

MÉTODOS ITERATIVOS EN ALGEBRA LINEAL

Antes de comenzar con el proyecto, definiremos método iterativo como en la resolución de un problema matemático mediante aproximaciones cercanas a la solución comenzando con una estimación inicial mediante un método eficaz y eficiente. Cabe destacar que la aproximación obtenida mejorará cada vez que realicemos el proceso, pudiendo establecer una aproximación muy cercana al valor real.

Una vez definido método iterativo, nos centraremos en la búsqueda de estos para analizar dos problemas diferentes. Por un lado, la búsqueda de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales y la búsqueda de autovalores y autovectores de una matriz mediante el análisis del *power method*, el cual nos permite estudiar el autovalor dominante y las variaciones para localizar el resto de los autovalores. Para cada método deberemos implementar un código en un lenguaje de programación, donde se comente las acciones que realiza el código para determinar la compresión de este y un documento explicativo del método, donde se desarrollarán los fundamentos, el error cometido, la comparación con otros métodos...

- **Búsqueda de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.**

- **Método de Jacobi.** El método de Jacobi es un método iterativo que permite la resolución de sistemas de ecuaciones lineales al modo de $AX = b$. Este método, cuyo nombre viene dado por el matemático alemán Carl Gustav J. Jacobi, se basa en el uso de fórmulas como iteración de punto fijo, siendo este un método iterativo que permite la resolución de sistemas de ecuaciones no necesariamente lineales y se suele utilizar para determinar raíces de forma $f(x)$, siempre que se cumplan los criterios de convergencia.

Utilización del método de Jacobi. *A la hora de explicar el método de Jacobi, introduciré un ejemplo para facilitar su comprensión por medio de la letra cursiva. En primer lugar, deberemos considerar la forma del siguiente sistema lineal:*

[illegible]

Por ejemplo, teniendo una serie de datos en un ejercicio, obtenemos este sistema lineal, donde el primer paso será escribirla en forma matricial $Ax=b$.

$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + 4z = 7 \end{cases} \rightarrow Ax = b \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Este método iterativo para resolución de sistemas lineales de forma $Ax = b$, donde será necesario la realización de una serie de cambios hasta llegar a la forma $x = Tx + c$ donde T es una matriz fija y c un vector.

El primer cambio se produce en la matriz definida en el ejercicio, la cual tendremos que sustituirla por la siguiente expresión $A = (D - L - U)$, donde D es la matriz diagonal cuya diagonal es la misma que la matriz original (A), -L corresponde con los valores que se encuentran por debajo de la diagonal, siendo el resto de números pertenecientes a la matriz, de valor 0 y -U corresponde con los valores por encima de la diagonal, siendo el resto de valores, 0. *Realizamos estos pasos en la matriz dada, obteniendo los siguientes resultados:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow (D - L - U)X = b$$

$$AX = B \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Una vez realizado este paso, será necesario despejar la X en el lado izquierdo, correspondiendo a partir de ahora a x^{k+1} de la ecuación quedando de esta forma $(D - L - U)x = b \rightarrow Dx^{k+1} = b + (L + U)x^k \rightarrow x^{k+1} = D^{-1}b + D^{-1}(L + U)x^k$, en donde la x de la izquierda será x^k , es decir por medio de los valores anteriores obtenemos una nueva aproximación. En primer lugar, tendremos que calcular la matriz inversa para determina la existencia de esta, y para observar si en la diagonal se cumple la existencia de valores distintos de 0.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Luego, sustituyendo D^{-1} en la expresión simplificada anteriormente, queda finalmente:

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0x^k & \frac{y^k}{3} & \frac{z^k}{3} \\ \frac{x^k}{3} & 0y^k & -\frac{z^k}{3} \\ -\frac{x^k}{2} & -\frac{y^k}{4} & 0z^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3y^k & 1/3z^k \\ 1/3x^k & 1 & -1/3z^k \\ -1/2x^k & -1/4y^k & 7/4 \end{pmatrix}$$

Una vez alcanzado este paso, podemos establecer un sistema lineal de forma que:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y^k - \frac{1}{3}z^k \\ y^{k+1} = \frac{1}{3}x^k + 1 - \frac{1}{3}z^k \\ z^{k+1} = -\frac{1}{2}x^k - \frac{1}{4}y^k + \frac{7}{4} \end{cases}$$

Para generar las distintas aproximaciones, partimos con una iteración inicial de $x(0)$, donde en este caso será $x_0=0$, $y_0=0$ y $z_0=0$. Pudiendo sustituir estos valores en el nuevo sistema dado para comenzar a calcular las ecuaciones posteriores.

