Άσκηση 1

- **Ψευδής**

  Έστω x τέτοιο ώστε M_x να είναι μια TM η οποία δεν τερματίζει για καμία είσοδο. Τότε έχουμε $\mathrm{Dom}(\phi_x) = \emptyset$ το οποίο είναι αναδρομικό σύνολο (το αποφασίζει η μηχανή Turing που απορρίπτει κάθε είσοδο), δηλαδή $x \in R$. Όμως από τον ορισμό της M_x έχουμε $M_x(x) \uparrow$, δηλαδή $x \notin K$.

- **Ψευδής**

  Έστω x τέτοιο ώστε M_x να είναι μια TM η οποία τερματίζει και αποδέχεται κάθε είσοδο. Τότε έχουμε $\mathrm{Dom}(\phi_x) = \mathbb{N}$ το οποίο είναι αναδρομικό σύνολο (το αποφασίζει η μηχανή Turing που αποδέχεται κάθε είσοδο), δηλαδή $x \in R$. Όμως από τον ορισμό της M_x έχουμε $M_x(x) \downarrow$, δηλαδή $x \in K$ συνεπώς $x \in R \cap K$.

- **Ψευδής**

  Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το εξής πρόβλημα:

  $$\mathrm{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid M(w) \downarrow\}$$

  για το οποίο γνωρίζουμε ότι $\mathrm{HALT} \in \mathrm{ER}$ και $\mathrm{HALT} \notin \mathrm{REC}$ επομένως $\overline{\mathrm{HALT}} \notin \mathrm{ER}$ και θα κάνουμε την αναγωγή $\overline{\mathrm{HALT}} \leq_{\mathrm{m}} R$ από την οποία προκύπτει ότι $R \notin \mathrm{ER}$. Συνεπώς και $R \cup K \notin \mathrm{ER}$.

  Λήμμα 1. *$\overline{HALT} \leq_m R$.*

  Απόδειξη. Θα πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία να είναι υπολογίσιμη και για την οποία να ισχύει: $\langle M, w\rangle \in \overline{\mathrm{HALT}} \Leftrightarrow f(\langle M, w\rangle) \in R$.

  Αυτή η f θα είναι η συνάρτηση που υπολογίζει η παρακάτω μηχανή Turing:

  – $F =$“ Για είσοδο $\langle M, w\rangle$:
    1. Δημιούργησε την περιγραφή και βρες τον αριθμό Gödel g της μηχανής Turing T:
       $T =$ ‘Για είσοδο $\langle T_1, x\rangle$:
       (α΄) Προσομοίωσε παράλληλα την M με είσοδο w και την T_1 με είσοδο x.
       (β΄) Αν τερματίσουν και οι δύο, τότε επέστρεψε το $T_1(x)$.’
    2. Γράψε g στην ταινία εξόδου.”

  Έστω ότι $\langle M, w\rangle \in \overline{\mathrm{HALT}}$, δηλαδή $M(w) \uparrow$, τότε η μηχανή T δεν τερματίζει για καμία είσοδο άρα $f(\langle M, w\rangle) = g$ όπου g τέτοιο ώστε $\mathrm{Dom}(\phi_g) = \emptyset \in \mathrm{REC}$, συνεπώς $g \in R$.

  Αντίστροφα, αν $\langle M, w\rangle \in \mathrm{HALT}$ τότε η συνάρτηση f επιστρέφει ένα g για το οποίο $\mathrm{Dom}(\phi_g) = \mathrm{HALT} \notin \mathrm{REC}$, άρα $g \in \overline{R}$. □

Άσκηση 2

Λήμμα 2. *Το πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ GOLDBACH είναι αναγνωρίσιμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη μηχανή Turing με την εξής λειτουργία: Αν n είναι η είσοδος της μηχανής, δοκιμάζει με τη σειρά τους ακεραίους $k \geq n$. Για κάθε τέτοιο αριθμό, δοκιμάζει όλα τα ζευγάρια ακεραίων $p, q \leq 2k$, τα οποία προφανώς είναι πεπερασμένα για σταθερό k, και ελέγχει αν τα p και q

