导数与微分

导数与微分概念

导数概念

定义 1：

> $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
> $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

定义 2(左极限)：

> $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

定义 3(右极限)：

> $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

定理： $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\iff$ $f(x)$ 在 x_0 处左右导数存在且相等。

微分概念

定义： 如果$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可以表示为$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$，则称函数f(x)在点$x_0$处可微，记为$dy=A\Delta x$

导数几何意义

切线的斜率，切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

微分几何意义

曲线$y=f(x)$的切线上的增量

> $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\ \Delta y\approx dy$

连续，可导，可微之间的关系

导数公式及求导法则

1. 导数公式

（二）导数公式及求导法则

1. 基本初等函数的导数公式

1） $(C)'=0$　　2） $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

3） $(a^{x})'=a^{x}\ln a$　　4） $(e^{x})'=e^{x}$

5） $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　6） $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

7） $(\sin x)'=\cos x$　　8） $(\cos x)'=-\sin x$

9） $(\tan x)'=\sec^2 x$　　10） $(\cot x)'=-\csc^2 x$

11） $(\sec x)'=\sec x\tan x$　　12） $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

13） $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　14） $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15） $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　16） $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 有理运算法则

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$　　2) $(uv)'=u'v+uv'$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$

3. 复合函数求导

设 $u=\varphi(x)$, $y=f(u)$ 可导，则 $y=f[\varphi(x)]$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$$

常考题型

导数定义

1. 利用题给条件，转化为导数定义形式，再带入题目中计算
2. 判断函数是否可导，基本采用定义思路

复合函数

设 $u=\varphi(x)$, $y=f(u)$ 可导，则 $y=f[\varphi(x)]$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$$

反函数导数

若 y=f(x)可导，且$f'(x_0)\neq 0$，则其反函数$x=\varphi(y)$在点$y_0=f(x_0)$处可导，且$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

隐函数

（3）隐函数求导法：

$y=y(x)$

$$F(x,y)=0 \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

【例9】(1993年3) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\left[\frac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}\right]$

$\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx}=$ __________ .

参数方程求导

（5）参数方程求导法：

$t=\varphi^{-1}(x)$

设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数，则

1）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

2）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

极坐标与直角坐标的转换

对于极坐标方程$r=f(\theta)$，可以转换为直角坐标方程$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，然后再求导。

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta \\ \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta \end{cases}$$

对数求导法

常用于指数函数求导，左右两边**同时取对数**，用于将复杂的指数函数转化为简单的对数函数的加减乘除，简化运算。

高阶导数

定义：

> $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$

注：如果函数 f(x)在点x_0处 n 阶可导，则在点x_0的某邻域内 f(x)必定具有一切**低于 n 阶**的导数。

常用公式

1) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$; 2) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$;

3) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$ 4) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$.

求高阶导数的方法：

1. 公式法
2. 逐阶求导， 总结规律
3. 泰勒公式（求具体点常用）

> $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$
> $f^n(x)$为在那一点的泰勒展开项乘以阶乘，注意观察公式，你会发现

微分中值定理及导数应用

1. 定理 1 (费马引理)
   如果函数 f(x)在x_0处**可导**，且在x_0处取得**极值**，则$f'(x_0) = 0$
2. 定理 2 (罗尔定理)
   - 条件
     1. $f(x)$在$[a, b]$上连续
     2. $f(x)$在(a, b)内可导
     3. $f(a) = f(b)$
   - 结论: 存在$\xi \in (a, b)$，使得$f'(\xi) = 0$
3. 定理 3 (拉格朗日中值定理)
   - 条件
     1. $f(x)$在$[a, b]$上连续
     2. $f(x)$在(a, b)内可导
   - 结论: 存在$\xi \in (a, b)$，使得$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
4. 定理 4 (柯西中值定理)
   - 条件
     1. $f(x)$和$g(x)$在$[a, b]$上连续
     2. $f(x)$和$g(x)$在(a, b)内可导，且$g'(x) \neq 0$
   - 结论: 存在$\xi \in (a, b)$，使得$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$
5. 定理 5 (皮亚诺型余项泰勒公式)
   多用于研究局部，不精确。长存在于极限、极值计算中。

> 设函数 f(x)在x_0处 n 阶可导，那么$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$ 其中$R_n(x)=o(x-x_0)^n,(x\to x_0)$
> 若$x_0=0$，则得麦克劳林公式
> $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),(x\to 0)$

6. 定理 6 (拉格朗日型余项泰勒公式)
   多用与研究整体，可以给出精确值及误差大小。常用与计算极值和研究不等式
   > 设$f(x)$在含有x_0的某邻域内 n 阶可导，那么$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$
   > 其中$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(\xi\in(x_0,x))$

费马引理 $\Rightarrow$ 罗尔定理 $\Rightarrow$ 拉格朗日中值定理 $\Rightarrow$ 柯西中值定理
后项使用前项**推导**，前项为后项目的**特例**。

导数应用

函数单调性

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，那么

1. 若$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上单调增加
2. 若$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上单调减少

函数的极值

极值的定义

若存在$\delta>0$，使得
$\forall x\in U_0(x_0,\delta)$时，有$f(x)\le f(x_0)$，则称$f(x_0)$为$f(x)$的极大值，$x_0$为极大值点。
$\forall x\in U_0(x_0,\delta)$时，有$f(x)\ge f(x_0)$，则称$f(x_0)$为$f(x)$的极小值，$x_0$为极小值点。

极值的判定

驻点： $f'(x_0)=0$的点

1. 必要条件
   若$f(x)$在x_0处可导，且$f(x)$在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$
2. 第一充分条件(**使用一阶导数**)
   若$f(x)$在x_0处连续，且$f'(x_0)=0$，则$f(x)$在x_0处取得极值
   - 若$x<x_0$时，$f'(x)\ge 0$，$x>x_0$时，$f'(x)\le 0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值

- 若$x < x_0$时，$f'(x) \le 0$，$x > x_0$时，$f'(x) \ge 0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值
- 若$f'(x)$在x_0两侧都不同号，则$f(x)$在x_0处不取极值

3. 第二充分条件(**使用二阶导数**)
   设$f(x)$在x_0处连续，且$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0)$存在且不为 0，则
   - 当$f''(x_0) > 0$时，$f(x)$在x_0处取得极小值
   - 当$f''(x_0) < 0$时，$f(x)$在x_0处取得极大值

函数的凹凸性

凹凸性的定义

凹 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
凸 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

凹凸性的判定

若在区间 I 上，$f''(x) > 0 (< 0)$，则 f(x) 在 I 上凹(凸)。

曲线的渐近线

水平渐近线

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，则 y = A 为 f(x) 的水平渐近线

垂直渐近线

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$，则 x = x_0 为 f(x) 的垂直渐近线

斜渐近线

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = A$
$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - Ax] = B$，则 y = Ax + B 为 f(x) 的斜渐近线

曲线的弧微分与曲率

弧微分

曲率

曲率 $\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$
曲率半径 $\rho=\frac{1}{\kappa}$

常见题型

1. 求函数的极值和最值，确定曲线的凹向和拐点
2. 求渐进线

   > 分为水平渐近线、垂直渐近线、斜渐近线
   >
   > 在 0 的单侧，有且仅有一个水平渐近线或斜渐近线

3. 方程的根

   > 将方程写为 $f(x)=0$ 的形式，多用单调性，零点定理，罗尔定理等证明

4. 不等式证明

   > 将等式写到方程一侧，多使用单调性证明

5. 中值不等式证明

   > 多使用构造法，构造的方式包括但不限于将等式积分，再使用罗尔定理