Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Γραφοθεωρία
Ομάδα Ασκήσεων No. 2

Ομάδα 7
Αξιώτης Κυριάκος
Αρσένης Γεράσιμος

17 Μαΐου 2015

1. Σε ένα $G(n,p)$ η πιθανότητα μιας κορυφής να έχει βαθμό k είναι $\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$. Δείξτε ότι ο μέσος βαθμός είναι $(n-1)p$ με απευθείας υπολογισμό, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη γραμμικότητα της μέσης τιμής.

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε τα εξής λήμματα:

Λήμμα 1. *Έστω δύο τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Bernoulli με παραμέτρους n, p και m, p αντίστοιχα, δηλαδή $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$. Τότε για το άθροισμά τους ισχύει $X + Y \sim B(n+m,p)$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X+Y=k] &= \mathbb{P}[(X=0 \land Y=k) \lor (X=1 \land Y=k-1) \lor \ldots \lor (X=k \land Y=0)] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X=i \land Y=k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X=i] \cdot \mathbb{P}[Y=k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \\
&= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 2. *Έστω $\{X_i\}_{i=1\ldots k}$ μια οικογένεια τ.μ. για τις οποίες ισχύει $X_i \sim B(n_i,p)$. Τότε $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 και επαγωγή στο k προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 3. *Αν $X \sim B(n,p)$ τότε $\mathbb{E}[X] = np$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \mathbb{P}[X = i] \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} np \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{(n-1)-(i-1)} \\
&= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i} \\
&= np \cdot (p + (1-p))^{n-1} = np
\end{aligned}$$

□

Για το γράφημα $G(n,p)$ έχουμε ότι ο βαθμός μιας κορυφής v_i είναι μια τυχαία μεταβλητή d_i που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παραμέτρους $n-1, p$, δηλαδή $d_i \sim B(n-1, p)$.

Για τον μέσο βαθμό κορυφής ισχύει:

$$d(G) = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

όπου $X = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 2 έχουμε ότι $X \sim B\left(\sum_{i=1}^{n}(n-1), p\right) = B(n(n-1), p)$.

Από το Λήμμα 3, $\mathbb{E}[X] = n(n-1)p$. Άρα έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[d(G)] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X] = (n-1)p$$

□

2. Δείξτε ότι το τυχαίο γράφημα $G(n,p)$ με $p = n^{-0.7}$ δεν έχει σχεδόν σίγουρα 4-κλίκα για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. □

3. ($\star$) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο κατευθονόμενο γράφημα. Για κάθε κορυφή v επιλέγουμε ομοιόμορφα τυχαία μια κορυφή u και τοποθετούμε την ακμή $v \to u$. Κάθε κορυφή έχει μόνο μια εξερχόμενη ακμή και μπορεί να υπάρχουν θηλιές. Έστω $r(v)$ ο αριθμός των κορυφών στις οποίες μπορούμε να φτάσουμε από την v.

   - Για $k = 1, \ldots, n$ ποιά η πιθανότητα $r(v) = k$. Η πιθανότητα θα έχει μορφή γινομένου.
   - Δείξτε ότι για μία κορυφή v, $Pr[r(v) \leq \sqrt{n}/10] \leq 1/3$ και $Pr[r(v) \geq 10\sqrt{n}] \leq 1/3$.

   Απόδειξη. □

4. ($\star$) Θεωρήστε το τυχαίο γράφημα $G(n,p)$ με $p = 6.6/n$. Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα μή 3-χρωματίσιμο για αρκετά μεγάλα n.

