Sprawozdanie - laboratorium nr 8
Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie

Marek Kiełtyka

25 kwietnia 2019

1 Wstęp

1.1 Interpolacja funkcjami sklejanymi

W przedziale [a, b] istnieje $n + 1$ punktów takich, że:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Powyższe punkty reprezentują podział przedziału [a,b] na n podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$. Funkcja $s(x)$ określona na przedziale [a, b] to **funkcja sklejana** stopnia m przy założeniach:

- $m \geq 1$
- $s(x)$ jest wielomianem stopnia maksymalnie m na każdym podprzedziale $[x_i; x_{i+1}], i = 0, 1, ..., n - 1$
- $s(x) \in C^m$

Punkty x_j nazywamy węzłami funkcji sklejanej. Funkcja $s(x)$ występuje więc w każdym przedziale w postaci wielomianu, który można przedstawić wzorem:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}, \qquad x \in (x_i; x_{i+1}). \tag{2}$$

Funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x) \quad x \in [a, b]. \tag{3}$$

1.2 Przepis

Przy założeniu o równoodległych węzłach oraz bazie złożonej z funkcji

$$\phi_i^3(x), i = -1, 0, 1, \ldots, n + 1 \tag{4}$$

można po przesunięciu indeksu zapisać funkcję interpolującą w postaci

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i^3(x), x \in [x_{min}, x_{max}] \tag{5}$$

gdzie

$$\phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ 0 & x \notin [x_{-3}, x_{i+3}] \end{cases} \tag{6}$$

Tak określone sklejki kubiczne w teorii dają najlepsze rezultaty, toteż dokonano weryfikacji tego stwierdzenia.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Celem laboratorium była interpolacja funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ dla } n = 5, 6, 10, 20 \tag{7}$$

oraz

$$f_2(x) = cos(2x) \text{ dla } n = 6, 7, 14 \tag{8}$$

(gdzie n - liczba węzłów) w przedziale $x \in [-5, 5]$ po uprzednim rozwiązaniu układu równań postaci

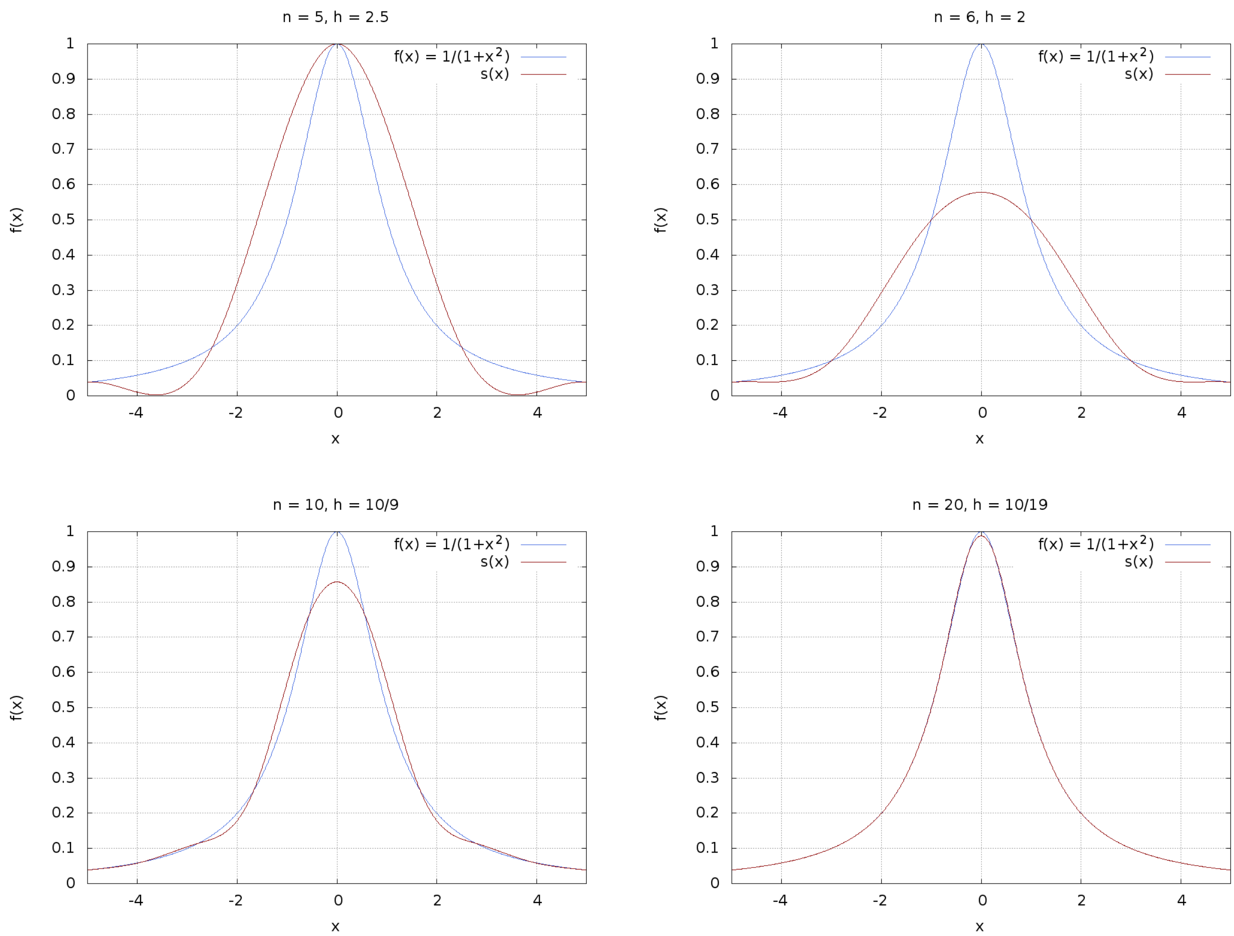
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + \frac{h}{3}\alpha \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\alpha = \frac{df(x)}{dx}, x = x_{min}$$
$$\beta = \frac{df(x)}{dx}, x = x_{max}$$

