Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Γραφοθεωρία
Ομάδα Ασκήσεων No. 2

Ομάδα 7
Αξιώτης Κυριάκος
Αρσένης Γεράσιμος

17 Μαΐου 2015

1. Σε ένα $G(n,p)$ η πιθανότητα μιας κορυφής να έχει βαθμό k είναι $\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$. Δείξτε ότι ο μέσος βαθμός είναι $(n-1)p$ με απευθείας υπολογισμό, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη γραμμικότητα της μέσης τιμής.

   Απόδειξη. Θα χρειαστούμε τα εξής λήμματα:

   Λήμμα 1. *Έστω δύο τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Bernoulli με παραμέτρους n, p και m, p αντίστοιχα, δηλαδή $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$. Τότε για το άθροισμά τους ισχύει $X + Y \sim B(n+m,p)$.*

   Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X+Y=k] &= \mathbb{P}[(X=0 \land Y=k) \lor (X=1 \land Y=k-1) \lor \ldots \lor (X=k \land Y=0)] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X=i \land Y=k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X=i] \cdot \mathbb{P}[Y=k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \\
&= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}
\end{aligned}$$

   □

   Λήμμα 2. *Έστω $\{X_i\}_{i=1\ldots k}$ μια οικογένεια τ.μ. για τις οποίες ισχύει $X_i \sim B(n_i,p)$. Τότε $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.*

   Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 και επαγωγή στο k προκύπτει το ζητούμενο. □

   Λήμμα 3. *Αν $X \sim B(n,p)$ τότε $\mathbb{E}[X] = np$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \mathbb{P}[X=i] \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} np \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{(n-1)-(i-1)} \\
&= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i} \\
&= np \cdot (p + (1-p))^{n-1} = np
\end{aligned}$$

□

Για το γράφημα $G(n,p)$ έχουμε ότι ο βαθμός μιας κορυφής v_i είναι μια τυχαία μεταβλητή d_i που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παραμέτρους $n-1, p$, δηλαδή $d_i \sim B(n-1,p)$.

Για τον μέσο βαθμό κορυφής ισχύει:

$$d(G) = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

όπου $X = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 2 έχουμε ότι $X \sim B\left(\sum_{i=1}^{n}(n-1), p\right) = B(n(n-1),p)$.

Από το Λήμμα 3, $\mathbb{E}[X] = n(n-1)p$. Άρα έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[d(G)] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X] = (n-1)p$$

□

2. Δείξτε ότι το τυχαίο γράφημα $G(n,p)$ με $p = n^{-0.7}$ δεν έχει σχεδόν σίγουρα 4-κλίκα για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. □

3. ($\star$) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο κατευθονόμενο γράφημα. Για κάθε κορυφή v επιλέγουμε ομοιόμορφα τυχαία μια κορυφή u και τοποθετούμε την ακμή $v \to u$. Κάθε κορυφή έχει μόνο μια εξερχόμενη ακμή και μπορεί να υπάρχουν θηλιές. Έστω $r(v)$ ο αριθμός των κορυφών στις οποίες μπορούμε να φτάσουμε από την v.

   - Για $k = 1, \dots, n$ ποιά η πιθανότητα $r(v) = k$. Η πιθανότητα θα έχει μορφή γινομένου.
   - Δείξτε ότι για μία κορυφή v, $\mathbb{P}[r(v) \leq \sqrt{n}/10] \leq 1/3$ και $\mathbb{P}[r(v) \geq 10\sqrt{n}] \leq 1/3$.

Απόδειξη. Έστω $v = u_1, u_2, \dots, u_k$ οι κορυφές που είναι προσβάσιμες από την v σε αύξουσα σειρά απόστασης. Δηλαδή υπάρχει ακμή μεταξύ $u_i \to u_{i+1}$ για $i = 1, \dots k-1$.

Προκειμένου να είναι όλες οι παραπάνω κορυφές διαφορετικές μεταξύ τους θα πρέπει κάθε κορυφή u_i να διαλέγει να συνδεθεί με κάποια κορυφή u_{i+1} διαφορετική από όλες τις προηγούμενες $u_1, \dots, u_{i-1}$ ώστε να μην δημιουργηθεί κύκλος σε εκείνο το σημείο.

