

ACI650 - Modelos y Simulación

Introducción a la Teoría de Redes Complejas

Mario González

Facultad de Ingeniería y Ciencias Ambientales
Centro de Investigación, Estudios y Desarrollo de Ingeniería
(CIEDI)



Mayo 30, 2016

Objetivos de aprendizaje

- ▶ Definiciones básicas y terminología usada en Redes Complejas.
- ▶ Elementos y representación de una Red Compleja.
- ▶ Características y métricas de la Red.
- ▶ Propiedades y construcción de Redes Complejas.

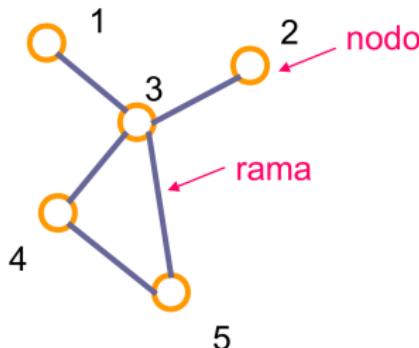
Introducción a las Redes Complejas

- ▶ ¿Por qué estoy haciendo una presentación de redes complejas?
 - ▶ Porque investigo temas relacionados.
- ▶ ¿Por qué estoy investigando temas relacionados?
 - ▶ Porque las redes están en todas partes.



¿Qué es una Red?

- ▶ Una red es una colección de puntos unidos por líneas.

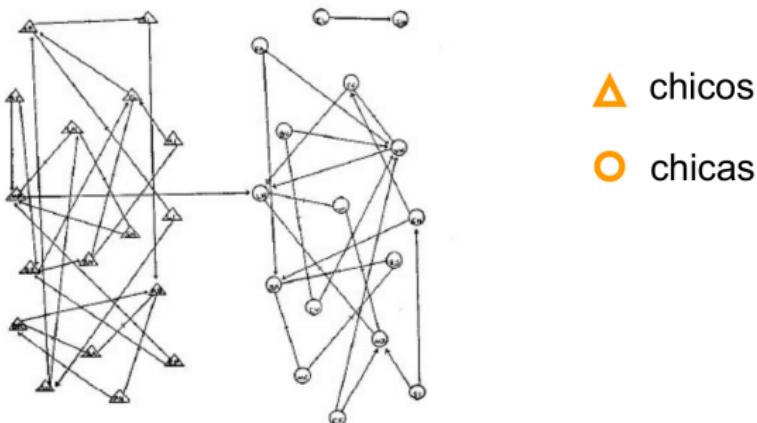


“Red” ≡ “Grafo”

puntos	líneas	
vértices	ramas, arcos	Matemáticas
nodos	conexión (links)	Computación
sitios	enlaces (bonds)	Física
actores	lazos, relaciones	Sociología

Una de las primeras redes

- ▶ Una red social dibujada a mano en 1934, que representa la amistad entre un grupo de niños en edad escolar.



An Attraction Network in a Fourth Grade Class (Moreno, 'Who shall survive?', 1934).

Ejemplos de redes

- ▶ Redes sociales
 - ▶ Patrones de amistad entre individuos.
 - ▶ Relaciones de negocios entre empresas (transacciones).
 - ▶ Patrones de contactos sexuales.
- ▶ Redes de información
 - ▶ La World Wide Web, Webs unidas por hipervínculos.
 - ▶ Red de citaciones académicas.
 - ▶ Redes de preferencias (películas, música, compras online).
- ▶ Redes tecnológicas
 - ▶ Red eléctrica.
 - ▶ Red de rutas aéreas, caminos, trenes, etc.
 - ▶ Red de telefonía, Internet.
- ▶ Redes biológicas
 - ▶ Red metabólica, Red de regulación génica.
 - ▶ Red trófica (alimenticia).
 - ▶ Redes neuronales, redes vasculares.

Red de flujo migratorio

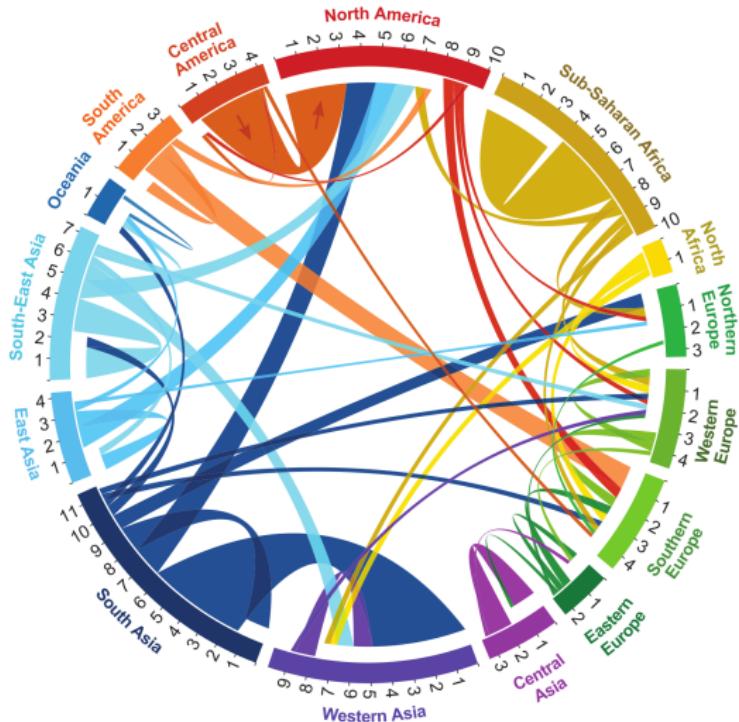
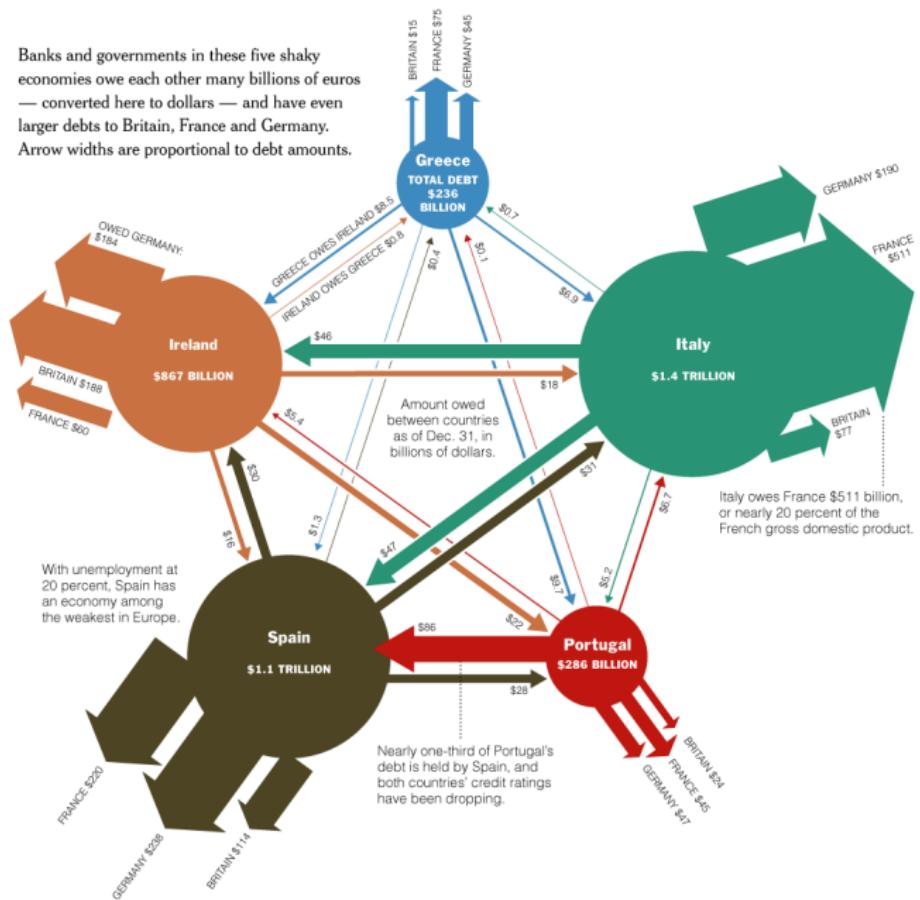


Fig. 4. Circular plot of migration flows between and within world regions during 2005 to 2010.
Tick marks show the number of migrants (inflows and outflows) in millions. Only flows containing at least 170,000 migrants are shown.

