Άσκηση 1

- **Ψευδής**

  Έστω x τέτοιο ώστε M_x να είναι μια TM η οποία δεν τερματίζει για καμία είσοδο. Τότε έχουμε $\mathrm{Dom}(\phi_x) = \emptyset$ το οποίο είναι αναδρομικό σύνολο (το αποφασίζει η μηχανή Turing που απορρίπτει κάθε είσοδο), δηλαδή $x \in R$. Όμως από τον ορισμό της M_x έχουμε $M_x(x) \uparrow$, δηλαδή $x \notin K$.

- **Ψευδής**

  Έστω x τέτοιο ώστε M_x να είναι μια TM η οποία τερματίζει και αποδέχεται κάθε είσοδο. Τότε έχουμε $\mathrm{Dom}(\phi_x) = \mathbb{N}$ το οποίο είναι αναδρομικό σύνολο (το αποφασίζει η μηχανή Turing που αποδέχεται κάθε είσοδο), δηλαδή $x \in R$. Όμως από τον ορισμό της M_x έχουμε $M_x(x) \downarrow$, δηλαδή $x \in K$ συνεπώς $x \in R \cap K$.

- **Ψευδής**

  Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το εξής πρόβλημα:

  $$\mathrm{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid M(w) \downarrow\}$$

  για το οποίο γνωρίζουμε ότι HALT $\in$ ER και HALT $\notin$ REC επομένως $\overline{\mathrm{HALT}} \notin$ ER και θα κάνουμε την αναγωγή $\overline{\mathrm{HALT}} \leq_{\mathrm{m}} R$ από την οποία προκύπτει ότι $R \notin$ ER. Συνεπώς και $R \cup K \notin$ ER.

  Λήμμα 1. *$\overline{HALT} \leq_m R$.*

  Απόδειξη. Θα πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία να είναι υπολογίσιμη και για την οποία να ισχύει: $\langle M, w\rangle \in \overline{\mathrm{HALT}} \Leftrightarrow f(\langle M, w\rangle) \in R$.

  Αυτή η f θα είναι η συνάρτηση που υπολογίζει η παρακάτω μηχανή Turing:

  – $F =$“ Για είσοδο $\langle M, w\rangle$:
    1. Δημιούργησε την περιγραφή και βρες τον αριθμό Gödel g της μηχανής Turing T:
       $T =$ ‘Για είσοδο $\langle T_1, x\rangle$:
       (α΄) Προσομοίωσε παράλληλα την M με είσοδο w και την T_1 με είσοδο x.
       (β΄) Αν τερματίσουν και οι δύο, τότε επέστρεψε το $T_1(x)$.’
    2. Γράψε g στην ταινία εξόδου.”

  Έστω ότι $\langle M, w\rangle \in \overline{\mathrm{HALT}}$, δηλαδή $M(w) \uparrow$, τότε η μηχανή T δεν τερματίζει για καμία είσοδο άρα $f(\langle M, w\rangle) = g$ όπου g τέτοιο ώστε $\mathrm{Dom}(\phi_g) = \emptyset \in$ REC, συνεπώς $g \in R$.

  Αντίστροφα, αν $\langle M, w\rangle \in$ HALT τότε η συνάρτηση f επιστρέφει ένα g για το οποίο $\mathrm{Dom}(\phi_g) =$ HALT $\notin$ REC, άρα $g \in \overline{R}$. □

Άσκηση 2

Λήμμα 2. *Το πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ GOLDBACH είναι αναγνωρίσιμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη μηχανή Turing με την εξής λειτουργία: Αν n είναι η είσοδος της μηχανής, δοκιμάζει με τη σειρά τους ακεραίους $k \geq n$. Για κάθε τέτοιο αριθμό, δοκιμάζει όλα τα ζευγάρια ακεραίων $p, q \leq 2k$, τα οποία προφανώς είναι πεπερασμένα για σταθερό k, και ελέγχει αν τα p και q