Επιπλέον, η τελευταία κορυφή u_k θα πρέπει να συνδέεται με κάποια από τις προηγούμενες ώστε το μονοπάτι να "τελειώνει" εκεί και να μην υπάρχουν άλλες προσβάσιμες κορυφές.

Η πιθανότητα να συμβαίνουν τα παραπάνω είναι:

$$\mathbb{P}[r(v) = k] = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} \cdot \frac{k}{n} = \frac{k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \cdot$$

Έχουμε λοιπόν[1]:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[r(v) \leq \sqrt{n}/10] &= \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} \frac{k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} \frac{k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} e^{-i/n} \\
&= \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} \frac{k}{n} e^{-\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n}} = \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} \frac{k}{n} e^{-\frac{H_{k-1}}{n}} \\
&< \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} \frac{k}{n} e^{-\frac{\ln(k-1)}{n}} = \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} \frac{k}{n} (k-1)^{-\frac{1}{n}} \\
&< \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/10} \frac{\sqrt{n}}{10} \frac{1}{n} (2-1)^{-\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{10} \cdot \frac{\sqrt{n}}{10} \cdot \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{100} < \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[r(v) < 10\sqrt{n}] &= \sum_{k=1}^{10\sqrt{n}} \frac{k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{10\sqrt{n}} \frac{k}{n} \prod_{i=1}^{n/2} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{10\sqrt{n}} \frac{k}{n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n/2} \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{10\sqrt{n}} k \left(1 - \frac{H_{n/2}}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{H_{n/2}}{n}\right) H_{10\sqrt{n}} > \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln(n/2) + 1}{n}\right) \ln(10\sqrt{n}) \\
&> \frac{1}{1} \left(1 - \frac{\ln(1/2) + 1}{1}\right) \ln(10\sqrt{1}) \\
&= \ln(2) \cdot \ln(10) > \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

[1]Στα παρακάτω, όπου εμφανίζονται αρμονικές σειρές χρησιμοποιούμε τα φράγματα $\ln n < H_n < \ln n + 1$

Η πρώτη ανισότητα που χρησιμοποιήθηκε στο $\mathbb{P}[r(v) < 10\sqrt{n}]$ ισχύει μόνο για αρκετά μεγάλα n τέτοια ώστε $n/2 \geq 10\sqrt{n} - 1$.

TODO: Να το αποδείξουμε και για μικρά n.

Συνεπώς:

$$\mathbb{P}[r(v) \geq 10\sqrt{n}] = 1 - \mathbb{P}[r(v) < 10\sqrt{n}] < 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$\square$

4. ($\star$) Θεωρήστε το τυχαίο γράφημα $G(n, p)$ με $p = 6.6/n$. Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα μή 3-χρωματίσιμο για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. $\square$

5. ($\star$) Θεωρήστε το παρακάτω τυχαίο γράφημα με n κορυφές. Κάθε κορυφή διαλέγει ομοιόμορφα τυχαία 2 κορυφές και τοποθετούμε μη-κατευθυνόμενες ακμές προς αυτές. Η τυχαία επιλογή γίνεται με επανάληψη και μπορεί μια κορυφή v να επιλέξει και τον εαυτό της στην οποία περίπτωση παραλείπουμε αυτή τη θηλιά. Παρατηρούμε ότι οι ακμές θα είναι περίπου $2n$ αλλά μπορεί κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό μικρότερο από 2 αν επέλεξαν τον εαυτό τους ή την ίδια κορυφή δύο φορές. Μπορεί επίσης κάποιες κορυφές να έχουν βαθμό αρκετά μεγαλύτερο από 4 αν άλλες κορυφές έτυχε να τις επιλέξουν.

   Δείξτε ότι το γράφημα είναι σχεδόν σίγουρα συνεκτικό για αρκετά μεγάλα n.

   Απόδειξη. $\square$