Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

Γραφοθεωρία
Ομάδα Ασκήσεων No. 1

Ομάδα 7
Αξιώτης Κυριάκος
Αρσένης Γεράσιμος

2 Μαΐου 2015

1 Βαθμοί, κύκλοι, μονοπάτια

1.9 ($\star$) Για κάθε θετικό ακέραιο α και για κάθε γράφημα G, το $V(G)$ περιέχει περισσότερες από $\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot n(G)$ κορυφές βαθμού αυστηρά μικρότερου του $2\alpha\delta^*(G)$.

Απόδειξη. μπλα μπλα... $\square$

1.10 ($\star\star$) Κάθε γράφημα G με τουλάχιστον 2 κορυφές και $\epsilon(G) \geq 2$, έχει περιφέρεια το πολύ $2 \cdot \log_2(n)$.

Απόδειξη. μπλα μπλα.. $\square$

2 Άκυκλα γραφήματα

3 Συνεκτικότητα

4 Εμβαπτίσεις

5 Δομές σε γραφήματα

6 Χρωματισμοί και άλλα

6.9 ($\star\star$) Ένα γράφημα λέγεται άρτιο αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Δείξτε ότι αν το G είναι συνεκτικό γράφημα, τότε $|H \subset_( )G|H| = 2^(m(G) - n(G) + 1)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $S = \{H \subset_{\pi\alpha} G | H \text{άρτιο}\}$. Θα ορίσουμε μία 1-1 και επί συνάρτηση f από το σύνολο $\{H | H \subset_{\pi\alpha} G\}$, δηλαδή το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του G, στο $S \times \{X \subset V(G) | |X| mod 2 = 0\}$, δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των άρτιων παραγόμενων γραφημάτων με την οικογένεια υποσυνόλων του $V(G)$ με άρτιο πληθάριθμο. Το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του G έχει πληθάριθμο $2^{m(G)}$, αφού κάθε ακμή μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει στο παραγόμενο υπογράφημα. Επίσης η οικογένεια υποσυνόλων του $V(G)$ με άρτιο πληθάριθμο έχει πληθάριθμο $2^(n(G) - 1)$, αφού έχουμε 2 επιλογές για κάθε κορυφή (θα μπει ή δεν θα μπει στο υποσύνολο), εκτός από την τελευταία, της οποίας η τοποθέτηση καθορίζεται μοναδικά από το αν το υποσύνολο έχει άρτιο ή περιττό αριθμό κορυφών. Λόγω του λήμματος 1, η f είναι 1-1 και επί, άρα έχουμε ότι $2^m(G) = |S| \cdot 2^(n(G) - 1) \Rightarrow |S| = 2^(m(G) - n(G) + 1)$, το οποίο είναι το ζητούμενο. $\square$