Sprawozdanie - laboratorium nr 1
Rozwiązywanie układu równań liniowych metodami bezpośrednimi

Marek Kiełtyka

28 lutego 2019

1 Wstęp

1.1 Metoda Gaussa-Jordana

Metoda ta znajduje zastosowania w algebrze. Za jej pomocą można obliczać macierze odwrotne oraz znacząco uprościć rozwiązywanie układów równań liniowych, co wykorzystano podczas niniejszego laboratorium. Aby to osiągnąć, należy zapisać dany układ w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

gdzie macierz $\boldsymbol{A}$ (tzw. podstawowa) i wektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ oznaczają kolejno:

- współczynniki - $a_{i,j}$,
- niewiadome - x_i
- wyrazy wolne - b_i

Dalej należy stosować opisane poniżej operacje.

1.1.1 Rozwiązywanie URL

W celu uzyskania rozwiązania należy zestawić macierze w sposób: $[\boldsymbol{A}]\,[\boldsymbol{b}]$. Następnie korzystając z dozwolonych operacji, tj.

- mnożenia wierszy przez liczbę różną od zera,
- dodawania i odejmowania wierszy do siebie,

manipulujemy zawartością macierzy do momentu osiągnięcia $a_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, tj. macierzy jednostkowej $\boldsymbol{I}$. Wtedy wektor $\boldsymbol{b_{rozw}}$ zawiera kolejne wartości poszukiwanych niewiadomych, zatem:

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b_{rozw}}. \tag{2}$$

1.1.2 Wyznaczenie macierzy odwrotnej

Tym razem dokonujemy takiego zestawienia $[\boldsymbol{A}]\,[\boldsymbol{I}]$ - jeśli tylko wejściowa macierz jest odwracalna. Operując dozwolonymi sposobami na obu macierzach staramy się uzyskać macierz jednostkową w miejscu wejściowej. Na skutek tego po prawej stronie ukaże się poszukiwana macierz odwrotna. Końcowym rezultatem będzie $[\boldsymbol{I}]\,[\boldsymbol{A^{-1}}]$.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Równania różniczkowe stanowią typowy przykład URL. Na laboratorium poruszono tematykę oscylatora harmonicznego, dla którego z II zasady dynamiki Newtona wynika:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) \tag{3}$$

Można dokonać prostego przybliżenia przy pomocy ilorazu różnicowego, uzależniając drugą pochodną położenia x w chwili t wyłącznie od tych parametrów.

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} \tag{4}$$

Oznaczając odpowiednio $\Delta t = h$ oraz $x_i = x(ih)$ otrzymamy z równania (3) iteracyjną metodę obliczania kolejnych położeń x_i.

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i+1} = 0 \tag{5}$$

Założenia początkowe:

$$
\begin{aligned}
x_0 = A = 1 - &\ \text{początkowe wychylenie z położenia równowagi} \\
\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 - &\ \text{częstość kołowa} \\
v_0 = \frac{x_1 - x_0}{h} = 0 - &\ \text{prędkość początkowa} \\
h = 0,1 - &\ \text{krok całkowania} \\
N = 400 - &\ \text{ilość kroków całkowania.}
\end{aligned}
$$

Zasadniczym problemem było wyznaczenie położenia w kolejnych krokach czasowych i sporządzenie wykresu tej zależności na podstawie wyniku. Zapisując równanie (5) w ogólnej postaci macierzowej można było skorzystać z metody Gaussa-Jordana w celu rozwiązania układu (6).