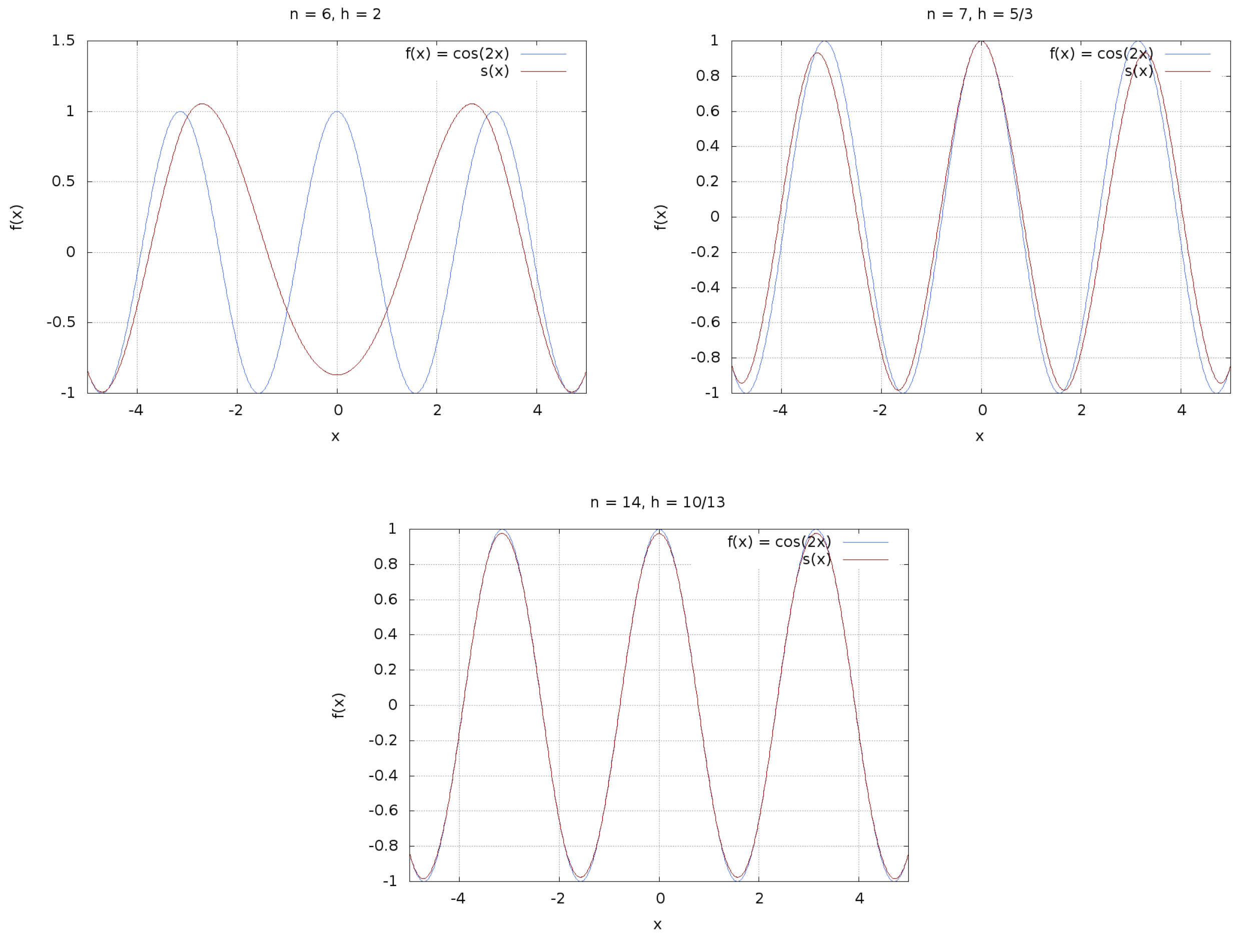
Dla każdego przypadku należało sporządzić wykresy funkcji interpolowanej i interpolującej na jednym rysunku.

2.2 Wyniki

Korzystając z alokacji macierzy i wektorów w stylu biblioteki *Numerical Recipes* oraz jednej z jej funkcji do rozwiązywania układów równań liniowych (w tym przypadku była to *gaussj*) rozpatrzono siedem przypadków, zgodnie z zadanymi funkcjami (7) oraz (8). Do przybliżania kolejnych wartości używano przepisów (5) oraz (6). Wyniki zaprezentowano poniżej.



Rysunek 1: Wyniki interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi w bazie dla n węzłów.



Rysunek 2: Wyniki interpolacji funkcji $f_2(x) = cos(2x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi w bazie dla n węzłów.

3 Wnioski

Zaprezentowane wykresy dowodzą, iż interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie jest efektywną czasowo metodą przybliżania wartości funkcji dla równoodległych węzłów. Dzięki niej uzyskano niemal pokrywające się wyniki dla 20 węzłów w przypadku funkcji hiperbolicznej i 14 dla trygonometrycznej. Jakość interpolacji sukcesywnie poprawiała się w miarę zwiększania ilości węzłów.

W przypadku innych metod dających tak dokładną interpolację przy niskiej ilości węzłów konieczne byłyby na przykład korekty ich położeń w celu uniknięcia efektu Rungego.