είναι πρώτοι (δοκιμάζοντας όλους τους πιθανούς διαιρέτες) και αν $2k = p + q$. Αν για κάποιο k δεν βρεθούν p και q που να ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, τότε η μηχανή Turing απαντάει ΝΑΙ στο πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ GOLDBACH. Πραγματικά, αν υπάρχει ακέραιος $k \geq n$ που να διαψεύδει την εικασία του Goldbach, τότε δεν θα υπάρχει ζευγάρι πρώτων $p, q \leq 2k$ έτσι ώστε $2k = p + q$. Η μηχανή Turing θα φτάσει σε αυτό το k σε πεπερασμένο χρόνο, άρα σε πεπερασμένο χρόνο θα απαντήσει ΝΑΙ. Συνεπώς το πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ GOLDBACH είναι αναγνωρίσιμο. □

Λήμμα 3. *Αν το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH είναι αναγνωρίσιμο, τότε θα είναι και διαγνώσιμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη μηχανή Turing M_1, η οποία αναγνωρίζει το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH, και τη μηχανη M_2, η οποία αναγνωρίζει το πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ GOLDBACH. Τώρα, έστω μηχανή M η οποία εξομοιώνει τις μηχανές M_1 και M_2 για ένα βήμα την καθεμιά εναλλάξ. Αν κάποια στιγμή αποδεχθεί η M_1, τότε η M τερματίζει και δίνει απάντηση ΝΑΙ για το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH. Αν, από την άλλη, κάποια στιγμή αποδεχθεί η M_2, τότε η M τερματίζει και δίνει απάντηση ΟΧΙ για το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH. Επειδή κάποιο από τα δύο παραπάνω σενάρια θα συμβεί σε πεπερασμένο χρόνο, η μηχανή M τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο και αποφασίζει το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH. Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα αυτό είναι διαγνώσιμο. □

Άσκηση 3

Όπως έχουμε δεί και στο μάθημα, αν μια μηχανή Turing είναι περιορισμένη στις πρώτες n θέσεις τότε υπάρχουν $t(n) = |Q| \cdot n \cdot |\Sigma|^n$ πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται κάθε στιγμή. Αν βρεθεί σε κάποια από αυτές τις καταστάσεις για δεύτερη φορά τότε θα πέσει σε άπειρο βρόχο.

Επομένως για μια μή περιορισμένη ΤΜ, ο μόνος τρόπος να φτάσει στη θέση $n + 1$ είναι να το κάνει σε λιγότερο από t βήματα.

Φτιάχνουμε λοιπόν μια μηχανή Turing Τ η οποία για είσοδο $\langle M, w, n_1, n_2 \rangle$ προσομοιώνει την M με είσοδο w για $t(\min(n_1, n_2) - 1)$ βήματα και αν η M φτάσει στη θέση $\min(n_1, n_2)$ αποδέχεται διαφορετικά απορρίπτει.

Η Τ αποφασίζει το πρόβλημα ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΜΝΗΝΗ αφού πάντα τερματίζει και αποδέχεται ανν η M επισκεφτεί την θέση $\min(n_1, n_2)$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το να επισκεφτεί κάποια εκ των θέσεων n_1, n_2 αφού για να πάει μια μηχανή Turing από μία θέση σε μία άλλη θα πρέπει να περάσει από όλες τις ενδιάμεσες.

Άσκηση 4

Έστω οποιαδήποτε μηχανή Turing M_1 και είσοδος x. Θα δείξουμε ότι αν η γλώσσα L ήταν αναδρομική, τότε θα μπορούσαμε να ξέρουμε σε πεπερασμένο χρόνο αν η M_1 με είσοδο x τερματίζει ή όχι. Έστω M μηχανή Turing που αποφασίζει τη γλώσσα L. Θα κατασκευάσουμε μία μηχανή M_2, η οποία θα είναι ίδια με την M_1, με τη διαφορά ότι για κάθε μετάβαση από μία κατάσταση q σε μία τελική κατάσταση q' με τον κανόνα $(q', \gamma_1', m) = \delta_1(q, \gamma)$, για κάποιο σύμβολο γ, θα αλλάξουμε τη συνάρτηση μετάβασης σε $(q', \gamma_2', m) = \delta_2(q, \gamma)$, όπου $\gamma_1' \neq \gamma_2'$. Δηλαδή απλώς θα αλλάξουμε το σύμβολο που γράφεται στην ταινία πριν από μια τελική κατάσταση.

