Sprawozdanie - laboratorium nr 9
Aprokysmacja wielomianowa

Marek Kiełtyka

9 maja 2019

1 Wstęp

1.1 Aproksymacja

Aproksymacja liniowa funkcji $f(x) \in X$ (gdzie X jest przestrzenią liniową) polega na wyznaczeniu współczynników $a_0, \ldots, a_m$ funkcji aproksymującej, której postać wyraża się wzorem

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x). \tag{1}$$

Poszczególne czynniki $\varphi_i(x)$ są funkcjami bazowymi $(m+1)$ wymiarowej podprzestrzeni X_{m+1} $(X_{m+1} \in X)$. Należy zagwarantować spełnienie warunku

$$||f(x) - F(x)|| = minimum, \tag{2}$$

gdyż zapewnia to jak najlepsze przybliżenie do siebie funkcji: aproksymującej i aproksymowanej.

W zależności od rozważanego problemu można dokonywać różnych wyborów podprzestrzeni i bazy. Przykładowo dla podprzestrzeni:

- funkcji trygonometrycznych stosuje się bazę $\{1, sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x), \ldots, sin(kx), cos(kx)\}$, $k \in C$,
- wielomianów stopnia m korzysta się z bazy $\{x^0 = 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^m\}$,
- związanej z własnościami rozważanego problemu (np. $\exp(-ax^2+bx+c)$) bazę rozważa się indywidualnie

1.2 Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów

Jako bazę przyjmuje się ciąg jednomianów

$$\{x^0 = 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^m\}. \tag{3}$$

Warunek minimum jest postaci

$$\sum_{j=0}^{n} \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i \right] x_j^k = 0, k = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

lecz można zmienić kolejność sumowania i otrzymać

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k} \right) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) x_j^k. \tag{5}$$

Oznaczając dalej

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k} \text{ oraz } r_k = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) x_j^k \tag{6}$$

otrzymuje się w rezultacie układ normalny

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_{ik} = r_k \implies G^T a = r, \tag{7}$$

którego rozwiązanie dostarcza współczynników do funkcji aproksymującej. Na laboratorium wykorzystano właśnie tę metodę.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Celem zadania była aproksymacja funkcji

$$g(x) = exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \tag{8}$$

przy założeniu współczynników

$$a_0 = -\frac{x_0^2}{2\sigma^2}, a_1 = \frac{x_0}{\sigma^2}, a_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}. \tag{9}$$

Początkowo dokonano przejścia na funkcję wielomianową, aby można ją było aproksymować w bazie jednomianów $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$.

$$f(x) = ln(g(x)) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{10}$$

Kombinacja liniowa była zatem postaci

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m=3} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3, \tag{11}$$

przy czym kluczowe zagadnienie stanowiło znalezienie współczynników b_0, b_1, b_2, b_3 w celu stworzenia funkcji $G(x)$ będącej przybliżeniem funkcji (8). Zatem

$$g(x) \approx G(x) = exp(F(x)) = exp(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3). \tag{12}$$

Wykonano aproksymację funkcji (8) w bazie jednomianów $m = 4$ elementowej dla $N = 11$ węzłów.

W drugiej części aproksymowano funkcję poniższej postaci z wykorzystaniem szumu.

$$g_2(x) = g(x)(1 + \alpha(U - 0.5)) \tag{13}$$

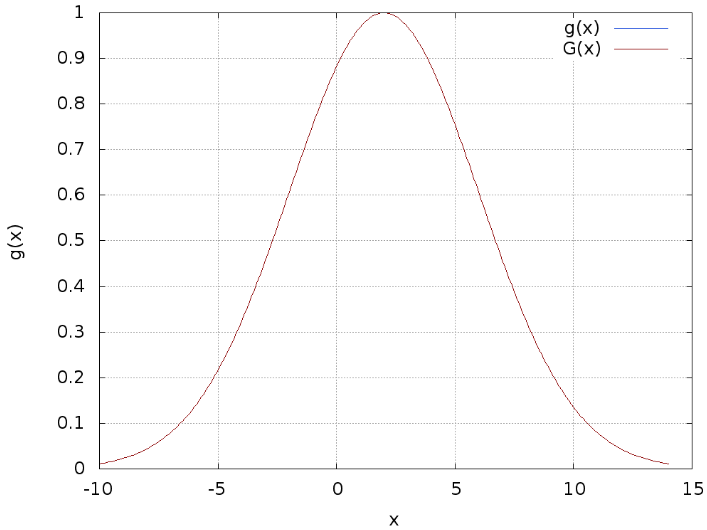
Parametry zadano

$$\alpha = 0.5, \text{ zaś } U = \frac{\text{rand()}}{\text{RAND\_MAX } + 1.0} \in [0, 1] \tag{14}$$

z wykorzystaniem funkcji i makra bibliotecznego języka C. Wykonano aproksymację funkcji (13) kolejno dla $N = 11$ oraz $N = 101$ węzłów.

