## Datorlaboration 4

Josef Wilzén och Måns Magnusson

February 21, 2019

#### Instruktioner

- Denna laboration ska göras en och en.
- Det är tillåtet att diskutera med andra, men att plagiera eller skriva kod åt varandra är **inte** tillåtet. Det är alltså inte tillåtet att titta på andras lösningar på inlämningsuppgifterna.
- Använd gärna Discord för att ställa frågor. Varje laboration har en egen kanal.
- Deadline för laboration framgår på LISAM
- Laborationen ska lämnas in via LISAM.
- Använd inte å, ä eller ö i variabel- eller funktionsnamn.
- Utgå från laborationsmallen, som går att ladda ned här, när du gör inlämningsuppgifterna. Spara denna som labb[no]\_[liuID].R , t.ex. labb1\_josad732.R om det är laboration 1. Ta inte med hakparenteser i filnamnet. Denna fil ska laddas upp på LISAM och ska inte innehålla något annat än de aktuella funktionerna, namn- och ID-variabler och ev. kommentarer. Alltså inga andra variabler, funktionsanrop för att testa inlämningsuppgifterna eller anrop till markmyassignmentfunktioner.
- Laborationen består av två delar:
  - Datorlaborationen
  - Inlämningsuppgifter
- I laborationen finns det extrauppgifter markerade med \*. Dessa kan hoppas över.
- **Tips!** Använd "fusklapparna" som finns **här**. Dessa kommer ni också få ha med på tentan. För block 1-4 är rstudio-IDE-cheatsheet och base-r särskilt intressanta.

## Contents

I	Datorlaboration	3
1	R-paket	4
<b>2</b>	Mer om funktioner	6
	2.1 Tilldelning	6
	2.2 Delar i en R-funktion	7
	2.2.1 Primitiva funktioner	7
	2.3 Krav på funktioner	8
	2.4 Defaultvärden och argumentordning	8
	2.5 Funktioner i funktioner	9
	2.5.1 Ellipsis ()	10
	2.5.2 do.call()	10
	2.6 Globala och lokala miljöer i R	11
	2.6.1 Fria variabler och dynamic lookup	13
3	Högnivåfunktioner (*apply)	15
4	Dokumentation av funktioner - ROxygen	17
5	Kodstil	19
II	Inlämningsuppgifter	20
6	Inlämningsuppgifter	22
	6.1 hilbert_matrix()	22
	6.2 toeplitz_matrix()	23
	6.3 Väntevärde och varians i en dimension	25

# Part I Datorlaboration

## R-paket

R-paket är extra moduler/bibliotek som läses in i R för att skapa extra funktionalitet i form av nya funktioner eller nya data. De flesta funktioner som används i R finns i olika paket. Några få paket läses automatiskt in i R när vi startar R, medan andra paket måste vi läsa in aktivt för att få tillgång till funktionaliteten. Den stora mängd personer som bidrar till R gör det genom att utveckla nya funktioner som de sedan släpper som paket.

Paket är något som skiljer R från andra statistikprogram är att den mesta funktionaliteten inte kommer med från början. I andra programmeringsspråk är denna form av **modularisering** betydligt vanligare. Den stora fördelen med detta är att vi bara behöver läsa in de paket vi verkligen har behov av just nu.

För att kunna använda ett paket behöver vi gå igenom två steg:

- Paketet måste först installeras på den aktuella datorn.
- Paketet måste sedan läsas in i den aktuella sessionen för att användas eller anropas explicit.

Alla paket har olika versioner och generellt följer de kriterierna för semantisk versionshantering.

1. Först måste vi installera ett paket. Detta kan antingen göras genom CRAN (Comprehensive R Archive Network) på internet där de flesta paket ligger uppe. Detta görs med funktionen install.packages(). Pröva att installera stringr och lubrudate på detta sätt.

```
install.packages("stringr")
install.packages("lubridate")
# eller om du ska installera något paket i SU-salarna:
install.packages("stringr",lib="sökväg till en mapp i din hemkatalog")
install.packages("lubridate",lib="sökväg till en mapp i din hemkatalog")
```

2. I SU-salarna så är de paket som behövs på kursen installerade i en modul. Om ni kör kommandot nedan i en terminal så kommer ni få tillgång till R, RStudio samt de R-paket som behövs i kursen. Öppna en terminal genom att trycka ctrl+alt+T

```
module load courses/732G33
```

3. För att se vilka paket som är installerade så körs:

```
installed.packages()
# eller
x<-installed.packages()
View(x)</pre>
```

4. En annan server där det finns mycket paket är på github. Det är vanligt att paket som fortfarande utvecklas aktivt finns på både CRAN och github.com då github underlättar enormt för så kallad kollaborativ utveckling där flera personer hjälps åt med utvecklingen. För att installera från github direkt behöver först paketet devtools installeras. Pröva att installera paketet pxweb på detta sätt med följande kod.

```
install.packages("devtools")
devtools::install_github('ropengov/pxweb')
library(pxweb)
```

5. För att läsa in ett paket (d.v.s. för att använda paketet i den aktuella sessionen) används funktionen library().

```
library(pxweb)
# eller om du har installerat ett paket på en egenvald plats:
library(markmyassignment,lib="sökväg till en mapp i din hemkatalog")
```

6. Om flera paket har samma funktionsnamn kan vi bestämma exakt från vilket paket vi ska använda en given funktion med ::. Då behöver vi inte först läsa in paketet. Detta är särskilt bra om vi bara vill använda en enskild funktion från ett paket. Vi kan då snabbt se i vår kod var paketet används.

```
lubridate::ymd("19990101")
```

7. För att ta bort ett paket från en aktuell R-session används detatch().

```
detach("package:pxweb", character.only = TRUE)
```

- 8. I R-Studio kan vi studera vilka paket som finns installerade och vilka som är inlästa i R under "Packages". Här kan vi också lägga till eller ta bort paket från vår aktiva session. Undersök om du har ggplot2 installerat och vilken version du har av ggplot2. Om ggplot2 inte är installerat pröva att installera det.
- 9. Ta reda på hur paket kan avinstalleras i R genom att söka på webben eller i R:s dokumentation.

## Mer om funktioner

Funktioner är en central del i R. Allt som "gör" något i R är en funktion och allt som "är" något är ett objekt. Av detta följer att varje enskild funktion är ett objekt i sig.

