

```
from IPython.display import Image, display
```

Exo 2

Question : This quadrilateral (a b c d) is inscribed into the circle of radius d.

We only seek for integer solutions (a b c d)

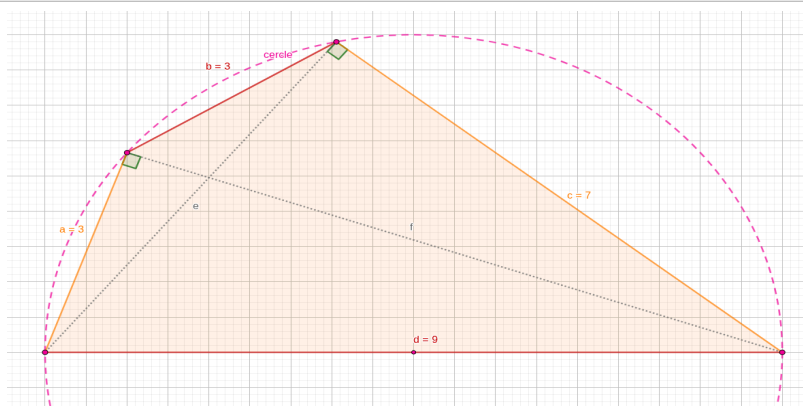
Each following case is distinct. You must check your solutions

Question 1 :

we know the integer lengths b and d.

- Find a and c.
- Find all integer solutions (a b c d) with : $0 < a \leq c < d < 30$
- Is there a couple (b, d) with several solutions (a, c) ?

```
display(Image(filename="exo2.png", width=600, height=300))
```



- Triangle rectangle qui a pour côtés a, f, d (hypothénuse)

$$f^2 = d^2 - a^2 \quad (\text{Pythagore})$$

- Triangle rectangle qui a pour côtés c, e, d (hypothénuse)

$$e^2 = d^2 - c^2 \quad (\text{Pythagore})$$

- Quadrilatère inscrit a b c d avec e, f comme diagonales

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d \quad (\text{Ptolémée})$$

$$(ef)^2 = (ac + bd)^2$$

$$e^2 f^2 = (ac + bd)^2$$

$$(d^2 - c^2)(d^2 - a^2) = (ac + bd)^2$$

On peut chercher tous les quadrilatères à côtés entiers possibles en utilisant l'égalité précédente servant de proposition sur tous les côtés.

```
def trouver_les_cotes(d, b):
    """
    a, b, c, d are the sides of a quadrilateral inscribed in a circle,
    with d the diameter and b the side opposite to d, and 0 < a <= c < d

    Pythagorus and Ptolemy :
    (d^2 - a^2)*(d^2 - c^2) == (d*b + c*a)^2
    """
    sols = []
    for a in range(1, d):
        for c in range(a, d): # a <= c < d
            X = (d**2 - a**2) * (d**2 - c**2)
            Y = (d*b + a*c)**2
            if X == Y:
                sols.append((a, c))
    return sols
```

```
multiple_sols = []
```

```

for d in range(1, 31):
    for b in range(1, d):
        sols = trouver_les_cotes(d, b)
        if sols:
            print(f"Pour d={d:2d} et b={b:2d}, les solutions (a,c) sont : {sols}")
        if len(sols) >= 2:
            multiple_sols.append((d, b, sols))

