Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

Γραφοθεωρία
Ομάδα Ασκήσεων No. 1

Ομάδα 7
Αξιώτης Κυριάκος
Αρσένης Γεράσιμος

2 Μαΐου 2015

1 Βαθμοί, κύκλοι, μονοπάτια

1.9 ($\star$) Για κάθε θετικό ακέραιο α και για κάθε γράφημα G, το $V(G)$ περιέχει περισσότερες από $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot n(G)$ κορυφές βαθμού αυστηρά μικρότερου του $2\alpha\delta^*(G)$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε ότι $\delta^*(G)=\max\{k \mid \exists H\subseteq G \text{ με } \delta(H)\geq k\}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$|\{u \mid u\in V(G)\wedge d(u)<2\alpha\delta^*(G)\}|>\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)n(G)$$

Έστω λοιπόν, προς απαγωγή σε άτοπο ότι:

$$\begin{aligned}
|\{u \mid u\in V(G)\wedge d(u)<2\alpha\delta^*(G)\}| &\leq \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)n(G)\\
\Leftrightarrow n(G)-|\{u \mid u\in V(G)\wedge d(u)\geq 2\alpha\delta^*(G)\}| &\leq \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)n(G)\\
\Leftrightarrow |\{u \mid u\in V(G)\wedge d(u)\geq 2\alpha\delta^*(G)\}| &\geq \frac{1}{\alpha}n(G)
\end{aligned}$$

Ισχύει όμως:

$$2m(G)=\sum_{u\in V(G)}d(u)\geq\sum_{u\in V(G):d(u)\geq 2\alpha\delta*(G)}d(u)\geq\frac{1}{\alpha}n(G)\cdot 2\alpha\delta*(G)=2n(G)\delta^*(G)$$

$$m(G)\geq n(G)\cdot\delta^*(G)\Leftrightarrow\epsilon(G)\geq\delta^*(G)$$

Από το Πόρισμα 3.1 των σημειώσεων του μαθήματος γνωρίζουμε ότι $\delta^*(G)\geq\epsilon(G)$, συνεπώς θα έχουμε:

$$\epsilon(G)=\delta^*(G)$$

TODO: Εδώ καταλήγουμε σε άτοπο γιατί αν ισχύει ισότητα τότε οι παραπάνω ανισότητες είναι αυστηρές και αυτό δεν μπορεί να ισχύει [...] □

1.10 ($\star\star$) Κάθε γράφημα G με τουλάχιστον 2 κορυφές και $\epsilon(G)\geq 2$, έχει περιφέρεια το πολύ $2\cdot\log_2(n)$.

Απόδειξη. μπλα μπλα.. □

2 Άκυκλα γραφήματα

2.10 ($\star$) Σε κάθε δέντρο με n κορυφές και διάμετρο τουλάχιστον $2k-3$ υπάρχουν τουλάχιστον $n-k$ διαφορετικά μονοπάτια μήκους k.

Απόδειξη. *** ΛΑΘΟΣ ***

Έστω u, v δύο αντιδιαμετρικοί κόμβοι με $d(u, v) = \mathrm{diam}(u, v)$ και έστω P το μονοπάτι που τους ενώνει. Υπάρχει κόμβος w πάνω στο P τέτοιος ώστε είτε $d(u, w) \geq k-1$ είτε $d(w, v) \geq k-1$ (διαφορετικά θα είχαμε $\mathrm{diam}(G) = d(u, v) = d(u, w) + d(w, v) \leq 2(k-2) = 2k-4$).

Υποθέτουμε λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $d(u, w) \geq k-1$ και μάλιστα επιλέγουμε το κοντινότερο τέτοιο w στο u, δηλαδή $d(u, w) = k-1$.

