无穷级数

常数项级数

级数的概念

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \text{ 无穷级数}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ 部分和/前}n\text{项和}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n \text{ 级数收敛}$$

级数的性质

1. 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于 s, 则$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$也收敛，且其和为 ks.
2. 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于 s,t, 则$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$也收敛于 s±t.
3. 在级数中去掉，加上或改变有限项，级数的敛散性不变。
4. 收敛级数加括号仍收敛且和不变。
5. 级数收敛的必要条件

> $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{收敛} \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

【注】

1. 收敛 $\pm$ 发散 $=$ 发散 发散 $\pm$ 发散 $=$ 不确定
2. 原级数收敛$\rightarrow$加括号收敛
3. 加括号发散$\rightarrow$原级数发散

级数的审敛准则

正向级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0$$

基本定理：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Leftrightarrow \{S_n\}$有界

1. 比较判别法

> 设$u_n \leq v_n$,则
> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛$\rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛
> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散$\rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散

2. 比较法极限形式

> 设$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,则

   1. 若$0 < l < \infty$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$同敛散
   2. 若$l = 0$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散
   3. 若$l = \infty$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛;$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散

3. 比值判别法

> $$设\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,则\begin{cases} 收敛，\rho < 1 \\ 发散，\rho > 1 \\ 不一定，\rho = 1 \end{cases}$$

4. 根值法

> $$设\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,则\begin{cases} 收敛，\rho < 1 \\ 发散，\rho > 1 \\ 不一定，\rho = 1 \end{cases}$$

5. 积分判别法

> 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减且$f(x)\geq 0$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与$\int_1^{\infty}f(x)dx$同敛散

两个常用级数

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$
   > 1. $p>1$收敛
   > 2. $p\leq 1$发散

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n\ (a>0,q>0)$
   > 1. $q<1$收敛
   > 2. $q\geq 1$发散

交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,u_n\geq 0$$

莱布尼茨著准则

1. u_n单调递减
2. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛

任意项级数

1. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$必收敛，此时称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛
2. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛

基本结论

1. 绝对收敛⇒收敛
2. 条件收敛级数的所有正项（或负项）构成的级数一定发散.即

> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2}$和$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2}$发散

幂级数

幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

定义 形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$

定理 1（阿贝尔定理）

1. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处收敛，则$\forall x, |x| < |x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛
2. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散，则$\forall x, |x| > |x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散

定理 2 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛性有且仅有以下三种可能

1. 对任何$x \in (-\infty, +\infty)$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$都收敛
2. 仅在$x = 0$处收敛
3. 存在一个正数 R,当$|x| < R$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；当$|x| > R$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散

【注】若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处条件收敛，则点$x_0$必为该幂级数收敛区间(-R,R)的一个端点

幂级数的收敛半径

比值法

如果$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$，则$R = \frac{1}{\rho}$

根值法

如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则$R=\frac{1}{\rho}$

幂级数的性质

有理运算性质

设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别为$R_1$和$R_2$，令$R=\min\{R_1,R_2\}$，则当$x\in(-R,R)$时，有

1. 加减法
   > $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$
2. 乘法
   > $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，其中$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$
3. 除法
   > $\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_nx^n$，其中$d_0=\frac{a_0}{b_0}$，$d_n=\frac{1}{b_0}(a_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}d_kb_{n-k})$

分析性质

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，和函数为$S(x)$，则

1. 连续性：和函数$S(x)$在$(-R,R)$上连续
2. 可导性：和函数$S(x)$在$(-R,R)$上可导，且可逐项求导，半径不变
3. 和函数$S(x)$在$(-R,R)$上可积，且可逐项积分，半径不变

函数的幂级数展开

定理 1 如果函数$f(x)$在区间(x_0-R,x_0+R)上能展开为$x-x_0$的幂级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，其展开式是唯一的，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$为$f(x)$在$x_0$处的泰勒级数

定理 2 设$f(x)$在$x=x_0$处任意阶可导，则$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$在$(x_0-R,x_0+R)$上收敛于$f(x) \iff \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$
其中$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$为 f(x)在$x_0$处的泰勒公式$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$的余项

几个常见的展开式

1. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ |x|<1$
2. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty$
3. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty$
4. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty$
5. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\ -1<x\le 1$
6. $-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,\ -1\le x<1$
7. $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ |x|<1$

函数展开幂级数的两种方法

1. 直接展开法

   > 第一步 $f(x)\to\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
   > 第二步 考查$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$

2. 间接展开法
   根据函数展开为幂级数的唯一性，从某些已知函数的展开式出发，利用幂级数的性质（四则，逐项求导，逐项积分）及变量代换等方法，求得所给函数的展开式

傅里叶级数

傅里叶系数与傅里叶级数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x，n=0,1,2,\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x，n=1,2,\cdots$$
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{ (是否取等好根据收敛定理判断)}$$

收敛定理

设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续或有有限个第一类间断电，且只有有限个极值点，则$f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上处处收敛，且收敛于

1. $S(x)=f(x)$，x为$f(x)$的连续点
2. $S(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$，$x$为$f(x)$的间断点
3. $S(x)=\dfrac{f((-\pi)+0)+f(\pi-0)}{2}$，$x=\pm\pi$

函数展开为傅里叶级数

周期为2π的函数展开

$[-\pi,\pi]$上展开

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x，n=0,1,2,\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x，n=1,2,\cdots$$

$[-\pi,\pi]$上奇偶函数展开

1. $f(x)$为奇函数
   > $a_n=0，n=0,1,2,\cdots.$
   > $b*n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int *0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x，n=1,2,\cdots$
2. $f(x)$为偶函数

> $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$，$n = 0,1,2,\cdots.$
> $b_n = 0$，$n = 1,2,\cdots$

在$[0,\pi]$上展开正弦或余弦

1. 展开为正弦
> $a_n = 0$，$n = 0,1,2,\cdots.$
> $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$，$n = 1,2,\cdots$

2. 展开为余弦
> $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$，$n = 0,1,2,\cdots.$
> $b_n = 0$，$n = 1,2,\cdots$

周期为$2l$的函数展开

在[-l,l]上展开

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\text{，}n = 0,1,2,\cdots$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\text{，}n = 1,2,\cdots$$

在[-l,l]上奇偶函数展开

1. $f(x)为奇函数
> $a_n = 0$，$n = 0,1,2,\cdots.$
> $b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$，$n = 1,2,\cdots$

2. $f(x)为偶函数
> $a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$，$n = 0,1,2,\cdots.$
> $b_n = 0$，$n = 1,2,\cdots$

在[0,l]上展开正弦或余弦

1. 展开为正弦
> $a_n = 0$，$n = 0,1,2,\cdots.$
> $b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$，$n = 1,2,\cdots$

2. 展开为余弦

> $a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$，$n = 0, 1, 2, \cdots.$
> $b_n = 0$，$n = 1, 2, \cdots$