Λήμμα 4. *Η M_1 δεν τερματίζει με είσοδο x αν και μόνο αν οι M_1 και M_2 κατά τη λειτουργία τους με είσοδο x γράφουν μετά από τον ίδιο αριθμό βημάτων το ίδιο σύμβολο στην ταινία τους.*

Απόδειξη. Αν η $_1$ δεν τερματίσει, τότε δεν θα βρεθεί ποτέ σε τελική κατάσταση, άρα οι $_1$ και $_2$ θα έχουν πανομοιότυπη λειτουργία. Από την άλλη, αν τερματίσει, αυτό σημαίνει ότι το τελευταίο σύμβολο που θα γράψει η $_1$ θα είναι διαφορετικό από το σύμβολο που θα γράψει η $_2$ μετά από τον ίδιο αριθμό βημάτων. $\square$

Άσκηση 6

Προφανώς η γλώσσα των παλινδρόμων είναι αναδρομική, αφού μπορούμε σε πεπερασμένο χρόνο να αναποδογυρίσουμε μία συμβολοσειρά και να ελέγξουμε αν είναι ίση με την αρχική. Έστω M_1 η μηχανή Turing που αποφασίζει αυτή την γλώσσα. Έστω τώρα μία αναγνωρίσιμη γλώσσα L και M_2 μηχανή Turing που την αναγνωρίζει. Θεωρούμε μία μηχανή Turing και είσοδο x, η οποία πρώτα εξομοιώνει την M_1 με είσοδο x. Αν η M_1 δεν αποδεχθεί την , τότε η M τρέχει για πάντα. Αλλιώς, η M εξομοιώνει την M_2 με είσοδο και αν αυτή αποδεχθεί, αποδέχεται και η M. Αλλιώς, τρέχει για πάντα. Προφανώς, για να αποδεχθεί η M πρέπει η x να είναι και παλίνδρομο, αλλά και να ανήκει στη γλώσσα L. Αντίστροφα, αν η x είναι παλίνδρομο και ανήκει στην L τότε θα την αποδεχθούν και η M_1 και η M_2. Συνεπώς το σύνολο των παλινδρόμων της L είναι αναγνωρίσιμο.

Άσκηση 8

(Θεωρούμε ότι ο τελεστής $\lfloor \cdot \rfloor$ είναι ο αντίστροφος του $\langle \cdot \rangle$.)

Ορισμός 5. Ορίζουμε ως *άχρηστες* καταστάσεις μιας μηχανής Turing, αυτές προς τις οποίες δεν υπάρχει καμία μετάβαση στον πίνακα μεταβάσεων από άλλες καταστάσεις, και ούτε είναι αρχικές καταστάσεις. Επίσης ορίζουμε $u(\langle M \rangle)$ το πλήθος των άχρηστων καταστάσεων της μηχανής Turing M. Η συνάρτηση u είναι υπολογίσιμη, αφού μια μηχανή Turing M' μπορεί να πάρει την κωδικοποίηση της M και να μετρήσει πόσες καταστάσεις δεν εμφανίζονται στον πίνακα μεταβάσεων και ούτε είναι αρχικές.

Έστω τώρα μηχανή Turing $\widetilde{M}^x$ και είσοδος y σε αυτήν, όπου x και y κωδικοποιήσεις μηχανών Turing. Θα περιγράψουμε τη λειτουργία της. Αρχικά, η $\widetilde{M}^x$ υπολογίζει το πλήθος των άχρηστων καταστάσεων $u(y)$ της μηχανής $\lfloor y \rfloor$. Στη συνέχεια, εξομοιώνει τη μηχανή $\lfloor x \rfloor$ με είσοδο $u(y)$. Αν η τελευταία τερματίσει, τότε και η $\widetilde{M}^x$ τερματίζει και αποδέχεται. Θεωρούμε ότι η $\widetilde{M}^x$ δεν έχει άχρηστες καταστάσεις.

