多元函数微分学

多元函数的基本概念

多元函数极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

注意： 多元函数极限的趋向不再局限于一元函数极限的直线方向，而是推广到 x,y 组成的平面，$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 可以是平面上的任意方向

性质

1. 局部有界性
2. 保号性
3. 有理运算
4. 极限与无穷小的关系
5. 夹逼性

多元函数的连续性

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

连续的性质

1. 多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍然连续
2. 多元连续函数的复合函数仍然连续
3. 多元初等函数在其定义域内连续
4. 有界闭区间 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得最大值和最小值（最大值定理）
5. 有界闭区间 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得介于最大值和最小值之间的任意值（介值定理）

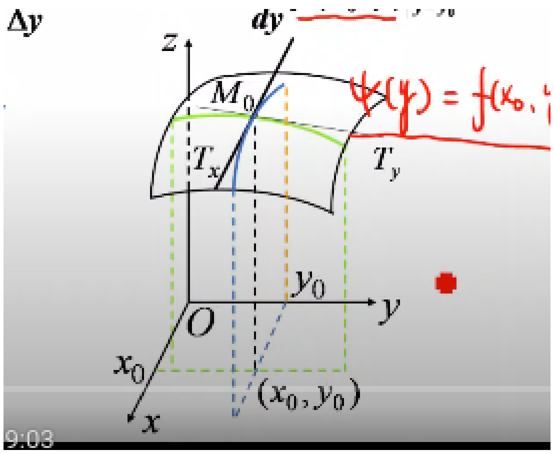
偏导数

偏导数定义

对 x 的偏导数：$f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$
对 y 的偏导数：$f_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

偏导数的几何意义

1. $f_x(x_0,y_0)$ 表示曲面在点 (x_0,y_0) 处沿着 x 轴正方向的变化率
2. $f_y(x_0,y_0)$ 表示曲面在点 (x_0,y_0) 处沿着 y 轴正方向的变化率



高阶偏导数

$\frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta f}{\delta x})=\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=f''_{xx}$
$\frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta f}{\delta y})=\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=f''_{yy}$
$\frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta f}{\delta x})=\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}=f''_{yx}$
$\frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta f}{\delta y})=\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}=f''_{xy}$

定理 1 如果函数$z=f(x,y)$在两个二阶混合偏导数f''_{xy}和f''_{yx}在区域 D 内连续，则$f''_{xy}=f''_{yx}$

全微分

全微分的定义

若$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，则称函数 z=f(x,y)在点$(x_0,y_0)$处可微分，且全微分为 $dz=A\Delta x+B\Delta y$

全微分可微分判别

1. 必要条件

> 如果$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微,则在点(x_0,y_0)处$\frac{\delta f}{\delta x},\frac{\delta f}{\delta y}$必定存在,且$dz=\frac{\delta f}{\delta x}dx+\frac{\delta f}{\delta y}dy$

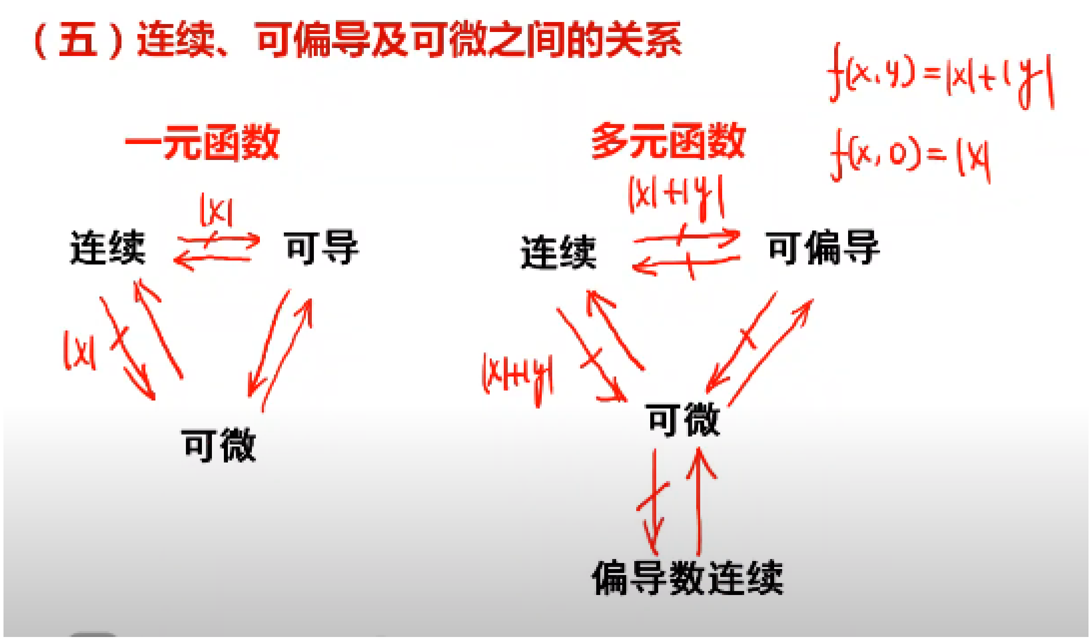
2. 充分条件

> 如果$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\delta z}{\delta x},\frac{\delta z}{\delta y}$在点$(x_0,y_0)$处连续,则在点$(x_0,y_0)$处可微分

用定义判定可微性

1. $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$存在
2. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