För en fördjupning om funktioner rekommenderas **kapitlet om funktioner** i *Advanced R programming* av Hadley Wickham.

#### 2.1 Tilldelning

Tilldelning (assignment) kan ske på några olika sätt i R. Ni har redan använd det vanligaste "<-".

1. För att tilldela i den närmste lokala miljön ska "<-" användas, men det finns varianter. Testa koden nedan. "->" bör inte användas. "=" används för att definiera defaultargument i funktionsdefinitioner och när funktioner anropas.

```
x<-1:4

2:6->y

z=5:9

?"<-"

"<-"(a,3)

a

"="(b,2:5)

b
```

2. För att tilldela i den globala miljön används "<<-" eller "->>" (rekommenderas ej!). Testa koden nedan. Ofta vill vi undvika att tilldela variabler i den globala miljön inifrån funktioner, och därför är det bäst att använda den vanliga "<-".

```
rm(list=ls())
y<-"hej!"
y
h<-funciton(x,y){
x<-x+10
y<<-y+20
print(x)
print(y)
}
h(2,3)</pre>
```

3. En annan tilldelningsoperator är assign(), testa att köra ?assign(). Testa koden nedan.

```
assign("x",12)
assign("abc",TRUE)
assign("myVar",rep("hej",10))
```

4. assign()kan användas för att skapa nya variabler med hjälp av elementen i en lista. Testa koden nedan.

```
rm(list=ls())
ls()
my_list<-list(x1=c(1,2,3),x2=matrix(1:4,2,8),x3=sin(pi^2),x4=LETTERS)
no_elements<-length(my_list)
for(i in 1:no_elements){
   assign(x = names(my_list)[i],value = my_list[[i]])
}
ls()</pre>
```

#### 2.2 Delar i en R-funktion

Varje funktion består av tre huvudsakliga delar. Funktionens argument (eller formals), kropp (body) och lokala miljö (environment). Det är dessa tre som tillsammans utgör en funktion.

1. Vi börjar med att skapa följande funktion i R.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

```
f <- function(x,y){
     fxy <- x^2 + y^2 - 1
     return(fxy)
}</pre>
```

2. Vi kan nu använda oss av funktionen formals() för att plocka ut funktionens argument.

```
formals(f)
```

3. På samma sätt kan vi studera funktionens kropp med body().

```
body(f)
```

4. Till sist kan vi också undersöka funktionens miljö. Detta säger ingenting just nu, men vi kommer strax återkomma till funktioners lokala miljöer.

```
environment(f)
```

#### 2.2.1 Primitiva funktioner

Det finns ett undantag från dessa regler och det gäller primitiva funktioner. Dessa funktioner är skrivna direkt i C-kod och anropar C-kod direkt. Dessa funktioner har varken environment(), body() eller formals().

```
function (...) .Primitive("c")

formals(c)

NULL

body(c)

NULL
environment(c)
```

### 2.3 Krav på funktioner

Vi börjar med att se vilka delar som är nödvändiga för en funktion i R. Vi börjar med följande enkla funktion.

1. Funktioner behöver inte ha ett return()-steg. Se exemplet nedan:

2. Det gör att vi kan förenkla funktionen ytterligare på följande sätt. Pröva att funktionen fortfarande fungerar.

```
g <- function(a,b){
        a + b
}</pre>
```

3. Det är också möjligt att uttrycka en funktion på en och samma rad. Då behöver vi inte heller {}. Se exempel nedan:

```
g <- function(a,b) a + b
```

4. Pröva att använda formals() och body() på funktionen g() ovan.

## 2.4 Defaultvärden och argumentordning

I vissa fall kan det vara så att vi vill att ett givet värde ska vara det värde som används som standardvärde för en särskild funktion. Exempelvis funktionen mean() har argumentet rm.na satt till FALSE som standard.

För att skapa ett standardvärde använder ställer vi in detta i funktionsdefinitionen på följande sätt function(a, b=10). Vi kan i princip ha vad vi vill som standardvärden.

1. Nedan är ett exempel på standardvärden i funktioner.

```
g <- function(a, b = 10){
    res <- a + b
    return(res)
}</pre>
```

- 2. Pröva att köra funktionen både genom att ange argumentet b och utan att ange det. Upprepa funktionen men sätt defaultvärden för a till 5 och b till 15. Pröva att anropa funktionen utan att ange några värden alls.
- 3. Pröva att använda funktionen formals() på funktionen g() ovan. Framgår defaultvärdet?
- 4. Skapa en ny funktion på följande sätt:

$$h(x,y) = x^y - y$$

där y sätts till 1 som standard.

- 5. När vi anropar en funktion kan vi välja att ange namnet på argumentet eller inte. Anger vi namnet på argumenten så spelar ordningen ingen roll. Anger vi däremot inte argumentens namn utgår R från att argumenten följer samma ordning som vi skapade argumenten i (och som vi ser med formals())
- 6. Pröva lite olika värden på x och y. Pröva att använda argumentnamnen och byt ordning på x och y i funktionsanropet (d.v.s h(y=10, x=100)).
- 7. Pröva följande kod. En funktion kan bara ha ett argument med ett givet argumentnamn.

```
k <- function(a, a = 10){
res <- a^2
return(res)
}</pre>
```

#### 2.5 Funktioner i funktioner

Ibland kan det vara så att vi vill ge en hel funktion som ett argument till en annan funktion. Ett exempel på detta är om vi vill integrera en funktion numeriskt.

