Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Γραφοθεωρία
Ομάδα Ασκήσεων Νο. 2

Ομάδα 7
Αξιώτης Κυριάκος
Αρσένης Γεράσιμος

17 Μαΐου 2015

1. Σε ένα $G(n,p)$ η πιθανότητα μιας κορυφής να έχει βαθμό k είναι $\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$. Δείξτε ότι ο μέσος βαθμός είναι $(n-1)p$ με απευθείας υπολογισμό, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη γραμμικότητα της μέσης τιμής.

   Απόδειξη. □

2. Δείξτε ότι το τυχαίο γράφημα $G(n,p)$ με $p = n^{-0.7}$ δεν έχει σχεδόν σίγουρα 4-κλίκα για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. □

3. ($\star$) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο κατευθυνόμενο γράφημα. Για κάθε κορυφή v επιλέγουμε ομοιόμορφα τυχαία μια κορυφή u και τοποθετούμε την ακμή $v \to u$. Κάθε κορυφή έχει μόνο μια εξερχόμενη ακμή και μπορεί να υπάρχουν θηλιές. Έστω $r(v)$ ο αριθμός των κορυφών στις οποίες μπορούμε να φτάσουμε από την v.

   - Για $k = 1, \ldots, n$ ποιά η πιθανότητα $r(v) = k$. Η πιθανότητα θα έχει μορφή γινομένου.
   - Δείξτε ότι για μία κορυφή v, $Pr[r(v) \leq \sqrt{n}/10] \leq 1/3$ και $Pr[r(v) \geq 10\sqrt{n}] \leq 1/3$.

   Απόδειξη. □

4. ($\star$) Θεωρήστε το τυχαίο γράφημα $G(n,p)$ με $p = 6.6/n$. Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα μή 3-χρωματίσιμο για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. □

5. ($\star$) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο γράφημα με n κορυφές. Κάθε κορυφή διαλέγει ομοιόμορφα τυχαία 2 κορυφές και τοποθετούμε μη-κατευθυνόμενες ακμές προς αυτές. Η τυχαία επιλογή γίνεται με επανάληψη και μπορεί μια κορυφή v να επιλέξει και τον εαυτό της στην οποία περίπτωση παραλείπουμε αυτή τη θηλιά. Παρατηρούμε ότι οι ακμές θα είναι περίπου $2n$ αλλά μπορεί κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό μικρότερο από 2 αν επέλεξαν τον εαυτό τους ή την ίδια κορυφή δύο φορές. Μπορεί επίσης κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό αρκετά μεγαλύτερο από 4 αν άλλες κορυφές έτυχε να τις επιλέξουν.

   Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα συνεκτικό για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. □