



Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και  
Μηχανικών Υπολογιστών

---

## Γραφοθεωρία Ομάδα Ασκήσεων Νο. 1

---

Ομάδα 7  
Αξιώτης Κυριάκος  
Αρσένης Γεράσιμος

2 Μαΐου 2015

## 1 Βαθμοί, κύκλοι, μονοπάτια

1.9 (★) Για κάθε θετικό ακέραιο  $\alpha$  και για κάθε γράφημα  $G$ , το  $V(G)$  περιέχει περισσότερες από  $(1 - \frac{1}{\alpha}) \cdot n(G)$  κορυφές βαθμού αυστηρά μικρότερου του  $2\alpha\delta^*(G)$ .

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε ότι  $\delta^*(G) = \max\{k \mid \exists H \subseteq G \text{ με } \delta(H) \geq k\}$ .

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$|\{u \mid u \in V(G) \wedge d(u) < 2\alpha\delta^*(G)\}| > \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) n(G)$$

Έστω λοιπόν, προς απαγωγή σε άτοπο ότι:

$$\begin{aligned} |\{u \mid u \in V(G) \wedge d(u) < 2\alpha\delta^*(G)\}| &\leq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) n(G) \\ \Leftrightarrow n(G) - |\{u \mid u \in V(G) \wedge d(u) \geq 2\alpha\delta^*(G)\}| &\leq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) n(G) \\ \Leftrightarrow |\{u \mid u \in V(G) \wedge d(u) \geq 2\alpha\delta^*(G)\}| &\geq \frac{1}{\alpha} n(G) \end{aligned}$$

Ισχύει όμως:

$$2m(G) = \sum_{u \in V(G)} d(u) \geq \sum_{u \in V(G): d(u) \geq 2\alpha\delta^*(G)} d(u) \geq \frac{1}{\alpha} n(G) \cdot 2\alpha\delta^*(G) = 2n(G)\delta^*(G)$$

$$m(G) \geq n(G) \cdot \delta^*(G) \Leftrightarrow \epsilon(G) \geq \delta^*(G)$$

Από το Πρόρισμα 3.1 των σημειώσεων του μαθήματος γνωρίζουμε ότι  $\delta^*(G) \geq \epsilon(G)$ , συνεπώς θα έχουμε:

$$\epsilon(G) = \delta^*(G)$$

TODO: Εδώ καταλήγουμε σε άτοπο γιατί αν ισχύει ισότητα τότε οι παραπάνω ανισότητες είναι αυστηρές και αυτό δεν μπορεί να ισχύει [...]

□

1.10 (★★) Κάθε γράφημα  $G$  με τουλάχιστον 2 κορυφές και  $\epsilon(G) \geq 2$ , έχει περιφέρεια το πολύ  $2 \cdot \log_2(n)$ .

*Απόδειξη.* μπλα μπλα..

□

## 2 Άκυκλα γραφήματα

- 2.10 (\*) Σε κάθε δέντρο με  $n$  κορυφές και διάμετρο τουλάχιστον  $2k - 3$  υπάρχουν τουλάχιστον  $n - k$  διαφορετικά μονοπάτια μήκους  $k$ .

Απόδειξη. \*\*\* ΛΑΘΟΣ \*\*\*

Έστω  $u, v$  δύο αντιδιαμετρικοί κόμβοι με  $d(u, v) = \text{diam}(u, v)$  και έστω  $P$  το μονοπάτι που τους ενώνει. Υπάρχει κόμβος  $w$  πάνω στο  $P$  τέτοιος ώστε είτε  $d(u, w) \geq k - 1$  είτε  $d(w, v) \geq k - 1$  (διαφορετικά θα είχαμε  $\text{diam}(G) = d(u, v) = d(u, w) + d(w, v) \leq 2(k - 2) = 2k - 4$ ).