1. Vi ska nu pröva att beräkna en integral numeriskt i R. Börja med att skapa följande funktion i R och kalla den för f.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2$$

2. För att integrera numeriskt i R använder vi funktionen integrate(). Vi behöver då ange funktionen vi vill integrera genom att ange denna funktion som ett argument till integrate(). Vi behöver också ange från vilka värden vi vill utföra integralen. Exempelvis följande integral:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{3}x^2 dx$$

kan beräknas på följande sätt i R:

```
integrate(f=f, 0, 3)
3 with absolute error < 3.3e-14</pre>
```

3. Pröva nu att beräkna följande integral för f

$$\int_{-3}^{9} f(x)dx$$

4. Vi kan också skicka med argument till den funktion vi skickar med. Skapa täthetsfunktionen för en exponentialfördelad variabel med argumenten x och lambda och kalla den exp\_pdf(x,lambda) i R. Täthetsfunktionen ges nedan:

$$f_X(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

5. För att skicka med både en funktion och argument som ska skickas vidare används . . . i funktionen integrate(). För att beräkna följande integral

$$\int_0^1 f_X(x,\lambda=1)dx$$

gör vi på följande sätt:

```
integrate(f=exp_pdf, 0, 1, lambda = 1)
0.63212 with absolute error < 7e-15</pre>
```

#### 2.5.1 Ellipsis (...)

Ovan var ett exempel på . . . som kallas ellipsis. Ellipsis är ett sätt att kunna skicka ett godtyckligt antal argument (och godtyckligt namngivna) till en funktion och sedan skicka vidare dessa till en ny funktion. På detta sätt behöver inte varje funktion vi konstruerar ta hänsyn till alla möjliga funktioner.

- Använd hjälpen och titta på dokumentationen till funktionen apply(). apply() har dels ett argument FUN där vi anger en funktion vi använder och ... för att kunna skicka godtyckliga argument till den funktion vi angett under FUN.
- 2. Vi ska nu pröva att skapa en funktion på följande sätt.

```
apply_my_function_on_x <- function(x, FUN) FUN(x)
```

- 3. Pröva att skapa en numerisk vektor och ange den som x och prova lite olika funktioner som argument FUN. Ex. mean(), median() och kontrollera att det fungerar.
- 4. Pröva nu att byta ut ett element i din numeriska vektor till NA och pröva återigen lite funktioner som mean() och median(). Nu får vi NA som resultat och det finns inget sätt att skicka med na.rm=TRUE till ex. mean(). Antingen är na.rm=TRUE eller na.rm=FALSE..
- 5. Skapa nu följande funktion där vi använder . . . Observera att vi behöver ange det både som argument i vår funktion och som argument i den funktion vi vill kunna skicka vidare argument till.

```
apply_my_function_on_x <- function(x, FUN, ...) FUN(x, ...)
```

6. Pröva nu att styra na.rm i mean() direkt från vår apply\_my\_function\_on\_x()-funktion och kontrollera att resultaten fungerar som de ska.

#### 2.5.2 do.call()

do.call() är en mycket kraftfull funktion när det gäller hantering av funktioner i funktioner.

1. Kör ?do.call, testa sen koden nedan:

```
# kolla upp vad argumentet heter i summary:
?summary
x<-list(object=iris)
do.call(what = summary,args = x)
g<-function(x,a1,a2,a3){
    y<-a1*x^2+a2*x+a3
return(y)
}
mylist<-list(x=10,a1=2,a2=-4,a3=10)
do.call(g,mylist)
mylist$x<-20
do.call(g,mylist)</pre>
```

- 2. Skriv en egen funktion med minst 2 argument som du testar att anropa med do.call().
- 3. Testa nu den omgjorda funktionen av apply\_my\_function\_on\_x. Pröva nu att styra na.rm i mean()på vektorn x<-1:300 och x<-c(NA,1:300).

```
apply_my_function_on_args <- function(FUN,args) do.call(FUN,args)
```

4. Det blir lätt problem om vi har flera funktioner i huvudfunktionen som använder  $\dots$ , se exemplet nedan:

5. I fallet ovan är det bra att använda do.call(), testa den modifierade funktionen nedan:

## 2.6 Globala och lokala miljöer i R

Alla funktioner i R skapar egna lokala miljöer när funktionerna anropas där initialt bara argumenten finns. Fördelen med detta är att det inte finns några risker att olika objekt skulle krocka om de skulle ha samma namn. Ett bra sätt att tänka är att R startar en helt ny R-session varje gång en funktion anropas och att koden i funktionen körs i denna miljö. Det gör att våra variabler som vi har i den globala miljön inte påverkas och att vi behöver inte oroa oss för vad vi använder oss av för variabler inuti funktioner.

1. Kör följande kod. Vad förväntar du dig att ska hända?

En central del när det gäller funktioner (och objekt) i R är den så kallade sökvägen till objekt. Det handlar om hur R väljer vilken funktion eller objekt den ska returnera om vi anger ett objektsnamn.

R gör detta baserat på sökvägen till objektsnamnen. Med funktionen search() kan vi se hur R söker efter en funktion eller objekt om vi anger ett objektnamn.

Det är i denna ordning som R kommer söka om vi exempelvis anropar funktionen mean(). Först kommer den se om det finns en funktion som heter mean() i den globala miljön. Hittar den inte denna funktion där kommer den gå vidare och leta efter mean() i de olika paketen i den ordning som anges ovan. Finns det ingen mean()-funktion i något paket kommer den till slut titta i base-paketet där mean() ligger och anropa funktionen.

Nu återkommer vi till funktionen environment() som vi prövade tidigare. Med denna funktion kan vi se i vilken miljö en funktion har skapats.

Detta sätt att leta reda på funktioner kallas för lexical scoping.

1. Vi ska nu titta på funktionen mean(). Börja med att studera var denna funktion ligger men environment().

```
environment(mean)
```

2. Skapa följande funktion och pröva denna kod:

```
mean <- function(x){
          100
}</pre>
```

- 3. Den funktion vi brukar använda för att räkna ut medelvärden heter också mean(). Vilken funktion är det som används om du anropar funktionen mean() för en numerisk vektor?
- 4. Pröva att se vilken miljö mean() nu ligger i.
- 5. Pröva nu att anropa den gamla mean()-funktionen med hjälp av :: direkt från den namespace den gamla funktionen mean() ligger i.

```
base::mean(1:10)
mean(1:10)
```

6. Ta nu bort din mean()-funktion med rm(mean). Pröva följande kod igen.

```
base::mean(1:10)
mean(1:10)
```

7. Skapa nu följande funktionen nedan. Vilken variabel är en så kallad fri variabel?

```
f <- function(x){
      (x + y)^2 - 1
}</pre>
```

#### 2.6.1 Fria variabler och dynamic lookup

Är det så att en variabel används i en funktion men inte skapas i funktionen är det en så kallad fri variabel. I dessa fall kommer R söka efter denna variabel **i den miljö där funktionen skapades.** 

R använder också så kallad dynamic lookup. Det innebär att R anropar fria variabler när funktionen körs, inte när funktionen skapas.

