向量代数

数量积

1. 几何表示
   > $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中$\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角
2. 代数表示
   > $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
3. 运算规律
   > 1. 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
   > 2. 分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
4. 几何应用
   > 1. 求模：$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
   > 2. 求夹角：$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
   > 3. 判断垂直：$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

向量积

1. 几何表示
   > $a\times b$是一向量，模：$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，其中$\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，方向：右手法则
2. 代数表示
   > $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)i - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$
3. 运算规律
   > 1. 反交换律：$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
   > 2. 分配律：$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
4. 几何应用
   > 1. 求同时垂直于两个向量的向量：$\vec{a}\times\vec{b}$
   > 2. 求以 a 和 b 为边的平行四边形的面积：$S = |\vec{a}\times\vec{b}|$

> 3. 判定两向量平行：$\vec{a}\times\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

混合积

$(abc)=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$

1. 代数表示

> $$(abc)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

2. 运算规律

> 1. 轮换对称性：$(abc)=(bca)=(cab)$
> 2. 交换变号性：$(abc)=-(acb)$

3. 几何应用

> 1. 平行六面体的体积：$V=|(abc)|$
> 2. 判断三向量共面：$(abc)=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面

空间平面与直线

平面方程

1. 一般式

> $Ax+By+Cz+D=0$ n=(A,B,C)为法向量

2. 点法式

> $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

3. 截距式

> $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

直线方程

1. 一般式

> $$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

2. 对称式

> $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$

3. 参数式

> $$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

平面与直线的位置关系(平行、垂直、夹角)

关键：平面的法向量，直线的方向向量

点到面距离

点$P_0(x_0, y_0, z_0)$到平面$Ax + By + Cz + D = 0$的距离为：$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

点到直线距离

点$P_0(x_0, y_0, z_0)$到直线$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$的距离为：$d = \frac{|x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0| \times \{m,n,p\}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

曲面与空间曲线

1. 曲面方程

> $F(x, y, z) = 0$ 或 $z = f(x)$

2. 空间曲线方程

> $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

常见曲面

旋转面

一条平行曲线绕平面上的一条直线旋转；设 L 是 yOz 平面上的一条曲线，其方程是$\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$，则

1. L 绕 y 轴旋转一周得到的曲面方程为：$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
2. L 绕 z 轴旋转一周得到的曲面方程为：$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

柱面

平行于定直线并沿定直线移动的直线 L 形成的轨迹

1. 准线为Γ:$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，母线平行于 z 轴的柱面方程为： $f(x,y)=0$
2. 准线为Γ:$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，母线平行于 z 轴的柱面方程为： $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的公共解$H(x,y)=0$

二次曲面

1. 椭圆锥面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$; 特别的： 圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z^2$
2. 椭球面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; 特别的： 球面 $x^2+y^2+z^2=1$
3. 单页双曲面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
4. 双页双曲面： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
5. 椭圆抛物面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$；特别的： 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$
6. 双曲线抛物面： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

空间曲线投影

曲线Γ：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$在 xOy 面上的投影曲线方程为：$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

多元微分在几何上的应用

曲线的切平面与法线

1. 曲面$F(x,y,z)=0$,法向量为$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$
2. 曲面$z=f(x,y)$,法向量为$\vec{n}=(f_x,f_y,-1)$

曲线的切线与法平面

1. 曲线$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,切向量为$\vec{t}=(F_x,F_y,F_z)\times(G_x,G_y,G_z)$
2. 曲线$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$,切向量为$\vec{t}=(x'(t),y'(t),z'(t))$