Στο μονοπάτι P' από u στον w υπάρχουν ακριβώς k κορυφές. Θα δείξουμε ότι από κάθε μία από τις υπόλοιπες $n-k$ κορυφές μπορούμε να δημιουργήσουμε μονοπάτια μήκους k που να καταλήγουν σε κορυφές του P' και τα μονοπάτια αυτά θα είναι διαφορετικά μεταξύ τους αφού το καθένα έχει διαφορετική αφετηρία.

□

3 Συνεκτικότητα

4 Εμβαπτίσεις

5 Δομές σε γραφήματα

5.9 ($\star$) Κάθε γράφημα περιέχει τουλάχιστον $\frac{m(G)(4m(G)-n^2(G))}{3n(G)}$ τρίγωνα.

Απόδειξη. Έστω μια ακμή $\{u, v\}$. Η ιδέα είναι να βρούμε το ελάχιστο πλήθος τριγώνων στα οποία μπορεί να ανήκει αυτή η ακμή και έτσι μετά αθροίζοντας κατάλληλα να μπορέσουμε να φράξουμε από κάτω το συνολικό πλήθος των τριγώνων του γραφήματος.

Ορίζουμε $U = N_G(u) \backslash v, V = N_G(v) \backslash u$. Ισχύει ότι $|U| + |V| = d(u) + d(v) - 2$. Επίσης, $|U \cup V| \leq n(G) - 2$ αφού δεν υπάρχουν πάνω από $n(G) - 2$ κορυφές που να απομένουν στο γράφημα.

Άρα, έχουμε:

$$|U \cap V| = |U| + |V| - |U \cup V| \geq d(u) + d(v) - n(G)$$

Κάθε κορυφή που ανήκει στο $U \cap V$ δημιουργεί τρίγωνο με τις κορυφές u, v. Άρα το πλήθος των τριγώνων $|T_{\{u,v\}}|$ που μπορεί να ανήκει η ακμή $\{u, v\}$ είναι τουλάχιστον $d(u) + d(v) - n(G)$.

Αν συμβολίσουμε με T το σύνολο των τριγώνων του G έχουμε:

$$3|T| = \sum_{\{u,v\}\in E(G)} T_{\{u,v\}}$$

επειδή κάθε τρίγωνο περιέχει 3 ακμές.

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
|T| &\geq \frac{1}{3}\sum_{\{u,v\}\in E(G)} (d(u)+d(v)-n(G)) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{\{u,v\}\in E(G)} (d(u)+d(v)) - \frac{n(G)m(G)}{3} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{u\in V(G)} d^2(u) - \frac{n(G)m(G)}{3} \\
&\geq \frac{1}{3n(G)}\left(\sum_{u\in V(G)} d(u)\right)^2 - \frac{n(G)m(G)}{3} \\
&= \frac{4m^2(G)}{3n(G)} - \frac{n(G)m(G)}{3} \\
&= \frac{m(G)(4m(G)-n^2(G))}{3n(G)}
\end{aligned}$$

Όπου το 4ο βήμα προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$d(u_1)\cdot 1 + d(u_2)\cdot 2 + \ldots + d(u_n)\cdot 1 \leq (d^2(u_1)+\ldots+d^2(u_n))\cdot(1+\ldots+1) = (d^2(u_1)+\ldots+d^2(u_n))\cdot n$$

□

5.10 (⋆⋆) THELEI FTIAKSIMO Δείξτε ότι ένα πολυγράφημα είναι σειριακό-παράλληλο αν είναι 2-συνεκτικό και δεν περιέχει καμία υποδιαίρεση του K_4 ως ελάσσον. Ένα γράφημα καλείται σειριακό-παράλληλο αν μπορεί να προκύψει από το K_2 μετά από σειρά υποδιαιρέσεων ακμών ή διπλασιασμών ακμών (δηλαδή αντικατάσταση μιας ακμής από μια διπλής πολλαπλότητας με τα ίδια άκρα).