Τώρα, ορίζουμε για κάθε φυσικό i, τη μηχανή Turing $\widetilde{M}_i^x$, η οποία είναι η $\widetilde{M}^x$ με επιπλέον i άχρηστες καταστάσεις. Προφανώς, αυτή μπορεί να κατασκευαστεί σε πεπερασμένο χρόνο.

Λήμμα 6. *Έστω μηχανή Turing M που αναγνωρίζει κάποιο αναδρομικά απαριθμήσιμο πρόβλημα και είσοδος x σε αυτήν. Η $M(x)$ έχει το ίδιο αποτέλεσμα (αποδοχή ή μη τερματισμός) με την $\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle}(\langle \widetilde{M}_x^{\langle M \rangle} \rangle)$.*

Απόδειξη. Εκ κατασκευής, έχουμε ότι $u(\langle \widetilde{M}_x^{\langle M \rangle} \rangle) = x$. Άρα το αποτέλεσμα της $\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle}(\langle \widetilde{M}_x^{\langle M \rangle} \rangle)$ είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα της $M(u(\langle \widetilde{M}_x^{\langle M \rangle} \rangle))$, το οποίο είναι με τη σειρά του ίδιο με αυτό της $M(x)$. $\square$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει απεικονιστική αναγωγή από κάθε αναδρομικά απαριθμήσιμο πρόβλημα στο $K = \{\langle M \rangle | M(\langle M \rangle) \downarrow\}$.

Άσκηση 9

Έστω T_1, T_2 οι μηχανές που αναγνωρίζουν τις γλώσσες $\overline{A}, \overline{B}$ αντίστοιχα.
Δημιουργούμε την μηχανή T:

- $T =$" Για είσοδο x:
  1. Τρέξε παράλληλα την T_1 με είσοδο x και την T_2 με είσοδο x μέχρι κάποια εκ των δύο να τερματίσει.
  2. Αν τερμάτισε η T_1 τότε επέστρεψε $\overline{T_1(x)}$.
  3. Αν τερμάτισε η T_2 τότε επέστρεψε $T_2(x)$."

Θα δείξουμε ότι $C = L(T)$ είναι η γλώσσα που αναζητούμε.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η T πάντα τερματίζει αφού $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \Sigma^*$. Άρα για κάθε $x \in \Sigma^*$, έχουμε είτε $x \in \overline{A}$ είτε $x \in \overline{B}$ συνεπώς μία εκ των T_1, T_2 θα αποδεχτεί το x κι έτσι $C \in \text{REC}$.

- $A \subseteq C$:

  Έστω $x \in A$. Αφού $A \cap B = \emptyset$ θα έχουμε $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{B}$.

  Εκτελούμε τη μηχανή T με είσοδο το x. Επειδή $x \in \overline{B}$ ξέρουμε ότι η T_2 θα τερματίσει κάποια πεπερασμένη χρονική στιγμή και θα αποδεχτεί. Αν τερματίσει πριν την T_1 τότε θα εκτελεστεί η γραμμή 3 και έτσι και η T αποδέχεται. Διαφορετικά, αν η T_1 τερματίσει πρώτη θα πρέπει αναγκαστικά να απαντήσει reject, συνεπώς λόγω της γραμμής 2 η T θα αποδεχθεί.

  Σε κάθε περίπτωση η T αποδέχεται το x, συνεπώς $x \in C$.

- $B \subseteq \overline{C}$

  Έστω $x \in B$. Αντίστοιχα με προηγουμένως εκτελούμε την T με είσοδο x και επειδή $x \notin A$ η T_1 θα αποδεχτεί σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Αν η T_1 τερματίσει πρώτη τότε η T απορρίπτει ενώ αν η T_2 τερματίσει πρώτη αναγκαστικά θα απορρίψει και έτσι και η T θα απορρίψει.

