



Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών  
Υπολογιστών

---

## Γραφοθεωρία Ομάδα Ασκήσεων Νο. 2

---

Ομάδα 7  
Αξιώτης Κυριάκος  
Αρσένης Γεράσιμος

17 Μαΐου 2015

1. Σε ένα  $G(n, p)$  η πιθανότητα μιας κορυφής να έχει βαθμό  $k$  είναι  $\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$ . Δείξτε ότι ο μέσος βαθμός είναι  $(n-1)p$  με απευθείας υπολογισμό, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη γραμμικότητα της μέσης τιμής.

*Απόδειξη.* Θα χρειαστούμε τα εξής λήμματα:

**Λήμμα 1.** Έστω δύο τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Bernoulli με παραμέτρους  $n, p$  και  $m, p$  αντίστοιχα, δηλαδή  $X \sim B(n, p), Y \sim B(m, p)$ . Τότε για το άθροισμά τους ισχύει  $X + Y \sim B(n + m, p)$ .

*Απόδειξη.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X + Y = k] &= \mathbb{P}[(X = 0 \wedge Y = k) \vee (X = 1 \wedge Y = k - 1) \vee \dots \vee (X = k \wedge Y = 0)] \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}[X = i \wedge Y = k - i] \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}[X = i] \cdot \mathbb{P}[Y = k - i] \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\ &= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k} \end{aligned}$$

□

**Λήμμα 2.** Έστω  $\{X_i\}_{i=1 \dots k}$  μια οικογένεια τ.μ. για τις οποίες ισχύει  $X_i \sim B(n_i, p)$ . Τότε  $\sum_{i=1}^k X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right)$ .

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 και επαγωγή στο  $k$  προκύπτει το ζητούμενο. □

**Λήμμα 3.** Αν  $X \sim B(n, p)$  τότε  $\mathbb{E}[X] = np$ .

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^n i \cdot \mathbb{P}[X = i] \\
&= \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^n np \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{(n-1)-(i-1)} \\
&= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i} \\
&= np \cdot (p + (1-p))^{n-1} = np
\end{aligned}$$

□

Για το γράφημα  $G(n, p)$  έχουμε ότι ο βαθμός μιας κορυφής  $v_i$  είναι μια τυχαία μεταβλητή  $d_i$  που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παραμέτρους  $n-1, p$ , δηλαδή  $d_i \sim B(n-1, p)$ .

Για τον μέσο βαθμό κορυφής ισχύει:

$$d(G) = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

όπου  $X = \sum_{i=1}^n d_i$ .

Σύμφωνα με το Λήμμα 2 έχουμε ότι  $X \sim B(\sum_{i=1}^n (n-1), p) = B(n(n-1), p)$ .

Από το Λήμμα 3,  $\mathbb{E}[X] = n(n-1)p$ . Άρα έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[d(G)] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X] = (n-1)p$$

□

2. Δείξτε ότι το τυχαίο γράφημα  $G(n, p)$  με  $p = n^{-0.7}$  δεν έχει σχεδόν σίγουρα 4-κλίκα για αρκετά μεγάλα  $n$ .

Απόδειξη.

□

3. (★) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο κατευθυνόμενο γράφημα. Για κάθε κορυφή  $v$  επιλέγουμε ομοιόμορφα τυχαία μια κορυφή  $u$  και τοποθετούμε την ακμή  $v \rightarrow u$ . Κάθε κορυφή έχει μόνο μια εξερχόμενη ακμή και μπορεί να υπάρχουν θηλιές. Έστω  $r(v)$  ο αριθμός των κορυφών στις οποίες μπορούμε να φτάσουμε από την  $v$ .

- Για  $k = 1, \dots, n$  ποιά η πιθανότητα  $r(v) = k$ . Η πιθανότητα θα έχει μορφή γινομένου.
- Δείξτε ότι για μία κορυφή  $v$ ,  $Pr[r(v) \leq \sqrt{n}/10] \leq 1/3$  και  $Pr[r(v) \geq 10\sqrt{n}] \leq 1/3$ .

Απόδειξη.

□

4. (★) Θεωρήστε το τυχαίο γράφημα  $G(n, p)$  με  $p = 6.6/n$ . Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα μη 3-χρωματίσιμο για αρκετά μεγάλα  $n$ .

*Απόδειξη.*

□

5. (★) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο γράφημα με  $n$  κορυφές. Κάθε κορυφή διαλέγει ομοιόμορφα τυχαία 2 κορυφές και τοποθετούμε μη-κατευθυνόμενες ακμές προς αυτές. Η τυχαία επιλογή γίνεται με επανάληψη και μπορεί μια κορυφή  $v$  να επιλέξει και τον εαυτό της στην οποία περίπτωση παραλείπουμε αυτή τη θηλιά. Παρατηρούμε ότι οι ακμές θα είναι περίπου  $2n$  αλλά μπορεί κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό μικρότερο από 2 αν επέλεξαν τον εαυτό τους ή την ίδια κορυφή δύο φορές. Μπορεί επίσης κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό αρκετά μεγαλύτερο από 4 αν άλλες κορυφές έτυχε να τις επιλέξουν.

Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα συνεκτικό για αρκετά μεγάλα  $n$ .

*Απόδειξη.*

□