1. Kör denna kod i R: Pröva lite olika värden på fri\_variabel.

```
fri_variabel <- 10
ny_fun <- function(){
    a <- c(1, 3, 5)
    b <- a + fri_variabel
    return(b)
}
ny_fun()

[1] 11 13 15

fri_variabel <- 10
ny_fun()

[1] 11 13 15

rm(fri_variabel)
ny_fun()

Error in ny_fun(): object 'fri_variabel' not found</pre>
```

Det vi sett ovan är hur R letar upp en funktion (eller objekt). När det gäller fria variabler i funktioner fungerar det på samma sätt.

- Först försöker R hitta variabeln i den lokala miljön för funktionen.
- Hittar R inte funktionen där letar den vidare i den miljö där funktionen skapades.
- Hittar den inte variabeln där fortsätter den upp till dess att den kommer till den globala miljön.
- Finns variabeln inte i den globala miljön söker den vidare i de inlästa paketen. Finns funktionen inte där så returnerar R ett felmeddelande om att den fria variabeln saknas.
- 1. Skapa koden nedan, vad gör funktionen? Använder den y <- 5 eller y <- 10?

```
y <- 5
g <- function(x){
  y <- 10

f <- function(a) a^2

print(environment(f))
  output <- f(y)
  return(output)
}</pre>
```

## Högnivåfunktioner (\*apply)

Vi ska nu använda så kallade de så kallade \*apply-funktionerna i R. Dessa funktioner är så kallade högnivåfunktioner som vi använder om vi vill applicera en funktion mer generellt.

Det finns flera olika högnivåfunktioner.

Högnivåfunktion	Anropa funktionen FUN för
apply()	varje rad eller kolumn i en matris
vapply()	varje element i en vektor
tapply()	varje grupp eller id
lapply()	varje element i en lista
mapply()	olika uppsättningar av argument till FUN

Exempelvis vapply() och lapply() blir på detta sätt ett alternativ till att använda loopar som ibland kan vara snabbare.

1. Vi börjar med funktionen tapply(). tapply() används för att använda en funktion per grupp (över en så kallad "Ragged array" eller vektorer av olika längd). Detta är ofta av intresse i praktiken. Vi börjar med att läsa in datasetet ChickWeight.

```
data(ChickWeight)
```

2. Vi ska nu pröva tapply() som har argumenten X, INDEX, FUN och simplify. X anger variabeln (eller datasetet) vi vill använda funktionen på, INDEX anger vilken gruppvariabel som ska användas och FUN anger vilken funktion som ska användas per grupp. Ett exempel på hur vi kan beräkna den genomsnittliga vikten per kyckling ser ut på följande sätt:

```
tapply(X=ChickWeight$weight, INDEX=ChickWeight$Chick, FUN=mean)
```

3. Pröva att på ett liknande sätt beräkna standardavvikelsen för varje kyckling samt antalet observationer (längden av vektorn) och kvantilerna med quantile().

```
tapply(X=ChickWeight$weight, INDEX=ChickWeight$Chick, FUN=sd)
tapply(X=ChickWeight$weight, INDEX=ChickWeight$Chick, FUN=length)
```

- 4. Pröva nu att skicka argument till quantile() (med ...) för att räkna ut några andra kvantiler för varje kyckling, tex probs=c(0.1,0.9).
- 5. \*apply-funktioner är särskilt smidiga att använda tillsammans med så kallade anonyma funktioner (d.v.s. funktioner som skapas "on the fly". Pröva koden nedan. Vad gör den?

```
tapply(X=ChickWeight$weight, INDEX=ChickWeight$Chick, FUN=function(x){sum(x)^2})
```

- 6. Pröva att på liknande sätt skapa en funktion som räknar ut skillnaden mellan det första värdet och det sista värdet för varje kyckling med en anonym funktion.
- 7. Pröva nu att göra om uppgiften ovan, men i tapply() ange simplify = TRUE. Vad är skillnaden?
- 8. Vi ska nu studera lapply(). lapply() använder en funktion FUN på varje element i en lista X. Kör koden nedan: Vad har du skapat för lista?

```
myList <- split(x = ChickWeight, f = ChickWeight$Diet)</pre>
```

- 9. Räkna ut medelvärde, varians och percentiler för weight i varje element i myList med lapply().
- 10. Skapa nu en funktion som kan ta ett dataset för en kyckling och räknar ut skillnaden i vikt mellan tidpunkt 0 och tidpunkt 10, om värden saknas för tidpunkt 0 eller 10 ska NA returneras. Använd denna funktion tillsammans med lapply() för att beräkna den skillnaden mellan tidpunkt 0 och 10 för alla kycklingar.
- 11. Testa nu koden nedan med apply(). Vad betyder MARGIN = 2 eller MARGIN = 1? Kolla i hjälpen!

```
data("trees")
data("iris")
apply(X = trees, MARGIN = 2,FUN = mean)
apply(X = trees, MARGIN = 1,FUN = mean)
apply(X = iris[,-5], MARGIN = 2,FUN = mean)
?quantile
apply(X = iris[,-5], MARGIN = 2,FUN = quantile)
apply(X = iris[,-5], MARGIN = 2,FUN = quantile,probs=c(0.1,0.5,0.9))
```

## Dokumentation av funktioner - ROxygen

När vi arbetar med att utveckla funktioner finns det ofta ett behov av att dokumentera de funktioner vi skapar. Vi dokumenterar inte bara funktioner för andras skull utan också för vår egen skull. Det kan många gånger vara nog så svårt att komma ihåg hur vi tänkte för fyra månader sen om vi tittar tillbaka på en funktion vi skrev då.

Det är viktigt att vi dokumenterar en funktion tillsammans med funktionen. Annars är risken stor att vi kanske ändrar en funktion och glömmer sedan bort att ändra i dokumentationen när vi ändrar i vår funktion.

Det standardsätt att dokumentera funktioner i R kallas R-documentation och utgör den dokumentation som vi får upp med help() eller ? för enskilda funktioner. Dessa dokument är skrivna i LATEX (se här) och är separata dokument som är kopplade till funktioner i R-paket. Vi kan således bara använda detta för funktioner i paket.