  Σε κάθε περίπτωση $x \notin C$.

Άσκηση 10

Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που είναι αναδρομική γλώσσα. Θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε πλήρης αύξουσα συνάρτηση f με πεδίο τιμών το S είναι αναδρομική. Έστω ότι το S είναι πεπερασμένο και $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ με $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Τότε, θα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $c_1 < c_2 < ... < c_{n-1}$, έτσι ώστε $f(1) = f(2) = ... = f(c_1) = a_1$, $f(c_1+1) = f(c_1+2) = ... = f(c_2) = a_2$, ..., $f(c_{n-2}+1) = ... = f(c_{n-1}) = a_{n-1}$ και $f(x) = a_n$ για κάθε $x > c_{n-1}$. Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι προφανώς αναδρομική, αφού κάποια μηχανή Turing μπορεί απλώς να ελέγξει σε ποιο από τα διαστήματα $[c_i+1, c_{i+1}]$ βρίσκεται η είσοδος και να επιστρέψει την τιμή που αντιστοιχεί σε αυτό (Θεωρούμε $c_0 = 0$ και $c_n = \infty$). Έστω τώρα ότι το S είναι άπειρο και $S = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ με $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$. Τότε, θα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $c_1 < c_2 < ... < c_n < ...$, έτσι ώστε $f(1) = f(2) = ... = f(c_1) = a_1, f(c_1+1) = ... = f(c_2) = a_2, ..., f(c_{n-1}+1) = ... = f(c_n) = a_n = ...$. Άρα, και εδώ, για τον ίδιο λόγο με την προηγούμενη περίπτωση, η f είναι αναδρομική.

Αντίστροφα τώρα, έστω πλήρης αύξουσα και αναδρομική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού S υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι το S είναι αναδρομικό. Έστω είσοδος x. Αν το S είναι πεπερασμένο, τότε προφανώς είναι και αναδρομικό, αφού μια μηχανη Turing μπορεί να ελέγξει αν το x

είναι ένα από τα (πεπερασμένα σε πλήθος) στοιχεία του S ή όχι σε πεπερασμένο χρόνο. Αν τώρα το S είναι άπειρο, τότε θα υπάρχει t έτσι ώστε $f(t) \geq x$. Έστω το ελάχιστο τέτοιο t. Αυτό είναι πεπερασμένο, άρα μπορούμε να το υπολογίσουμε. Τώρα, αν $f(t) > x$ έχουμε ότι $x \notin S$, ενώ αν $f(t) = x$ έχουμε ότι $x \in S$. Συνεπώς το S είναι αναδρομικό.

Άσκηση 11

Έστω L μια άπειρη αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα. Συνεπώς υπάρχει ένας απαριθμητής T ο οποίος τυπώνει στην έξοδό του όλες τις λέξεις της γλώσσας με αυθαίρετη σειρά και πιθανόν με επαναλήψεις.

Αρχικά παρατηρούμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε μια μηχανή T' παρόμοια με την T με τη διαφορά ότι θα διατηρεί μια λίστα με τις λέξεις που έχει τυπώσει και πριν τυπώσει μια λέξη να ελέγχει ότι όντως είναι η πρώτη φορά που την τυπώνει. Η T' συνεχίζει να είναι απαριθμητής της L αφού αν η T τύπωνε μία λέξη w σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων το ίδιο θα κάνει και η T'.

Άρα θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η T τυπώνει κάθε λέξη της L ακριβώς μία φορά οπότε δημιουργούμε τις μηχανές T_1, T_2 οι οποίες κάνουν ό,τι κάνει και η T με τη διαφορά ότι τυπώνουν κάθε δεύτερη λέξη ξεκινώντας από την πρώτη ή τη δεύτερη αντίστοιχα.