Υποθέτουμε λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $d(u, w) \geq k - 1$  και μάλιστα επιλέγουμε το κοντινότερο τέτοιο  $w$  στο  $u$ , δηλαδή  $d(u, w) = k - 1$ .

Στο μονοπάτι  $P'$  από  $u$  στον  $w$  υπάρχουν ακριβώς  $k$  κορυφές. Θα δείξουμε ότι από κάθε μία από τις υπόλοιπες  $n - k$  κορυφές μπορούμε να δημιουργήσουμε μονοπάτια μήκους  $k$  που να καταλήγουν σε κορυφές του  $P'$  και τα μονοπάτια αυτά θα είναι διαφορετικά μεταξύ τους αφού το καθένα έχει διαφορετική αφετηρία.

□

## 3 Συνεκτικότητα

## 4 Εμβαπτίσεις

## 5 Δομές σε γραφήματα

- 5.9 (\*) Κάθε γράφημα περιέχει τουλάχιστον  $\frac{m(G)(4m(G) - n^2(G))}{3n(G)}$  τρίγωνα.

Απόδειξη. Έστω μια ακμή  $\{u, v\}$ . Η ιδέα είναι να βρούμε το ελάχιστο πλήθος τριγώνων στα οποία μπορεί να ανήκει αυτή η ακμή και έτσι μετά αθροίζοντας κατάλληλα να μπορέσουμε να φράξουμε από κάτω το συνολικό πλήθος των τριγώνων του γραφήματος.

Ορίζουμε  $U = N_G(u) \setminus v, V = N_G(v) \setminus u$ . Ισχύει ότι  $|U| + |V| = d(u) + d(v) - 2$ . Επίσης,  $|U \cup V| \leq n(G) - 2$  αφού δεν υπάρχουν πάνω από  $n(G) - 2$  κορυφές που να απομένουν στο γράφημα.

Άρα, έχουμε:

$$|U \cap V| = |U| + |V| - |U \cup V| \geq d(u) + d(v) - n(G)$$

Κάθε κορυφή που ανήκει στο  $U \cap V$  δημιουργεί τρίγωνο με τις κορυφές  $u, v$ . Άρα το πλήθος των τριγώνων  $|T_{\{u, v\}}|$  που μπορεί να ανήκει η ακμή  $\{u, v\}$  είναι τουλάχιστον  $d(u) + d(v) - n(G)$ .

Αν συμβολίσουμε με  $T$  το σύνολο των τριγώνων του  $G$  έχουμε:

$$3|T| = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} T_{\{u,v\}}$$

επειδή κάθε τρίγωνο περιέχει 3 ακμές.

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} |T| &\geq \frac{1}{3} \sum_{\{u,v\} \in E(G)} (d(u) + d(v) - n(G)) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\{u,v\} \in E(G)} (d(u) + d(v)) - \frac{n(G)m(G)}{3} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} d^2(u) - \frac{n(G)m(G)}{3} \\ &\geq \frac{1}{3n(G)} \left( \sum_{u \in V(G)} d(u) \right)^2 - \frac{n(G)m(G)}{3} \\ &= \frac{4m^2(G)}{3n(G)} - \frac{n(G)m(G)}{3} \\ &= \frac{m(G)(4m(G) - n^2(G))}{3n(G)} \end{aligned}$$

Όπου το 4ο βήμα προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$d(u_1) \cdot 1 + d(u_2) \cdot 2 + \dots + d(u_n) \cdot 1 \leq (d^2(u_1) + \dots + d^2(u_n)) \cdot (1 + \dots + 1) = (d^2(u_1) + \dots + d^2(u_n)) \cdot n$$