Vill vi dokumentera våra funktioner utan att skapa egna paket använder vi ROxygen. Det är ett format för att dokumentera funktioner direkt i R. Har vi väl dokumenterat våra funktioner med Roxygen kan vi generera R documentation-filer automatiskt om vi väljer att lägga in funktionen i ett paket.

Ett exempel på hur roxygen-dokumentation framgår nedan:

```
#' @description
#' En funktion som kvadrerar argumenten i x och y och summerar dem.
#'
#' @param x
#' Den numeriska variabel x som ska kvadreras
#' @param y
#' Den numeriska variabel y som ska kvadreras
#'
#' Funktionen returnerar en numerisk vektor
#'
f <- function(x, y) x^2 + y^2</pre>
```

Observera att roxygen-dokumentation inleds med #'.

I dokumentationen ovan dokumenteras funktionens argument, vad funktionen gör och vad funktionen returnerar för värde.

Följande delar i dokumentationen är vanliga att använda.

roxygendel	Innehåll
0title	Anger titel för dokumentet
@description	En beskrivning vad funktionen gör
@details	Detaljer om funktionen, ex. speciella argument
@param	Argument till funktionen
@return	Vad funktionen returnerar
@references	Eventuella referenser av intresse
@seealso	Andra funktioner som kan vara aktuella
@examples	Exempel på hur funktionen kan användas

För ett exempel på dokumentation i Roxygen och hur det ser ut i R $\ddot{a}$ r funktionen interactive\_pxweb() i paketet pxweb.

Funktionen med tillhörande dokumentation finns [här]. Nedan finns kod för att studera hur dokumentationen ser ut i ett R-paket.

```
install.packages("pxweb") # Om paketet inte installerats tidigare
library(pxweb)
?interactive_pxweb
```

## Kodstil

Kolla på de olika stilguiderna:

- Hadley Wickhams
- Googles

Notera att dessa två stilguider kan ge något olika svar på samma fråga.

Svara nu på frågorna nedan:

- 1. Är dayone ett bra variabelnamn?
- 2. Hur ska jag skriva "x+y" eller "x + y"?
- 3. Ska jag välja alt. 1 eller alt. 2?

```
# alt. 1
if (y == 0) {
    log(x)
} else {
    y ^ x
}

# alt. 2
if (y == 0) {
    log(x)
}
else
{
    y ^ x
}
```

- 4. Hur många tecken ska en rad med kod maximalt vara?
- 5. Hur bör jag kommentera min kod?
- 6. Vilken operator ska jag använda vid vanlig tilldelning? (Dvs. jag vill jag variabeln  ${\tt x}$  ska ha värdet 5.)
- 7. Hur ser ett bra filnamn ut?
- 8. Att diskutera: Varför är det viktigt att ha en bra kodstil?

## Part II Inlämningsuppgifter

#### Inlämning

Utgå från laborationsmallen, som går att ladda ned här, när du gör inlämningsuppgifterna. Spara denna som labb[no]\_[liuID].R , t.ex. labb1\_josad732.R om det är laboration 1. Ta inte med hakparenteser i filnamnet. Denna fil ska laddas upp på LISAM och ska **inte** innehålla något annat än de aktuella funktionerna, namn- och ID-variabler och ev. kommentarer. Alltså **inga** andra variabler, funktionsanrop för att testa inlämningsuppgifterna eller anrop till markmyassignment-funktioner.

#### Tips!

Inlämningsuppgifterna innebär att konstruera funktioner. Ofta är det bra att bryta ned programmeringsuppgifter i färre små steg och testa att det fungerar i varje steg.

- 1. Lös uppgiften med vanlig kod direkt i R-Studio (precis som i datorlaborationen ovan) utan att skapa en funktion.
- 2. Testa att du får samma resultat som testexemplen.
- 3. Implementera koden du skrivit i 1. ovan som en funktion.
- 4. Testa att du får samma resultat som i testexemplen, nu med funktionen.

#### Automatisk återkoppling med markmyassignment

Som ett komplement för att snabbt kunna få återkoppling på de olika arbetsuppgifterna finns paketet markmyassignment. Med detta är det möjligt att direkt få återkoppling på uppgifterna i laborationen, oavsett dator. Dock krävs internetanslutning.

Information om hur du installerar och använder markmyassignment för att få direkt återkoppling på dina laborationer finns att tillgå här.

Samma information finns också i R och går att läsa genom att först installera markmyassignment.

```
install.packages("markmyassignment")
```

Om du ska installera ett paket i PC-pularna så behöver du ange följande:

```
install.packages("markmyassignment",lib="sökväg till en mapp i din hemkatalog")
```

Tänk på att i sökvägar till mappar/filer i R i Windowssystem så används ``\\'', tex ``C:\\Users\\Josef''.

Därefter går det att läsa information om hur du använder markmyassignment med följande kommando
i R:

```
vignette("markmyassignment")
```

Det går även att komma åt vignetten **här**. Till sist går det att komma åt hjälpfilerna och dokumentationen i markmyassignment på följande sätt:

```
help(package="markmyassignment")
```

Lycka till!

## Inlämningsuppgifter

För att använda markmyassignment i denna laboration ange:

```
library(markmyassignment)
Loading required package: methods
Loading required package: yaml
Loading required package: testthat
Loading required package: httr
Loading required package: checkmate
lab path <-
"https://raw.githubusercontent.com/STIMALiU/KursRprgm/master/Labs/Tests/d4.yml"
suppressWarnings(set_assignment(lab_path))
Assignment set:
D4: Statistisk programmering med R: Lab 4
The assignment contain the following (5) tasks:
- hilbert_matrix
- toeplitz_matrix
- E_discrete
- V_discrete
- moment_func
```

### 6.1 hilbert\_matrix()

Vi ska nu skapa en funktion för att skapa godtyckligt stora Hilbertmatriser. Varje element i en Hilbertmatris är definierat som

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \tag{6.1}$$

För mer information om Hilbertmatriser finns här. Skapa en funktion hilbert\_matrix() med argumenten nrow och ncol. Funktionen ska returnera en Hilbertmatris enligt ovan. I denna uppgift är det praktiskt att använda en nästlad for-loop. Exempel på implementering:

- 1. Skapa en matris H av rätt storlek
- 2. Skapa en nästlad for-loop, där en loop går över rader och en över kolumner i H.
- 3. Beräkna 6.1 för varje element i H med hjälp av loop-index för de två looparna.
- 4. Returnera H

I denna uppgift är det inte tillåtet att använda sig av inbyggda funktioner eller R-paket som direkt beräknar Hilbertmatriser, utan ni måste skapa funktionen själva enligt instruktionerna ovan. Exempel

på otillåtna funktioner är: Hilbert() i Matrix och pbdDMAT, hilbert.matrix() i matrixcalc, hilb() i pracma.