Άρα οι T_1, T_2 απαριθμούν τις άπειρες γλώσσες A, B για τις οποίες $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = L$.

Άσκηση 12

Η άσκηση είναι λάθος. Αν ίσχυε το ζητούμενο, τότε για $x, y \in \mathbb{N}$ με $x = y$ θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε εάν $x \in Im(\phi_{f(x)})$, δηλαδή αν $\phi_x(x) \downarrow$ ή $\phi_x(x) \uparrow$. Έστω M_i αρίθμηση όλων των μηχανών Turing έτσι ώστε η M_i να υπολογίζει τη συνάρτηση ϕ_i. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε i, μπορούμε να αποφασίσουμε αν το $M_i(i)$ τερματίζει ή όχι. Αν θεωρήσουμε $\langle M_i \rangle = i$, λοιπόν, για κάθε μηχανή Turing M μπορούμε να αποφασίσουμε αν το $M(\langle M \rangle)$ τερματίζει ή όχι. Αυτό έρχεται σε ευθεία αντίθεση με την άσκηση 8, στην οποία δείξαμε ότι το πρόβλημα $K = \{\langle M \rangle | M(\langle M \rangle) \downarrow\}$ είναι ER-πλήρες, δηλαδή ότι το πρόβλημα τερματισμού ανάγεται σε αυτό. Άρα το K δεν είναι αναδρομικό, και συνεπώς υπάρχουν άπειρα x για το οποία το $Im(\phi_{f(x)})$ δεν είναι αναδρομικό. Επίσης αν για κάποιο x το $Im(\phi_{f(x)})$ είναι αναδρομικό, τότε και για όλα τα $y < x$ το $Im(\phi_{f(y)})$ είναι αναδρομικό, άρα το $Im(\phi_{f(x)})$ είναι αναδρομικό μόνο για πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών x.

Άσκηση 13

Έστω η TM:

- $T =$"Για είσοδο n:

    1. Για $1 \leq i \leq n$:

        (α′) Προσομοίωσε την M_i με είσοδο n και τοποθέτησε το αποτέλεσμα σε μία ειδική ταινία.

    2. Υπολόγισε και επέστρεψε το άθροισμα όλων των τιμών της ειδικής ταινίας."

Θα δείξουμε ότι η T υπολογίζει την f. Πράγματι, αν για κάποιο n η f ορίζεται, δηλαδή ισχύει $n \in \mathrm{Dom}(\phi_i)$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ τότε η κάθε προσομοίωση στο βήμα 1 τερματίζει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων και έτσι η T τερματίζει και επιστρέφει $T(n) = f(n)$

Άσκηση 14

Έστω L αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα. Θα δείξουμε ότι υπάρχει επί, πλήρης και υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to L$. Θεωρούμε μηχανή Turing M που αναγνωρίζει την L. Τρέχουμε την M για όλες τις δυνατές εισόδους με dovetailing. Έστω $x_0, x_1, ...$ η άπειρη ακολουθία (όχι απαραίτητα διακριτών) εισόδων για τις οποίες η M αποδέχεται. Εφόσον η L είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη, για κάθε $x \in L$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x = x_i$. Θεωρούμε τώρα την $f(i) = x_i$. Λόγω των παραπάνω, η f είναι επί και πλήρης. Επίσης είναι υπολογίσιμη, αφού για να βρούμε το $f(i)$ αρκεί να τρέξουμε τη μηχανή M με όλες τις δυνατές εισόδους έως ότου αποδεχθεί $i + 1$ φορές.