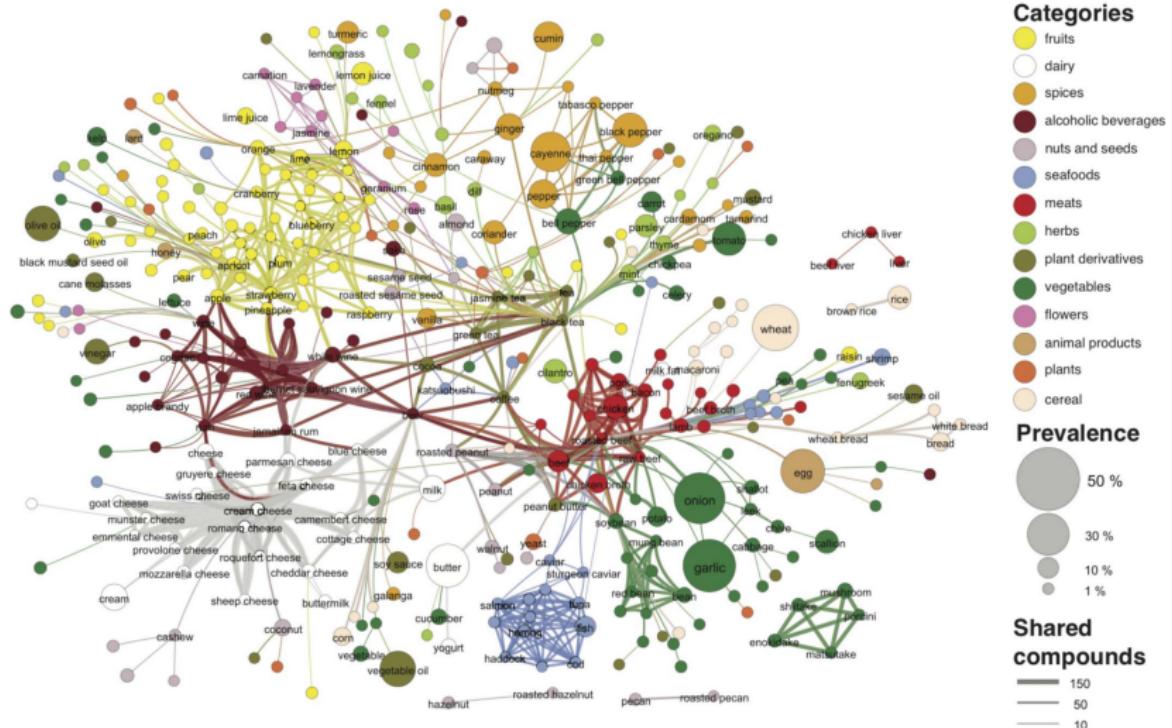
Abel, Guy J., and Nikola Sander. Quantifying global international migration flows. Science 343.6178 (2014): 1520-1522.

Todo está conectado: Europe's Web of Debt (NYT)

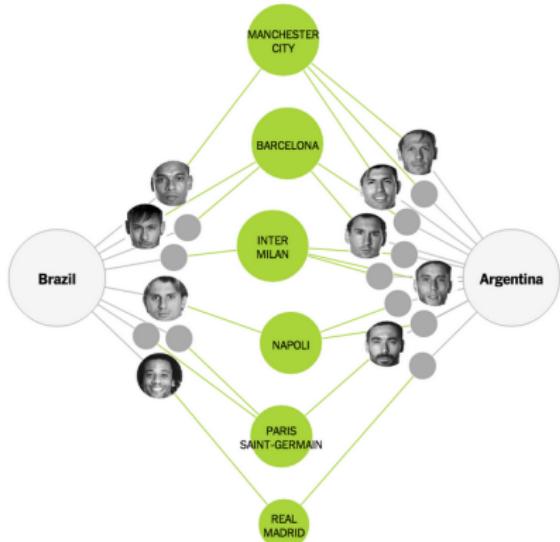
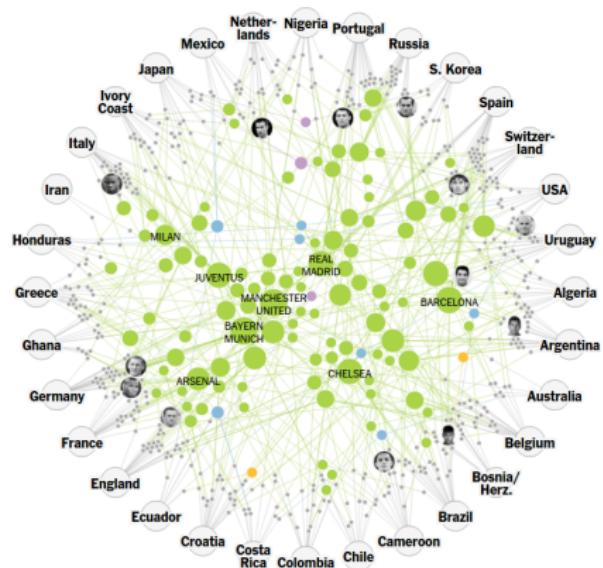
Banks and governments in these five shaky economies owe each other many billions of euros — converted here to dollars — and have even larger debts to Britain, France and Germany. Arrow widths are proportional to debt amounts.



Red de sabores



Los clubes que conectan el mundo (NYT)



Red de rutas aéreas



Redes de transporte terrestre

Lineas

- 1 PINAR DE CHAMARTÍN / CONGOSTO**
 - 2 LA ELIZA / LOS CAMINOS**
 - 3 VILLAVICIOSA ALTO / MONCLOA**
 - 4 ARGÉLITAS / PASEO DE CHAMARTÍN**
 - 5 ALAMEDA DE OSUNA / CASA SE CAMPO**
 - 6 CIRCULAR**
 - 7 HENARES / PITIUS**
 - 8 NUEVOS MINISTERIOS / AEROPUERTO**
 - 9 HERESIA ORIA / ARANDA DEL REY**
 - 10 HOGARTE DEL NORTE / PASEO DE LA CASTELLANA**
 - 11 PLAZA ELÍPTICA / LA PESETA**
 - 12 METROTUS**
 - 13 OFERA / PRÍNCIPE PÍSO**
 - 1 PINAR DE CHAMARTÍN / LAS TABLAS**
 - 2 COLONIA JARDÍN / PASEO DE LA AVANCA**
 - 3 COLONIA JARDÍN / PUERTA DE BOADILLA**

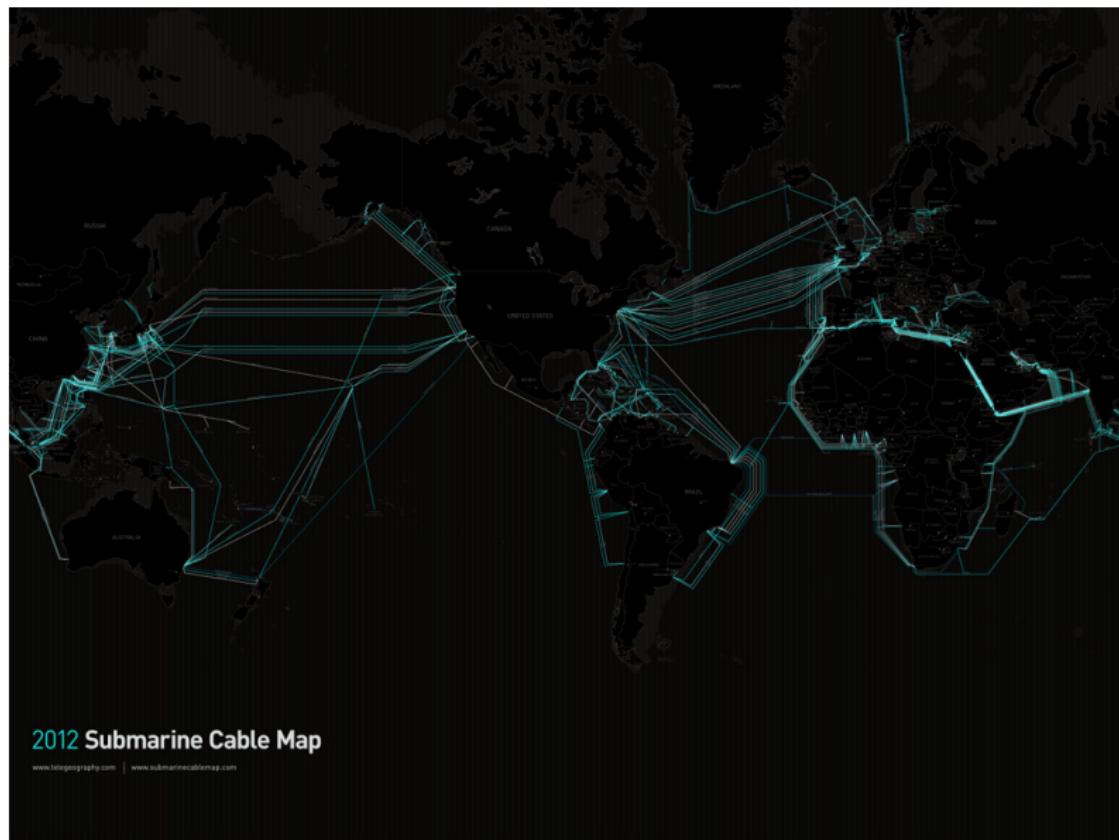
Simbología

- 🕒 Estación con horario restringido
 - 🕒 Transbordo corto entre líneas
 - 🕒 Transbordo largo entre líneas
 - 🕒 Cambio de tren
 - 🕒 Metro Ligero
 - 🕒 Estación de Cercanías-Renfe
 - 🕒 Estación de ferrocarril de largo recorrido
 - 🕒 Terminal de autobuses interurbano
 - 🕒 Terminal aeropuerto
 - 🕒 Aparcamiento de disuasión de pago
 - 🕒 Aparcamiento de disuasión gratuito
 - 🕒 Oficina de información al cliente
 - 🕒 Cambio tarifario