Nedan finns exempel på hur funktionen ska fungera.

```
hilbert_matrix(5, 2)
        [,1]
              [,2]
[1,] 1.00000 0.50000
[2,] 0.50000 0.33333
[3,] 0.33333 0.25000
[4,] 0.25000 0.20000
[5,] 0.20000 0.16667
A<-hilbert_matrix(nrow = 4, ncol = 4)
        [,1]
              [,2]
                      [,3]
                                [, 4]
[1,] 1.00000 0.50000 0.33333 0.25000
[2,] 0.50000 0.33333 0.25000 0.20000
[3,] 0.33333 0.25000 0.20000 0.16667
[4,] 0.25000 0.20000 0.16667 0.14286
hilbert_matrix(3, 3)
        [,1]
              [,2]
[1,] 1.00000 0.50000 0.33333
[2,] 0.50000 0.33333 0.25000
[3,] 0.33333 0.25000 0.20000
hilbert_matrix(2, 3)
     [,1]
            [,2]
                     [,3]
[1,] 1.0 0.50000 0.33333
[2,] 0.5 0.33333 0.25000
```

### 6.2 toeplitz\_matrix()

Ännu en specialmatris som finns är den så kallade Toeplizmatrisen. Den kallas också ibland för diagonalkonstant matris. Samtliga diagonaler har samma värde. Mer information om Toeplitzmatriser finns här.

Nedan är två exempel på Toeplitzmatriser.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 9 & 0 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi ska nu skapa en funktion som skapar en Toeplitzmatris av godtycklig storlek. Det går att beskriva en Toeplitzmatris med en vektor, låt oss kalla den x. x måste vara av udda längd och ger upphov till en kvadratisk matris av storlek  $n \times n$ , där n ges av  $n = \frac{length(x)+1}{2}$ . För att helt specificera vår Toeplitzmatris

behöver vi ange vilka element i x som hör till vilken diagonal i vår Toeplitzmatris. Låt oss beteckna alla diagonaler så här:

$$\begin{pmatrix} D_0 & D_{+1} & D_{+2} & \cdots & \cdots & D_{+(n-1)} \\ D_{-1} & D_0 & D_{+1} & D_{+2} & & & \vdots \\ D_{-2} & D_{-1} & D_0 & D_{+1} & D_{+2} & & & \vdots \\ \vdots & D_{-2} & D_{-1} & D_0 & D_{-1} & \ddots & \vdots & & & \\ & & D_{-2} & D_{-1} & \ddots & \ddots & D_{+2} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & D_0 & D_{+1} \\ D_{-(n-1)} & \cdots & \cdots & D_{-2} & D_{-1} & D_0 \end{pmatrix}$$

Här betecknar  $D_0$  huvuddiagonalen. Indexet +1 betyder att den diagonalen ligger närmast över huvuddiagonalen, +2 betyder diagonalen som är två steg över huvuddiagonalen osv. Till sist kommer  $D_{+(n-1)}$  som är diagonalen som ligger (n-1) steg ovanför huvuddiagonalen, där n är matrisens storlek. På samma sätt betyder indexet -1 diagonalen som ligger närmast under huvuddiagonalen osv. Vi antar att x kommer på formen  $x = \begin{pmatrix} D_0 & D_{+1} & D_{+2} & D_{+3} & \cdots & D_{+(n-1)} & D_{-1} & D_{-2} & D_{-3} & \cdots & D_{-(n-1)} \end{pmatrix}$ . Till exempel  $x = \begin{pmatrix} D_0 & D_{+1} & D_{+2} & D_{-1} & D_{-2} \end{pmatrix}$  ger upphov till matrisen:

$$\begin{pmatrix}
D_0 & D_{+1} & D_{+2} \\
D_{-1} & D_0 & D_{+1} \\
D_{-2} & D_{-1} & D_0
\end{pmatrix}$$

Ett annat exempel är  $x = \begin{pmatrix} D_0 & D_{+1} & D_{+2} & D_{+3} & D_{-1} & D_{-2} & D_{-3} \end{pmatrix}$  som ger matrisen:

$$\begin{pmatrix}
D_0 & D_{+1} & D_{+2} & D_{+3} \\
D_{-1} & D_0 & D_{+1} & D_{+2} \\
D_{-2} & D_{-1} & D_0 & D_{+1} \\
D_{-3} & D_{-2} & D_{-1} & D_0
\end{pmatrix}$$

Nu ska ni skapa en funktion som ska ta en godtycklig vektor x och returnera en Toeplitzmatris baserat på denna vektor. Funktionen ska först kontrollera att vektorn är av en udda längd och annars ska funktionen stoppas och stoptexten "x not of odd length" ska skrivas ut. Det går att lösa denna uppgift på ett flertal olika sätt. Ett förslag på implementering kommer här: (men ni får gärna göra på andra sätt!)

- 1. Kolla först om  ${\tt x}$  är av udda längd, stoppa annars funktionen.
- 2. Skapa en tom matris med rätt storlek, låt oss kalla den res\_mat.
- 3. Ändra ordningen på elementen i x, om  $x=\begin{pmatrix} D_0 & D_{+1} & D_{+2} & D_{-1} & D_{-2} \end{pmatrix}$  ändra så att  $x=\begin{pmatrix} D_{-2} & D_{-1} & D_0 & D_{+1} & D_{+2} \end{pmatrix}$ . Nu ligger alltså  $D_0$  i mitten av vektorn och diagonalerna är ordnade så att de kommer i stigande ordning sett från mitten. **Tips:** rev()
- 4. Skapa en nästlad for-loop som loopar över rader och kolumner i res\_mat. Vi vet nu att vilket värde en diagonal ska ha beror på hur många steg den är från huvuddiagonalen (uppåt eller nedåt). Använd loop-index från de båda looparna för att räkna ut hur många steg som det aktuella element är från huvuddiagonalen och välj sedan ut rätt värde från x och spara på rätt position i res\_mat.
- 5. Returnera res\_mat.