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y^0 - \frac{1}{3}z^0 = \frac{1}{3} \\ y^1 = \frac{1}{3}x^0 + 1 - \frac{1}{3}z^0 = 1 \\ z^1 = -\frac{1}{2}x^0 - \frac{1}{4}y^0 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} \\ y^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} \\ z^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{7}{4} \end{cases}$$

El proceso se irá repitiendo hasta alcanzar su convergencia. Para el ejemplo corresponde con el paso 15, donde $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Luego, el método podrá resumirse en forma de algoritmo:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right], i = 1 \dots n, k = 0, 1 \dots$$

Para el criterio de parada o el criterio de convergencia en el sistema de Jacobi, utilizaremos una cota de diferencia entre dos aproximaciones consecutivas, cuyo valor debe de ser menor que la tolerancia para finalizar el proceso.

$$|x^k - x^{k+1}| = \max_{1 \leq i \leq n} < Tol$$

Velocidad de Convergencia. En los métodos iterativos, es importante conocer la velocidad de convergencia, la cual nos permite conocer cuantas iteraciones v se deben realizar para la obtención de n cifras correctas. Para ello utilizamos la ecuación $|e^{k+v}| \leq 10^{-m}|e^k|$. Por medio de esta ecuación, nos permite obtener información acerca de la velocidad con la que la sucesión se aproxima a la solución. Esta ecuación se podrá simplificar tomando las normas, quedando como $|e^{k+v}| \leq |[G]^v||e^k|$.

Error cometido. Para el cálculo del error cometido utilizaremos la matriz M que se obtiene de la siguiente forma $M = D^{-1}(L + U)$ y la matriz N que se calcula de la siguiente forma $F = D^{-1}b$. Una vez hallada, podremos calcular el error de truncamiento en la iteración k -enésima siendo $\varepsilon^k = x^k - x = Mx^{k-1} + F - Mx - F \rightarrow \varepsilon = M\varepsilon^{k-1}$. Repitiendo el proceso, el error cometido será $\varepsilon^k = M^k\varepsilon^0$, siendo ε^0 el error inicial cometido.

Criterios de parada del método. Dentro de este apartado, podremos hablar de dos bloques, criterios propios del método, en caso de que $|x^k - x^{k+1}| = 0$, es decir, si el error de precisión es igual a 0. Y, por otro lado, tendremos los criterios definidos por el usuario, donde destacaremos el número máximo de iteraciones o la tolerancia a establecer por el usuario.

La primera dificultad para la resolución de este método es el cálculo de matriz inversa, un paso que en algunas ocasiones se puede complicar de forma notable. Además, tampoco podremos usar este método en caso de que la matriz posea algún coeficiente no nulo en la diagonal, es decir, deben de ser valores distintos de 0.

Comparación. Las principales ventajas de utilización de este método frente a otros ocurren si la matriz de coeficientes original del sistema es dominante diagonal, lo que provoca que el método converja. Y, en caso de que el radio espectral de la matriz sea menor a uno, de nuevo, el método también convergerá.

- **Método de Gauss-Seidel.** Dado un sistema de ecuaciones de la forma $Ax=b$, utilizaremos el método de Gauss-Seidel mediante la iteración del sistema de punto fijo. Es decir, deberemos transformar el sistema en $(L + D)x = (L + D - A)x + b$, donde destacaremos que $(A - L + D) = U$ es la matriz donde los elementos no nulos se encontrarían por encima de la diagonal principal. Luego la ecuación quedará de forma que $(L + D)x = -Ux + b$ y las sucesiones iterativas se obtendrán mediante la ecuación $(L + D)x^k = (L + D - A)x^{k-1} + b$.

Al igual que hicimos con el método de Jacobi, utilizaremos un ejemplo, con un $\varepsilon = 0,001$ para facilitar su comprensión. Dado el siguiente sistema de ecuaciones, en primer lugar, lo ordenamos de tal forma que en la diagonal aparezcan los valores mayores para asegurar la convergencia:

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = 19,30 \\ 3x_1 - 0,1x_2 + 0,2x_3 = 7,85 \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 + 10x_3 = 71,40 \end{cases} \rightarrow Ax = b \rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 0,1x_2 + 0,2x_3 = 7,85 \\ 0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = 19,30 \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 + 10x_3 = 71,40 \end{cases}$$

Una vez, realizado este paso, despejamos cada una de las variables sobre la diagonal suponiendo que los valores iniciales de $x_2=0$ y $x_3=0$.

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1x_2 + 0,2x_3}{3} = \frac{7,85}{3} = 2,616666$$

Una vez conocido el valor de x_1 se sustituye para el valor de x_2 de la segunda ecuación y de x_3 de la tercera ecuación.

