



Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και  
Μηχανικών Υπολογιστών

---

## Γραφοθεωρία Ομάδα Ασκήσεων Νο. 1

---

Ομάδα 7  
Αξιώτης Κυριάκος  
Αρσένης Γεράσιμος

2 Μαΐου 2015

## 1 Βαθμοί, κύκλοι, μονοπάτια

- 1.9 (\*) Για κάθε θετικό ακέραιο  $\alpha$  και για κάθε γράφημα  $G$ , το  $V(G)$  περιέχει περισσότερες από  $(1 - \frac{1}{\alpha}) \cdot n(G)$  κορυφές βαθμού αυστηρά μικρότερου του  $2\alpha\delta^*(G)$ .

Απόδειξη. μπλα μπλα...

□

- 1.10 (\*\*) Κάθε γράφημα  $G$  με τουλάχιστον 2 κορυφές και  $e(G) \geq 2$ , έχει περιφέρεια το πολύ  $2 \cdot \log_2(n)$ .

Απόδειξη. μπλα μπλα..

□

## 2 Άκυκλα γραφήματα

## 3 Συνεκτικότητα

## 4 Εμβαπτίσεις

## 5 Δομές σε γραφήματα

## 6 Χρωματισμοί και άλλα

- 6.9 (\*\*) Ένα γράφημα λέγεται άρτιο αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Δείξτε ότι αν το  $G$  είναι συνεκτικό γράφημα, τότε  $|\{H \subseteq_{\pi\alpha} G | H \text{ άρτιο}\}| = 2^{m(G)-n(G)+1}$ .

Απόδειξη. Θεωρούμε  $S = \{H \subseteq_{\pi\alpha} G | H \text{ άρτιο}\}$ . Θα ορίσουμε μία 1-1 και επί συνάρτηση  $f$  από το σύνολο  $\{H | H \subseteq_{\pi\alpha} G\}$ , δηλαδή το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του  $G$ , στο  $S \times \{X \subseteq V(G) | |X| \bmod 2 = 0\}$ , δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των άρτιων παραγόμενων γραφημάτων με την οικογένεια υποσυνόλων του  $V(G)$  με άρτιο πληθάνημο. Το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του  $G$  έχει πληθάνημο  $2^{m(G)}$ , αφού κάθε ακμή μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει στο παραγόμενο υπογράφημα. Επίσης η οικογένεια υποσυνόλων του  $V(G)$  με άρτιο πληθάνημο έχει πληθάνημο  $2^{n(G)-1}$ , αφού έχουμε 2 επιλογές για κάθε κορυφή (θα μπει ή δεν θα μπει στο υποσύνολο), εκτός από την τελευταία, της οποίας η τοποθέτηση καθορίζεται μοναδικά από το αν το υποσύνολο έχει άρτιο ή περιττό αριθμό κορυφών. Λόγω του λήμματος 1, η  $f$  είναι 1-1 και επί, άρα έχουμε ότι  $2^{m(G)} = |S| \cdot 2^{n(G)-1} \Rightarrow |S| = 2^{m(G)-n(G)+1}$ , το οποίο είναι το ζητούμενο. □