Αντίστροφα, έστω επί, πλήρης και υπολογίσιμη $f : \mathbb{N} \to L$, θα δείξουμε ότι η L είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα. Εφόσον η f είναι υπολογίσιμη, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $f(i)$ σε πεπερασμένο χρόνο. Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing M με είσοδο x η οποία θεωρεί με αύξουσα σειρά όλα τα $i \in \mathbb{N}$ και για κάθε ένα, υπολογίζει το $f(i)$. Αν $x \in L$, τότε επειδή η f είναι επί σε πεπερασμένο χρόνο θα βρεθεί i ώστε $f(i) = x$, οπότε και η M θα αποδεχθεί. Διαφορετικά θα τρέχει για πάντα. Συνεπώς η L είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Άσκηση 16

Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι υπολογίσιμη. Έστω μηχανή Turing $\widetilde{M}$ η οποία παίρνει σαν είσοδο την περιγραφή μιας μηχανής Turing M και μία είσοδο x σε αυτήν. Για ευκολία μπορούμε να περιγράψουμε την $\widetilde{M}$ ως μηχανή με δύο ταινίες. Η $\widetilde{M}$ προσομοιώνει την M με είσοδο x χρησιμοποιώντας τη δεύτερη ταινία για αυτό. Μετά από κάθε βήμα της προσομοίωσης γράφει το χαρακτήρα 1 στην πρώτη ταινία και μετακινεί την πάνω κεφαλή μία θέση δεξιά. Αν κάποια στιγμή η $M(x)$ τερματίσει, αποδέχεται. Συνεπώς, αν το $\widetilde{M}(\langle M \rangle, x)$ τερματίσει, η πρώτη ταινία θα έχει τόσους άσσους, όσα είναι και τα βήματα που τρέχει η $M(x)$. Έστω ότι η $\widetilde{M}$ έχει c καταστάσεις.

Έστω τώρα $\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle}$ η μηχανή Turing που εκτελεί την ίδια λειτουργία με τη $\widetilde{M}$, με τη διαφορά ότι δεν παίρνει είσοδο από την ταινία, αλλά όταν ξεκινάει γράφει στη δεύτερη ταινία τα $\langle M \rangle$, x και τέλος μετακινεί την κεφαλή τέρμα αριστερά. Στη συνέχεια η λειτουργία της είναι ίδια με αυτή της $\widetilde{M}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το αποτέλεσμα (αποδοχή/μη τερματισμός), καθώς και το τελικό περιεχόμενο των ταινιών της $\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle}(\epsilon)$ είναι πανομοιότυπα με αυτά της $\widetilde{M}(\langle M \rangle, x)$. Επίσης, για δοσμένα $\langle M \rangle$, x, η $\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle}$ μπορεί να κατασκευαστεί σε πεπερασμένο χρόνο.

Τέλος, θεωρούμε τη μηχανή Turing M', η οποία λαμβάνει στην είσοδό της μια μηχανή Turing $\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle}$ με c' καταστάσεις, υπολογίζει το $\phi(c')$ και την προσομοιώνει με κενή είσοδο. Αν η τελευταία ξεπεράσει τους $\phi(c')$ άσσους στην πρώτη ταινία, τότε η M' τερματίζει και απορρίπτει. Αλλιώς, η M' τερματίζει και αποδέχεται.

Λήμμα 7. *Έστω μηχανή Turing M και είσοδος x. Αν η $M(x)$ τερματίζει, τότε η $M'(\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle})$ αποδέχεται. Αν η $M(x)$ δεν τερματίζει, τότε η $M'(\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle})$ απορρίπτει.*

Απόδειξη. Αν η $M(x)$ δεν τερματίζει, τότε κάποια στιγμή το πλήθος των άσσων στην πρώτη ταινία της $\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle}$ θα ξεπεράσει το $\phi(c')$, όπου c' το πλήθος καταστάσεων της $\widetilde{M}_x^{\langle M \rangle}$. Άρα η M' θα απορρίψει. Αν τώρα η $M(x)$ τερματίζει, τότε σε καμία στιγμή το πλήθος των άσσων στην πρώτη ταινία της $\widetilde{M}_x\langle M \rangle$ δεν ξεπερνάει το $\phi(c')$. Αυτό γιατί σε περίπτωση τερματισμού θα είχαμε στην ταινία περισσότερους από $\phi(c')$ άσσους σε μια μηχανή με c' καταστάσεις, το οποίο είναι άτοπο εξ' ορισμού. Άρα η M' θα αποδεχθεί. □

Άρα αν η ϕ είναι υπολογίσιμη, τότε και το πρόβλημα τερματισμού είναι επιλύσιμο, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η ϕ δεν είναι υπολογίσιμη.