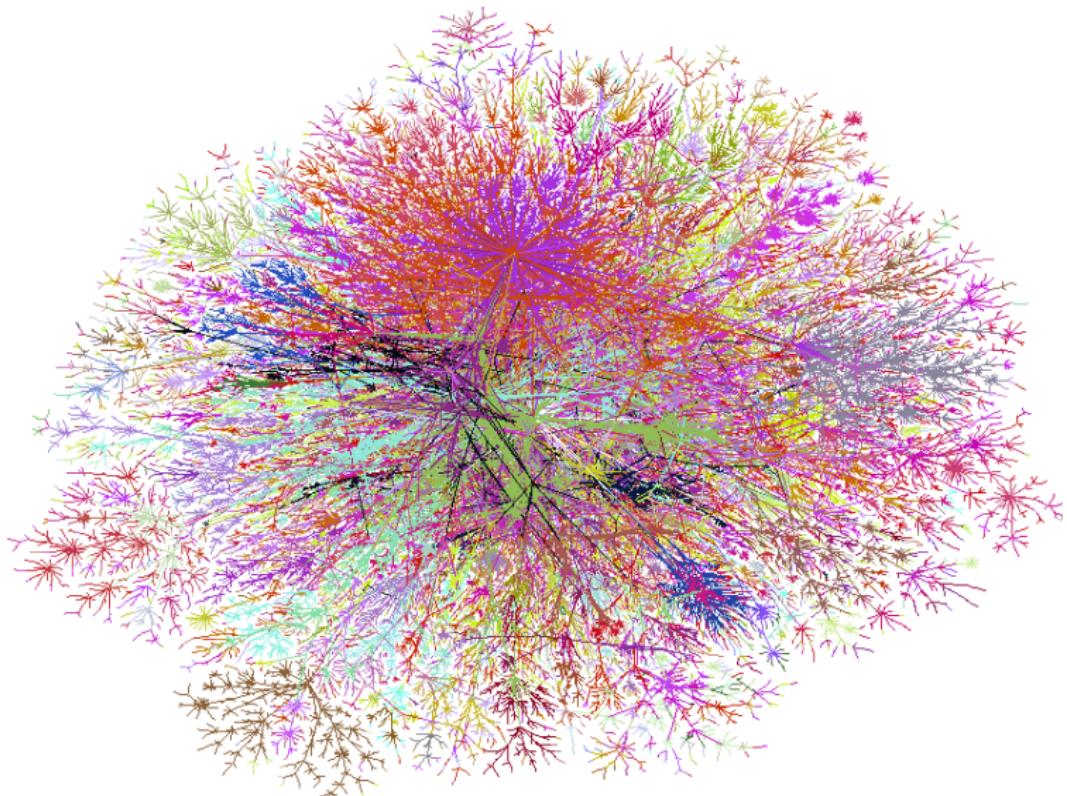


PLANO DE LA RED DE METRO DE MADRID

Internet: mapa de cables submarinos



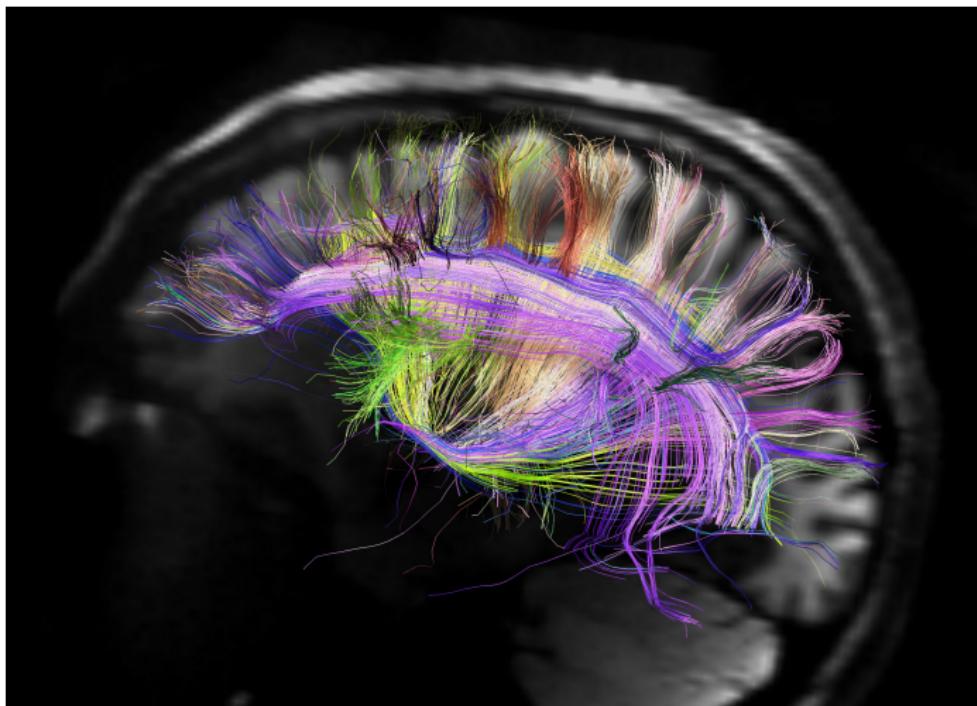
Mapa del Internet coloreado por direcciones IP



Map of internet: colored by IP addresses By William R. Cheswick.

La red más compleja que existe

- ▶ Sabemos de qué están hechas las cosas, pero entendemos muy poco acerca de como están organizadas.



Wedge, Van J., et al. The geometric structure of the brain fiber pathways. Science 335.6076 (2012): 1628-1634.

Elementos de una red: ramas (edges)

- ▶ Dirigidas (también llamados arcos)
 - ▶ $A -> B$
 - ▶ A gusta de B, A es el hijo de B, esquinas de una ciudad.
- ▶ No dirigidas
 - ▶ $A <-> B$ o $A-B$
 - ▶ A y B se gustan, A y B son hermanos, red de autopistas de un país.
- ▶ Atributos de las ramas
 - ▶ Peso (e.g. flujo máximo de tráfico).
 - ▶ Ranking (mejor amigo, segundo mejor amigo).
 - ▶ Tipo (amigo, pariente, colega de trabajo).

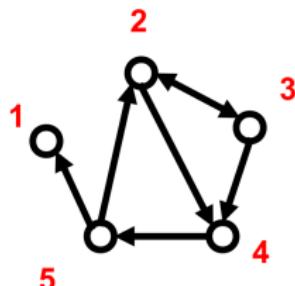
Los pesos de las ramas pueden ser positivos o negativos

- ▶ Un gen activa o inhibe otro.
- ▶ Las sinapsis pueden ser excitatorias o inhibitorias.
- ▶ Una persona confía/desconfía de otra.



Matriz de adyacencia

- ▶ Como representamos la ramas (quién es vecino a quién) usando una matriz de adyacencia
 - ▶ $A_{ij} = 1$ si el nodo i está conectado al nodo j a través de una rama.
 - ▶ $A_{ii} = 0$ a no ser que la red tenga nodos con autoconexiones.
 - ▶ $A_{ij} = A_{ji}$ si la red es no dirigida o si existe una rama recíproca entre i y j .

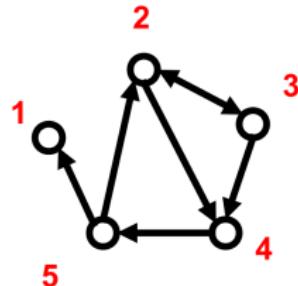


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Listas de adyacencia

- ▶ Lista de ramas

- ▶ 2 3
- ▶ 2 4
- ▶ 3 2
- ▶ 3 4
- ▶ 4 5
- ▶ 5 2
- ▶ 5 1

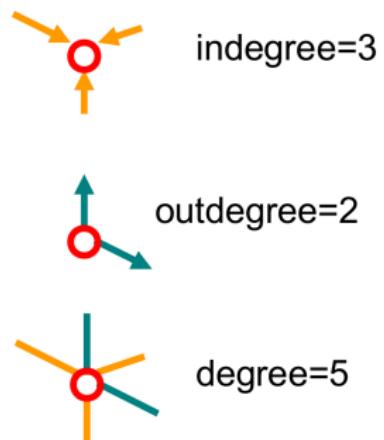


- ▶ Lista de adyacencia

- ▶ es más fácil trabajar con redes que son
 - ▶ grandes
 - ▶ dispersas (sparse)
- ▶ podemos listar rápidamente los vecinos de un nodo
 - ▶ 1:
 - ▶ 2: 3 4
 - ▶ 3: 2 4
 - ▶ 4: 5
 - ▶ 5: 1 2

Nodos

- ▶ Propiedades de los nodos de la red
 - ▶ de las conexiones inmediatas
 - ▶ grado de entrada (**indegree**): número de ramas dirigidas (arcos) que inciden en el nodo.
 - ▶ grado de salida (**outdegree**): número de ramas dirigidas (arcos) que se originan en el nodo.
 - ▶ grado (in or out): número de ramas que inciden en el nodo.
 - ▶ del grafo completo
 - ▶ centralidad: identificar los nodos más importantes en la red (betweenness, closeness).