Απόδειξη. Αρχικά, αν ένα γράφημα περιέχει κάποια υποδιαίρεση του K_4 ως ελάσσον, τότε περιέχει και το K_4 ως ελάσσον, αφού η διάλυση κορυφής είναι η αντίστροφη πράξη της υποδιαίρεσης ακμής και γνωρίζουμε ότι η σύνθλιψη ακμής μπορεί να προσομοιώσει την διάλυση κορυφής. Θα δείξουμε κάτι πιο ισχυρό, δηλαδή ότι αν ένα πολυγράφημα είναι συνεκτικό και δεν περιέχει το K_4 ως ελάσσον, τότε είναι σειριακό-παράλληλο. Για 2 κορυφές ισχύει, αφού έχουμε το K_2 που είναι σειριακό-παράλληλο. Για 3 κορυφές επίσης ισχύει. Αν έχουμε το P_3, τότε προκύπτει από το K_2 με μία υποδιαίρεση ακμής. Αν έχουμε το K_3, αυτό μπορεί να προκύψει από την εξής ακολουθία κινήσεων: K_2->διπλασιασμός ακμής, υποδιαίρεση της μίας ακμής. Θεωρούμε το γράφημα G με τον ελάχιστο αριθμό κορυφών, το οποίο είναι συνεκτικό και δεν περιέχει το K_4 ως ελάσσον και δεν είναι σειριακό-παράλληλο. Από το Λήμμα 1, το γράφημα G δεν μπορεί να είναι 3-συνεκτικό. Αν το G δεν είναι 2-συνεκτικό, τότε έχει κορυφή τομής. Έστω Έστω ένας 2-διαχωριστής u, v και G' μία συνεκτική συνιστώσα που προκύπτει μετά τη διαγραφή των κορυφών u, v. Έστω γράφημα H με $V(H) = V(G') \cup u, v$ και $E(H) = (x, y)|x \in V(H), y \in V(H), (x, y) \in G, (x, y) \neq (u, v)$. Το γράφημα H είναι συνεκτικό, διότι σε διαφορετική περίπτωση κάποια από τις κορυφές u, v θα αποτελούσε κορυφή τομής. Αν το H δεν είναι 2-συνεκτικό, τότε λόγω του Λήμματος 2 είναι και σειριακό-παράλληλο με άκρα τα u, v. Αν είναι 2-συνεκτικό αλλά ότι 3-συνεκτικό, τότε λόγω του Λήμματος 3 και της υπόθεσης ελαχιστότητας είναι σειριακό-παράλληλο με άκρα τα u, v. Λόγω του Λήμματος 3, το H δεν μπορεί να είναι 3 συνεκτικό. Θεωρούμε λοιπόν το γράφημα $_2$. Έστω x το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών που προκύπτουν στο G μετά τη διαγραφή των u, v. Αν στο G υπάρχει η ακμή (u, v), τότε διπλασιάζουμε x φορές την ακμή του K_2. Διαφορετικά τη διπλασιάζουμε $x - 1$ φορές. Τώρα, εφόσον έχουμε αποδείξει ότι κάθε συνιστώσα, μαζί με τις κορυφές u,v είναι σειριακό-παράλληλο γράφημα με άκρα τα u, v, μπορεί να προκύψει με μια σειρά διπλασιασμών και υποδιαιρέσεων ακμών από το K_2, δηλαδή από μία από τις ακμές που προέκυψαν από το διπλασιασμό. Αν επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία για κάθε συνιστώσα, θα προκύψει το γράφημα G. Αυτό σημαίνει ότι το G είναι σειριακό-παράλληλο, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η υπόθεση δεν ισχύει και κάθε 2-συνεκτικό γράφημα που δεν περιέχει το K_4 ως ελάσσον είναι σειριακό-παράλληλο. Παρατήρηση: Η συνθήκη ότι ένα γράφημα δεν περιέχει το K_4 ως ελάσσον, με την προϋπόθεση ότι είναι συνεκτικό, είναι ικανή για την απόδειξη του ότι είναι σειριακό-παράλληλο. □

Λήμμα 1: Για κάθε γράφημα G με $n(G) \geq 4$, ισχύει ότι $\kappa(G) \geq 3 \Rightarrow K_4 \subseteq_{\epsilon\lambda} G$.

