Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Γραφοθεωρία
Ομάδα Ασκήσεων No. 3

Ομάδα 7
Αξιώτης Κυριάκος
Αρσένης Γεράσιμος

7 Ιουνίου 2015

1 Χρωματισμοί κορυφών και ακμών

1.6 *Έστω G γράφημα όπου $\Delta(G) \leq 3$. Δείξτε ότι το G είναι 4-ακμοχρωματίσιμο.*

Θα δείξουμε ότι γραμμικό γράφημα $L(G)$ του G είναι 4 χρωματίσιμο.

Λήμμα 1. *Αν $K_4 \subseteq L(G)$ τότε $\Delta(G) \geq 4$.*

Απόδειξη. Έστω e_1, e_2, e_3, e_4 οι ακμές του G που στο $L(G)$ είναι κορυφές 4-κλίκας. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ζεύγος e_i, e_j θα πρέπει να έχει κοινό άκρο.

Έστω $e_1 = \{u, v\}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $e_2 = \{u, w\}$. Αν η e_3 έχει κοινό άκρο με την e_1 την κορυφή v, τότε αναγκαστικά $e_3 = \{v, w\}$ ώστε να έχει κοινό άκρο και με την e_3. Σε αυτή την περίπτωση όμως η e_4 δεν μπορεί να έχει κοινό άκρο και με τις 3 προηγούμενες ακμές.

Άρα η e_3 έχει κοινό άκρο με την e_1 το u, δηλαδή $e_3 = \{u, x\}$ για κάποια κορυφή x (διαφορετική από τις $\{u, v, w\}$).

Τέλος, η e_4 θα πρέπει να έχει κοινό άκρο με όλες τις υπόλοιπες και αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $e_4 = \{u, y\}$ για κάποια νέα κορυφή y.

Συνεπώς $\Delta(G) \geq d(u) = 4$. $\square$

Εφόσον $\Delta(G) \leq 3$, από το Λήμμα 1 έχουμε ότι το $L(G)$ δεν μπορεί να περιέχει το K_4 ως υπογράφημα άρα δεν μπορεί να το περιέχει και ως ελάσσον.

Από την εικασία του Handwinger για την περίπτωση $k = 4$ (για το συγκεκριμένο k έχει αποδειχθεί ότι η εικασία ισχύει) έχουμε ότι $\chi(L(G)) < 4$ άρα μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές του G με 4 (ή λιγότερα) χρώματα.

1.7 *Δείξτε ότι υπάρχει c τέτοιο ώστε κάθε ένωση δύο επίπεδων γραφημάτων να έχει χρωματικό αριθμό το πολύ c.*

Λήμμα 2. *Αν $G = G_1 \cup G_2$ τότε $\chi(G) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $\chi(G_1) = k, \chi(G_2) = l$ και $\chi_{G_1} : V(G_1) \to [k], \chi_{G_2} : V(G_2) \to [l]$ οι συναρτήσεις χρωματισμού του καθενός.

Επεκτείνουμε τις παραπάνω συναρτήσεις ως εξής:

$$\overline{\chi_{G_i}}(u) = \begin{cases} \chi_{G_i}(u) & ,\ u \in V(G_i) \\ 1 & ,\ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ορίζουμε το σύνολο $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ και χρωματίζουμε το G με χρώματα από το S ως εξής:

$$\chi_G(u) = (\overline{\chi_{G_1}}(u), \overline{\chi_{G_2}}(u))$$

Ο παραπάνω είναι έγκυρος χρωματισμός αφού αν $\chi_G(u) = \chi_G(v)$ τότε $\overline{\chi_{G_i}}(u) = \overline{\chi_{G_i}}(v)$ για $i = 1, 2$ επομένως $\{u, v\} \notin E(G_i)$ και έτσι $\{u, v\} \notin E(G)$.

Άρα $\chi(G) \leq |S| = \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$. $\square$

Από το θεώρημα των 4 χρωμάτων έχουμε ότι αν G_1, G_2 επίπεδα γραφήματα τότε $\chi(G_1), \chi(G_2) \leq 4$ επομένως από το Λήμμα 2: $\chi(G_1 \cup G_2) \leq 16$.

2 Διαπεράσεις

2.1 ($\star$) *Για ποιά k και l το γράφημα $G_{k,l} = P_l^{[k]}$ είναι Χαμιλτονιανό;*

Για $k = 1$, κανένα από τα P_l με $l \geq 1$ δεν είναι Χαμιλτονιανό.

Για $k \geq 2$, θα δείξουμε ότι για κάθε $l \geq 1$ το $P_l^{[k]}$ είναι Χαμιλτονιανό.

Παρατήρηση 3. *Το $P_l^{[2]} = P_l \times P_l$ είναι ισόμορφο με την $(l+1, l+1)$-σχάρα η οποία είναι Χαμιλτονιανό γράφημα για κάθε $l \geq 1$ (διαπερνάμε όλες τις κορυφές της πρώτης στήλης από πάνω προς τα κάτω, της δεύτερης στήλης από κάτω προς τα πάνω κ.ο.κ.).*

Λήμμα 4. *Αν G είναι Χαμιλτονιανό τότε το $G \times P_k$ είναι επίσης Χαμιλτονιανό.*

Απόδειξη. Το γράφημα $G \times P_k$ είναι ουσιαστικά το G όπου κάθε κορυφή του έχει αντικατασταθεί από ένα μονοπάτι P_k (και έχουν προστεθεί οι κατάλληλες ακμές μεταξύ κορυφών των μονοπατιών).

Ας πάρουμε ένα κύκλο Hamilton του G:

$$u_1 \to \ldots \to u_n \to u_1$$

Αυτός μπορεί να μετασχηματιστεί απευθείας σε κύκλο Hamilton του $G \times P_k$ ως εξής:

$$(u_1^1 \to \ldots \to u_1^k) \to \ldots \to (u_n^1 \to \ldots \to u_n^k) \to u_1^1$$

όπου στο παραπάνω u_i^j είναι η j-οστή κορυφή του μονοπατιού το οποίο έχει αντικαταστήσει την κορυφή u_i του G στον $G \times P_k$. □

Από το Λήμμα 4 και την Παρατήρηση 3 έχουμε επαγωγικά ότι για κάθε $k \geq 2$ το $P_l^{[k]}$ είναι Χαμιλτονιανό για οποιδήποτε $l \geq 1$.

3 Επίπεδα γραφήματα

4 Τέλεια γραφήματα

5 Μερικές διατάξεις

6 k-δέντρα

7 Άπειρα γραφήματα

8 Κανονικά γραφήματα και Ταιριάσματα

9 Διάφορα