□

## 6 Χρωματισμοί και άλλα

6.9 (\*\*) Ένα γράφημα λέγεται άρτιο αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Δείξτε ότι αν το  $G$  είναι συνεκτικό γράφημα, τότε  $|\{H \subseteq_{\pi\alpha} G | H \text{ είναι άρτιο}\}| = 2^{m(G) - n(G) + 1}$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε  $S = \{H \subseteq_{\pi\alpha} G | H \text{ άρτιο}\}$ . Θα ορίσουμε μία 1-1 και επί συνάρτηση  $f$  από το σύνολο  $A = \{H | H \subseteq_{\pi\alpha} G\}$ , δηλαδή το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του  $G$ , στο  $B = S \times \{X \subseteq$

$V(G) \parallel |X| \bmod 2 = 0\}$ , δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των άρτιων παραγόμενων γραφημάτων με την οικογένεια υποσυνόλων του  $V(G)$  με άρτιο πληθάριθμο. Το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του  $G$  έχει πληθάριθμο  $2^{m(G)}$ , αφού κάθε ακμή μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει στο παραγόμενο υπογράφημα. Επίσης η οικογένεια υποσυνόλων του  $V(G)$  με άρτιο πληθάριθμο έχει πληθάριθμο  $2^{n(G)-1}$ , αφού έχουμε 2 επιλογές για κάθε κορυφή (θα μπει ή δεν θα μπει στο υποσύνολο), εκτός από την τελευταία, της οποίας η τοποθέτηση καθορίζεται μοναδικά από το αν το υποσύνολο έχει άρτιο ή περιττό αριθμό κορυφών. Λόγω του λήμματος 1, η  $f$  είναι 1-1 και επί, άρα έχουμε ότι  $2^{m(G)} = |S| \cdot 2^{n(G)-1} \Rightarrow |S| = 2^{m(G)-n(G)+1}$ , το οποίο είναι το ζητούμενο.  $\square$

**Λήμμα 1:** Υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση από το σύνολο  $A$  στο σύνολο  $B$ .

*Απόδειξη.* Για κάθε ζευγάρι κορυφών  $i, j$  με  $i \neq j$ , ορίζουμε  $P_{ij}$  ένα μονοπάτι μεταξύ τους στο  $G$ . Αυτό προφανώς υπάρχει, αφού το  $G$  είναι συνεκτικό. Ορισμός  $f$ : Έστω  $Z \in A$  και  $T$  το σύνολο των κορυφών του  $Z$  με περιττό βαθμό. Είναι γνωστό ότι  $|Z| \bmod 2 = 0$ . Διαμερίζουμε τις κορυφές του  $Z$  σε ζευγάρια  $(a_i, b_i)$  (με κάποιο μονοσήμαντο τρόπο, πχ αριθμούμε τις κορυφές του  $Z$   $u_1, u_2, \dots, u_k$  και βάζουμε τα ζευγάρια  $(u_1, u_2), \dots, (u_{k-1}, u_k)$ ) και για κάθε ζευγάρι θεωρούμε το μονοπάτι  $P_{a_i b_i}$ . Για κάθε ακμή πάνω σε αυτό το μονοπάτι, αν υπάρχει στο  $Z$  τότε την αφαιρούμε, ενώ αν δεν υπάρχει την προσθέτουμε. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός διατηρεί την αριτιότητα των βαθμών των ενδιάμεσων κόμβων, και επίσης πλέον οι  $a_i, b_i$  έχουν άρτιο βαθμό. Κάνοντας αυτό το μετασχηματισμό για κάθε ζευγάρι, θα καταλήξουμε με ένα άρτιο γράφημα  $U$ . Ορίζουμε  $f(Z) = U \times T$ . Ουσιαστικά η  $f$  μετασχηματίζει ένα γράφημα σε άρτιο, αλλά επιστρέφει και την πληροφορία του ποιοι κόμβοι ήταν περιττοί. Αντίστροφα, αν έχουμε ένα άρτιο γράφημα  $U$  και ένα υποσύνολο  $T$  του  $V(G)$  με άρτιο πληθάριθμο, θεωρούμε τη διαμέριση του  $T$  σε ζευγάρια και για κάθε ζευγάρι εφαρμόζουμε τον ίδιο μετασχηματισμό που ορίσαμε παραπάνω. Έτσι θα πάρουμε ξανά το γράφημα  $Z$  με  $f(Z) = U \times T$ . Συνεπώς η  $f$  είναι 1-1 και επί.  $\square$

