Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

Γραφοθεωρία
Ομάδα Ασκήσεων No. 1

Ομάδα 7
Αξιώτης Κυριάκος
Αρσένης Γεράσιμος

2 Μαΐου 2015

1 Βαθμοί, κύκλοι, μονοπάτια

1.9 ($\star$) Για κάθε θετικό ακέραιο α και για κάθε γράφημα G, το $V(G)$ περιέχει περισσότερες από $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot n(G)$ κορυφές βαθμού αυστηρά μικρότερου του $2\alpha\delta^*(G)$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε ότι $\delta^*(G) = \max\{k \mid \exists H \subseteq G$ με $\delta(H) \geq k\}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$|\{u \mid u \in V(G) \land d(u) < 2\alpha\delta^*(G)\}| > \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) n(G)$$

Έστω λοιπόν, προς απαγωγή σε άτοπο ότι:

$$\begin{aligned}
|\{u \mid u \in V(G) \land d(u) < 2\alpha\delta^*(G)\}| &\leq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) n(G) \\
\Leftrightarrow n(G) - |\{u \mid u \in V(G) \land d(u) \geq 2\alpha\delta^*(G)\}| &\leq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) n(G) \\
\Leftrightarrow |\{u \mid u \in V(G) \land d(u) \geq 2\alpha\delta^*(G)\}| &\geq \frac{1}{\alpha} n(G)
\end{aligned}$$

Ισχύει όμως:

$$2m(G) = \sum_{u \in V(G)} d(u) \geq \sum_{u \in V(G): d(u) \geq 2\alpha\delta*(G)} d(u) \geq \frac{1}{\alpha} n(G) \cdot 2\alpha\delta*(G) = 2n(G)\delta^*(G)$$

$$m(G) \geq n(G) \cdot \delta^*(G) \Leftrightarrow \epsilon(G) \geq \delta^*(G)$$

Από το Πόρισμα 3.1 των σημειώσεων του μαθήματος γνωρίζουμε ότι $\delta^*(G) \geq \epsilon(G)$, συνεπώς θα έχουμε:

$$\epsilon(G) = \delta^*(G)$$

TODO: Εδώ καταλήγουμε σε άτοπο γιατί αν ισχύει ισότητα τότε οι παραπάνω ανισότητες είναι αυστηρές και αυτό δεν μπορεί να ισχύει [...]

□

1.10 ($\star\star$) Κάθε γράφημα G με τουλάχιστον 2 κορυφές και $\epsilon(G) \geq 2$, έχει περιφέρεια το πολύ $2 \cdot \log_2(n)$.

Απόδειξη. μπλα μπλα.. □

2 Άκυκλα γραφήματα

2.10 ($\star$) Σε κάθε δέντρο με n κορυφές και διάμετρο τουλάχιστον $2k-3$ υπάρχουν τουλάχιστον $n-k$ διαφορετικά μονοπάτια μήκους k.

Απόδειξη. *** ΛΑΘΟΣ ***

Έστω u, v δύο αντιδιαμετρικοί κόμβοι με $d(u,v) = \operatorname{diam}(u,v)$ και έστω P το μονοπάτι που τους ενώνει. Υπάρχει κόμβος w πάνω στο P τέτοιος ώστε είτε $d(u,w) \geq k-1$ είτε $d(w,v) \geq k-1$ (διαφορετικά θα είχαμε $\operatorname{diam}(G) = d(u,v) = d(u,w) + d(w,v) \leq 2(k-2) = 2k-4)$.

Υποθέτουμε λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $d(u,w) \geq k-1$ και μάλιστα επιλέγουμε το κοντινότερο τέτοιο w στο u, δηλαδή $d(u,w) = k-1$.

Στο μονοπάτι P' από u στον w υπάρχουν ακριβώς k κορυφές. Θα δείξουμε ότι από κάθε μία από τις υπόλοιπες $n-k$ κορυφές μπορούμε να δημιουργήσουμε μονοπάτια μήκους k που να καταλήγουν σε κορυφές του P' και τα μονοπάτια αυτά θα είναι διαφορετικά μεταξύ τους αφού το καθένα έχει διαφορετική αφετηρία.

□

3 Συνεκτικότητα

4 Εμβαπτίσεις

5 Δομές σε γραφήματα

5.9 ($\star$) Κάθε γράφημα περιέχει τουλάχιστον $\frac{m(G)(4m(G)-n^2(G))}{3n(G)}$ τρίγωνα.

Απόδειξη. Έστω μια ακμή $\{u,v\}$. Η ιδέα είναι να βρούμε το ελάχιστο πλήθος τριγώνων στα οποία μπορεί να ανήκει αυτή η ακμή και έτσι μετά αθροίζοντας κατάλληλα να μπορέσουμε να φράξουμε από κάτω το συνολικό πλήθος των τριγώνων του γραφήματος.

Ορίζουμε $U = N_G(u) \backslash v, V = N_G(v) \backslash u$. Ισχύει ότι $|U| + |V| = d(u) + d(v) - 2$. Επίσης, $|U \cup V| \leq n(G) - 2$ αφού δεν υπάρχουν πάνω από $n(G) - 2$ κορυφές που να απομένουν στο γράφημα.

Άρα, έχουμε:

$$|U \cap V| = |U| + |V| - |U \cup V| \geq d(u) + d(v) - n(G)$$

Κάθε κορυφή που ανήκει στο $U \cap V$ δημιουργεί τρίγωνο με τις κορυφές u, v. Άρα το πλήθος των τριγώνων $|T_{\{u,v\}}|$ που μπορεί να ανήκει η ακμή $\{u,v\}$ είναι τουλάχιστον $d(u) + d(v) - n(G)$.

