Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Γραφοθεωρία
Ομάδα Ασκήσεων Νο. 2

Ομάδα 7
Αξιώτης Κυριάκος
Αρσένης Γεράσιμος

19 Μαΐου 2015

1. Σε ένα $G(n,p)$ η πιθανότητα μιας κορυφής να έχει βαθμό k είναι $\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$. Δείξτε ότι ο μέσος βαθμός είναι $(n-1)p$ με απευθείας υπολογισμό, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη γραμμικότητα της μέσης τιμής.

   Απόδειξη. Θα χρειαστούμε τα εξής λήμματα:

   Λήμμα 1. *Έστω δύο τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Bernoulli με παραμέτρους n,p και m,p αντίστοιχα, δηλαδή $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$. Τότε για το άθροισμά τους ισχύει $X+Y \sim B(n+m,p)$.*

   Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X+Y=k] &= \mathbb{P}[(X=0 \wedge Y=k) \vee (X=1 \wedge Y=k-1) \vee \ldots \vee (X=k \wedge Y=0)] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X=i \wedge Y=k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X=i] \cdot \mathbb{P}[Y=k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \\
&= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}
\end{aligned}
$$

   □

   Λήμμα 2. *Έστω $\{X_i\}_{i=1\ldots k}$ μια οικογένεια τ.μ. για τις οποίες ισχύει $X_i \sim B(n_i,p)$. Τότε $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.*

   Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 και επαγωγή στο k προκύπτει το ζητούμενο. □

   Λήμμα 3. *Αν $X \sim B(n,p)$ τότε $\mathbb{E}[X] = np$.*

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \mathbb{P}[X=i] \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} np \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{(n-1)-(i-1)} \\
&= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i} \\
&= np \cdot (p + (1-p))^{n-1} = np
\end{aligned}
$$

□

Για το γράφημα $G(n,p)$ έχουμε ότι ο βαθμός μιας κορυφής v_i είναι μια τυχαία μεταβλητή d_i που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παραμέτρους $n-1, p$, δηλαδή $d_i \sim B(n-1,p)$.

Για τον μέσο βαθμό κορυφής ισχύει:

$$
d(G) = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}
$$

όπου $X = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 2 έχουμε ότι $X \sim B\left(\sum_{i=1}^{n}(n-1), p\right) = B(n(n-1),p)$.

Από το Λήμμα 3, $\mathbb{E}[X] = n(n-1)p$. Άρα έχουμε ότι:

$$
\mathbb{E}[d(G)] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X] = (n-1)p
$$

□

2. Δείξτε ότι το τυχαίο γράφημα $G(n,p)$ με $p = n^{-0.7}$ δεν έχει σχεδόν σίγουρα 4-κλίκα για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. Έστω X τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο πλήθος των 4-κλικών στο γράφημα. Έχουμε ότι $\mathbb{E}[X] = \binom{n}{4} \cdot p^{\binom{4}{2}} \leq n^4 \cdot n^{-4.2} = n^{-0.2}$. Από την ανισότητα του Markov έχουμε λοιπόν ότι $\mathbb{P}[X \geq 1] \leq \mathbb{E}[X] = n^{-0.2}$, το οποίο τείνει στο 0 για μεγάλα n. Άρα για αρκετά μεγάλο n το γράφημα δεν θα περιέχει σχεδόν σίγουρα 4-κλίκα. □

3. ($\star$) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο κατευθονόμενο γράφημα. Για κάθε κορυφή v επιλέγουμε ομοιόμορφα τυχαία μια κορυφή u και τοποθετούμε την ακμή $v \to u$. Κάθε κορυφή έχει μόνο μια εξερχόμενη ακμή και μπορεί να υπάρχουν θηλιές. Έστω $r(v)$ ο αριθμός των κορυφών στις οποίες μπορούμε να φτάσουμε από την v.