Grado de un nodo a partir de la matriz de adyacencia

► Outdegree = $\sum_{j=1}^n A_{ij}$

- Ejemplo: Outdegree del nodo 3 es 2, que se obtiene sumando el número de elementos diferentes a cero en la tercera fila

$$\sum_{j=1}^n A_{3j}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

► Indegree = $\sum_{i=1}^n A_{ij}$

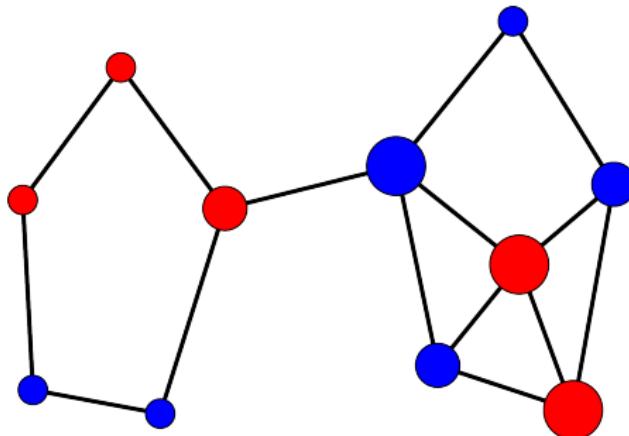
- Ejemplo: Indegree del nodo 3 es 1, que se obtiene sumando el número de elementos diferentes a cero en la tercera columna

$$\sum_{i=1}^n A_{i3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

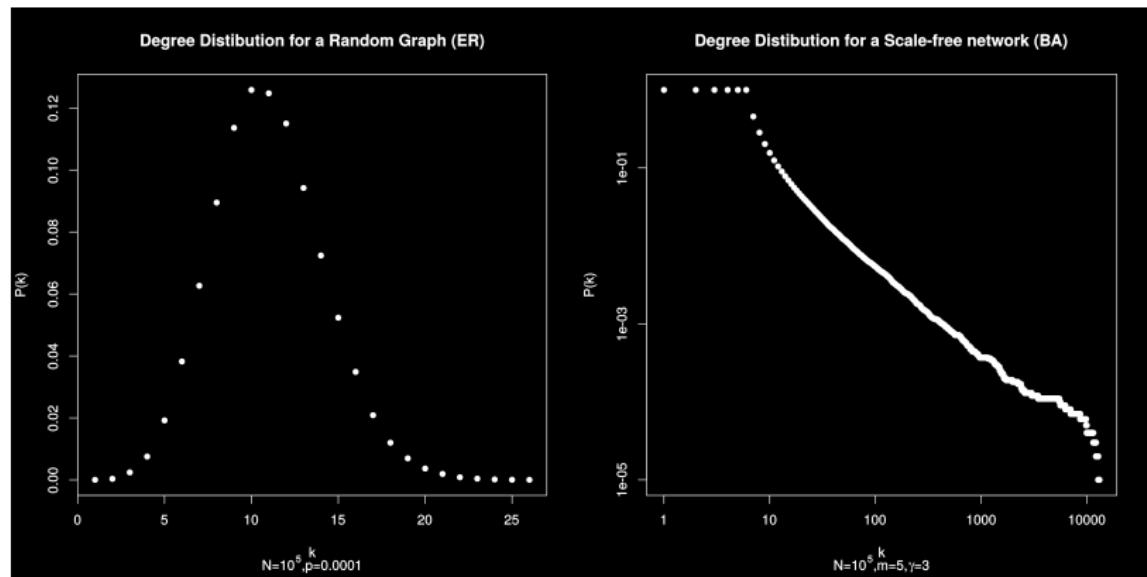
Otros atributos de los nodos

- ▶ Color: Función.
- ▶ Posición: Ubicación geográfica.
- ▶ Tamaño: Número de habitantes, para una ciudad, tráfico aéreo de un aeropuerto.



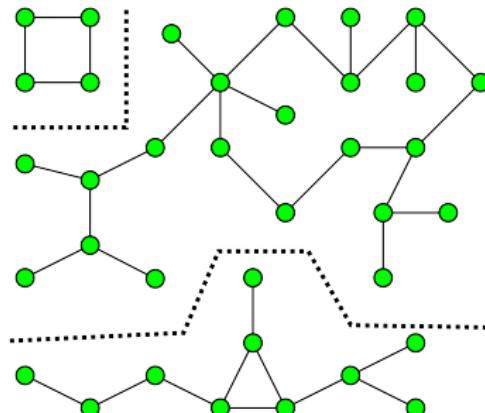
Métricas de la red: distribución de grado

- ▶ Distribución de grado: frecuencia de la ocurrencia de cada grado.

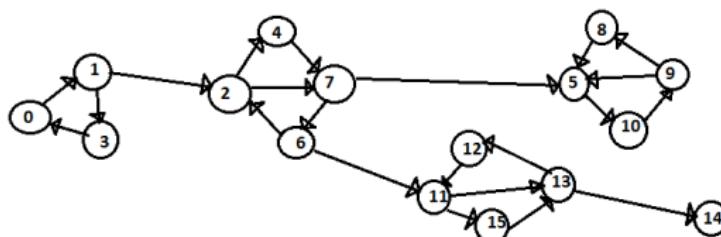


Métricas de la red: componentes conectadas

- ▶ Componentes conectadas

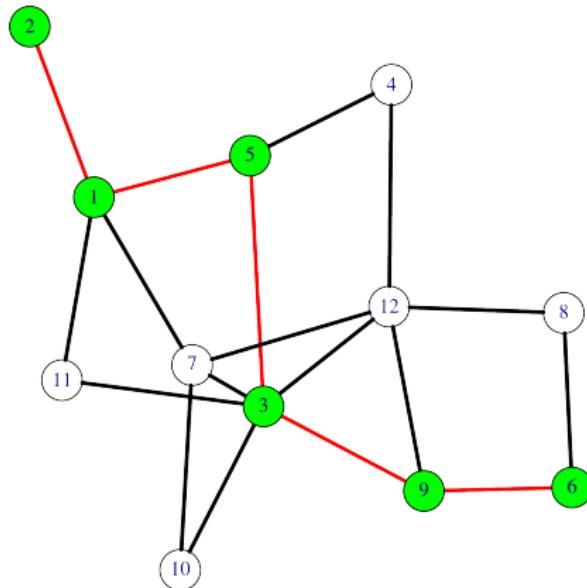


- ▶ Componentes conectadas fuertemente (grafos dirigidos)



Métricas de la red: camino más corto

- ▶ Camino más corto ó geodésico (shortest path)
 - ▶ La secuencia más corta de ramas conectando dos nodos
 - ▶ No siempre es única
 - ▶ 2 y 6 están conectados por el camino más corto
 - ▶ 2–1–5–3–9–6
- ▶ Diámetro: el mayor camino geodésico del grafo



Camino medio y coeficiente de clusterización

- ▶ Camino medio de la red:

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{i,j},$$

aquí $d_{i,j}$ es el camino más corto entre cualquier par de nodos i, j .

- ▶ Coeficiente de clusterización local

$$c_i = \frac{2|\{e_{j,h}\}_i|}{k_i(k_i - 1)},$$

aquí $\{e_{j,h}\}_i$ es el número de ramas que existen en la red entre los nodos del vecindario de i .

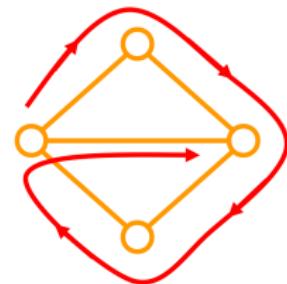
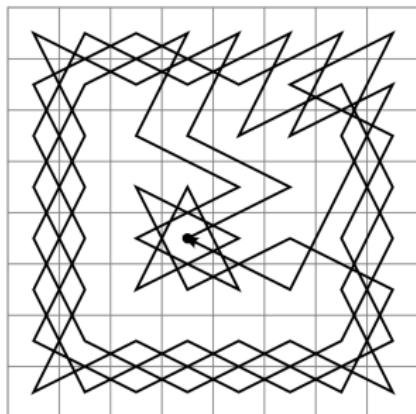
- ▶ El coeficiente de clusterización global es

$$\overline{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i,$$

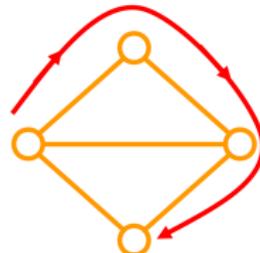
note que $0 \leq \overline{C} \leq 1$.

Ciclos Euleriano y Hamiltonaniano

- ▶ El problema del caballo es una forma del problema más general de la ruta Hamiltoniana en la teoría de grafos.



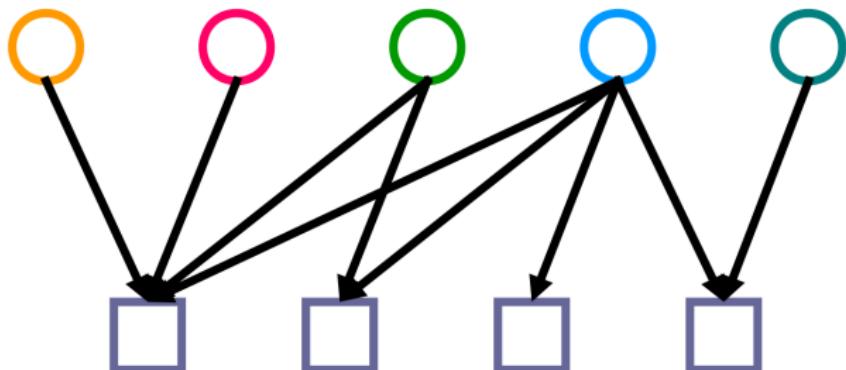
Ciclo Euleriano: atraviesa cada rama una sola vez



Ciclo Hamiltoniano: visita cada vértice una sola vez

Grafos bipartitos

- ▶ Enlaces ocurren entre dos grupos de nodos pero no entre elementos del mismo grupo.
- ▶ Por ejemplo, pueden haber individuos y eventos.
 - ▶ Clientes y artículos que estos compran.
 - ▶ Metabolitos y las reacciones en que participan.
 - ▶ Lugares y transiciones en una Red de Petri.