连续、可导、可微的关系



多元函数微分法

复合函数微分法

（一）复合函数的微分法

$y'_x = y'_u u'_x$

$= f(u)\, g(x)$

定理4 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在，且有

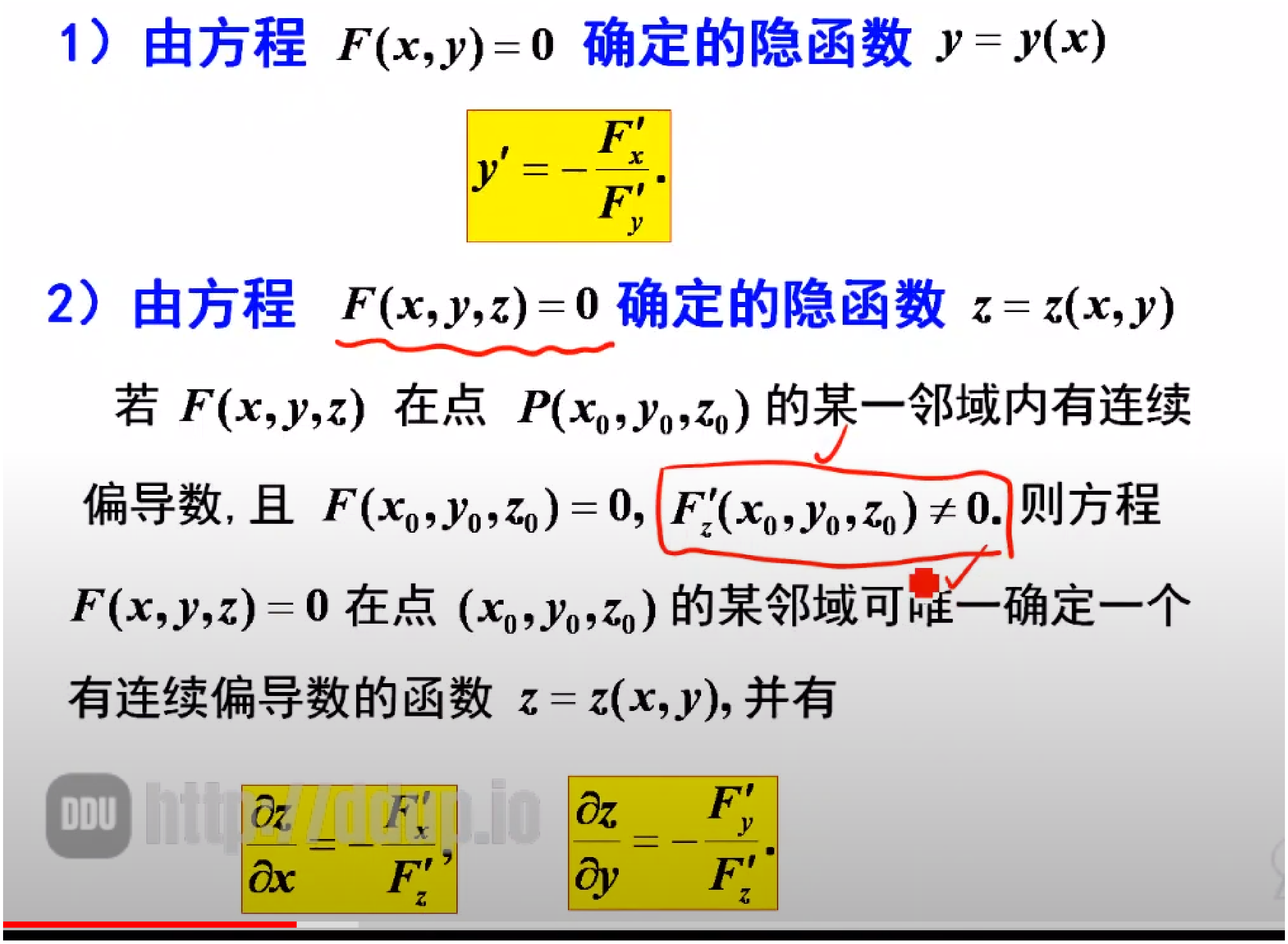
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

全微分形式的不变性

设函数 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$ 都有连续的一阶偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

隐函数微分法



多元函数的极值与最值

无约束极值

极值的定义

若在点(x_0,y_0)的某邻域内恒成立不等式$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\geq f(x_0,y_0))$,则称 f 在点(x_0,y_0)取得极大值(极小值),点(x_0,y_0)称为 f 的极大(极小)值点，极大值极小值统称为极值点

极值的必要条件

设 z=f(x,y)在(x_0,y_0)存在偏导数，且(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极值点，则$f'_x(x_0,y_0)=0$,$f'_y(x_0,y_0)=0$

极值的充分条件

设$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有二阶连续偏导数，有$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$
记$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$,$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$,$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$,$D=AC-B^2$，则

1. 当$AC-B^2>0$且$A>0$时，有极值$\begin{cases}A>0\text{极小值}\\A<0\text{极大值}\end{cases}$
2. 当$AC-B^2<0$时，无极值
3. 当$AC-B^2=0$时，不一定（一般用定义判断）

条件极值与拉格朗日乘数法

函数$f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的极值

令$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\begin{cases}F_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0\\F_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0\\F_\lambda=\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

$colorred$其他方法 :同样可以采用

1. 消元法，将$\begin{cases}F_x=0\\F_y=0\end{cases}$联立，解出$x,y$，再代入$\varphi(x,y)=0$，解出$\lambda$
2. 参数方程法，用三角函数表示 x,y

函数 f(x,y,z)在条件$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\\psi(x,y,z)=0\end{cases}$下的极值

令$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

最大最小值

求连续函数$f(x,y)$在有界闭区域D上的最大最小值

1. 求 f(x,y)在 D 内部可能的极值点
2. 求 f(x,y)在 D 的边界上的最大最小值
3. 比较