```

```

Pour d= 2 et b= 1, les solutions (a,c) sont : [(1, 1)]
Pour d= 4 et b= 2, les solutions (a,c) sont : [(2, 2)]
Pour d= 6 et b= 3, les solutions (a,c) sont : [(3, 3)]
Pour d= 8 et b= 2, les solutions (a,c) sont : [(2, 7)]
Pour d= 8 et b= 4, les solutions (a,c) sont : [(4, 4)]
Pour d= 8 et b= 7, les solutions (a,c) sont : [(2, 2)]
Pour d= 9 et b= 1, les solutions (a,c) sont : [(6, 6)]
Pour d= 9 et b= 3, les solutions (a,c) sont : [(3, 7)]
Pour d= 9 et b= 6, les solutions (a,c) sont : [(1, 6)]
Pour d= 9 et b= 7, les solutions (a,c) sont : [(3, 3)]
Pour d=10 et b= 5, les solutions (a,c) sont : [(5, 5)]
Pour d=12 et b= 6, les solutions (a,c) sont : [(6, 6)]
Pour d=14 et b= 2, les solutions (a,c) sont : [(7, 11)]
Pour d=14 et b= 7, les solutions (a,c) sont : [(2, 11), (7, 7)]
Pour d=14 et b=11, les solutions (a,c) sont : [(2, 7)]
Pour d=16 et b= 2, les solutions (a,c) sont : [(9, 12)]
Pour d=16 et b= 4, les solutions (a,c) sont : [(4, 14)]
Pour d=16 et b= 8, les solutions (a,c) sont : [(8, 8)]
Pour d=16 et b= 9, les solutions (a,c) sont : [(2, 12)]
Pour d=16 et b=12, les solutions (a,c) sont : [(2, 9)]
Pour d=16 et b=14, les solutions (a,c) sont : [(4, 4)]
Pour d=18 et b= 2, les solutions (a,c) sont : [(12, 12)]
Pour d=18 et b= 3, les solutions (a,c) sont : [(3, 17)]
Pour d=18 et b= 6, les solutions (a,c) sont : [(6, 14)]
Pour d=18 et b= 9, les solutions (a,c) sont : [(9, 9)]
Pour d=18 et b=12, les solutions (a,c) sont : [(2, 12)]
Pour d=18 et b=14, les solutions (a,c) sont : [(6, 6)]
Pour d=18 et b=17, les solutions (a,c) sont : [(3, 3)]
Pour d=20 et b=10, les solutions (a,c) sont : [(10, 10)]
Pour d=21 et b= 6, les solutions (a,c) sont : [(11, 14)]
Pour d=21 et b=11, les solutions (a,c) sont : [(6, 14)]
Pour d=21 et b=14, les solutions (a,c) sont : [(6, 11)]
Pour d=22 et b=11, les solutions (a,c) sont : [(11, 11)]
Pour d=24 et b= 6, les solutions (a,c) sont : [(6, 21)]
Pour d=24 et b=12, les solutions (a,c) sont : [(12, 12)]
Pour d=24 et b=21, les solutions (a,c) sont : [(6, 6)]
Pour d=25 et b= 5, les solutions (a,c) sont : [(5, 23)]
Pour d=25 et b= 7, les solutions (a,c) sont : [(15, 15)]
Pour d=25 et b=10, les solutions (a,c) sont : [(10, 17)]
Pour d=25 et b=15, les solutions (a,c) sont : [(7, 15)]
Pour d=25 et b=17, les solutions (a,c) sont : [(10, 10)]
Pour d=25 et b=23, les solutions (a,c) sont : [(5, 5)]
Pour d=26 et b= 1, les solutions (a,c) sont : [(13, 22)]
Pour d=26 et b=13, les solutions (a,c) sont : [(1, 22), (13, 13)]
Pour d=26 et b=22, les solutions (a,c) sont : [(1, 13)]
Pour d=27 et b= 3, les solutions (a,c) sont : [(18, 18)]
Pour d=27 et b= 9, les solutions (a,c) sont : [(9, 21)]
Pour d=27 et b=18, les solutions (a,c) sont : [(3, 18)]
Pour d=27 et b=21, les solutions (a,c) sont : [(9, 9)]
Pour d=28 et b= 4, les solutions (a,c) sont : [(14, 22)]
Pour d=28 et b=14, les solutions (a,c) sont : [(4, 22), (14, 14)]
Pour d=28 et b=22, les solutions (a,c) sont : [(4, 14)]
Pour d=30 et b= 3, les solutions (a,c) sont : [(14, 25)]
Pour d=30 et b=14, les solutions (a,c) sont : [(3, 25)]
Pour d=30 et b=15, les solutions (a,c) sont : [(15, 15)]
Pour d=30 et b=25, les solutions (a,c) sont : [(3, 14)]