Árboles

- ▶ Los árboles son grafos no dirigidos que no contienen ciclos

1



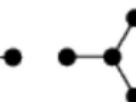
2



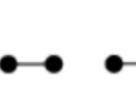
3



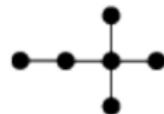
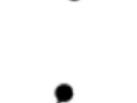
4



5



6

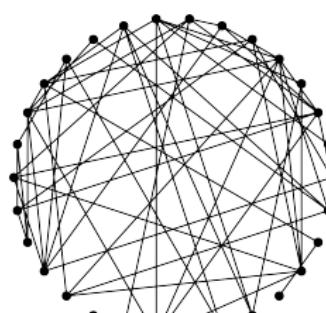


Árboles

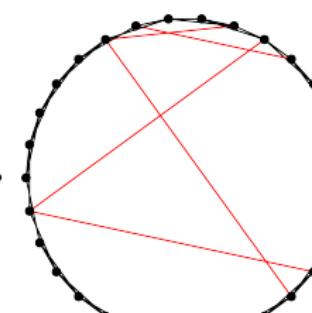
- ▶ En la naturaleza
 - ▶ Árboles
 - ▶ Redes fluviales
 - ▶ Arterias o venas, pero no ambas
- ▶ Hechos por el hombre
 - ▶ Sistema de alcantarillado
- ▶ Ciencias de la Computación
 - ▶ Árboles de búsqueda binarios
 - ▶ Árboles de decisión (AI)
- ▶ En análisis de redes
 - ▶ Árbol de expansión mínimo
 - ▶ Desde un nodo - como llegar a todos los demás nodos más rápidamente
 - ▶ Puede no ser único, ya que los caminos más cortos no siempre son únicos
 - ▶ Depende del peso de las ramas

¿Qué hace que una red sea compleja?

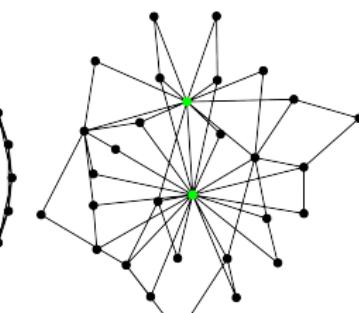
- ▶ La Internet, las redes sociales, y las redes neuronales pueden ser caracterizadas como grafos.
- ▶ ¿Cuál es la configuración topológica (conectividad) de estos grafos? ¿Es aleatoria? ¿Es regular (ej. un anillo)? ¿O es **compleja**?
- ▶ Las redes complejas exhiben características no homogéneas producto de la combinación de **regularidad y aleatoriedad**.
- ▶ Ejemplos de topologías de redes complejas:
 - ▶ Redes de mundo pequeño (small-world networks) y
 - ▶ Redes libre de escala (scale-free networks).



Random



Small World



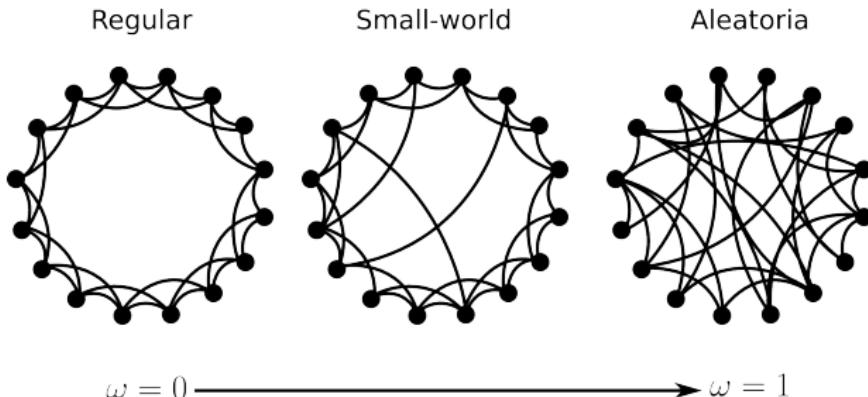
Scale Free

Redes de mundo pequeño (seis grados de separación)

- ▶ ¿Cuántos apretones de mano me separan de Barack Obama?



Redes de mundo pequeño (Watts-Strogatz)



- ▶ Coeficiente de clusterización grande, camino medio pequeño.
- ▶ Matriz de conectividad: $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}$.
- ▶ $C_{ij} \in \{0, 1\}$ se divide en conexiones locales K_L y enlaces aleatorios K_R conocidos como atajos.
- ▶ Parámetros de la red:
 - ▶ *Ratio de conectividad:* $\gamma = K/N$.
 - ▶ *Ratio de aleatoriedad:* $\omega = K_R/K$.

Modelo Erdös-Rényi

- ▶ Erdös and Rényi model (1960)
- ▶ Random graph model, $G(N, p)$, mean degree $\bar{k} = p(N - 1)$

```
For: each node i
    For: each node j = i + 1...N
        Set: Chance = a uniform random number between 0 and 1
        If: p > Chance
            If: Undirected
                Create a reciprocal edge between node i and node j
            Else
                Set: Chance = a uniform random number between 0 and 1
                If: d > Chance
                    Create a directed edge from node i to node j
                    Create a directed edge from node j to node i
                Else
                    Create a directed edge from node i to node j
                Set: Node h : uniformly randomly chosen from the set
of all nodes excluding i and j
                    Create a directed edge from node h to node i
                EndIf
            EndIf
        EndIf
    EndFor
EndFor
```

Modelo Watts-Strogatz

- ▶ Watts and Strogatz model (1998)
- ▶ Small-world network, $G(N, k, \omega)$, rewiring probability ω

```
//First create a ring lattice
For: all nodes i = 1...N
  For: all nodes j = i + 1...i+ Ki/2
    If: j > N //Make sure forward connects loop round
      Set: j = j - N ;
    EndIf
    If: Undirected
      Create a reciprocal edge between node i and node j
    Else
      Create a directed edge from node i to node j
      Create a directed edge from node j to node i
    EndIf
  EndFor
EndFor
```

```
//Second rewire edges randomly with probability pr
For: all nodes i = 1...N
  For: all nodes l = i + 1...i+ Ki/2
    If: l > N //Make sure forward connects loop round
      Set: l = l - N ;
    EndIf
    Set: Chance = a uniform random variable between 0 and 1
    If: pr > Chance
      Set: node j = uniformly randomly chosen from the set
          of all nodes, excluding i and nodes adjacent to/from i
          other than j
      Disconnect: node i and node l
    If: Undirected
      Create a reciprocal edge between node i and node j
    Else
      Set: Chance = a uniform random number between 0 and 1
      If: d > Chance
        Create a directed edge from node i to node j
        Create a directed edge from node j to node i
      Else
        Create a directed edge from node i to node j
      Set: Node h : uniformly randomly chosen from the set
          of all nodes excluding i, j and nodes adjacent to i
        Create a directed edge from node h to node i
      EndIf
    EndIf
  EndFor
EndFor
```

Terminología y estadísticas de la red - Resumen

- ▶ Topology matrix: $\mathbf{A} = \{A_{ij} \in [0, 1]\}$
- ▶ Graphs may be directed $a_{ij} \neq a_{ji}$ or undirected $a_{ij} = a_{ji}$.
- ▶ Two nodes i and j are adjacent if $a_{ij} = 1$
- ▶ The *neighborhood* A_i of node i corresponds to the set of nodes adjacent to i
- ▶ Degree of a node: $k_i = \sum_j c_{ij}$
- ▶ Average degree $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i$
- ▶ Average path length: $L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{i,j}$, here $d_{i,j}$ is the shortest path between any two pairs of nodes i, j
- ▶ Local Clustering coefficient: $c_i = \frac{2|\{e_{j,h}\}_i|}{k_i(k_i-1)}$, here $\{e_{j,h}\}_i$ is the size of the set of all edges that exist in a network, amongst nodes in A_i
- ▶ The Global Clustering coefficient is $\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i$, note that $0 \leq \bar{C} \leq 1$

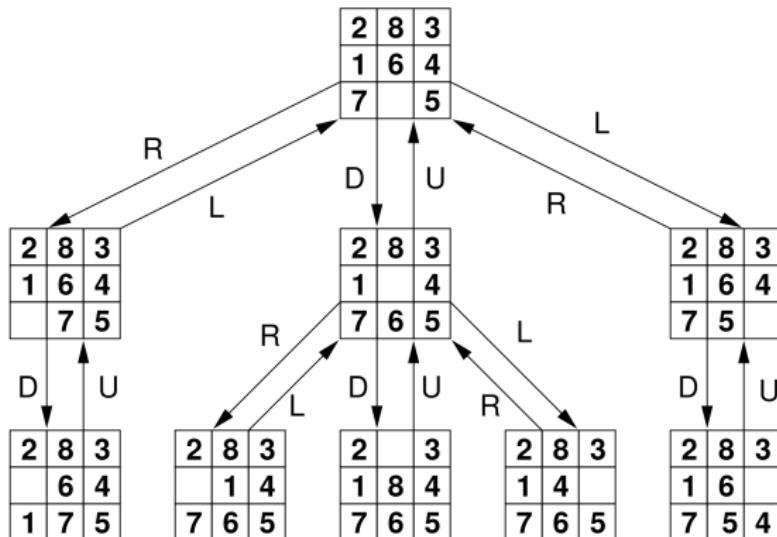
Aplicaciones

Inteligencia Artificial I

- ▶ Un aspecto importante de la inteligencia artificial es la resolución de problemas basado en objetivos.
- ▶ La solución de muchos problemas (por ejemplo, tres en raya, programación de horarios, ajedrez, planificación de rutas) se puede describir mediante la búsqueda de una secuencia de acciones que conducen a un objetivo deseable.
- ▶ Cada acción cambia el estado y el objetivo es encontrar la secuencia de acciones y estados que conducen desde el estado inicial (inicio) a un estado final (meta).
- ▶ La relación entre cada uno de los estados posibles en el problema, se construye usando árboles y grafos.