- 6.10 (\*\*) Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά  $c$ , τέτοια ώστε αν για κάποιο γράφημα  $G$  ισχύει ότι  $\delta(G) \geq k$ , τότε το  $G$  περιέχει  $c \cdot k^2$  αχμοδιακεκριμένους κύκλους.

*Απόδειξη.* Έστω  $\delta(G) \geq k \geq 4$ . Λόγω του λήμματος 2, έχουμε  $\geq \lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$  εσωτερικώς διακεκριμένους κύκλους. Διαγράφουμε τις ακμές όλων αυτών των κύκλων. Στο γράφημα  $G'$  που θα προκύψει έχουμε  $\delta(G') \geq k-2$ . Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την ίδια διαδικασία, έως ότου το γράφημα

που απόμένει έχει  $\delta(G') < 4$ . Συνολικά αυτή η διαδικασία θα επαναληφθεί τουλάχιστον  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$  φορές. Οι ακμοδιακεκριμένοι κύκλοι που θα έχουμε συνολικά λοιπόν θα είναι τουλάχιστον  $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{k-3}{3} \rfloor + \dots + 1 + 0 = \Theta(k^2)$ .  $\square$

Λήμμα 1: Αν  $\delta(G) \geq 4$ , υπάρχει κύκλος με μήκος  $\leq 2 \cdot \log_2 n$ .

Απόδειξη. Έχουμε  $m \geq \frac{\delta(G) \cdot n}{2} \geq 2n$ , άρα η πυκνότητα είναι τουλάχιστον 2. Αυτό που μένει έχει αποδειχθεί στην άσκηση 1.10.  $\square$

Λήμμα 2: Σε κάθε γράφημα  $G$  με  $\delta(G) \geq k \geq 4$  υπάρχουν τουλάχιστον  $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$  εσωτερικώς διακεκριμένοι κύκλοι.

Απόδειξη. Έστω ένας ελάχιστος κύκλος  $C$ . Αυτός λόγω του λήμματος 1 θα έχει μήκος το πολύ  $2 \cdot \log_2 n$ . Επίσης καμία κορυφή  $u \in G - C$  δεν μπορεί να έχει πάνω από 3 ακμές προς κορυφές του  $G$ . Αν είχε, τότε έστω δύο από αυτές και οι αντίστοιχες κορυφές του κύκλου. Αυτές θα είχαν απόσταση  $\leq \lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor$  στον  $C$ , άρα χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο ακμές, θα υπήρχε κύκλος με μέγεθος το πολύ  $\lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor + 2$ , το οποίο για  $|C| \geq 5$  είναι άτοπο αφού δημιουργεί κύκλο μικρότερο από τον ελάχιστο. Για  $|C| = 3$ , είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να έχουμε πάνω από 3 ακμές από κάποια κορυφή προς τις κορυφές του  $C$ , ενώ για  $|C| = 4$  αν είχαμε 4 ακμές προς κορυφές το  $C$ , θα σχηματιζόταν κύκλος μήκους 3, άτοπο. Από το παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το εναγόμενο γράφημα  $G'$  του  $G$  με σύνολο κορυφών το  $G - C$  θα έχει  $\delta(G') \geq k - 3$ . Εφαρμόζοντας επαναληπτικά την ίδια διαδικασία στο εναγόμενο γράφημα, μέχρι ο ελάχιστος βαθμός του αντίστοιχου εναγόμενου γραφήματος να γίνει μικρότερος από 4, έχουμε συνολικά τουλάχιστον  $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$  εσωτερικώς διακεκριμένους κύκλους.  $\square$