# 第四章 不定积分

## 不定积分的概念与性质

1. 原函数 $F'(x) = f(x)$
2. 不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$
3. 不定积分几何意义

定理：

1. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^b f(x)dx$存在(连续函数必有原函数)
2. 若$f(x)$在$[a,b]$上有第一类间断点，则 f(x)在$[a,b]$上没有原函数

性质:

5. 不定积分的性质

$\int f(x)dx = F(x)+C$

1) $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$　　$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$　　$\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C.$

3) $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$　　分项积分

4) $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$

# 不定积分的基本公式

## （二）不定积分的基本公式

1) $\int 0dx = C$

2) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$

$\int f(x)dx = F(x)+$

3) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$

5) $\int e^x dx = e^x+C$

6) $\int \sin xdx = -\cos x + C$

7) $\int \cos xdx = \sin x + C$

8) $\int \sec^2 xdx = \tan x + C$

9) $\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$

10) $\int \sec x\tan xdx = \sec x + C$

11) $\int \csc x\cot xdx = -\csc x + C$

12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$

15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$



19) $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|+C.$ ✓

20) $\int \csc x\,\mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x|+C.$

# 三种主要积分法

## 第一类换元法（凑微分法）

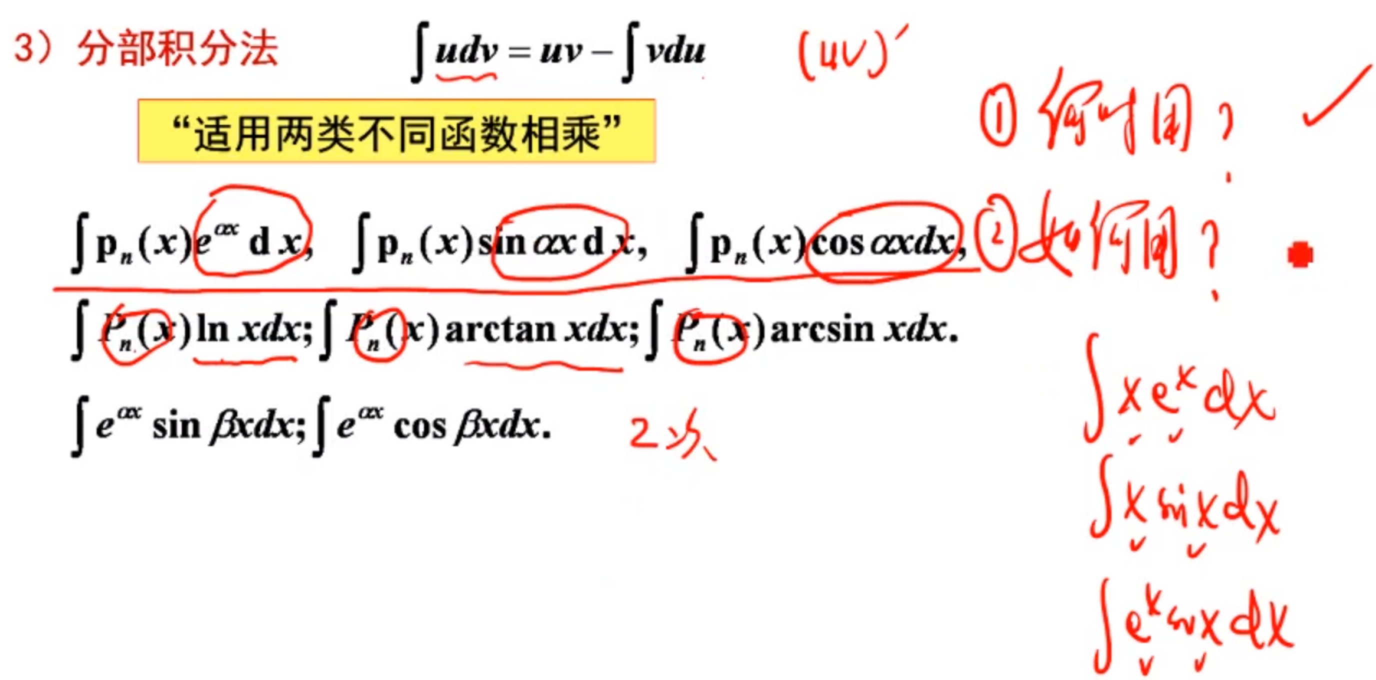
若$\int f(u)du = F(u)+C$，则$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)]+C$

## 第二类换元法（反函数法）

设$x=\varphi(t)$可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F(t)+C$，则$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi^{-1}(x)]+C$

## 分部积分法 (多在有多类函数的情况下进行)

$\int udv=uv-\int vdu$




三角函数变换

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$
$\tan^2 x+1=\sec^2 x$
$\cot^2 x+1=\csc^2 x$

# 三类常见可积分函数积分

1） 有理函数积分

1. 一般法（部分分式法）
2. 特殊方法（加项减项拆或凑微分将幂）

一般拆项公式：$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=\frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)}$

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

2） 三角有理函数积分 $\int R(\sin x, \cos x)dx$

1. 一般方法（万能代换） 令$t=\tan\frac{x}{2}$

> $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

2. 特殊方法（三角变形，换元，分部）

3）简单无理函数积分 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+D}})dx$

令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+D}}=t$

# 定积分

## 定积分的概念

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

### 定积分存在的充分条件

1. $f(x)$在$[a,b]$上连续
2. $f(x)$在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点
3. $f(x)$在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点

## 定积分的性质

### 不等式性质

1. 若$f(x)\le g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$
2. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$
3. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx$

### 中值定理

1. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

2. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上不变号，则存在$\xi \in [a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

## 积分上限的函数

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导，且$(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$

