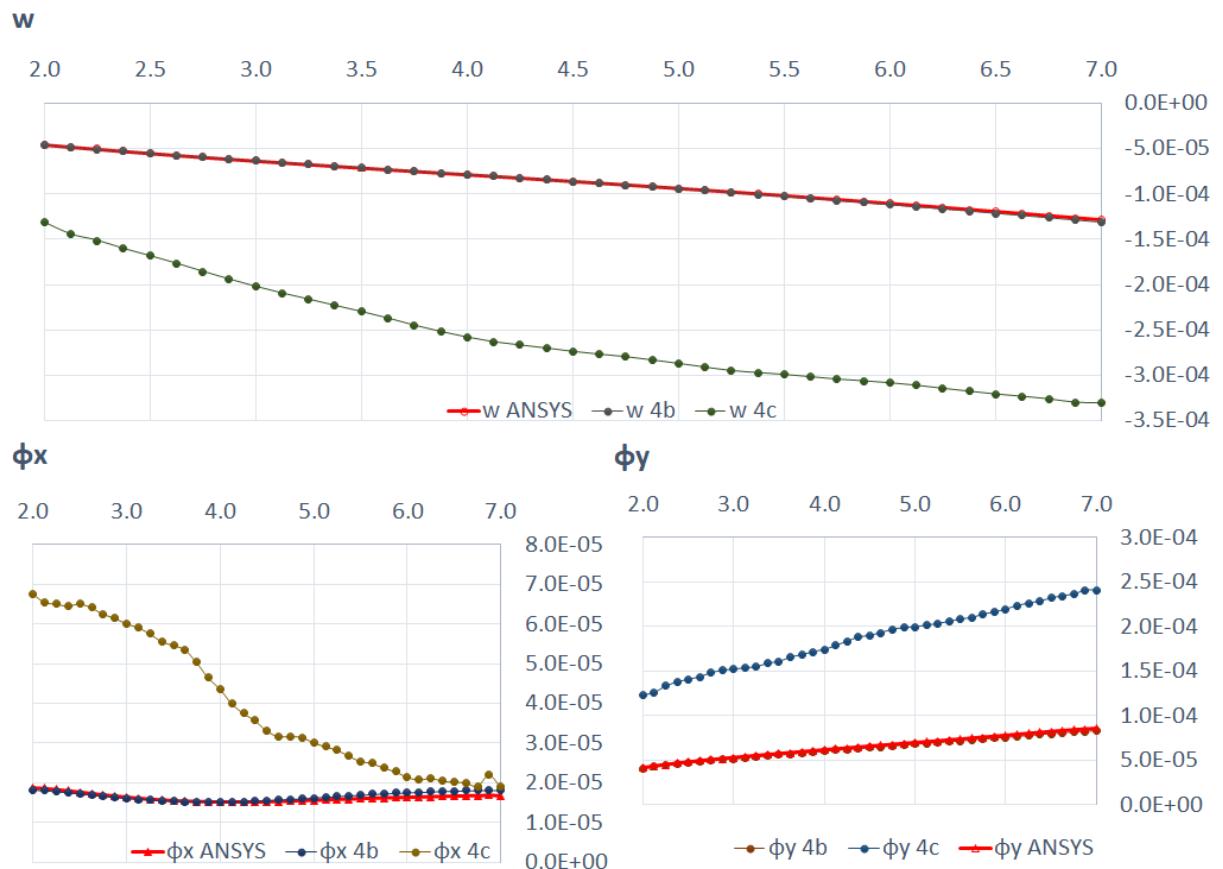
FIGURA 133 – Erro Relativo Total: Placa Esconsa em Balanço - engaste no lado reto



Fonte: O Autor

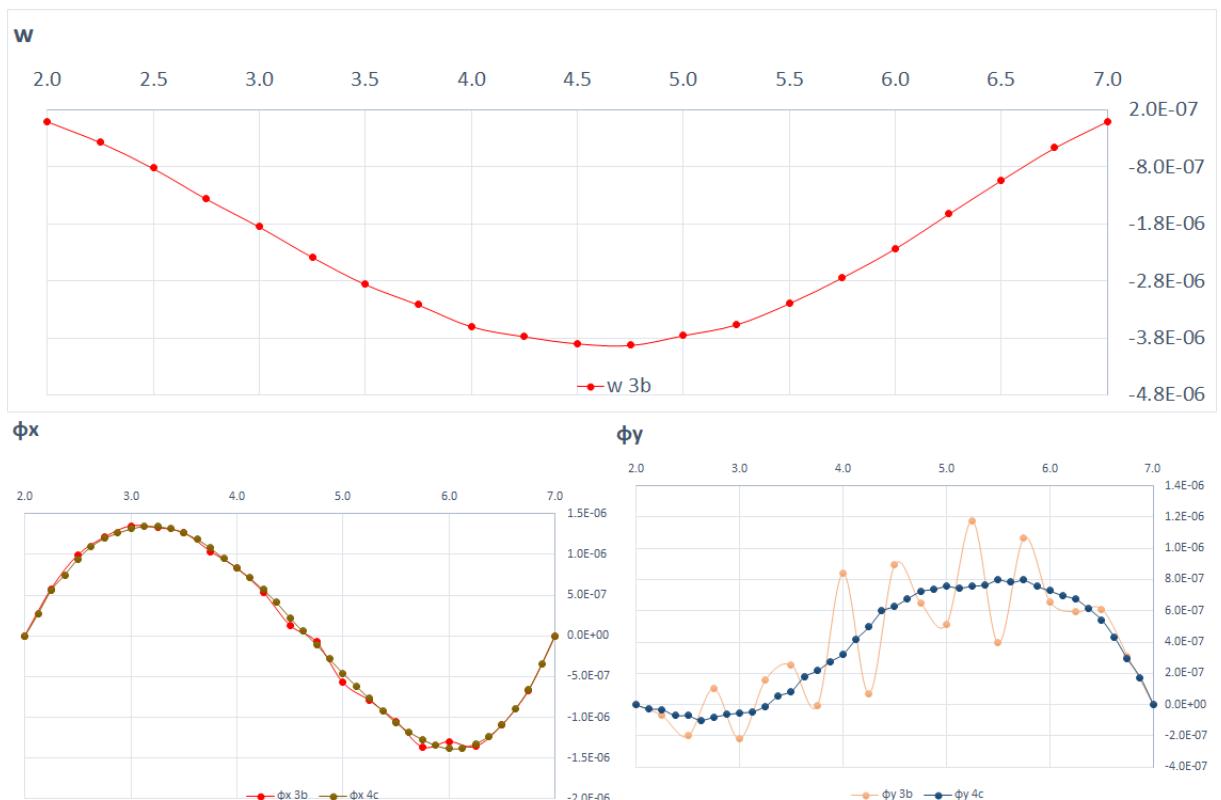
O mesmo problema do Exemplo 05(ver Subseção 6.3.1) também foi constatado aqui, no entanto com erros muito maiores, os deslocamentos apresentam uma diferença grande em relação aos obtidos pelo MEF, como mostra a Figura 134, para a malha de 1685 pontos e aproximação cúbica. Analisando as demais placas, como é visto na Figura 135, pode ser notado que esse comportamento já começa a ocorrer para a placa esconsa totalmente engastada(ver Seção C.1), porém numa menor intensidade do que nestes casos mais complexos.

FIGURA 134 – Problemas Constatados para Placa Esconsa em Balanço



Fonte: O Autor

FIGURA 135 – Problemas Constatados para Placa Esconsa Engastada



Fonte: O Autor