Sprawozdanie - laboratorium nr 4

Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej

Marek Kiełtyka

21 marca 2019

1 Wstęp

1.1 Redukcja Householdera

Tytułowy problem własny można znacząco uprościć, redukując macierz symetryczną A do postaci trójdiagonalnej T. Zależy nam na takim rezultacie:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & d_2 \\ c_1 & b_2 & a_3 & \ddots & c_{n-2} \\ d_1 & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ e_1 & d_2 & c_{n-2} & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f_1 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & f_2 & g_2 & \ddots & 0 \\ 0 & g_2 & f_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & g_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & g_{n-1} & f_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Pośrednim krokiem jest przekształcenie macierzy wejściowej A do macierzy P, które razem dają następujący iloczyn:

$$T = P^{-1}AP \tag{2}$$

Metoda jest stabilna numerycznie, więc nawet w przypadku ewentualnej kumulacji błędów nie dojdzie do zakłamania wyniku.

1.2 Wartości i wektory własne macierzy trójdiagonalnej

Z definicji wektor $\vec{y}$ jest wektorem własnym macierzy T jeśli istnieje taka liczba λ będąca wartością własną macierzy T, dla której

$$T\vec{y} = \lambda\vec{y}. \tag{3}$$

Dzięki przekształceniu (1) uzyskuje się przy okazji wartości własne dla macierzy A, które są równe obliczonym kolejno λ_k. Ponadto wyznaczenie wartości i wektorów własnych jest dużo szybsze z uwagi na postać macierzy T.

1.3 Wektory własne macierzy symetrycznej

Korzystając z równań (2) oraz (3) dokonuje się równoważnych przekształceń:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP\vec{y} &= \lambda\vec{y}, \quad / \cdot P \text{ lewostronnie} \\ A(P\vec{y}) &= \lambda(P\vec{y}) \\ A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ \vec{x} &= P\vec{y} \end{aligned}$$

Ostatnie równanie wyznacza przepis na wektory własne $\vec{x}_k$ macierzy wejściowej. W zależności od wymiaru macierzy N uzyskuje się odpowiednio $\vec{x}_k$ dla $k = 1, 2, ..., N$. W celu sprawdzenia poprawności ich wyznaczenia stosowany jest współczynnik jakości obliczany dla każdego wektora jako

$$\beta_k = \frac{(x_k, Ax_k)}{(x_k, Ax_k)}, \text{ gdzie} \tag{4}$$

- (x_k, Ax_k) - iloczyn skalarny macierzowy
- (x_k, x_k) - iloczyn skalarny danego wektora w przestrzeni euklidesowej.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Wzorem wstępu teoretycznego, należało przeprowadzić rozumowanie dla macierzy symetrycznej o wymiarze $N = 5$ danej przepisem $A_{i,j} = \sqrt{i+j}$ dla $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Jako że część wartości była konieczna do dalszego rozwiązywania zadania, szukano niewiadomych w podanej kolejności:

- macierz przekształcenia P
- macierz trójdiagonalna T
- wartości i wektory własne macierzy trójdiagonalnej T, a na ich podstawie również dla macierzy wejściowej A
- współczynniki jakości β_k

2.2 Wyniki

Rozwiązanie opracowano w oparciu o bibliotekę *Numerical Recipes* ze szczególnym użyciem procedur *tred2* oraz *tqli*. Opracowana samodzielnie biblioteka *ObjectiveNR* bazująca na *NR* okazała się być bardzo pomocna przy operacjach macierzowo-wektorowych. Poniżej zaprezentowano otrzymane wyniki.

Macierz przekształcenia Householdera:

$$P = \begin{pmatrix} 0.127995 & 0.473318 & 0.748056 & -0.447214 & 0 \\ -0.559029 & -0.639797 & 0.21169 & -0.483046 & 0 \\ 0.75337 & -0.341655 & -0.221449 & -0.516398 & 0 \\ -0.321774 & 0.499901 & -0.588694 & -0.547723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wartości własne macierzy A:

$$\lambda_1 = -2.4575e - 07$$
$$\lambda_2 = -7.34517e - 05$$
$$\lambda_3 = -0.00511678$$
$$\lambda_4 = -0.381893$$
$$\lambda_5 = 12.2415$$

Wektory własne $\vec{y}_k$ macierzy T dla odpowiednich wartości własnych λ_k:

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -0.860161 \\ 0.371571 \\ -0.216227 \\ -0.137207 \\ -0.23765 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -0.509986 \\ -0.618499 \\ 0.369873 \\ 0.234827 \\ 0.406723 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -0.00604528 \\ -0.692329 \\ -0.436638 \\ -0.287573 \\ -0.497285 \end{pmatrix},$$
$$\vec{y}_4 = \begin{pmatrix} 1.00407e - 06 \\ 0.00861619 \\ 0.790691 \\ -0.332559 \\ -0.513943 \end{pmatrix}, \vec{y}_5 = \begin{pmatrix} -2.99203e - 11 \\ 8.22916e - 06 \\ -0.024372 \\ -0.856 \\ 0.5164 \end{pmatrix}$$

Wektory własne $\vec{x}_k$ macierzy A dla odpowiednich wartości własnych λ_k:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -0.0346135 \\ 0.263629 \\ -0.656232 \\ 0.664969 \\ -0.23765 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -0.186354 \\ 0.645677 \\ -0.376067 \\ -0.49145 \\ 0.406723 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -0.526489 \\ 0.492809 \\ 0.477178 \\ 0.0704053 \\ -0.497285 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0.744284 \\ 0.32251 \\ -0.00630781 \\ -0.279018 \\ -0.513943 \end{pmatrix}, \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 0.364587 \\ 0.408323 \\ 0.447431 \\ 0.483203 \\ 0.5164 \end{pmatrix}$$

k	β_k	λ_k
1	-5.60687e-07	-2.4575e-07
2	-7.35992e-05	-7.34517e-05
3	-0.00511705	-0.00511678
4	-0.381893	-0.381893
5	12.2415	12.2415

Tablica 1: Sprawdzenie, czy wektory $\vec{x}_k$ są wektorami własnymi macierzy A. Współczynniki postaci (4) powinny być równe wartościom własnym λ_k.

3 Wnioski

Dzięki postaci macierzy wejściowej znajdowanie jej wektorów i wartości własnych okazało się dużo łatwiejsze i szybsze niż w typowych przypadkach. Wyznacznikiem poprawności wykonania zadania są współczynniki β_k, które znikomo różnią się dla pierwszych trzech wartości, a dla czwartej i piątej są identyczne - zgodnie z tabelą (1). Drobne rozbieżności mogą wynikać z reprezentacji liczb zmiennoprzecinkowych dla pojedynczej precyzji w pamięci komputera.

Całokształt wyników świadczy o dobrym sposobie opracowania rozwiązania i skuteczności opisywanej metody.