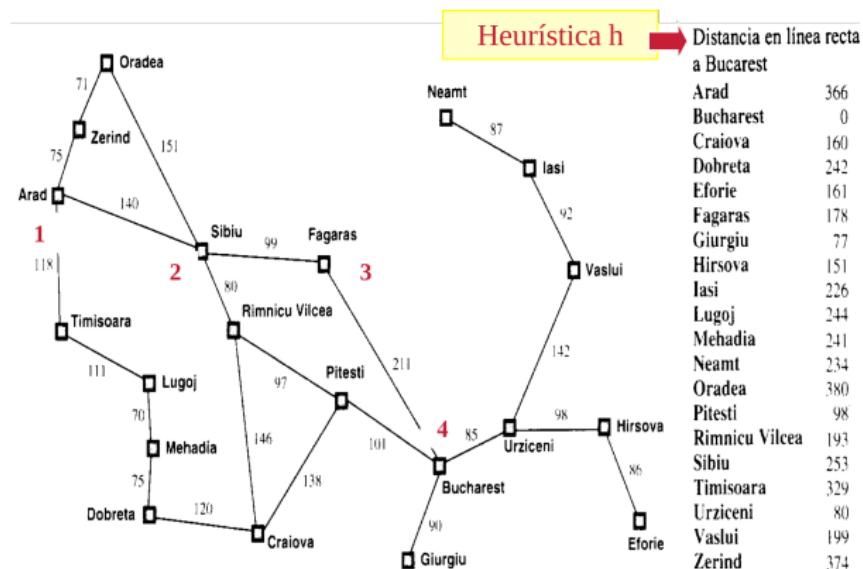
Inteligencia Artificial II

- ▶ **Búsqueda ciega** (también llamada una búsqueda sin información) es una búsqueda que no tiene información sobre el dominio del problema. La única cosa que una búsqueda ciega puede hacer es distinguir un estado no objetivo de un estado objetivo, y construir un árbol de búsqueda hasta este, desde un nodo de origen.



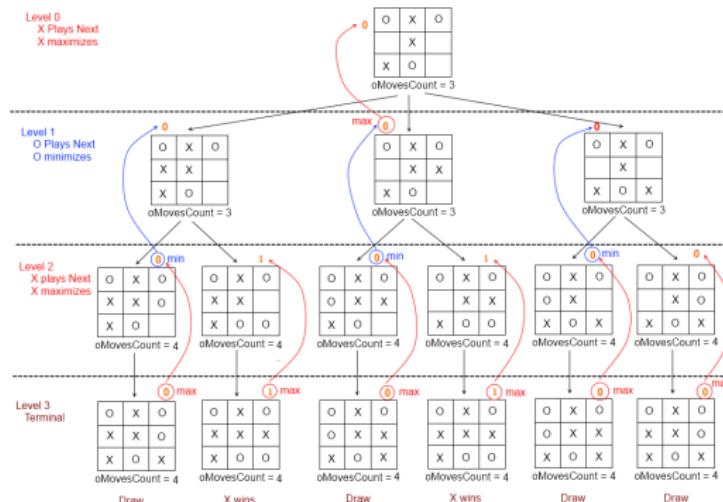
Inteligencia Artificial III

- ▶ Una Búsqueda heurística utiliza el conocimiento específico del dominio del problema para mejorar la eficiencia de la búsqueda. Información sobre el problema incluyen la naturaleza de los estados, el costo de la transformación de un estado a otro, y las características de los objetivos.



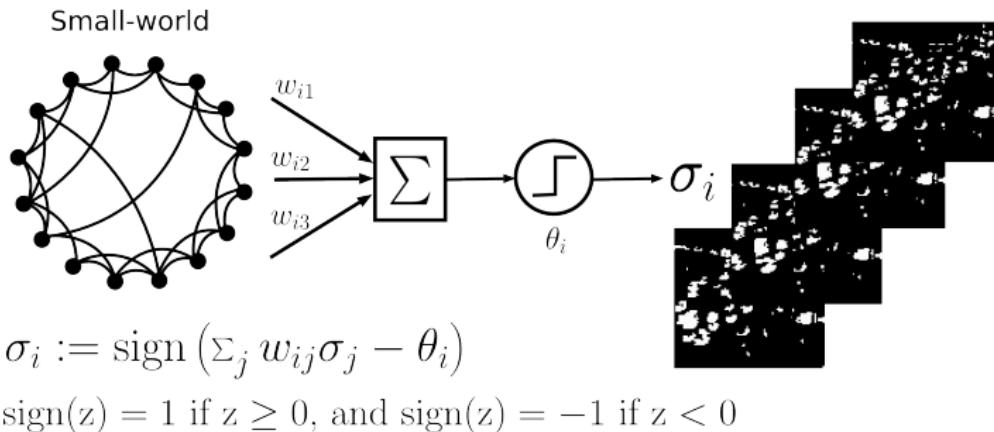
Inteligencia Artificial IV

- ▶ **Un árbol de juego** es un grafo dirigido cuyos nodos son posiciones en un juego y cuyas aristas son movimientos. El árbol de juego completo para un juego cualquiera es el árbol a partir de la posición inicial y que contiene todos los movimientos posibles desde cada posición, es una representación del juego en forma extensiva.



Red neuronal atractora con topología métrica (SW)

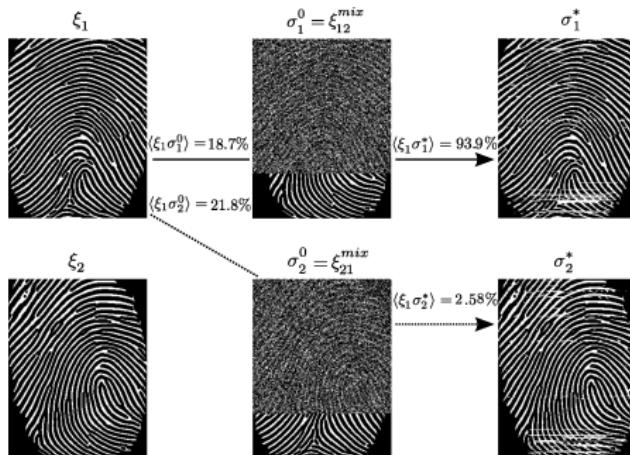
- ▶ Almacenamiento y recuperación de videos de tráfico.
- ▶ Búsqueda por contenido, recuperación del video a partir de un frame.
- ▶ Método holístico, no hace falta extracción de características (menor procesamiento de imágenes).
- ▶ La métrica de la red SW, permite la recuperación de patrones espacialmente estructurados.



González, M., Dominguez D., and Sánchez A. Learning sequences of sparse correlated patterns using small-world attractor neural networks: An application to traffic videos. Neurocomputing 74.14 (2011): 2361-2367.

Reconocimiento de huellas dactilares

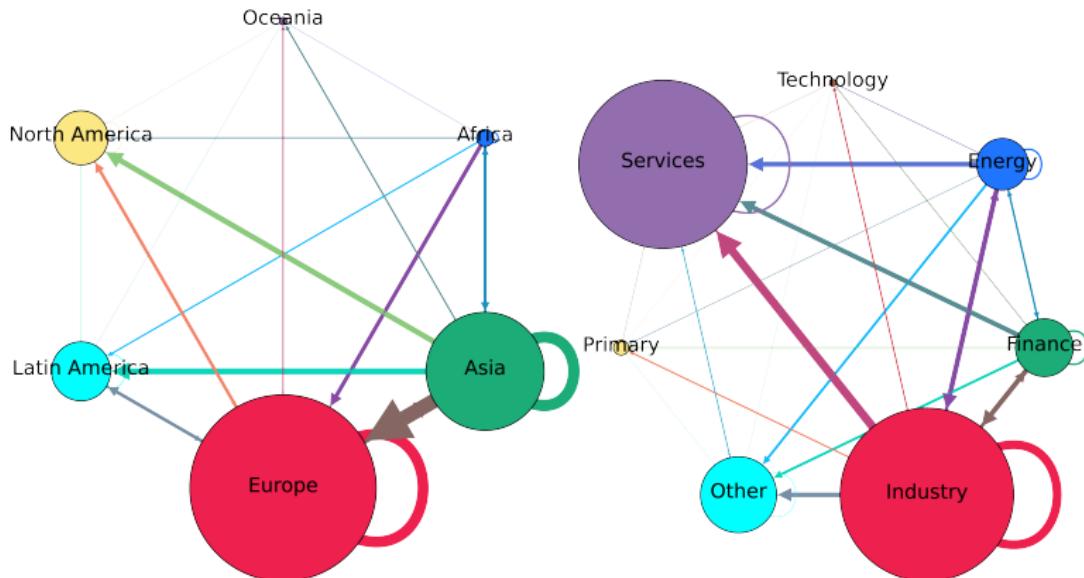
- ▶ Configuraciones de la red SW en 2 dimensiones (C-Grid, X-Grid) tuvieron mejor desempeño que el tradicional anillo en 1 dimensión.
- ▶ La dinámica de la red métrica ayuda a identificar el candidato correcto a partir de una huella aparentemente menos similar.
- ▶ Aplicaciones forenses, separar huellas solapadas, identificar huellas latentes en la escena de un crimen.