Απόδειξη. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο πλήθος των 3-χρωματισμών του γραφήματός μας. Αν σταθεροποιήσουμε το πλήθος των κορυφών που έχουν το κάθε χρώμα, θεωρήσουμε δηλαδή ότι υπάρχουν x κορυφές με το πρώτο χρώμα, y κορυφές με το δεύτερο χρώμα και $n-x-y$ κορυφές με το τρίτο χρώμα, τότε ο αναμενόμενος αριθμός 3-χρωματισμών του γραφήματός μας είναι $\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \cdot (1-p)^{\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{n-x-y}{2}}$. Ο πρώτος παράγοντας αντιστοιχεί στο πλήθος τρόπων για την αντιστοίχιση χρωμάτων στις κορυφές και ο δεύτερος στην πιθανότητα να μην έχουμε ακμές μεταξύ κορυφών ίδιου χρώματος. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε $E[X] = \sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \cdot (1-p)^{\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{n-x-y}{2}}$. Τώρα, γνωρίζουμε ότι η έκφραση $\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}$ μεγιστοποιείται για $x = y = \frac{n}{3}$ και η μέγιστη τιμή της είναι $\frac{n!}{\frac{n}{3}!^3}$. Αντίστοιχα, η $\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{n-x-y}{2}$ ελαχιστοποιείται για $x = y = \frac{n}{3}$, και επειδή $1-p < 1$, έχουμε από τα παραπάνω ότι $E[X] \leq \sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{\frac{n}{3}!^3}(1-p)^{3\cdot\binom{\frac{n}{3}}{2}}$. Όμως $(1-p)^{3\cdot\binom{\frac{n}{3}}{2}} \leq e^{-p\cdot 3\cdot\binom{\frac{n}{3}}{2}} = e^{-\frac{6.6}{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdot(\frac{n}{3}-1)} = e^{-1.1n}\cdot e^{3.3}$. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη διπλή ανισότητα $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq e(\frac{n+1}{e})^{n+1}$, παίρνουμε ότι $\frac{n!}{\frac{n}{3}!^3} \leq \frac{e(\frac{n+1}{e})^{n+1}}{e^3(\frac{n}{3e})^n} = e^{-3}\cdot(\frac{n+1}{n})^n\cdot(n+1)\cdot 3^n \leq e^{-2}\cdot n^2\cdot 3^n$. Συνολικά έχουμε ότι $E[X] \leq n^2\cdot e^{-2}\cdot n^2\cdot 3^n\cdot e^{-1.1n}\cdot e^{3.3} \leq n^4\cdot e^{1.3}\cdot(\frac{e^{ln3}}{e^{1.1}})^n \leq n^4\cdot e^{1.3}\cdot e^{-0.001n}$, το οποίο τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο άπειρο. Άρα για αρκετά μεγάλο n έχουμε ότι ο μέσος αριθμός 3-χρωματισμών του γραφήματος τείνει στο μηδέν, άρα και η πιθανότητα να υπάρχει 3-χρωματισμός τείνει στο 0. Άρα σχεδόν σίγουρα το γράφημα δεν είναι 3-χρωματίσιμο. □

Λήμμα 1: Το $\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}$ μεγιστοποιείται για $x = y = \frac{n}{3}$.

Απόδειξη. Έστω ότι το ζητούμενο δεν ισχύει και A η μέγιστη τιμή της παράστασης και χωρίς βλάβη της γενικότητας $x < \frac{n}{3}$ και $y > \frac{n}{3}$. Θεωρούμε $x' = x+1$ και $y' = y-1$. Τότε η νέα τιμή της παράστασης είναι $A' = \frac{n!}{(x+1)!(y-1)!(n-x-y)!} = A\cdot\frac{y}{x+1} \geq A$. Αυτό είναι άτοπο, άρα το ζητούμενο ισχύει. □

Λήμμα 2: Το $\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{n-x-y}{2}$ ελαχιστοποιείται για $x = y = \frac{n}{3}$.

Απόδειξη. Η παραπάνω παράσταση είναι ίση με $\frac{1}{2}(x^2+y^2+(n-x-y)^2-(x+y+n-x-y)) \geq_{cauchy-schwarz} \frac{1}{2}(\frac{1}{3}n^2-n)$. Η ισότητα πραγματοποιείται όταν $x = y = n-x-y$, δηλαδή $x = y = \frac{n}{3}$. □

5. ($\star$) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο γράφημα με n κορυφές. Κάθε κορυφή διαλέγει ομοιόμορφα τυχαία 2 κορυφές και τοποθετούμε μη-κατευθυνόμενες ακμές προς αυτές. Η τυχαία επιλογή γίνεται με επανάληψη και μπορεί μια κορυφή v να επιλέξει και τον εαυτό της στην οποία περίπτωση παραλείπουμε αυτή τη θηλιά. Παρατηρούμε ότι οι ακμές θα είναι περίπου $2n$ αλλά μπορεί κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό μικρότερο από 2 αν επέλεξαν τον εαυτό τους ή την ίδια κορυφή δύο φορές. Μπορεί επίσης κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό αρκετά μεγαλύτερο από 4 αν άλλες κορυφές έτυχε να τις επιλέξουν.

Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα συνεκτικό για αρκετά μεγάλα n.

Απόδειξη. □