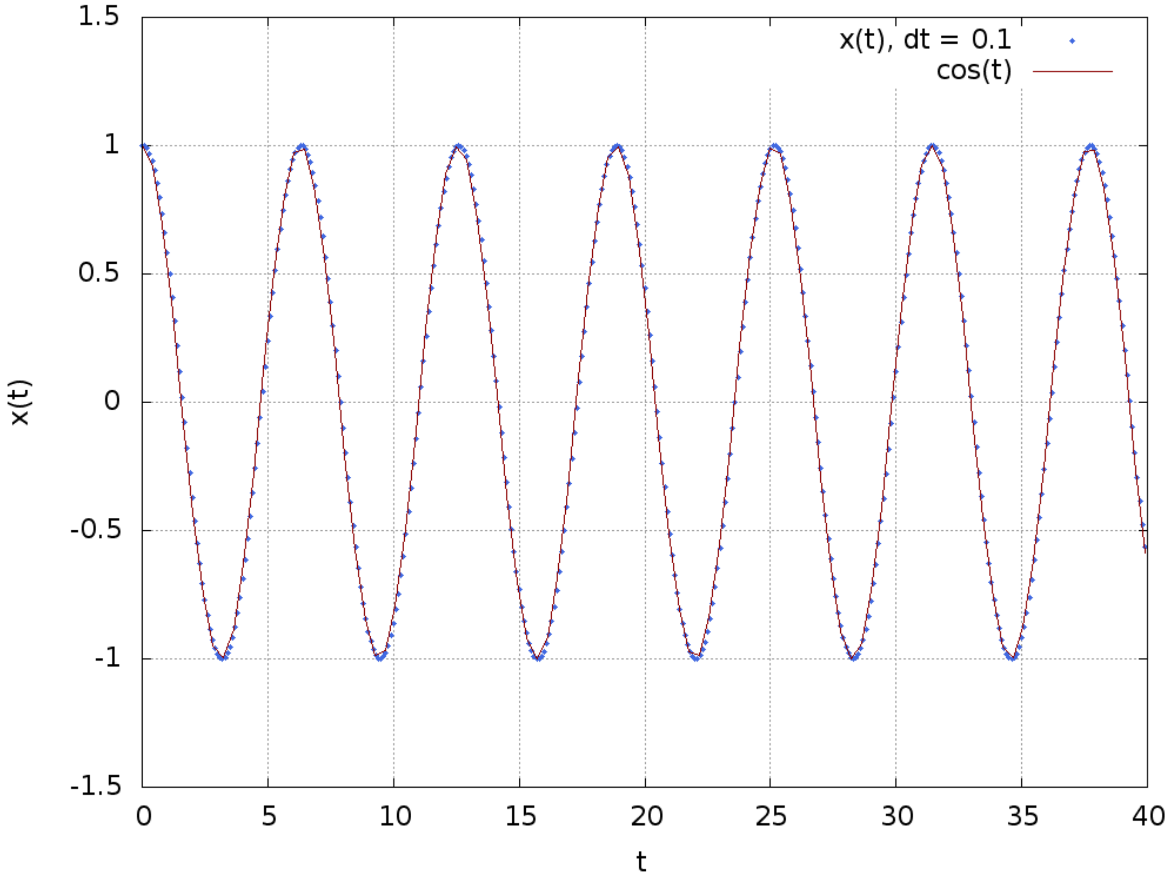
$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
A \\ v_0 h \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{pmatrix}
\tag{6}
$$

2.2 Wyniki

Korzystając z biblioteki *numutil* i gotowej procedury:

*void gaussj(float **a, int n, float **b, int m);*

napisano program w języku C++ w celu rozwiązania opisanego problemu. Otrzymane na wyjściu kroki czasowe i odpowiadające im wartości wychylenia z położenia równowagi należało umieścić na wykresie, co znacząco ułatwiło interpretację wyniku. Było to rozwiązanie numeryczne, które porównano z rozwiązaniem analitycznym (dla oscylatora harmonicznego jest to przebieg funkcji *cosinus*).



Wykres 1: Wychylenie $x(t)$.

3 Wnioski

Wykres (1) prezentuje niemal idealne pokrycie rozwiązań uzyskanych odmiennymi metodami. Trend utrzymuje się na przestrzeni kilku okresów drgań, więc stwierdzamy, iż w przypadku zwiększenia ilości kroków czasowych rozwiązanie wciąż będzie poprawne. Nieznaczne rozbieżności można by niwelować dalej poprzez stopniowe skracanie pojedynczego kroku. W rezultacie otrzymalibyśmy równocześnie większe zagęszczenie punktów oraz lepsze dopasowanie. Podsumowując, metoda Gaussa-Jordana jest bardzo dobrym narzędziem do rozwiązywania układów równań liniowych, gwarantującym wysoką dokładność rezultatów.