推广 :$(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt)' = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

定理： 设 f(x)连续

1. 若 f(x)是奇函数，则$\int_0^x f(t)dt$是偶函数
2. 若 f(x)是偶函数，则$\int_0^x f(t)dt$是奇函数

常见三种解题方法：

1. 公式法
2. 换元法
3. 多项式乘积，转化为积分相加形式，在分部求道

## 定积分的计算

1. 牛顿-莱布尼茨公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
2. 换元法 $\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$
3. 分布积分法 $\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$
4. 利用奇偶性、周期性
   > 偶函数：$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
   > 奇函数：$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
   > 周期函数：$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$
5. 利用公式
   1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} & n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3} & n\text{为奇数} \end{cases}$
   2. $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

# 反常积分

## 收敛的判定方法

1. 定义
   > $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

2. 比较法
   > 设 $f(x), g(x)$在$[a, +\infty)$上连续，且$f(x) \geq g(x) \geq 0$，若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛；若$\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散

3. P 积分法
   > 设 $f(x)$在$[a, +\infty)$上连续，且$f(x) \geq 0$，若存在正数 $p > 1$，使得$\int_a^{+\infty} x^p f(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛

# 定积分的应用

## 面积计算

### 直角坐标面积

$\int_a^b |f(x)|\, dx$

### 参数方程面积

$\int_a^b |y(t)x'(t)|\, dt$

### 极坐标面积

$\frac{1}{2}\int_a^b r^2(\theta)d\theta$

### 采用二重积分概念计算面积

1. 直角坐标系
   > $S = \iint_D d\sigma = \iint_D dxdy$

2. 极坐标系
   > $S = \iint_D rdrd\theta$

3. 参数方程

> $S = \iint_D \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$

# 旋转体体积

## 直角坐标系

1. 绕 x 轴旋转
   > $V = \pi \int_a^b y^2 dx$
2. 绕 y 轴旋转
   > $V = \pi \int_a^b x^2 dy$
3. 二重积分绕直线旋转
   > $V = 2\pi \iint_D r(x) dxdy$,其中 $r(x)$ 为 $x$ 到旋转轴的距离

# 曲线弧长

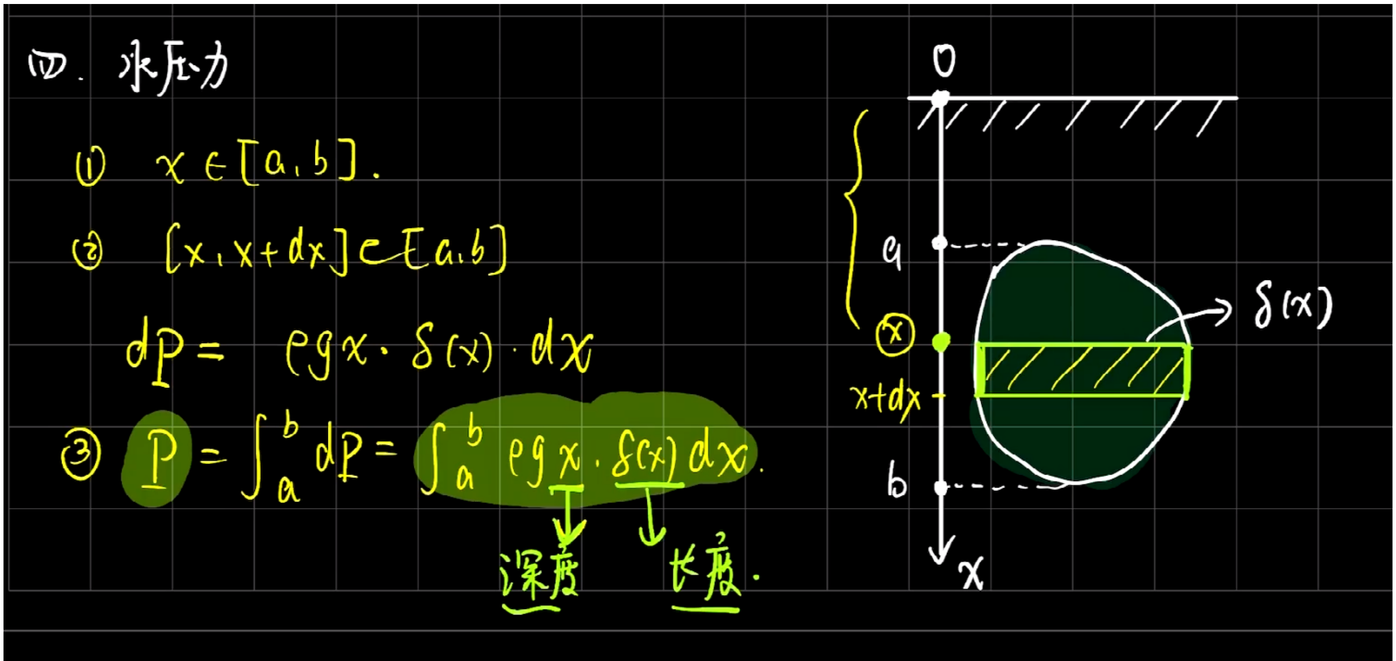
1. 直角坐标系
   > $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$
2. 参数方程
   > $L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$
3. 极坐标系
   > $L = \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + (\frac{dr(\theta)}{d\theta})^2} d\theta$

# 旋转体侧面积

1. 直角坐标系
   > $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$
2. 参数方程
   > $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$
3. 极坐标系
   > $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{r^2(\theta) + (\frac{dr(\theta)}{d\theta})^2} d\theta$

# 物理运用

1. 压力




2. 变力做功 $A=\int_a^b F(x)dx$
3. 引力 $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$