

第四章 不定积分

不定积分的概念与性质

1. 原函数 $F'(x) = f(x)$
2. 不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$
3. 不定积分几何意义

定理：

1. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在(连续函数必有原函数)
2. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有第一类间断点，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上没有原函数

性质：

5. 不定积分的性质

$$1) \left(\int \underset{\vee}{f(x)} dx \right)' = f(x)$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
$$\underline{d} \int \underset{\vee}{f(x)} dx = f(x) dx$$

$$2) \int \underline{f'(x)} dx = f(x) + C$$

$$\int d f(x) = f(x) + C.$$

$$3) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

分项积分

$$4) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

不定积分的基本公式

(二) 不定积分的基本公式

- | | |
|---|---|
| 1) $\int 0 dx = C$ | 2) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C = \int f(x) dx = F(x) + C$ |
| 3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ | 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| 5) $\int e^x dx = e^x + C$ | 6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ |
| 7) $\int \cos x dx = \sin x + C$ | 8) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ |
| 9) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$ | 10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ |
| 11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$ | 12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ |
| 13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ | 14) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| 15) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ | 16) $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$ |
| 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$ | |
| 18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2-a^2} + C$ | |

19) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ ✓

20) $\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

三种主要积分法

第一类换元法 (凑微分法)

若 $\int f(u) du = F(u) + C$, 则 $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$

第二类换元法 (反函数法)

设 $x = \varphi(t)$ 可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C$, 则 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi^{-1}(x)] + C$

分部积分法 (多在有多类函数的情况下进行)

$$\int u dv = uv - \int v du$$

3) 分部积分法

$$\int \underline{u} dv = uv - \int v du \quad (uv)'$$

“适用两类不同函数相乘”

① 何时用? ✓

$$\int p_n(x) e^{\alpha x} dx, \int p_n(x) \sin \alpha x dx, \int p_n(x) \cos \alpha x dx,$$

② 如何用? •

$$\int \underline{P_n(x)} \ln x dx; \int \underline{P_n(x)} \arctan x dx; \int \underline{P_n(x)} \arcsin x dx.$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx; \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx. \quad 2 \text{ 次}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx \\ \int x \sin x dx \\ \int e^{kx} \sin x dx \end{aligned}$$

三角函数变换

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

三类常见可积分函数积分

1) 有理函数积分

1. 一般法 (部分分式法)

2. 特殊方法 (加项减项拆或凑微分将幂)

$$\text{一般拆项公式: } \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

2) 三角有理函数积分 $\int R(\sin x, \cos x)dx$

1. 一般方法 (万能代换) 令 $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

2. 特殊方法 (三角变形, 换元, 分部)

3) 简单无理函数积分 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+D}})dx$

$$\text{令 } \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+D}} = t$$

定积分

定积分的概念

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

定积分存在的充分条件

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续
2. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界且只有有限个间断点
3. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有有限个第一类间断点

定积分的性质

不等式性质

1. 若 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
2. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
3. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

中值定理

1. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

2. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$

积分上限的函数

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$

推广: $(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt)' = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

定理: 设 $f(x)$ 连续

1. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数
2. 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数

常见三种解题方法:

1. 公式法
2. 换元法
3. 多项式乘积, 转化为积分相加形式, 在分部求道

定积分的计算

1. 牛顿-莱布尼茨公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
2. 换元法 $\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$
3. 分部积分法 $\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$
4. 利用奇偶性、周期性

偶函数: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

奇函数: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

周期函数: $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

5. 利用公式

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{4}{5} \frac{2}{3} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$2. \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

反常积分

收敛的判定方法

1. 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

2. 比较法

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq g(x) \geq 0$, 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛; 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

3. P 积分法

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, 若存在正数 $p > 1$, 使得 $\int_a^{+\infty} x^p f(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

定积分的应用

面积计算

直角坐标面积

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

参数方程面积

$$\int_a^b |y(t)x'(t)| dt$$

极坐标面积

$$\frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta$$

采用二重积分概念计算面积

1. 直角坐标系

$$S = \iint_D d\sigma = \iint_D dx dy$$

2. 极坐标系

$$S = \iint_D r dr d\theta$$

3. 参数方程

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

旋转体体积

直角坐标系

1. 绕 x 轴旋转

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

2. 绕 y 轴旋转

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

3. 二重积分绕直线旋转

$$V = 2\pi \iint_D r(x) dx dy, \text{其中 } r(x) \text{ 为 } x \text{ 到旋转轴的距离}$$

曲线弧长

1. 直角坐标系

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

2. 参数方程

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

3. 极坐标系

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

旋转体侧面积

1. 直角坐标系

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

2. 参数方程

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

3. 极坐标系

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

物理运用

1. 压力

四. 水压力

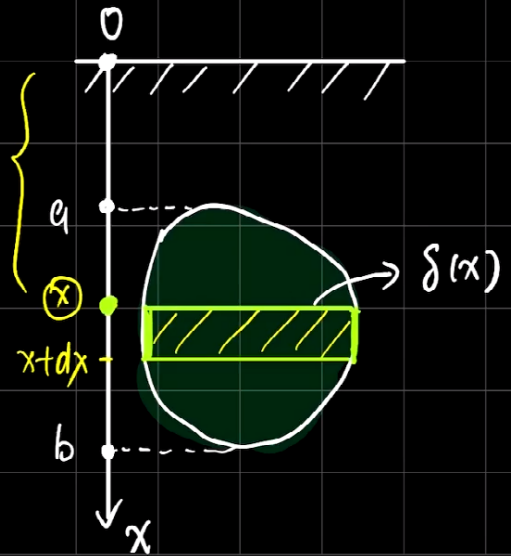
① $x \in [a, b]$.

② $[x, x+dx] \in [a, b]$

$$dP = \rho g x \cdot \delta(x) \cdot dx$$

③ $P = \int_a^b dP = \int_a^b \rho g x \cdot \delta(x) dx$

\downarrow 深度 \downarrow 长度.



2. 变力做功 $A = \int_a^b F(x) dx$

3. 引力 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$