Απόδειξη. Είναι το Πόρισμα 5.44 από τις σημειώσεις του μαθήματος. □

Λήμμα 2: Κάθε συνεκτικό γράφημα που δεν είναι 2-συνεκτικό είναι

Απόδειξη. □

6 Χρωματισμοί και άλλα

6.9 (⋆⋆) Ένα γράφημα λέγεται άρτιο αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Δείξτε ότι αν το G είναι συνεκτικό γράφημα, τότε $|\{H \subseteq_{\pi\alpha} G | H \text{είναι άρτιο}\}| = 2^{m(G)-n(G)+1}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $S = \{H \subseteq_{\pi\alpha} G | H \text{άρτιο}\}$. Θα ορίσουμε μία 1-1 και επί συνάρτηση f από το σύνολο $A = \{H | H \subseteq_{\pi\alpha} G\}$, δηλαδή το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του G, στο $B = S \times \{X \subseteq V(G) || X| mod 2 = 0\}$, δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των άρτιων παραγόμενων γραφημάτων με την οικογένεια υποσυνόλων του $V(G)$ με άρτιο πληθάριθμο. Το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του G έχει πληθάριθμο $2^{m(G)}$, αφού κάθε ακμή μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει στο παραγόμενο υπογράφημα. Επίσης η οικογένεια υποσυνόλων του $V(G)$ με άρτιο πληθάριθμο έχει πληθάριθμο $2^{n(G)-1}$, αφού έχουμε 2 επιλογές για κάθε κορυφή (θα μπει ή δεν θα μπει στο υποσύνολο), εκτός από την τελευταία, της οποίας η τοποθέτηση καθορίζεται μοναδικά από το αν το υποσύνολο έχει άρτιο ή περιττό αριθμό κορυφών. Λόγω του λήμματος 1, η f είναι 1-1 και επί, άρα έχουμε ότι $2^{m(G)} = |S| \cdot 2^{n(G)-1} \Rightarrow |S| = 2^{m(G)-n(G)+1}$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 1: Υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.

Απόδειξη. Για κάθε ζευγάρι κορυφών i, j με $i \neq j$, ορίζουμε P_{ij} ένα μονοπάτι μεταξύ τους στο G. Αυτό προφανώς υπάρχει, αφού το G είναι συνεκτικό. Ορισμός f: Έστω $Z \in A$ και T το σύνολο των κορυφών του Z με περιττό βαθμό. Είναι γνωστό ότι $|Z| \text{mod} 2 = 0$. Διαμερίζουμε τις κορυφές του Z σε ζευγάρια (a_i, b_i) (με κάποιο μονοσήμαντο τρόπο, πχ αριθμούμε τις κορυφές του Z $u_1, u_2, ..., u_k$ και βάζουμε τα ζευγάρια $(u_1, u_2), ..., (u_{k-1}, u_k)$) και για κάθε ζευγάρι θεωρούμε το μονοπάτι $P_{a_i b_i}$. Για κάθε ακμή πάνω σε αυτό το μονοπάτι, αν υπάρχει στο Z τότε την αφαιρούμε, ενώ αν δεν υπάρχει την προσθέτουμε. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός διατηρεί την αρτιότητα των βαθμών των ενδιάμεσων κόμβων, και επίσης πλέον οι a_i, b_i έχουν άρτιο βαθμό. Κάνοντας αυτό το μετασχηματισμό για κάθε ζευγάρι, θα καταλήξουμε με ένα άρτιο γράφημα U. Ορίζουμε $f(Z) = U \times T$. Ουσιαστικά η f μετασχηματίζει ένα γράφημα σε άρτιο, αλλά επιστρέφει και την πληροφορία του ποιοι κόμβοι ήταν περιττοί. Αντίστροφα, αν έχουμε ένα άρτιο γράφημα U και ένα υποσύνολο T του $V(G)$ με άρτιο πληθάριθμο, θεωρούμε τη διαμέριση του T σε ζευγάρια και για κάθε ζευγάρι εφαρμόζουμε τον ίδιο μετασχηματισμό που ορίσαμε παραπάνω. Έτσι θα πάρουμε ξανά το γράφημα Z με $f(Z) = U \times T$. Συνεπώς η f είναι 1-1 και επί. □