González, M., Dominguez D., Sánchez A. and Rodríguez FB. Retrieval of noisy fingerprint patterns using metric attractor networks. International journal of neural systems 24.07 (2014).

Mapas de reportes de sostenibilidad

- ▶ La información mutua (MI) entre empresas que reportan nos da la matriz de conectividad de la red:
 - ▶ Construcción de la red por continentes y sectores económicos.
- ▶ Se compara la topología de la red SW y MI para la red atractora.

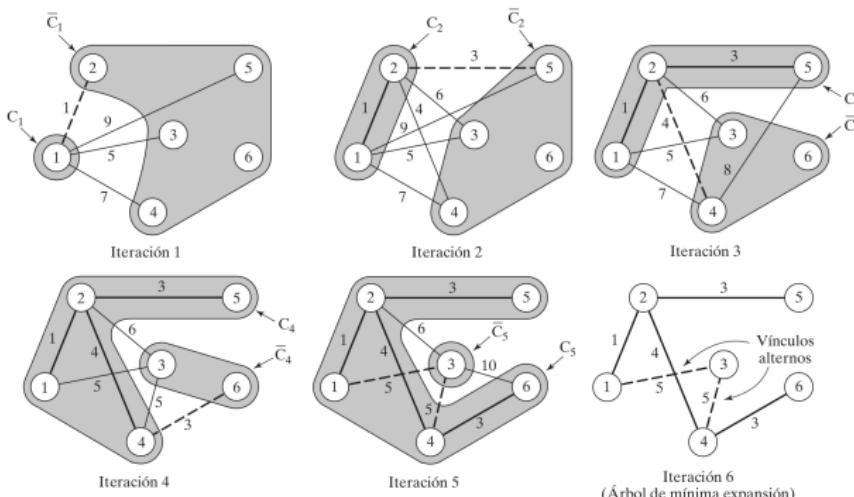


González, M., Alonso-Almeida MM., Avila C., Dominguez D. Modeling sustainability report scoring sequences using an attractor network. *Neurocomputing*, 168, 1181-1187.

Investigación de Operaciones - Optimización I

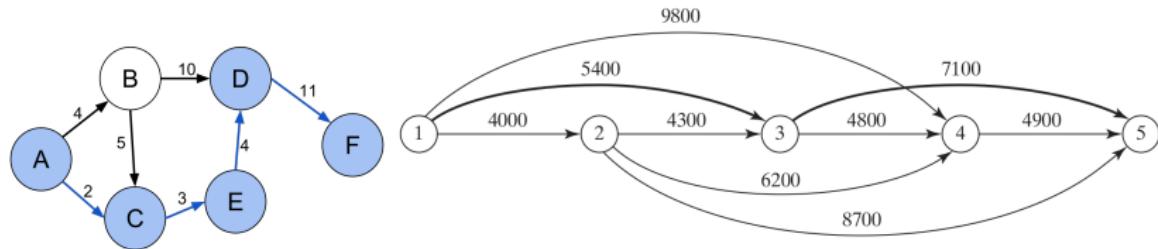
- ▶ **Árbol de expansión mínima:** vincula los nodos de una red valiéndose de la longitud mínima total de las ramas de conexión.

- ▶ Pavimentación de carreteras que unen poblaciones.
- ▶ Instalación de una red de televisión por cable.



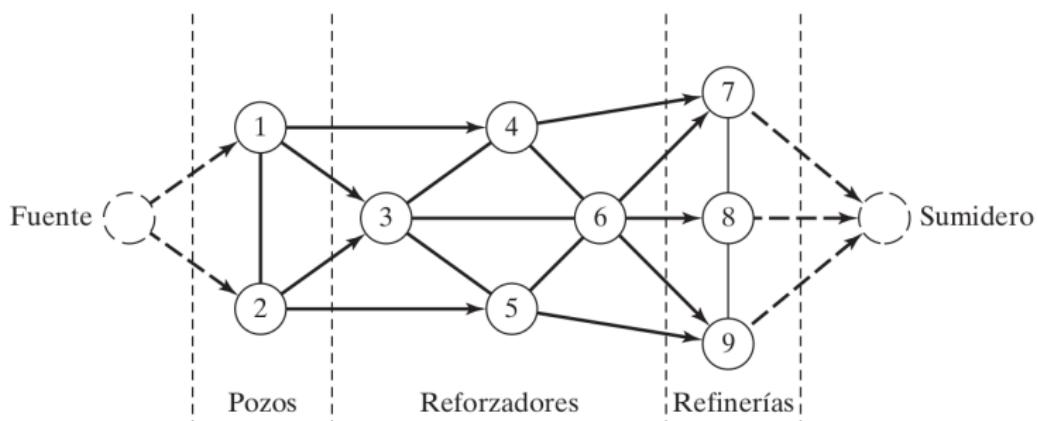
Investigación de Operaciones - Optimización II

- ▶ **Problema de la ruta más corta:** determina la ruta más corta entre un nodo de origen y un nodo de destino.
 - ▶ Ruta de transito con menos puntos de peaje, menor kilometraje, etc.
 - ▶ Reemplazo de equipos.



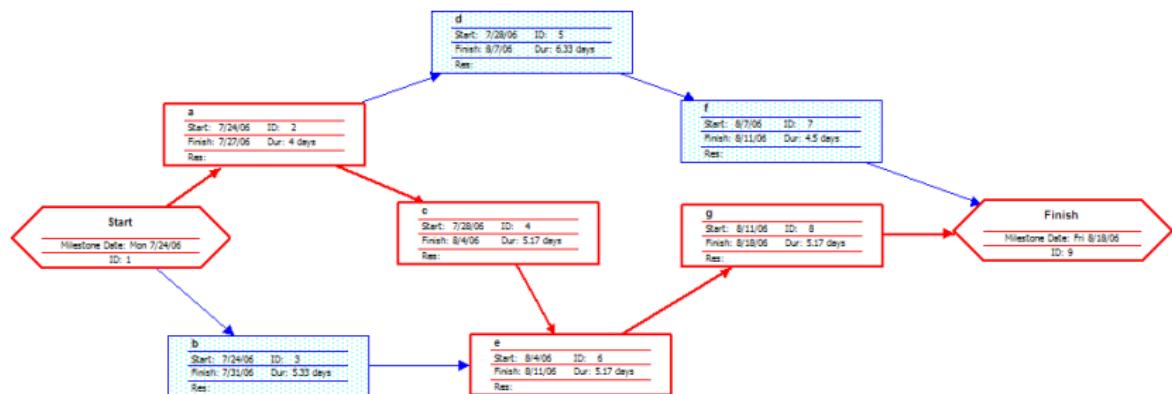
Investigación de Operaciones - Optimización III

- ▶ **Problema de flujo máximo:** determina la capacidad de flujo máxima a través de la red desde una fuente a un sumidero.
 - ▶ Capacidad de flujo de una red de oleoductos.
 - ▶ Programación de las tripulaciones de una aerolínea.
 - ▶ Problema de circulación y demanda de bienes, desde el lugar de producción a los lugares de consumo a través de una red de transporte.



PERT y CPM

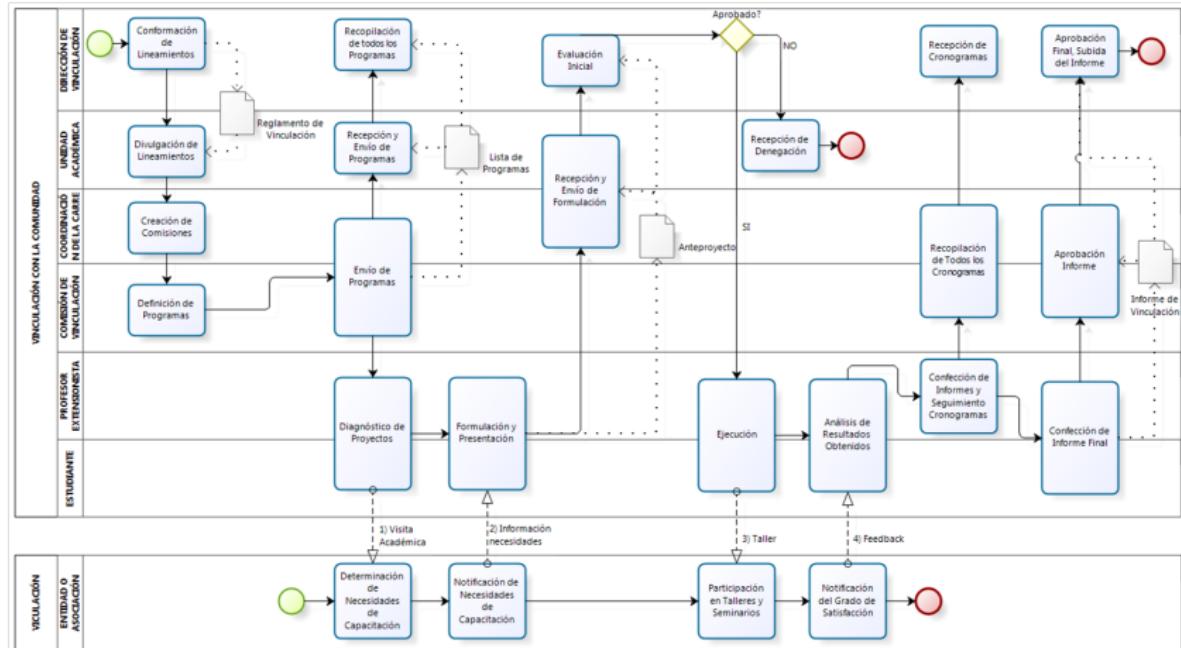
- ▶ **PERT y CPM:** Revisión y Evaluación de Proyectos y Ruta Crítica



