多元积分学及其应用

三重积分

定义

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$

性质

计算

直角坐标

1. 先一后二

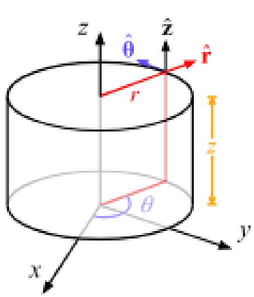
   > $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2. 先二后一

   > $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$$

柱坐标

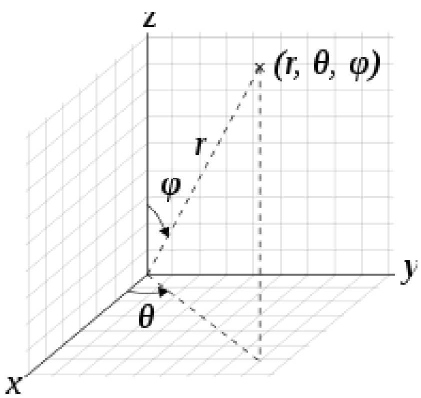
$$\begin{cases} x=r\cos\theta, 0\le r\le +\infty \\ y=r\sin\theta, 0\le\theta\le 2\pi \\ z=z, -\infty\le z\le +\infty \end{cases}$$



$dv=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

球坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, 0 \le r \le +\infty \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = r\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$



$dv = r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

适用范围：

1. $f(x^2+y^2+z^2)$

奇偶性

若积分域Ω关于 xOy 坐标面对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V, 若f(x,y,z)为奇函数 \\ 0, 若f(x,y,z)为偶函数 \end{cases}$$

利用变量对称性

积分域中 x,y,z 可相互交换，多用于球坐标

曲线积分

对弧长的线积分（第一类线积分）

定义

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

性质

$\int_{L(AB)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{L(BA)} f(x,y,z)\mathrm{d}s$（与路径方向无关）

计算方法

直接法

1. 若$C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\alpha\le t\le\beta$,则$\int_C f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$
2. 若$C:y=y(x),x\in[a,b]$,则$\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$
3. 若$C:\rho=\rho(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$,则$\int_C f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

利用奇偶性

1. 若积分曲线关于 y 轴对称，则
   > $\int_C f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{C_1} f(x,y)ds, f(-x,y)=f(x,y)\\0, f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$
2. 若积分曲线关于 x 轴对称，则
   > $\int_C f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{C_1} f(x,y)ds, f(x,-y)=f(x,y)\\0, f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$

利用对称性

若积分曲线关于直线 $y=x$ 对称，则

> $\int_C f(x,y)ds=\int_C f(y,x)ds$
> 特别的，$\int_C f(x)ds=\int_C f(y)ds$

对坐标的线积分（第二类线积分）

定义

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

性质

$\int_{L(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_{L(BA)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$（与路径方向有关）

计算方法（平面）

直接法

设$L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\alpha\le t\le\beta$,则$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$

格林公式

设L为分段光滑闭曲线，D为L所围成的有界闭区域，$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

补线用格林公式

利用线积分与路径无关

1. 判定条件：$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$（区域 D 单连通）
2. 计算：

> a) 改换路径
>
> b) 利用原函数 $\displaystyle\int_{(x1,y1)}^{(x2,y2)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\varphi(x2,y2)-\varphi(x1,y1)$;求原函数方法：1.偏积分；2 凑微分

计算方法（空间）

直接法

设$L:x=x(t),y=y(t),z=z(t),t\in[\alpha,\beta]$,则$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t$

斯托克斯公式

$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint\limits_\Sigma(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$

将空间曲线积分转化为平面曲线积分

1. 用 x,y 表示 z
2. 形成的区域表示曲线到 xOy 平面的投影
3. 用格林公式计算

曲面积分

对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

定义

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

性质

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{-\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}\text{(与曲面的方向无关)}$$

计算方法

直接法

$$\sum : z = z(x,y), (x,y) \in D$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

利用奇偶性

若曲面Σ关于 xOy 面对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S & f(x,y,-z)=f(x,y,z) \\ 0 & f(x,y,-z)=-f(x,y,z) \end{cases}$$

利用对称性

对坐标的面积分（第二类曲面积分）

定义

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i\Delta z_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\Delta x_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i\Delta y_i]$$

性质

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = -\iint_{-\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy\text{(与曲面的方向有关)}$$

计算方法

直接法

1. 设曲面：$z=z(x,y),(x,y)\in D_{x,y}$
   > $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{x,y}} P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. 设曲面：$x=x(y,z),(y,z)\in D_{y,z}$
   > $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint\limits_{D_{y,z}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
3. 设曲面：$y=y(z,x),(z,x)\in D_{z,x}$
   > $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dzdx=\pm\iint\limits_{D_{z,x}} P(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

高斯公式

若曲面Σ是**封闭曲面**，且Σ的内部为Ω，则

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V$$

补面用高斯公式

两类面积分的关系

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

多元积分应用

所求量\几何图形	平面板	空间体	曲线	曲面
几何度量	$\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\int\limits_{L}\mathrm{d}s$	$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$
质量	$\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\int\limits_{L}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$	$\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$
质心	$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D}x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$	$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$	$\bar{x}=\frac{\int\limits_{L}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int\limits_{L}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}$	$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}$
形心	$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$	$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$	$\bar{x}=\frac{\int\limits_{L}x\mathrm{d}s}{\int\limits_{L}\mathrm{d}s}$	$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S}$

所求量\几何图形	平面板	空间体	曲线	曲面
转动惯量	$I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$I_x = \iiint\limits_\Omega y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$I_x = \int\limits_L y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$	$I_x = \iint\limits_\Sigma y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$

变力做功力：$W = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$

通量：$\Phi = \iint\limits_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

场论初步

方向导数

定义

$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta l}$ (其中Δl为$\overrightarrow{l}$的长度)

计算

若$z = f(x,y)$可微，则

$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$

梯度(结果为向量)

设函数$z = f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某邻域内具有一阶连续偏导数，则向量

$\overrightarrow{gradu} = \nabla u = f_x(x_0,y_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0,y_0)\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{gradu}$称为函数$z = f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的梯度，记为$\nabla u|_{(x_0,y_0)}$，它的方向是函数在该点的方向导数取得最大值的方向，其大小等于该最大值。

散度(结果为值)

设有向量场$A(x,y,z)={P,Q,R}

$divA = \nabla \cdot A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

旋度(结果为向量)

设有向量场$A(x,y,z) = P,Q,R$

$$rotA = \nabla \times A = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$