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7} = \frac{-19,3 - 0,1 \cdot 2,616666}{7} = -2,794523$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,1x_1 + 0,2x_2}{10} = \frac{71,4 - 0,3 \cdot 2,616666 + 0,2 \cdot -2,794523}{10} = 7,005609$$

Para la segunda iteración se repite el mismo proceso que en el primer caso, aunque sustituyendo los valores obtenidos anteriormente.

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1 \cdot (-2,794523) + 0,2 \cdot 7,005609}{3} = 2,990556$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7} = \frac{-19,3 - 0,1 \cdot 2,990556 + 0,3 \cdot 7,005609}{7} = -2,499624$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,1x_1 + 0,2x_2}{10} = \frac{71,4 - 0,3 \cdot 2,990556 + 0,2 \cdot (-2,499624)}{10} = 7,000290$$

Una vez realizado esta, se observa si se ha llegado al error que debe de cometer de $\varepsilon = 0,001$.

$$|x_1^1 - x_1^0| = |2,990556 - 2,616666| = 0,373890$$

$$|x_2^1 - x_2^0| = |-2,794523 - (-2,499524)| = 0,294899$$

$$|x_3^1 - x_3^0| = |7,000290 - 7,005609| = 0,005319$$

Al observarse que no se alcanza el error mínimo a cometer se utiliza la siguiente iteración mediante la repetición del proceso anterior.

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1 \cdot (-2,499624) + 0,2 \cdot 7,000290}{3} = 3,000031$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7} = \frac{-19,3 - 0,1 \cdot 3,000031 + 0,3 \cdot 7,000290}{7} = -2,499988$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,1x_1 + 0,2x_2}{10} = \frac{71,4 - 0,3 \cdot 3,000031 + 0,2 \cdot (-2,499988)}{10} = 6,999999$$

Volvemos a observar si se alcanza el error mínimo a cometer de $\varepsilon = 0,001$.

$$|x_1^2 - x_1^1| = |3,000031 - 2,990556| = 0,009475$$

$$|x_2^2 - x_2^1| = |-2,499988 - (-2,794523)| = 0,000364$$

$$|x_3^2 - x_3^1| = |6,999999 - 7,000290| = 0,000291$$

De nuevo no se cumple la condición, luego repetimos de nuevo el proceso.

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1 \cdot (-2,499988) + 0,2 \cdot 6,999999}{3} = 3,000000$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7} = \frac{-19,3 - 0,1 \cdot -2,500000 + 0,3 \cdot -6,999999}{7} = -2,500000$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,1x_1 + 0,2x_2}{10} = \frac{71,4 - 0,3 \cdot -2,500000 + 0,2 \cdot (-2,500000)}{10} = 7,000000$$

Volvemos a observar si se alcanza el error mínimo a cometer de $\varepsilon = 0,001$.

$$|x_1^3 - x_1^2| = |3,000000 - 3,000031| = 0,000031$$

$$|x_2^3 - x_2^2| = |-2,500000 - (-2,499988)| = 0,000012$$

$$|x_3^3 - x_3^2| = |7,000000 - 6,999999| = 0,000001$$

En este caso, se cumple la condición luego los valores correspondientes serán los siguientes $x_1 = 3,0$, $x_2 = -2,50$, $x_3 = 7,0$. Luego en esta ocasión únicamente se han realizado tres iteraciones.

Velocidad de Convergencia. La velocidad de convergencia en el caso del método de Jacobi es la misma que en el método de Gauss-Seidel. En los métodos iterativos, es importante conocer la velocidad de convergencia, la cual nos permite conocer cuantas iteraciones v se deben realizar para la obtención de n cifras correctas. Para ello utilizamos la ecuación $|e^{k+v}| \leq 10^{-m}|e^k|$. Por medio de esta ecuación, nos permite obtener información acerca de la velocidad con la que la sucesión se aproxima a la solución. Esta ecuación se podrá simplificar tomando las normas, quedando como $|e^{k+v}| \leq |[G]^v||e^k|$.

Error cometido. El proceso del cálculo del error cometido será similar al proceso de Jacobi modificando las matrices M y N utilizadas anteriormente. Para el cálculo del error cometido utilizaremos la matriz M que se obtiene de la siguiente forma $M = -(D + L)^{-1}U$ y la matriz N que se calcula de la siguiente forma $F = (D + L)^{-1}b$. Una vez hallada, podremos calcular el error de truncamiento en la iteración k -ésima siendo $\varepsilon^k = x^k - x = Mx^{k-1} + F - Mx - F \rightarrow \varepsilon = M\varepsilon^{k-1}$. Repitiendo el proceso, el error cometido será $\varepsilon^k = M^k\varepsilon^0$, siendo ε^0 el error inicial cometido.

