二重积分

二重积分的概念与性质

二重积分概念

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

二重积分几何意义

表示函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上投影形成的曲面柱体体积

二重积分性质

不等式性质

1. 在 D 上若$f(x,y) \leq g(x,y)$，则$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma \leq \iint\limits_{D} g(x,y)d\sigma$
2. 若在 D 上有$m \leq f(x,y) \leq M$，则$m\sigma(D) \leq \iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma \leq M\sigma(D)$
3. $|\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma| \leq \iint\limits_{D} |f(x,y)|d\sigma$

中值定理

设函数在$f(x,y)$在闭区间 D 上连续，S 为区域 D 的面积，则在 D 上至少有一点(ξ,η)，使得 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma(D)$

二重积分计算

利用直角坐标计算

1. 先 y 后 x
   > $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx$

2. 先 x 后 y

> $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

利用极坐标计算

1. 先 ρ 后 θ
   > $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

适合用极坐标的被积函数

1. $f(\sqrt{x^2+y^2})$
2. $f(\frac{y}{x})$
3. $f(\frac{x}{y})$

适合用极坐标的积分域

1. $x^2+y^2 \le R^2$
2. $r^2 \le x^2+y^2 \le R^2$
3. $x^2+y^2 \le 2ax$
4. $x^2+y^2 \le 2by$

利用对称性和奇偶性计算

1. 若积分域 D 关于 y 轴对称，则：
   > $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$
2. 若积分域 D 关于 x 轴对称，则：
   > $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

利用变量对称性计算

若 D 关于 y=x 对称，则：
$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(y,x)d\sigma$