Άσκηση 18

a. Αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε το x έχει μόνο μηδενικά μετά την υποδιαστολή, άρα $L_x = \emptyset$, δηλαδή προφανώς και πεπερασμένο. Το L_x είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν ο x έχει πεπερασμένο πλήθος άσσων δεξιά της υποδιαστολής στη δυαδική του αναπαράσταση. Αυτό σημαίνει ότι ο x είναι της μορφής $\frac{y}{2^k}$, όπου $y \in \mathbb{Z}$ και $k \in \mathbb{N}$.

b. Έστω $x \in \mathbb{Q}$. Θα δείξουμε ότι $x \in \mathbb{A}$. Ξέρουμε ότι μετά από κάποιο σημείο, τα ψηφία του x μετά την υποδιαστολή γίνονται περιοδικά. Έστω a ο αριθμός που σχηματίζουν τα δυαδικά ψηφία του x μετά την υποδιαστολή και πριν την έναρξη της περιόδου και b ο αριθμός που σχηματίζουν τα ψηφία που επαναλαμβάνονται περιοδικά. Συγκεκριμένα, δηλαδή, έχουμε ότι $x = c.a\bar{b}$. Ο x μπορεί να μετατραπεί σε αυτή τη μορφή σε πεπερασμένο χρόνο, εφόσον τα a και b είναι πεπερασμένα. Έστω τώρα δυαδική συμβολοσειρά w. Αρχικά υπολογίζουμε το $i = \sigma(w)$. Θα πρέπει συνεπώς να αποφασίσουμε εάν $\delta_i(x) = 1$ ή $\delta_i(x) = 0$, δηλαδή να βρούμε το i-οστό δυαδικό ψηφίο του x μετά την υποδιαστολή. Αυτό είναι όμως εύκολο: Αν το i δεν είναι μεγαλύτερο του πλήθους των ψηφίων του a, τότε θέλουμε το i-οστό ψηφίο του a από τα αριστερά. Διαφορετικά, αν $|a|$ το πλήθος των ψηφίων του a και $|b|$ το πλήθος των ψηφίων του b, θέλουμε το $((i - |a| - 1) mod |b| + 1)$-οστό ψηφίο του b από τα αριστερά.

c. Θα δείξουμε ότι $\sqrt{2} \in \mathbb{A}$. Έστω πάλι είσοδος w, για την οποία υπολογίζουμε το $i = \sigma(w)$. Τώρα, θα πρέπει να υπολογίσουμε το i-οστό ψηφίο του $\sqrt{2}$ μετά την υποδιαστολή. Αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε με γνωστούς τρόπους (πχ δυαδική αναζήτηση). Άρα $L_{\sqrt{2}} \in REC$.

d. Έστω $x_i = \sqrt{2} \cdot 2^i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τώρα, το j-οστό ψηφίο του x_i μετά την υποδιαστολή είναι το $(i + j)$-οστό ψηφίο του $\sqrt{2}$ μετά την υποδιαστολή, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί, όπως είπαμε παραπάνω. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το $\delta_j(x_i)$ για κάθε i και j. Συνεπώς για κάθε i $x_i \in \mathbb{A}$ και προφανώς $x_i \notin \mathbb{Q}$. Άρα υπάρχουν άπειροι άρρητοι στο $\mathbb{A}$. Επίσης, το $\mathbb{A}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, διότι δεν έχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο των αναδρομικών γλωσσών, το οποίο είναι αριθμήσιμο. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $|\mathbb{A} \backslash \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

e. Όπως είπαμε το $\mathbb{A}$ είναι αριθμήσιμο. Άρα προφανώς $|\mathbb{R} \backslash \mathbb{A}| = 2^{\aleph_0}$.