常微分方程

常微分方程的基本概念

1. 微分方程
   > 含有未知函数及其导数的方程
2. 微分方程的阶
   > 微分方程中导数的最高阶数
3. 微分方程的解
   > 使微分方程成立的函数
4. 微分方程的通解
   > 包含任意常数的解
5. 微分方程的特解
   > 包含特定常数的解
6. 初始条件
   > 用于确定特解中的常数的条件
7. 积分曲线
   > 微分方程的解所表示的曲线

一阶微分方程

可分离变量的方程

形如：$y' = f(x)g(y)$ 的方程
转化为：$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

齐次方程

形如：$y' = f(\frac{y}{x})$ 的方程
转化为：$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)-v} = \frac{dx}{x}$

思路为：将$\frac{y}{x}$用 v 表示，将齐次方程转化为可分离变量的方程

一阶线性微分方程

形如：$y' + p(x)y = q(x)$ 的方程
通解：$y = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c)$

伯努利方程

形如：$y' + p(x)y = q(x)y^n$ 的方程
通解：$y = (1-n)^{-1}e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx + c)$

思路为：将 y^{n-1} 用 z 表示，将伯努利方程转化为一阶线性微分方程

全微分方程

形如：$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 的方程

a) 判定
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，则为全微分方程
b) 求解

1. 偏积分
2. 凑微分
3. 线积分

可降阶的高阶微分方程

1. $y'' = f(x)$
2. $y'' = f(x, y')$ $(y' = p, y'' = \frac{dP}{dx})$
3. $y'' = f(y, y')$ $(y' = p, y'' = p\frac{dP}{dy})$

高阶线性微分方程

线性齐次方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (1)

线性非齐次方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ (2)

定理

1. 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程(1)的两个线性无关的特解，那么$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 是方程(1)的通解
2. 如果$y^*(x)$是方程(2)的一个特解，$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的特解，那么$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y^*(x)$是非齐次微分方程(2)的通解
3. 如果$y_1^*(x)$和$y_2^*(x)$是方程(2)的两个特解，那么$y(x)=y_1^*(x)-y_2^*(x)$是方程(1)的一个解
4. 如果$y_1^*(x)$和$y_2^*(x)$分别是方程
   $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$
   $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$
   的两个特解，那么$y(x)=y_1^*(x)+y_2^*(x)$是方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的一个解

常系数齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=0$ (3)

特征方程：$\lambda^2+p\lambda+q=0$
设 λ_1 和 λ_2 是特征方程的两个根

1. 不等实根：$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$
2. 相等实根：$y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}=e^{\lambda x}(c_1+c_2x)$
3. 共轭复根：$y=e^{\alpha x}(c_1cos\beta x+c_2sin\beta x)$

常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$ (4)

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$
   令 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$
   其中 $k=\begin{cases}0,\lambda\text{与齐次方程两个特征根均不相等}\\1,\lambda\text{与齐次方程两个特征根中有一个相等}\\2,\lambda\text{与齐次方程两个特征根均相等(即方程重根)}\end{cases}$
2. $f(x)=e^{\alpha x}(P_l^{(1)}(x)cos\beta x+Q_n^{(2)}(x)sin\beta x)$
   令 $y^*=x^ke^{ax}(R_m^{(1)}(x)cos\beta x+R_m^{(2)}(x)sin\beta x)$. m=max(l,n)

其中$k=\begin{cases}0,\alpha\pm i\beta\text{不是齐次方程中特征方程的根}\\1,\alpha\pm i\beta\text{是特征方程的根}\end{cases}$

欧拉方程

$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$

令 $x=e^t$，则 $x^ky^{(k)}=D(D-1)...(D-k+1)y$，$Dy=\frac{dy}{dt},D^2y=\frac{d^2y}{dt^2}$

差分方程

概念

差分方程指的是含有未知函数的差分项的方程，非连续函数，而是离散的函数

一阶线性差分方程

$y_{n+1}+ay_n=0$

通解为：$y_n=c(-a)^n$

一阶非线性差分方程

$y_{n+1}+ay_n=f(n)$

通解为：$y_n=c(-a)^n+\sum_{k=1}^{n}(-a)^{n-k}f(k)=c(-a)^n+y_n^*$

1. $f(n)=Pm(n)$
    1. 若 $a\neq-1$，则 $y_n^*=Qm(n)$
    2. 若 $a=-1$，则 $y_n^*=nQm(n)$
2. $f(n)=d^t\cdot P_m(t)$
    1. 若$a+d\neq0$，令$y_n^*=d^t\cdot Q_m(t)$
    2. 若$a+d=0$，令$y_n^*=n\cdot d^t\cdot Q_m(t)$