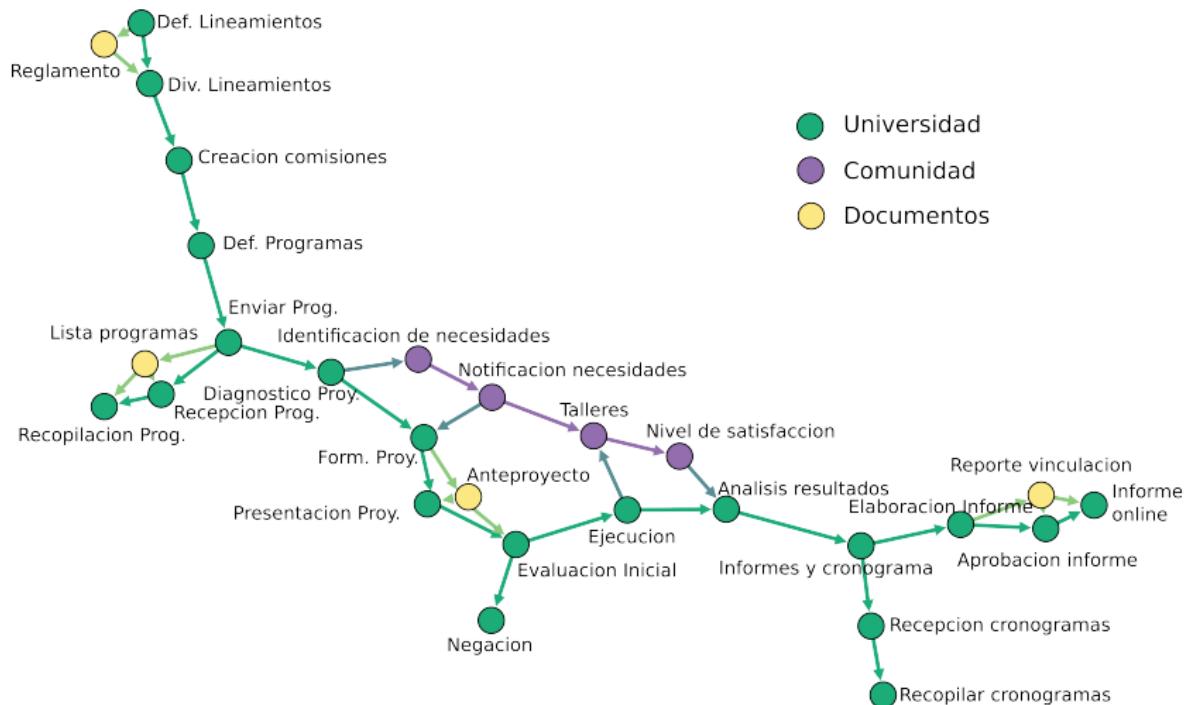
Logística

- ▶ Camino más corto (shortest path) es un modelo de resolución de problemas ampliamente utilizado
 - ▶ Sistema de navegación de robots.
 - ▶ Planificación de tráfico urbano (flujo máximo de la red).
 - ▶ Planificación de rutas óptimas de camiones de transporte (dados patrones de congestión de tráfico).
- ▶ Ciclos Euleriano y Hamiltonaniano
 - ▶ Recolección de basura: debe pasar por todas las calles (edges) de la ciudad.
 - ▶ Problema del viajante de comercio: debe visitar todas las ciudades (nodos) sin repetir ninguna.
- ▶ Ataques estructurales
 - ▶ Entender como se propaga una epidemia, identificar pacientes "hubs" y aislarlos.
 - ▶ Entender cómo un fallo en un aeropuerto, clima, terrorismo, afecta la red de tráfico aéreo.

Modelado de procesos usando redes complejas

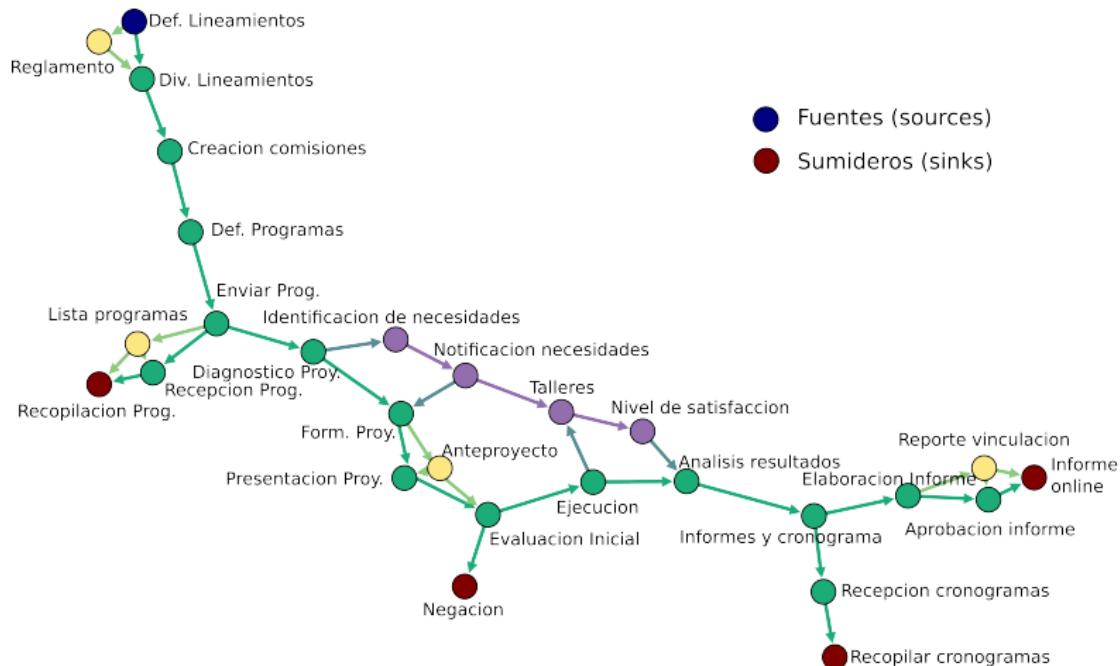


Modelado de procesos usando redes complejas



Fuentes (sources) y sumideros (sinks) del proceso

- ▶ Fuentes: Inicio del proceso, entrada de materiales, recursos humanos, etc. **Indegree=0**.
- ▶ Sumideros: Fin del proceso, salida de productos, subproductos, desperdicios, etc. **Outdegree=0**.



Análisis del proceso

- ▶ Las métricas de la red del proceso nos pueden ayudar a analizar y optimizar el proceso
 - ▶ Diámetro de la red: mínimo número de operaciones para completar el proceso.
 - ▶ Camino medio e índice de clusterización de la red: grado de paralelización de las actividades del proceso.
 - ▶ Indegree y Outdegree: fuentes y sumideros del proceso influyen en su *controlabilidad*.
 - ▶ Hubs: procesos críticos.
 - ▶ Modelar personas (responsables) y actividades como nodos, y su interacción como ramas.
 - ▶ Ataques a la red: nodos que desconectan la red, actividades críticas que colapsen el proceso.

Discusión

- ▶ Las redes complejas como herramienta de modelado y solución de problemas en ingeniería nos proveen de:
 - ▶ Marco para el modelado y análisis fundamentado en la teoría de grafos.
 - ▶ Representación matricial o lista de adyacencia fácil de implementar en un ordenador.
 - ▶ Multitud de algoritmos de análisis de redes
 - ▶ Búsqueda: Dijkstra's algorithm.
 - ▶ Optimización por colonia de hormigas.
 - ▶ Detección de comunidades.
 - ▶ Flujo máximo.
 - ▶ Aplicación a:
 - ▶ Redes de transporte.
 - ▶ Redes de proveedores.
 - ▶ Redes de servicios.
 - ▶ Redes de productos.
 - ▶ Redes de comunicación/móviles.
 - ▶ Redes de energía.
 - ▶ Redes sociales.

Recursos recomendados

- ▶ Curso online:
 - ▶ Networks: Theory and Application. Instructor: Lada Adamic.
- ▶ Papers y reviews:
 - ▶ The Structure and Function of Complex Networks.
 - ▶ Statistical mechanics of complex networks.
 - ▶ Methods for generating complex networks with selected structural properties for simulations: a review and tutorial for neuroscientists.
- ▶ Software:
 - ▶ R igraph: The network analysis package.
 - ▶ The Open Graph Viz Platform.
 - ▶ Pajek - Program for Large Network Analysis.