Αν συμβολίσουμε με T το σύνολο των τριγώνων του G έχουμε:

$$3|T| = \sum_{\{u,v\}\in E(G)} T_{\{u,v\}}$$

επειδή κάθε τρίγωνο περιέχει 3 ακμές.

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
|T| &\geq \frac{1}{3}\sum_{\{u,v\}\in E(G)} (d(u)+d(v)-n(G)) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{\{u,v\}\in E(G)} (d(u)+d(v)) - \frac{n(G)m(G)}{3} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{u\in V(G)} d^2(u) - \frac{n(G)m(G)}{3} \\
&\geq \frac{1}{3n(G)}\left(\sum_{u\in V(G)} d(u)\right)^2 - \frac{n(G)m(G)}{3} \\
&= \frac{4m^2(G)}{3n(G)} - \frac{n(G)m(G)}{3} \\
&= \frac{m(G)(4m(G)-n^2(G))}{3n(G)}
\end{aligned}$$

Όπου το 4ο βήμα προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$d(u_1)\cdot 1 + d(u_2)\cdot 2 + \ldots + d(u_n)\cdot 1 \leq (d^2(u_1)+\ldots+d^2(u_n))\cdot(1+\ldots+1) = (d^2(u_1)+\ldots+d^2(u_n))\cdot n$$

□

6 Χρωματισμοί και άλλα

6.9 (⋆⋆) Ένα γράφημα λέγεται άρτιο αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Δείξτε ότι αν το G είναι συνεκτικό γράφημα, τότε $|\{H \subseteq_{\pi\alpha} G | H \text{είναι άρτιο}\}| = 2^{m(G)-n(G)+1}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $S = \{H \subseteq_{\pi\alpha} G | H\text{άρτιο}\}$. Θα ορίσουμε μία 1-1 και επί συνάρτηση f από το σύνολο $A = \{H | H \subseteq_{\pi\alpha} G\}$, δηλαδή το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του G, στο $B = S \times \{X \subseteq$

$V(G)||X|mod2 = 0\}$, δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των άρτιων παραγόμενων γραφημάτων με την οικογένεια υποσυνόλων του $V(G)$ με άρτιο πληθάριθμο. Το σύνολο των παραγόμενων γραφημάτων του G έχει πληθάριθμο $2^{m(G)}$, αφού κάθε ακμή μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει στο παραγόμενο υπογράφημα. Επίσης η οικογένεια υποσυνόλων του $V(G)$ με άρτιο πληθάριθμο έχει πληθάριθμο $2^{n(G)-1}$, αφού έχουμε 2 επιλογές για κάθε κορυφή (θα μπει ή δεν θα μπει στο υποσύνολο), εκτός από την τελευταία, της οποίας η τοποθέτηση καθορίζεται μοναδικά από το αν το υποσύνολο έχει άρτιο ή περιττό αριθμό κορυφών. Λόγω του λήμματος 1, η f είναι 1-1 και επί, άρα έχουμε ότι $2^{m(G)} = |S| \cdot 2^{n(G)-1} \Rightarrow |S| = 2^{m(G)-n(G)+1}$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 1: Υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.

Απόδειξη. Για κάθε ζευγάρι κορυφών i, j με $i \neq j$, ορίζουμε P_{ij} ένα μονοπάτι μεταξύ τους στο G. Αυτό προφανώς υπάρχει, αφού το G είναι συνεκτικό. Ορισμός f: Έστω $Z \in A$ και T το σύνολο των κορυφών του Z με περιττό βαθμό. Είναι γνωστό ότι $|Z|\text{mod}2 = 0$. Διαμερίζουμε τις κορυφές του Z σε ζευγάρια (a_i, b_i) (με κάποιο μονοσήμαντο τρόπο, πχ αριθμούμε τις κορυφές του Z $u_1, u_2, ..., u_k$ και βάζουμε τα ζευγάρια $(u_1, u_2), ..., (u_{k-1}, u_k)$) και για κάθε ζευγάρι θεωρούμε το μονοπάτι $P_{a_i b_i}$. Για κάθε ακμή πάνω σε αυτό το μονοπάτι, αν υπάρχει στο Z τότε την αφαιρούμε, ενώ αν δεν υπάρχει την προσθέτουμε. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός διατηρεί την αρτιότητα των βαθμών των ενδιάμεσων κόμβων, και επίσης πλέον οι a_i, b_i έχουν άρτιο βαθμό. Κάνοντας αυτό το μετασχηματισμό για κάθε ζευγάρι, θα καταλήξουμε με ένα άρτιο γράφημα U. Ορίζουμε $f(Z) = U \times T$. Ουσιαστικά η f μετασχηματίζει ένα γράφημα σε άρτιο, αλλά επιστρέφει και την πληροφορία του ποιοι κόμβοι ήταν περιττοί. Αντίστροφα, αν έχουμε ένα άρτιο γράφημα U και ένα υποσύνολο T του $V(G)$ με άρτιο πληθάριθμο, θεωρούμε τη διαμέριση του T σε ζευγάρια και για κάθε ζευγάρι εφαρμόζουμε τον ίδιο μετασχηματισμό που ορίσαμε παραπάνω. Έτσι θα πάρουμε ξανά το γράφημα Z με $f(Z) = U \times T$. Συνεπώς η f είναι 1-1 και επί. □