Dla obu funkcji przyjęto $x_0 = 2, \sigma = 4$.

2.2 Wyniki



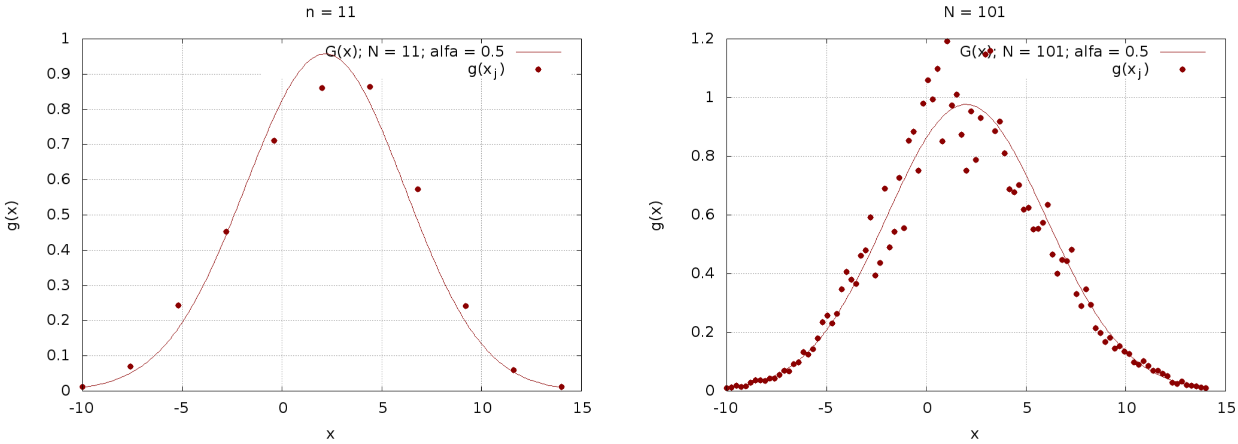
Wykres 1: Aproksymacja funkcji $g(x)$, parametr $\alpha = 0, N = 11$ węzłów aproksymacji.

	Analityczne		Numeryczne
a_0	-0.125	b_0	-0.124998
a_1	0.125	b_1	0.125
a_2	-0.03125	b_2	-0.03125
		b_3	3.0227e-16

Tablica 1: Współczynniki a_i (dokładne) oraz odpowiadające im przybliżone współczynniki b_i dla funkcji $g(x)$.

	Analityczne		Numeryczne, $N = 11$	Numeryczne, $N = 101$
a_0	-0.125	b_0	-0.0837553	-0.145795
a_1	0.125	b_1	0.112924	0.125896
a_2	-0.03125	b_2	-0.0313635	-0.0305659
		b_3	5.7518e-05	1.22693e-05

Tablica 2: Współczynniki a_i (dokładne) oraz odpowiadające im przybliżone współczynniki b_i dla funkcji $g(x)$ z losowym szumem, pochodzące z jednego z uruchomień programu.



Wykres 2: Aproksymacja funkcji $g(x)$, parametr $\alpha = 0.5$.

3 Wnioski

Jeśli chodzi o część zadania niekorzystającą z szumu, aproksymacja dała idealne rezultaty. Zaobserwowano idealne pokrycie funkcji: aproksymowanej i aproksymującej na wykresie (1). Także szukane współczynniki b_i zbliżyły się wartościowo do pierwotnie rozważanych a_i. Obecność współczynnika b_3 przy braku a_3 wynika z relacji między wzorami (10) oraz (11). Jednak b_3 miał niski rząd wielkości, zatem można uznać rozwiązanie za poprawne.

W przypadku aproksymacji z szumem dopasowanie było dalekie od ideału, szczególnie im bliżej środka rozważanego przedziału. Nawet zwiększenie liczby węzłów nie doprowadziło do zadowalającego zbliżenia. Część punktów plasowała się jednak zgodnie z teoretycznymi przewidywaniami, co dowodzi poprawności przeprowadzonego rozumowanie w ogóle.