   - Για $k = 1, \ldots, n$ ποιά η πιθανότητα $r(v) = k$. Η πιθανότητα θα έχει μορφή γινομένου.
   - Δείξτε ότι για μία κορυφή v, $\mathbb{P}[r(v) \leq \sqrt{n}/10] \leq 1/3$ και $\mathbb{P}[r(v) \geq 10\sqrt{n}] \leq 1/3$.

Απόδειξη. Έστω $v = u_1, u_2, \ldots, u_k$ οι κορυφές που είναι προσβάσιμες από την v σε αύξουσα σειρά απόστασης. Δηλαδή υπάρχει ακμή μεταξύ $u_i \to u_{i+1}$ για $i = 1, \ldots k-1$.

Προκειμένου να είναι όλες οι παραπάνω κορυφές διαφορετικές μεταξύ τους θα πρέπει κάθε κορυφή u_i να διαλέγει να συνδεθεί με κάποια κορυφή u_{i+1} διαφορετική από όλες τις προηγούμενες $u_1, \ldots, u_{i-1}$ ώστε να μην δημιουργηθεί κύκλος σε εκείνο το σημείο.

Επιπλέον, η τελευταία κορυφή u_k θα πρέπει να συνδέεται με κάποια από τις προηγούμενες ώστε το μονοπάτι να "τελειώνει" εκεί και να μην υπάρχουν άλλες προσβάσιμες κορυφές.

Η πιθανότητα να συμβαίνουν τα παραπάνω είναι:

$$\mathbb{P}[r(v) = k] = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} \cdot \frac{k}{n} = \frac{k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[r(v) \leq \sqrt{n}/10] &= \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} \frac{k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} k \\
&= \frac{1}{n} \frac{\frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{\sqrt{n}}{10} + 1\right)}{2} \\
&= \frac{1}{200} + \frac{1}{20\sqrt{n}} \\
&< \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Για την άλλη ανισότητα, αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{P}[r(v) \geq k] = \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

Αυτό γιατί μας ενδιαφέρει μόνο οι πρώτες k κορυφές στο μονοπάτι που ξεκινάει από την v να είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Έχουμε λοιπόν:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[r(v) \geq 10\sqrt{n}] = & \prod_{i=1}^{10\sqrt{n}-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \\
& \leq e^{-\sum_{i=1}^{10\sqrt{n}-1} \frac{i}{n}} \\
& = e^{-\frac{10\sqrt{n}(10\sqrt{n}-1)}{2n}} \\
& = e^{-50+\frac{5}{\sqrt{n}}} \\
& \leq e^{-50+5} \\
& < \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

□

4. ($\star$) Θεωρήστε το τυχαίο γράφημα $G(n,p)$ με $p = 6.6/n$. Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα μή 3-χρωματίσιμο για αρκετά μεγάλα n.

Απόδειξη. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο πλήθος των 3-χρωματισμών του γραφήματός μας. Αν σταθεροποιήσουμε το πλήθος των κορυφών που έχουν το κάθε χρώμα, θεωρήσουμε δηλαδή ότι υπάρχουν x κορυφές με το πρώτο χρώμα, y κορυφές με το δεύτερο χρώμα και $n-x-y$ κορυφές με το τρίτο χρώμα, τότε ο αναμενόμενος αριθμός 3-χρωματισμών του γραφήματός μας είναι:

$$\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \cdot (1-p)^{\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{n-x-y}{2}}$$

Ο πρώτος παράγοντας αντιστοιχεί στο πλήθος τρόπων για την αντιστοίχιση χρωμάτων στις κορυφές και ο δεύτερος στην πιθανότητα να μην έχουμε ακμές μεταξύ κορυφών ίδιου χρώματος. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \cdot (1-p)^{\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{n-x-y}{2}}$$

.

