第二章 极限

2.1 极限定义

2.1.1 数列极限定义

$\lim_{x\to\infty} x_n$ = a
$\forall\epsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\epsilon$

几何意义：
ϵ表示接近程度, $n>N$表示到∞的过程
表示当 $n>N$ 时，x_n所有的点都在 $a-\epsilon$ 和 $a+\epsilon$ 之间

2.1.2 函数极限定义

$\lim_{x\to a} f(x)=A$
$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\epsilon$

2.2 极限的性质

1. 有界性(局部有界性)
   > 如果 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, 那么存在常数 M>0 和$\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)|<M$

2. 保号性
   > 极限大于(小于)0,则极限的去心领域内，函数值大于(小于)0
   > 去心领域函数值$\geq$($\leq$)0,则极限$\geq$($\leq$)0

2.3 极限存在准则

1. 夹逼准则（多用与数列求和）
2. 单调有界（单调增加有上界，单调减少有下界）

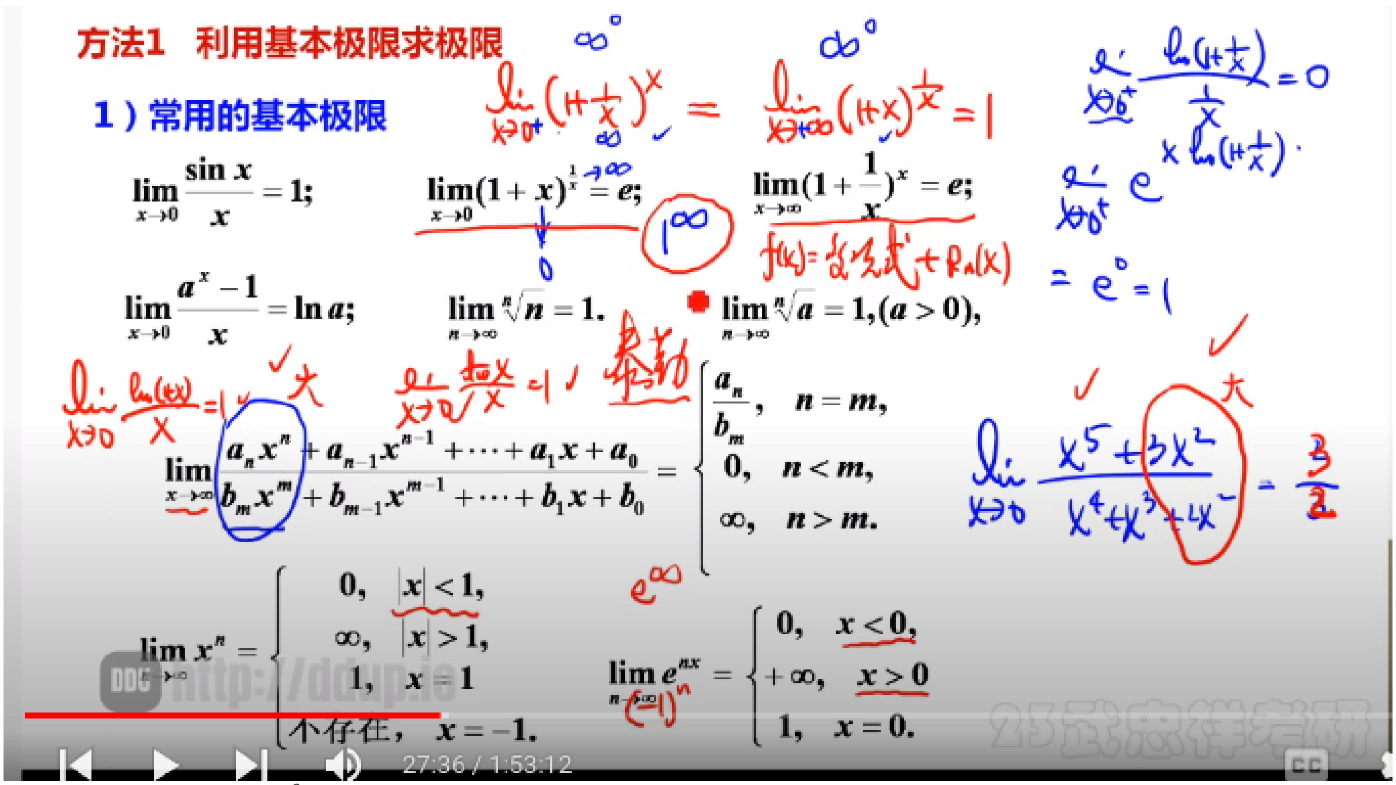
2.4 无穷小

2.5 无穷大

2.6 求极限的方法

基本极限定理

1. 常用基本极限



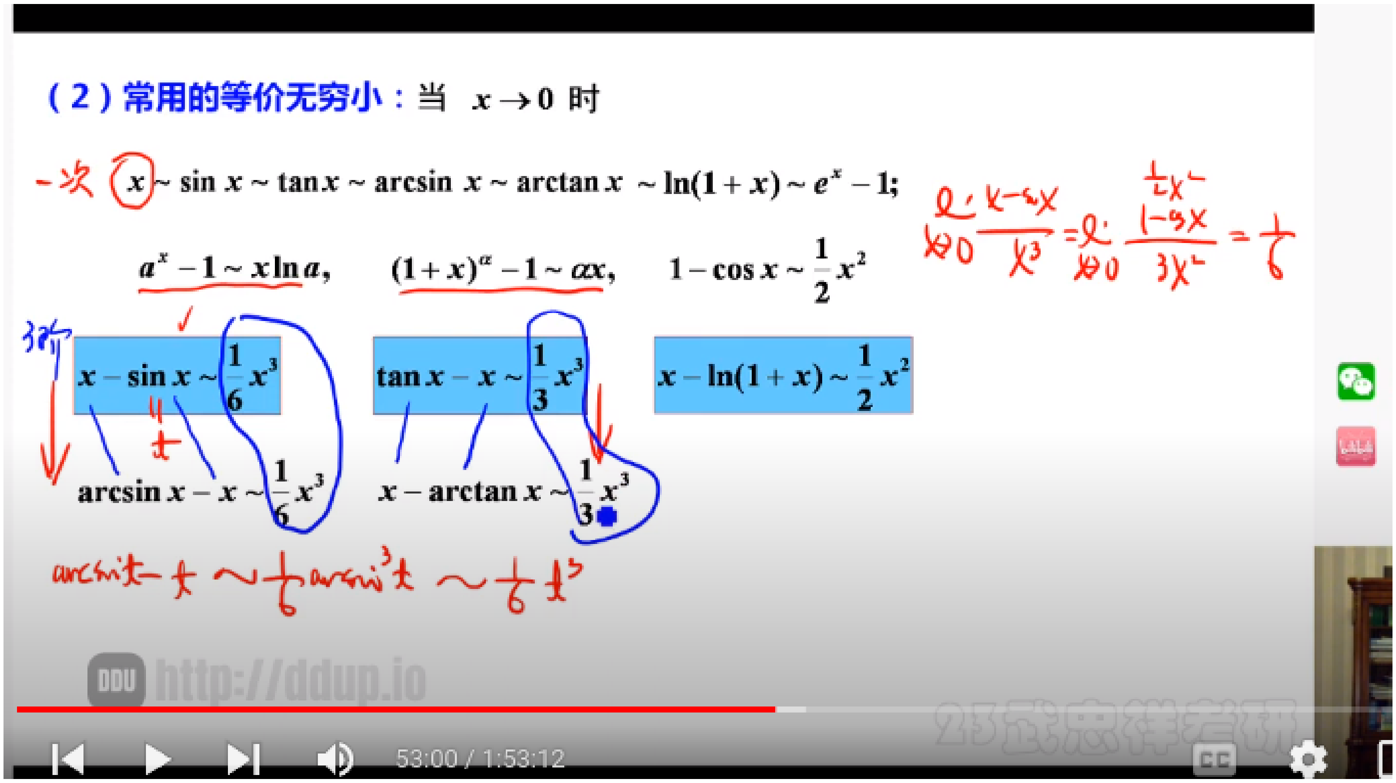
2. 1^{∞}: $\lim[1+\alpha(x)]^{\beta}(x)$形式

若 $\lim\alpha(x)=0$, $\lim\beta(x)=\infty$, 且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$

则 $\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{A}$

等价无穷小

1. 代换规则
   - 乘除无条件代换
   - 加减有条件代换(进阶规则)
2. 常见等价无穷小



有理运算法则

若$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么:

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$
$$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$
$$\lim(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \ (B \neq 0)$$

注意 :对极限进行有理化拆分时，注意每一项必须**有极限**。

推广 :

1. 只有存在 $\pm$ 不存在 = 不存在，其余都是不一定。
2. 因式中可以将有具体值的项提出来，如$\lim \frac{2x^2+3x+1}{x^2+2x+1} = \lim \frac{x^2(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \lim \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$

拉格朗日中值定理

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\delta)$, 其中$\delta \in (a,b)$
衍生至在求极限过程中，将两同一函数形式相减，转化为两数相乘的形式，再用拉格朗日中值或者等价定理求解。
$f(b) - f(a) = f'(\delta)(b-a)$
注意 :拉格朗日中值定理只能用于求函数极限，不能用于数列极限。

洛必达

$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

条件：

1. $\lim f(x)=\lim g(x)=0$ 或 $\lim f(x)=\lim g(x)=\infty$
2. $\lim f'(x), \lim g'(x)$存在（在判断题中尤其注意，$f(x)$和$g(x)$的导数必须存在不代表导数的极限存在）
3. $\lim g'(x)\neq 0$

泰勒公式

f(x)在 x=a 处的 n 阶泰勒公式为：

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$

常见泰勒公式：

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$
2. $sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_n(x)$
3. $cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_n(x)$
4. $ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$
5. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+R_n(x)$
6. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$
7. $tanx=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+...+\frac{2^{n-1}x^{2n-1}(2^{n-1}-1)}{n}+R_n(x)$
8. $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R_n(x)$
9. $\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+...+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+R_n(x)$

提示：
泰勒公式常用于将低阶无穷小转化为高阶无穷小，从而求极限。

夹逼准则

$f(x)\leq g(x)\leq h(x), \lim f(x)=\lim h(x)=A$, 则 $\lim g(x)=A$

常用于数列求和中, 例如： $\lim \frac{1}{n+1}+\lim \frac{2}{n+2}+\cdots+\lim \frac{n}{n+n}$

单调有界

单调有界常用于推导式子的极限，例如：$a_{n+1}=f(a_n)$

分为三部曲：

1. 有界
2. 单调
3. $\lim a_{n+1}=A \iff \lim a_n=A$, 所以 $A=f(A)$, 求出 A 的值

定积分定义

定积分定义求极限方法一般用于数列求和中

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$
$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n}\lim \sum_{i=1}^{n} f(\frac{\xi_i}{n})=\int_0^1 f(\frac{\xi_i}{n})dx$$

着重在于提取$\frac{1}{n}$，看其余项是否满足一个可积分函数

函数的连续性

概念

1. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0$, 则称 f(x) 在 x_0 处连续
2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称 f(x) 在 x_0 处连续
3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则称 f(x) 在 x_0 处**右连续**
4. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 则称 f(x) 在 x_0 处**左连续**

定理

$f(x)$连续 $\iff$ $f(x)$左连续且右连续

间断点及其分类

间断点的定义

若 $f(x)$ 在 x_0 某去心领域有定义，但在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点

间断点的分类

1. 第一类间断点：左右极限都存在
    - 可去间断点：左极限 $=$ 右极限：例如：$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
    - 跳跃间断点：左极限 $\neq$ 右极限
2. 第二类间断点：左右极限至少有一个不存在
    - 无穷间断点：例如：$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
    - 振荡间断点：例如：$\lim_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$

连续性的运算与性质

1. 连续函数的四则运算仍然连续
2. 连续函数的复合仍然连续
3. 基本初等函数在其**定义域**内连续
4. 初等函数在其**定义区间**内连续
5. 若 f(x)在[a,b]上连续，则 f(x)在[a,b]上有界(有界性定理)
6. 若 f(x)在[a,b]上连续，则 f(x)在[a,b]上有最大值和最小值(最值定理)
7. 若 f(x)在[a,b]上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则 f(x)在[a,b]上至少有一个介于 f(a) 和 f(b) 之间的值(介值定理)
8. 若 f(x)在[a,b]上连续，且 f(a) · f(b) < 0, 则在(a,b)内至少有一个根(零点定理)

常见题型

无穷小比较

解题思路：

1. 诺必塔法则
2. 等价无穷小
3. 泰勒公式