Άσκηση 1

- **Ψευδής**

  Έστω x τέτοιο ώστε M_x να είναι μια TM η οποία δεν τερματίζει για καμία είσοδο. Τότε έχουμε $\text{Dom}(\phi_x) = \emptyset$ το οποίο είναι αναδρομικό σύνολο (το αποφασίζει η μηχανή Turing που απορρίπτει κάθε είσοδο), δηλαδή $x \in R$. Όμως από τον ορισμό της M_x έχουμε $M_x(x) \uparrow$, δηλαδή $x \notin K$.

- **Ψευδής**

  Έστω x τέτοιο ώστε M_x να είναι μια TM η οποία τερματίζει και αποδέχεται κάθε είσοδο. Τότε έχουμε $\text{Dom}(\phi_x) = \mathbb{N}$ το οποίο είναι αναδρομικό σύνολο (το αποφασίζει η μηχανή Turing που αποδέχεται κάθε είσοδο), δηλαδή $x \in R$. Όμως από τον ορισμό της M_x έχουμε $M_x(x) \downarrow$, δηλαδή $x \in K$ συνεπώς $x \in R \cap K$.

- **Ψευδής**

  Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το εξής πρόβλημα:

  $$\text{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid M(w) \downarrow\}$$

  για το οποίο γνωρίζουμε ότι $\text{HALT} \in \text{ER}$ και $\text{HALT} \notin \text{REC}$ επομένως $\overline{\text{HALT}} \notin \text{ER}$ και θα κάνουμε την αναγωγή $\overline{\text{HALT}} \leq_{\text{m}} R$ από την οποία προκύπτει ότι $R \notin \text{ER}$. Συνεπώς και $R \cup K \notin \text{ER}$.

  Λήμμα 1. *$\overline{HALT} \leq_m R$.*

  Απόδειξη. Θα πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία να είναι υπολογίσιμη και για την οποία να ισχύει: $\langle M, w\rangle \in \overline{\text{HALT}} \Leftrightarrow f(\langle M, w\rangle) \in R$.

  Αυτή η f θα είναι η συνάρτηση που υπολογίζει η παρακάτω μηχανή Turing:

  - $F =$" Για είσοδο $\langle M, w\rangle$:
    1. Δημιούργησε την περιγραφή και βρες τον αριθμό Gödel g της μηχανής Turing T:
       $T =$ 'Για είσοδο $\langle T_1, x\rangle$:
       (α΄) Προσομοίωσε παράλληλα την M με είσοδο w και την T_1 με είσοδο x.
       (β΄) Αν τερματίσουν και οι δύο, τότε επέστρεψε το $T_1(x)$.'
    2. Γράψε g στην ταινία εξόδου."

  Έστω ότι $\langle M, w\rangle \in \overline{\text{HALT}}$, δηλαδή $M(w) \uparrow$, τότε η μηχανή T δεν τερματίζει για καμία είσοδο άρα $f(\langle M, w\rangle) = g$ όπου g τέτοιο ώστε $\text{Dom}(\phi_g) = \emptyset \in \text{REC}$, συνεπώς $g \in R$.

  Αντίστροφα, αν $\langle M, w\rangle \in \text{HALT}$ τότε η συνάρτηση f επιστρέφει ένα g για το οποίο $\text{Dom}(\phi_g) = \text{HALT} \notin \text{REC}$, άρα $g \in \overline{R}$. □