I denna uppgift är det inte tillåtet att använda sig av inbyggda funktioner eller R-paket som direkt beräknar Toeplizmatriser, utan ni måste skapa funktionen själva enligt instruktionerna ovan. Exempel på otillåtna funktioner är: toeplitz() i stats, toeplitz.spam() i spam, toeplitz() i ts, Toeplitz() i pracma

Nedan finns exempel på hur funktionen ska fungera.

```
toeplitz_matrix(x="Ett element")

[,1]
[1,] "Ett element"
```

```
toeplitz_matrix(x=1:5)
    [,1] [,2] [,3]
[1,] 1 2 3
      4
[2,]
          1
[3,] 5 4
toeplitz_matrix(x=c(1,4,5,2,3))
    [,1] [,2] [,3]
[1,] 1 4 5
[2,] 2 1
[3,] 3 2 1
toeplitz_matrix(c("a","b", "c", "d", "e", "f", "g"))
    [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] "a" "b" "c" "d"
[2,] "e" "a" "b" "c"
[3,] "f" "e" "a" "b"
[4,] "g" "f" "e" "a"
toeplitz_matrix(1:4)
Error in toeplitz_matrix(1:4): x not of odd length.
a<-toeplitz_matrix(c(1,0,0,0,0))</pre>
а
    [,1] [,2] [,3]
[1,] 1 0 0
[2,] 0 1 0
[3,] 0 0
toeplitz_matrix(c(1,0,2,0,3,0,4,0,5))
    [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] 1 0 2 0 3
[2,] 0 1 0 2 0
[3,] 4 0 1 0 2
    0 4 0 1 0
[4,]
    5 0
             4
                 0
                     1
[5,]
toeplitz_matrix(x = c("D0","D+1","D+2","D+3","D-1","D-2","D-3"))
    [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] "D0" "D+1" "D+2" "D+3"
[2,] "D-1" "D0" "D+1" "D+2"
[3,] "D-2" "D-1" "D0" "D+1"
[4,] "D-3" "D-2" "D-1" "D0"
```

#### 6.3 Väntevärde och varians i en dimension

I denna uppgift ska du skapa funktioner som kan beräkna teoretiskt väntevärde och varians för en slumpvariabel i en dimension. Totalt ska du skapa tre funktioner E\_discrete(), V\_discrete() och moment, func()

Det teoretiska väntevärdet för diskret slumpvariabeln definieras som:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1} x_i \cdot p(x_i)$$
(6.2)

Här är  $x_1$  till  $x_N$  alla möjliga utfall av slumpvariabeln X, och p(x) är sannolikhetsfördelningen för alla möjliga utfall. Väntevärdet för en linjärkombination  $a \cdot X + b$  av en diskret slumpvariabel ges av:

$$\mu_{linj} = E\left(a \cdot X + b\right) = b + \sum_{i=1} a \cdot x_i \cdot p\left(x_i\right) \tag{6.3}$$

Nu ska du skapa en funktionen som kan beräkna väntevärde enligt (6.2) och (6.3). Funktionen ska heta E\_discrete(density\_matrix=matrix(c(1,1),ncol = 2),trans=c(1,0)). Notera argumentnamn och defaultvärden.

Argumenten är:

- density\_matrix= En numerisk matris med två kolumner, den första representerar de olika utfallen på slumpvariabeln X och den andra är sannolikheterna för de olika utfallen p(x). Den andra kolumnen ska summera till 1.
- trans= är en numerisk vektor av längd två, där första elementet är a och andra elementet är b i (6.3).

Funktionen ska kontrollera att villkoren är uppfyllda, om inte så ska den avbryta och ge felmeddelanden enligt exemplen nedan:

```
y<-1:3
py<-c(0.2,0.7,0.1)
y_mat<-cbind(y,py)
E_discrete(density_matrix = matrix("hej"))

Error in E_discrete(density_matrix = matrix("hej")): density_matrix is not numeric!

E_discrete(trans = matrix("hej"))

Error in E_discrete(trans = matrix("hej")): trans is not numeric!

E_discrete(density_matrix = cbind(y,c(0.4,0.6,0.8)))

Error in E_discrete(density_matrix = cbind(y, c(0.4, 0.6, 0.8))): probabilities do not sum to 1!

E_discrete(trans = c(1,2,3))

Error in E_discrete(trans = c(1,2,3)): trans has not length 2!</pre>
```

Testa nu följande fungerande fall:

```
x<-1:10
px<-rep(1/10,10)
x_mat<-cbind(x,px)

E_discrete()
[1] 1

E_discrete(trans = c(2,0))
[1] 2

E_discrete(trans = c(2,5))
[1] 7

E_discrete(density_matrix = x_mat)</pre>
```

```
[1] 5.5
E_discrete(density_matrix = y_mat)
[1] 1.9
E_discrete(density_matrix = y_mat,trans = c(4,0))
[1] 7.6
E_discrete(density_matrix = y_mat,trans = c(1,5))
[1] 6.9
E_discrete(density_matrix = y_mat,trans = c(0,5))
[1] 5
```

Det teoretiska variansen för diskret slumpvariabel definieras som:

$$\sigma^{2} = Var(X) = \sum_{i=1}^{N} (x_{i} - \mu)^{2} \cdot p(x_{i})$$
(6.4)

Här är  $x_1$  till  $x_N$  alla möjliga utfall av slumpvariabeln X, och p(x) är sannolikhetsfördelningen för alla möjliga utfall. Variansen kan även beräknas som:

$$Var(X) = E(X^{2}) - E(X)^{2}$$

$$(6.5)$$

Variansen för en linjärkombination  $a \cdot X + b$  av en diskret slumpvariabel ges av:

$$\sigma_{linj}^{2} = Var\left(a \cdot X + b\right) = a^{2} \cdot Var\left(X\right) \tag{6.6}$$

Nu ska du skapa en funktionen som kan beräkna varians enligt (6.4) eller (6.5) och (6.6). Funktionen ska heta V\_discrete(density\_matrix = matrix(c(1, 1), ncol = 2), trans = 1). Notera argumentnamn och defaultvärden.