```

```

for i, (d, b, sols) in enumerate(multiple_sols):
    print(f"Cas avec plusieurs solutions n°{i+1} (b,d) = {multiple_sols[i][:2]} et (a,c) : {multiple_sols[i][2]}")

```

```

Cas avec plusieurs solutions n°1 (b,d) = (14, 7) et (a,c) : [(2, 11), (7, 7)]
Cas avec plusieurs solutions n°2 (b,d) = (26, 13) et (a,c) : [(1, 22), (13, 13)]
Cas avec plusieurs solutions n°3 (b,d) = (28, 14) et (a,c) : [(4, 22), (14, 14)]

```

▼ Question 2 :

we know the integer lengths a , b and c .

- Find d
- Find all integer solutions (a, b, c, d) with : $0 < a \leq b \leq c < d < 30$

```

def trouver_les_autres_cotes(a,b,c):
    """
    a, b, c, d are the sides of a quadrilateral inscribed in a circle,
    with d the diameter and b the side opposite to d, and  $0 < a \leq b \leq c < d < 30$ 

```

Pythagorus and Ptolemy :

```

(d^2 - a^2)*(d^2 - c^2) == (d*b + c*a)^2
"""
sols = []
for d in range(max(a,b,c)+1, 30):
    if (d**2 - a**2)*(d**2 - c**2) == (d*b + a*c)**2:
        sols.append(d)
return sols

```

```

for a in range(1, 30):
    for b in range(a, 30):
        for c in range(b, 30):
            sols = trouver_les_autres_cotes(a, b, c)
            if sols:
                print(f"Pour a={a:2d}, b={b:2d} et c={c:2d}, les solutions d sont : {sols}")

```

```

Pour a= 1, b= 1 et c= 1, les solutions d sont : [2]
Pour a= 1, b= 6 et c= 6, les solutions d sont : [9]
Pour a= 1, b=13 et c=22, les solutions d sont : [26]
Pour a= 2, b= 2 et c= 2, les solutions d sont : [4]
Pour a= 2, b= 2 et c= 7, les solutions d sont : [8]
Pour a= 2, b= 7 et c=11, les solutions d sont : [14]
Pour a= 2, b= 9 et c=12, les solutions d sont : [16]
Pour a= 2, b=12 et c=12, les solutions d sont : [18]
Pour a= 3, b= 3 et c= 3, les solutions d sont : [6]
Pour a= 3, b= 3 et c= 7, les solutions d sont : [9]
Pour a= 3, b= 3 et c=17, les solutions d sont : [18]
Pour a= 3, b=18 et c=18, les solutions d sont : [27]
Pour a= 4, b= 4 et c= 4, les solutions d sont : [8]
Pour a= 4, b= 4 et c=14, les solutions d sont : [16]
Pour a= 4, b=14 et c=22, les solutions d sont : [28]
Pour a= 5, b= 5 et c= 5, les solutions d sont : [10]
Pour a= 5, b= 5 et c=23, les solutions d sont : [25]
Pour a= 6, b= 6 et c= 6, les solutions d sont : [12]
Pour a= 6, b= 6 et c=14, les solutions d sont : [18]
Pour a= 6, b= 6 et c=21, les solutions d sont : [24]
Pour a= 6, b=11 et c=14, les solutions d sont : [21]
Pour a= 7, b= 7 et c= 7, les solutions d sont : [14]
Pour a= 7, b=15 et c=15, les solutions d sont : [25]
Pour a= 8, b= 8 et c= 8, les solutions d sont : [16]
Pour a= 9, b= 9 et c= 9, les solutions d sont : [18]
Pour a= 9, b= 9 et c=21, les solutions d sont : [27]
Pour a=10, b=10 et c=10, les solutions d sont : [20]
Pour a=10, b=10 et c=17, les solutions d sont : [25]
Pour a=11, b=11 et c=11, les solutions d sont : [22]
Pour a=12, b=12 et c=12, les solutions d sont : [24]
Pour a=13, b=13 et c=13, les solutions d sont : [26]
Pour a=14, b=14 et c=14, les solutions d sont : [28]

```