είναι πρώτοι (δοκιμάζοντας όλους τους πιθανούς διαιρέτες) και αν $2k = p + q$. Αν για κάποιο k δεν βρεθούν p και q που να ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, τότε η μηχανή Turing απαντάει NAI στο πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ GOLDBACH. Πραγματικά, αν υπάρχει ακέραιος $k \geq n$ που να διαψεύδει την εικασία του Goldbach, τότε δεν θα υπάρχει ζευγάρι πρώτων $p, q \leq 2k$ έτσι ώστε $2k = p + q$. Η μηχανή Turing θα φτάσει σε αυτό το k σε πεπερασμένο χρόνο, άρα σε πεπερασμένο χρόνο θα απαντήσει NAI. Συνεπώς το πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ GOLDBACH είναι αναγνωρίσιμο. □

Λήμμα 3. *Αν το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH είναι αναγνωρίσιμο, τότε θα είναι και διαγνώσιμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη μηχανή Turing M_1, η οποία αναγνωρίζει το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH, και τη μηχανη M_2, η οποία αναγνωρίζει το πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ GOLDBACH. Τώρα, έστω μηχανή M η οποία εξομοιώνει τις μηχανές M_1 και M_2 για ένα βήμα την καθεμιά εναλλάξ. Αν κάποια στιγμή αποδεχθεί η M_1, τότε η M τερματίζει και δίνει απάντηση NAI για το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH. Αν, από την άλλη, κάποια στιγμή αποδεχθεί η M_2, τότε η M τερματίζει και δίνει απάντηση OXI για το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH. Επειδή κάποιο από τα δύο παραπάνω σενάρια θα συμβεί σε πεπερασμένο χρόνο, η μηχανή M τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο και αποφασίζει το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ GOLDBACH. Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα αυτό είναι διαγνώσιμο. □

Άσκηση 3

Όπως έχουμε δεί και στο μάθημα, αν μια μηχανή Turing είναι περιορισμένη στις πρώτες n θέσεις τότε υπάρχουν $t(n) = |Q| \cdot n \cdot |\Sigma|^n$ πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται κάθε στιγμή. Αν βρεθεί σε κάποια από αυτές τις καταστάσεις για δεύτερη φορά τότε θα πέσει σε άπειρο βρόχο.

Επομένως για μια μή περιορισμένη TM, ο μόνος τρόπος να φτάσει στη θέση $n + 1$ είναι να το κάνει σε λιγότερο από t βήματα.

Φτιάχνουμε λοιπόν μια μηχανή Turing T η οποία για είσοδο $\langle M, w, n_1, n_2 \rangle$ προσομοιώνει την M με είσοδο w για $t(\min(n_1, n_2) - 1)$ βήματα και αν η M φτάσει στη θέση $\min(n_1, n_2)$ αποδέχεται διαφορετικά απορρίπτει.

Η T αποφασίζει το πρόβλημα ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΜΝΗΝΗ αφού πάντα τερματίζει και αποδέχεται ανν η M επισκεφτεί την θέση $\min(n_1, n_2)$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το να επισκεφτεί κάποια εκ των θέσεων n_1, n_2 αφού για να πάει μια μηχανή Turing από μία θέση σε μία άλλη θα πρέπει να περάσει από όλες τις ενδιάμεσες.

Άσκηση 9

Έστω T_1, T_2 οι μηχανές που αναγνωρίζουν τις γλώσσες $\overline{A}, \overline{B}$ αντίστοιχα.
Δημιουργούμε την μηχανή T:

- $T =$" Για είσοδο x:
  1. Τρέξε παράλληλα την T_1 με είσοδο x και την T_2 με είσοδο x μέχρι κάποια εκ των δύο να τερματίσει.
  2. Αν τερμάτισε η T_1 τότε επέστρεψε $\overline{T_1(x)}$.
  3. Αν τερμάτισε η T_2 τότε επέστρεψε $T_2(x)$."