Argumenten är:

- density\_matrix= En numerisk matris med två kolumner, den första representerar de olika utfallen på slumpvariabeln X och den andra är sannolikheterna för de olika utfallen p(x). Den andra kolumnen ska summera till 1.
- trans= är en numerisk vektor av längd ett, där det enda elementet är a i (6.6).

Funktionen ska kontrollera att villkoren är uppfyllda, om inte så ska den avbryta och ge felmeddelanden enligt exemplen nedan. **Tips**: använd funktionen **E\_discrete** när du beräknar variansen.

```
y<-1:3
py<-c(0.2,0.7,0.1)
y_mat<-cbind(y,py)
V_discrete(density_matrix = matrix("hej"))
Error in V_discrete(density_matrix = matrix("hej")): density_matrix is not numeric!
V_discrete(trans = matrix("hej"))
Error in V_discrete(trans = matrix("hej")): trans is not numeric!
V_discrete(density_matrix = cbind(y,c(0.4,0.6,0.8)))
Error in V_discrete(density_matrix = cbind(y, c(0.4, 0.6, 0.8))): probabilities do not sum to 1!
V_discrete(trans = c(1,2,3))
Error in V_discrete(trans = c(1, 2, 3)): trans has not length 1!
V_discrete(trans = c(7,2))
Error in V_discrete(trans = c(7,2)): trans has not length 1!</pre>
```

Testa nu följande fungerande fall:

```
x<-1:10
px<-rep(1/10,10)
x_mat<-cbind(x,px)</pre>
V discrete()
[1] 0
V discrete(trans = c(2))
[1] 0
V_discrete(trans = c(2))
[1] 0
V_discrete(density_matrix = x_mat)
[1] 8.25
V_discrete(density_matrix = y_mat)
[1] 0.29
V_discrete(density_matrix = y_mat,trans = c(4))
[1] 4.64
V_discrete(density_matrix = y_mat,trans = c(1))
[1] 0.29
V_discrete(density_matrix = y_mat,trans = c(0))
[1] 0
```

Nu ska du skapa en funktion som ska heta moment\_func(densities,moment=NULL). Funktionen syfte är att ta kunna ta flera diskreta sannolikhetsfördelningar, med eventuella linjärkombinationsparametrar och beräkna olika moment (väntevärde och varians). Argument:

- densities= Är en lista. Varje element ska i sin tur vara en lista med elementen density\_matrix och trans, som motsvarar argumenten för funktionerna E\_discrete och V\_discrete.
- moment= Är en av följande funktioner: E\_discrete och V\_discrete.

Se nedan för exempel på kraven på argumenten:

```
# skapa data:
x<-1:10
px<-rep(1/10,10)
x_mat<-cbind(x,px)
y<-1:3
py<-c(0.2,0.7,0.1)
y_mat<-cbind(y,py)
# skapa listor
first_list<-list(density_matrix=x_mat,trans=c(2,3))
second_list<-list(density_matrix=y_mat,tran=c(5,1))
final_list1<-list(first_list,second_list)
# anropa funktionen:
moment_func(densities = final_list1,moment = E_discrete)</pre>
```

Det första som funktionen ska göra är att kontrollera argumenten. Kontrollera först att densities är en lista, stoppa annars funktionen med meddelandet "densities is not a list!". Kontrollera sedan att moment är en funktion, stoppa annars funktionen med meddelandet "no function supplied!". Tips: is.function(). Funktionen ska nu gå igen alla element i densities och givet elementen density\_matrix och trans anropa funktionen moment. Resultatet ska sparas i en lista, med elementnamn på formen density1, density2, ... . Se även exemplen nedan. Listan ska sedan returneras. Förslag på lösning:

- 1. Kontrollera argumenten.
- 2. Sätt upp en tom lista för resultaten. **Tips:** vector() kan användas för att skapa tomma listor av önskad längd, testa t.ex. vector("list",15)
- 3. Gå igenom alla element i densities och anropa moment genom att använda do.call().
- 4. Returnera restualtet.

Testa nu din funktion och se om den fungerar enligt exemplen nedan:

```
x<-1:10
px < -rep(1/10, 10)
x_mat<-cbind(x,px)</pre>
y<-1:3
py < -c(0.2, 0.7, 0.1)
y_mat<-cbind(y,py)</pre>
z < -seq(1, by = 3, length=5)
pz < -c(0.1,0.2,0.3,0.2,0.2)
z_mat<-cbind(z,pz)</pre>
test1<-list(density_matrix=x_mat)</pre>
test2<-list(density_matrix=y_mat)</pre>
test3<-list(density_matrix=z_mat)</pre>
test4<-list(density_matrix=x_mat,trans=c(4,2))</pre>
test5<-list(density_matrix=y_mat,trans=c(3,0))</pre>
test6<-list(density_matrix=y_mat,trans=c(2))
test7<-list(density_matrix=y_mat,trans=c(3))</pre>
test list1<-list(test1)</pre>
test list2<-list(test1,test2)</pre>
test list3<-list(test1,test2,test3)</pre>
test_list4<-list(test1,test4,test5)</pre>
test_list5<-list(test2,test6,test7)</pre>
moment_func(densities = TRUE, moment = E_discrete)
Error in moment_func(densities = TRUE, moment = E_discrete): densities is not a list!
moment_func(densities = test_list1,moment = 1:10)
Error in moment_func(densities = test_list1, moment = 1:10): no function supplied!
moment_func(densities = test_list1,moment = E_discrete)
$density1
[1] 5.5
moment func(densities = test list2, moment = V discrete)
$density1
[1] 8.25
$density2
[1] 0.29
```

```
moment_func(densities = test_list3,moment = E_discrete)
$density1
[1] 5.5
$density2
[1] 1.9
$density3
[1] 7.6
moment_func(densities = test_list4,moment = E_discrete)
$density1
[1] 5.5
$density2
[1] 24
$density3
[1] 5.7
moment_func(densities = test_list5,moment = V_discrete)
$density1
[1] 0.29
$density2
[1] 1.16
$density3
[1] 2.61
```

Grattis! Nu är du klar!