6.10 ($\star\star$) Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά c, τέτοια ώστε αν για κάποιο γράφημα G ισχύει ότι $\delta(G) \geq k$, τότε το G περιέχει $c \cdot k^2$ ακμοδιακεκριμένους κύκλους.

Απόδειξη. Έστω $\delta(G) \geq k \geq 4$. Λόγω του λήμματος 2, έχουμε $\geq \lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$ εσωτερικώς διακεκριμένους κύκλους. Διαγράφουμε τις ακμές όλων αυτών των κύκλων. Στο γράφημα G' που θα προκύψει έχουμε $\delta(G) \geq k-2$. Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την ίδια διαδικασία, έως ότου το γράφημα που απόμένει έχει $\delta(G') < 4$. Συνολικά αυτή η διαδικασία θα επαναληφθεί τουλάχιστον $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$ φορές. Οι ακμοδιακεκριμένοι κύκλοι που θα έχουμε συνολικά λοιπόν θα είναι τουλάχιστον $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{k-3}{3} \rfloor + ... + 1 + 0 = \Theta(k^2)$. $\square$

Λήμμα 1: Αν $\delta(G) \geq 4$, υπάρχει κύκλος με μήκος $\leq 2 \cdot log_2 n$.

Απόδειξη. Έχουμε $m \geq \frac{\delta(G) \cdot n}{2} \geq 2n$, άρα η πυκνότητα είναι τουλάχιστον 2. Αυτό που μένει έχει αποδειχθεί στην άσκηση 1.10. $\square$

Λήμμα 2: Σε κάθε γράφημα G με $\delta(G) \geq k \geq 4$ υπάρχουν τουλάχιστον $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$ εσωτερικώς διακεκριμένοι κύκλοι.

Απόδειξη. Έστω ένας ελάχιστος κύκλος C. Αυτος λόγω του λήμματος 1 θα έχει μήκος το πολύ $2 \cdot log_2 n$. Επίσης καμία κορυφή $u \in G - C$ δεν μπορεί να έχει πάνω από 3 ακμές προς κορυφές του G. Αν είχε, τότε έστω δύο από αυτές και οι αντίστοιχες κορυφές του κύκλου. Αυτές θα είχαν απόσταση $\leq \lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor$ στον C, άρα χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο ακμές, θα υπήρχε κύκλος με μέγεθος το πολύ $\lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor + 2$, το οποίο για $|C| \geq 5$ είναι άτοπο αφού δημιουργεί κύκλο μικρότερο από τον ελάχιστο. Για $|C| = 3$, είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να έχουμε πάνω από 3 ακμές από κάποια κορυφή προς τις κορυφές του C, ενώ για $|C| = 4$ αν είχαμε 4 ακμές προς κορυφές το C, θα σχηματιζόταν κύκλος μήκους 3, άτοπο. Από το παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το εναγόμενο γράφημα G' του G με σύνολο κορυφών το $G - C$ θα έχει $\delta(G') \geq k - 3$. Εφαρμόζοντας επαναληπτικά την ίδια διαδικασία στο εναγόμενο γράφημα, μέχρι ο ελάχιστος βαθμός του αντίστοιχου εναγόμενου γραφήματος να γίνει μικρότερος από 4, έχουμε συνολικά τουλάχιστον $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$ εσωτερικώς διακεκριμένους κύκλους. $\square$