Criterios de parada del método. El criterio de parada en el caso del método de Jacobi es la misma que en el método de Gauss-Seidel. Dentro de este apartado, podremos hablar de dos bloques, criterios propios del método, en caso de que $|x^k - x^{k+1}| = 0$, es decir, si el error de precisión es igual a 0. Y, por otro lado, tendremos los criterios definidos por el usuario, donde destacaremos el número máximo de iteraciones o la tolerancia a establecer por el usuario como en el ejemplo realizado en el anterior caso.

De nuevo, como el caso del método de Jacobi, una de las principales dificultades será el cálculo de la matriz inversa, aunque en el ejemplo no hemos recurrido a esta, paso que en algunas ocasiones se puede complicar en exceso. Además, en caso de aparecer en la diagonal de la matriz un coeficiente no nulo, no podríamos realizar la utilización de este. Para el uso de este tendremos que partir con una aproximación inicial.

Comparación. Las principales ventajas de utilización de este método frente a otros es que es exacto y acepta fracciones, aunque en ocasiones puede ser demasiado largo, repetitivo y puede que no converja la solución.

- **Búsqueda de Autovalores/Autovectores de una matriz mediante el método Power Method.**

En castellano, Power Method, conocido como método de las potencias es un método iterativo que calcula las aproximaciones de los autovalores y autovectores de una matriz. Este método es muy conocido. Sin ir más lejos, Google lo utiliza cuando buscamos cualquier cosa, ya que se encuentra implementado en su motor de búsqueda. Este método permite aproximar el autovector dominante de una matriz A.

Para realizar este método necesitamos una matriz cuadrada de orden n diagonalizable, es decir, que posee n vectores propios linealmente independientes, siendo uno de estos, dominante, ocurriendo lo siguiente: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

Además, denotaremos como v_i al vector propio asociado a cada autovalor para $i=1, 2, \dots, n$. Luego cada uno de los vectores formados serán linealmente independientes, es decir, cualquier vector v del espacio vectorial \mathbb{R}^n se podrá representar como combinación lineal de los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$. Luego tendremos que:

$$Av = \sum_{i=1}^n a_i Av_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i = a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_n \lambda_n v_n$$

En esta expresión podremos multiplicar de nuevo por A de manera sucesiva, obteniendo de forma general la expresión siguiente en donde podremos sacar factor común del valor propio de mayor módulo.

$$A^k v = a_1 \lambda_1^k v_1 + a_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + a_n \lambda_n^k v_n = \lambda_1^k \left[a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right]$$

Donde en caso de tomar el límite de cualquier valor propio entre el valor propio dominante, donde esta expresión se encuentra elevada a k da como valor 0.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k = 0 \text{ para } i = 2, 3, \dots, n$$

Luego deducido esto, tendremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right] = a_1 v_1$$

Esto provoca que valores grandes de k se cumpla que $A^k v \approx a_1 \lambda_1^k v_1$, de lo que se obtiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^{k+1} v}{A^k v} = \lambda_1$ siendo este, el valor propio dominante de la matriz.

Velocidad de Convergencia. La velocidad de convergencia en el caso del método la potencia dependerá de la magnitud del cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Destacando que cuanto más cercano sea este cociente a 1, más lenta será la convergencia.

Error cometido. El proceso del error cometido consistirá en la resta del valor real menos el valor obtenido mediante la aproximación con el uso de este método en valor absoluto. Tras una extensa búsqueda, no he encontrado información con respecto a este.

Comparación. Las principales ventajas de utilización de este método es que sigue teniendo validez cuando el autovalor dominante λ_1 no es único.

- Bibliografía.

<https://www.uv.es/~diaz/mn/node35.html>
<https://www.youtube.com/watch?v=Q6BdR45uo7I>
<https://sites.google.com/site/procesosnumericoseafit2014011/sistemas-de-ecuaciones-lineales/jacobi>
https://www.ingenieria.unam.mx/pinilla/PE105117/pdfs/tema3/3-3_metodos_jacobi_gauss-seidel.pdf
https://www.cimat.mx/~alram/met_num/clases/clase08b.pdf
<https://esimecuanalisisnumerico.wordpress.com/2014/05/05/metodo-de-gauss-seidel/>
<https://www.uv.es/~diaz/mn/node36.html>
<https://www.ugr.es/~mibanez/ejemplos/potencias.pdf>
https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_las_potencias
<http://www.dma.uvigo.es/~lino/Tema4.pdf>
<https://www.youtube.com/watch?v=KNeOebM8DgU>

Gonzalo Márquez de Torres