Θα δείξουμε ότι $C = L(T)$ είναι η γλώσσα που αναζητούμε.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η T πάντα τερματίζει αφού $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \Sigma^*$. Άρα για κάθε $x \in \Sigma^*$, έχουμε είτε $x \in \overline{A}$ είτε $x \in \overline{B}$ συνεπώς μία εκ των T_1, T_2 θα αποδεχτεί το x κι έτσι $C \in \text{REC}$.

- $A \subseteq C$:

  Έστω $x \in A$. Αφού $A \cap B = \emptyset$ θα έχουμε $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{B}$.

  Εκτελούμε τη μηχανή T με είσοδο το x. Επειδή $x \in \overline{B}$ ξέρουμε ότι η T_2 θα τερματίσει κάποια πεπερασμένη χρονική στιγμή και θα αποδεχτεί. Αν τερματίσει πριν την T_1 τότε θα εκτελεστεί η γραμμή 3 και έτσι και η T αποδέχεται. Διαφορετικά, αν η T_1 τερματίσει πρώτη θα πρέπει αναγκαστικά να απαντήσει reject, συνεπώς λόγω της γραμμής 2 η T θα αποδεχθεί.

  Σε κάθε περίπτωση η T αποδέχεται το x, συνεπώς $x \in C$.

- $B \subseteq \overline{C}$

  Έστω $x \in B$. Αντίστοιχα με προηγουμένως εκτελούμε την T με είσοδο x και επειδή $x \notin A$ η T_1 θα αποδεχτεί σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Αν η T_1 τερματίσει πρώτη τότε η T απορρίπτει ενώ αν η T_2 τερματίσει πρώτη αναγκαστικά θα απορρίψει και έτσι και η T θα απορρίψει.

  Σε κάθε περίπτωση $x \notin C$.

Άσκηση 11

Έστω L μια άπειρη αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα. Συνεπώς υπάρχει ένας απαριθμητής T ο οποίος τυπώνει στην έξοδό του όλες τις λέξεις της γλώσσας με αυθαίρετη σειρά και πιθανόν με επαναλήψεις.

Αρχικά παρατηρούμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε μια μηχανή T' παρόμοια με την T με τη διαφορά ότι θα διατηρεί μια λίστα με τις λέξεις που έχει τυπώσει και πριν τυπώσει μια λέξη να ελέγχει ότι όντως είναι η πρώτη φορά που την τυπώνει. Η T' συνεχίζει να είναι απαριθμητής της L αφού αν η T τύπωνε μία λέξη w σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων το ίδιο θα κάνει και η T'.

Άρα θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η T τυπώνει κάθε λέξη της L ακριβώς μία φορά οπότε δημιουργούμε τις μηχανές T_1, T_2 οι οποίες κάνουν ό,τι κάνει και η T με τη διαφορά ότι τυπώνουν κάθε δεύτερη λέξη ξεκινώντας από την πρώτη ή τη δεύτερη αντίστοιχα.

Άρα οι T_1, T_2 απαριθμούν τις άπειρες γλώσσες A, B για τις οποίες $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = L$.

Άσκηση 13

Έστω η TM:

- $T =$"Για είσοδο n:
  1. Για $1 \leq i \leq n$:
     (α΄) Προσομοίωσε την M_i με είσοδο n και τοποθέτησε το αποτέλεσμα σε μία ειδική ταινία.
  2. Υπολόγισε και επέστρεψε το άθροισμα όλων των τιμών της ειδικής ταινίας."

Θα δείξουμε ότι η T υπολογίζει την f. Πράγματι, αν για κάποιο n η f ορίζεται, δηλαδή ισχύει $n \in \text{Dom}(\phi_i)$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ τότε η κάθε προσομοίωση στο βήμα 1 τερματίζει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων και έτσι η T τερματίζει και επιστρέφει $T(n) = f(n)$