Από το Λήμμα 1 γνωρίζουμε ότι η έκφραση $\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}$ μεγιστοποιείται για $x = y = \frac{n}{3}$ και η μέγιστη τιμή της είναι $\frac{n!}{\frac{n}{3}!^3}$. Αντίστοιχα, από το Λήμμα 2, η $\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{n-x-y}{2}$ ελαχιστοποιείται για $x = y = \frac{n}{3}$, και επειδή $1-p < 1$, έχουμε από τα παραπάνω ότι:

$$\mathbb{E}[X] \leq \sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{\frac{n}{3}!^3} (1-p)^{3\cdot\binom{\frac{n}{3}}{2}}$$

Όμως,

$$(1-p)^{3\cdot\binom{\frac{n}{3}}{2}} \leq e^{-p\cdot 3\cdot\binom{\frac{n}{3}}{2}} = e^{-\frac{6.6}{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdot(\frac{n}{3}-1)} = e^{-1.1n} \cdot e^{3.3}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τη διπλή ανισότητα $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq e(\frac{n+1}{e})^{n+1}$, παίρνουμε ότι:

$$\frac{n!}{\frac{n}{3}!^3} \leq \frac{e(\frac{n+1}{e})^{n+1}}{e^3(\frac{n}{3e})^n} = e^{-3} \cdot (\frac{n+1}{n})^n \cdot (n+1) \cdot 3^n \leq e^{-2} \cdot n^2 \cdot 3^n$$

Συνολικά έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[X] \leq n^2 \cdot e^{-2} \cdot n^2 \cdot 3^n \cdot e^{-1.1n} \cdot e^{3.3} \leq n^4 \cdot e^{1.3} \cdot (\frac{e^{ln3}}{e^{1.1}})^n \leq n^4 \cdot e^{1.3} \cdot e^{-0.001n}$$

το οποίο τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο άπειρο. Άρα για αρκετά μεγάλο n έχουμε ότι ο μέσος αριθμός 3-χρωματισμών του γραφήματος τείνει στο μηδέν, άρα και η πιθανότητα να υπάρχει 3-χρωματισμός τείνει στο 0. Άρα σχεδόν σίγουρα το γράφημα δεν είναι 3-χρωματίσιμο. □

Λήμμα 1. *Το $\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}$ μεγιστοποιείται για $x = y = \frac{n}{3}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ζητούμενο δεν ισχύει και A η μέγιστη τιμή της παράστασης και χωρίς βλάβη της γενικότητας $x < \frac{n}{3}$ και $y > \frac{n}{3}$. Θεωρούμε $x' = x + 1$ και $y' = y - 1$. Τότε η νέα τιμή της παράστασης είναι $A' = \frac{n!}{(x+1)!(y-1)!(n-x-y)!} = A \cdot \frac{y}{x+1} \geq A$. Αυτό είναι άτοπο, άρα το ζητούμενο ισχύει. □

Λήμμα 2. *Το $\binom{x}{2} + \binom{y}{2} + \binom{n-x-y}{2}$ ελαχιστοποιείται για $x = y = \frac{n}{3}$.*

Απόδειξη. Η παραπάνω παράσταση είναι ίση με $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (n-x-y)^2 - (x+y+n-x-y)) \geq_{cauchy-schwarz} \frac{1}{2}(\frac{1}{3}n^2 - n)$. Η ισότητα πραγματοποιείται όταν $x = y = n - x - y$, δηλαδή $x = y = \frac{n}{3}$. □

5. ($\star$) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο γράφημα με n κορυφές. Κάθε κορυφή διαλέγει ομοιόμορφα τυχαία 2 κορυφές και τοποθετούμε μη-κατευθυνόμενες ακμές προς αυτές. Η τυχαία επιλογή γίνεται με επανάληψη και μπορεί μια κορυφή v να επιλέξει και τον εαυτό της στην οποία περίπτωση παραλείπουμε αυτή τη θηλιά. Παρατηρούμε ότι οι ακμές θα είναι περίπου $2n$ αλλά μπορεί κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό μικρότερο από 2 αν επέλεξαν τον εαυτό τους ή την ίδια κορυφή δύο φορές. Μπορεί επίσης κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό αρκετά μεγαλύτερο από 4 αν άλλες κορυφές έτυχε να τις επιλέξουν.

   Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα συνεκτικό για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. Προφανώς για να μην είναι το γράφημα συνεκτικό, θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία συνεκτική συνιστώσα με το πολύ $\frac{n}{2}$ κορυφές. Θα φράξουμε τη μέση τιμή του πλήθους των συνιστωσών με το πολύ τόσες κορυφές. Έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[X] \leq \sum_{k=1}^{n/2} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{2(n-k)}$$

   Αυτό γιατί παίρνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς k κόμβων και πολλαπλασιάζουμε με την πιθανότητα να μην υπάρχουν ακμές μεταξύ των k κόμβων και των υπόλοιπων κόμβων του γραφήματος. Τώρα, έστω $A = \sum_{k=1}^{n/2e} \binom{n}{k} \cdot (\frac{k}{n})^{2k} \cdot (\frac{n-k}{n})^{2(n-k)}$ και $B = \sum_{k=n/2e}^{n/2} \binom{n}{k} \cdot (\frac{k}{n})^{2k} \cdot (\frac{n-k}{n})^{2(n-k)}$. Προφανώς $\mathbb{E}[X] \leq A + B$.

   Όμως, έχουμε $A \leq \sum_{k=1}^{n/2e} \binom{n}{k} \cdot (\frac{k}{n})^{2k} \leq \sum_{k=1}^{n/2e} \frac{n^k}{k!} \cdot (\frac{k}{n})^{2k}$ και $k! \geq e \cdot (\frac{k}{e})^k$, άρα $A \leq \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n/2e} (\frac{ek}{n})^k$. Αφού $k < n/e$, η συνάρτηση $f(x) = (\frac{ex}{n})^x$ έχει μέγιστο στο $x = n/2e$. Άρα $A \leq \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n/2e} (\frac{1}{2})^{n/2e} = \frac{n}{2e^2} (\frac{1}{2})^{n/2e}$, δηλαδή $A \to 0$ όταν το n τείνει στο άπειρο.

Για το B, έχουμε όπως και παραπάνω ότι $B \leq \frac{1}{e}\sum_{k=n/2e}^{n/2}(\frac{ek}{n})^k \cdot (\frac{n-k}{n})^{2(n-k)}$. Επειδή $\frac{n-k}{n} < 1$, έχουμε ότι $(\frac{n-k}{n})^{2(n-k)} \leq (\frac{n-\frac{n}{2e}}{n})^{2(n-\frac{n}{2})} = (\frac{2e-1}{2e})^n$. Άρα $B \leq \frac{1}{e}\sum_{k=n/2e}^{n/2}(\frac{ek}{n})^k \cdot (\frac{2e-1}{2e})^n$, και εφόσον στο διάστημα που εξετάζουμε το $(\frac{ek}{n})^k$ μεγιστοποιείται για $k = n/2$, έχουμε $B \leq \frac{1}{e}\sum_{k=n/2e}^{n/2}(\sqrt{\frac{e}{2}})^n \cdot (\frac{2e-1}{2e})^n = \frac{1}{e} \cdot (\frac{n}{2} - \frac{n}{2e}) \cdot (\sqrt{\frac{e}{2}} \cdot \frac{2e-1}{2e})^n \leq \frac{1}{e} \cdot n \cdot 0.96^n$, το οποίο προφανώς τείνει στο 0, όταν το n πάει στο άπειρο.

Άρα έχουμε ότι $\mathbb{E}[X] \leq A + B \to 0$. Συνεπώς και η πιθανότητα να υπάρχει συνεκτική συνιστώσα με μέγεθος το πολύ $n/2$ τείνει στο μηδέν. Άρα το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα συνεκτικό για αρκετά μεγάλο n.

$\square$