ACI650 - Modelos y Simulación

Modelado y Simulación con Redes de Petri

Mario González
Facultad de Ingeniería y Ciencias Ambientales
Centro de Investigación, Estudios y Desarrollo de Ingeniería (CIEDI)

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS
Laureate International Universities®

Mayo 23, 2016

Objetivos de aprendizaje

- Definiciones básicas y terminología de modelado usando Redes de Petri.
- Elementos y representación de una Red de Petri.
- Marcado y Alcanzabilidad.
- Propiedades.

Introducción a las Redes de Petri

- Las redes de Petri se deben a la tesis doctoral “Comunicación con autómatas” del alemán Carl Adam Petri presentada en la facultad de matemáticas y física de la Universidad Técnica de Darmstadt en 1962.
- Una Red de Petri es un modelo gráfico, formal y abstracto para describir y analizar el flujo de información.
- El análisis de las Redes de Petri ayuda a mostrar información importante sobre la estructura y el comportamiento dinámico de los sistemas modelados.
- La teoría de las Redes de Petri permite la representación matemática del sistema a ser modelado.
- Las Redes de Petri son de utilidad en el diseño de sistemas de hardware y software, para especificación, simulación y diseño de diversos problemas de ingeniería.

Introducción a las Redes de Petri

- Algunas de las características de un sistema que son modeladas utilizando PN son:
  - Sincronización de procesos,
  - eventos asíncronos,
  - operaciones secuenciales,
  - operaciones concurrentes,
  - conflictos con recursos compartidos,
  - procesos distribuidos,
  - procesos paralelos,
  - procesos no determinísticos y/o estocásticos.

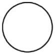
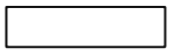
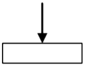
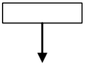
Elementos

Una red de Petri es un grafo bipartito dirigido y se compone de los siguientes elementos:

- Un conjunto de lugares (nodos).
- Un conjunto de transiciones.
- Una función de entrada.
- Una función de salida.
- Marcado Inicial.

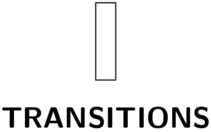
Las funciones de entrada y de salida relacionan a los lugares con las transiciones y viceversa.

Representación gráfica

	Lugares.	P
	Transiciones.	T
	Arcos de entrada.	I(p,t)
	Arcos de salida.	O(t,p)
	Tokens.	M()

Definiciones básicas

Los lugares se utilizan para representar condiciones o estados localizados del sistema, por ejemplo, un lugar puede referirse a una fase en el comportamiento particular de uno de los componentes.



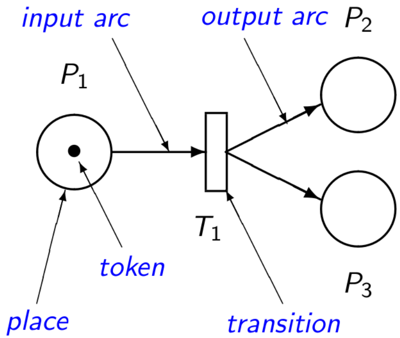
Las transiciones se utilizan para describir eventos que se producen en el sistema; por lo general, resultará en una modificación al estado del sistema.

Definiciones básicas

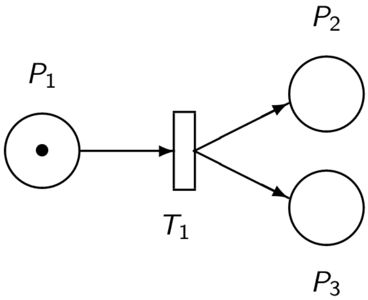
Tokens **(testigos)** son marcadores sin identidad que residen en los lugares. La presencia de un token en un lugar indica que la correspondiente condición o estado local se mantiene.

Los arcos especifican las relaciones entre estados locales o condiciones (lugares) y eventos (transiciones). Un arco de un lugar (P) a una transición (T) se denomina un arco de entrada. Un arco de una transición (T) a un lugar (P) se denomina arco de salida.

Anatomía de una red de Petri

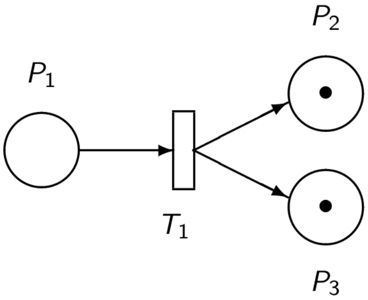


Ejemplo de disparo



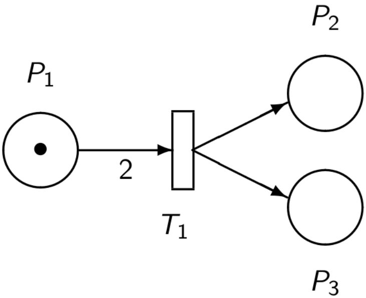
- Cuando una transición **dispara**, los tokens de los lugares de entrada son absorbidos y los tokens son creados en cada lugar de salida.

Ejemplo de disparo



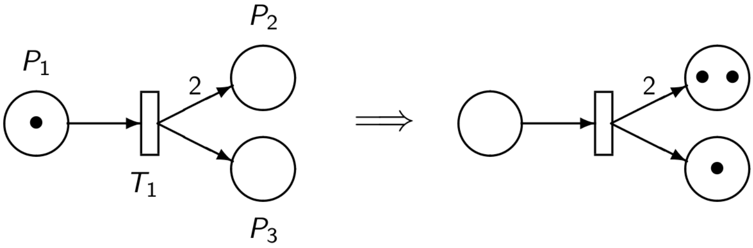
- Cuando una transición **dispara**, los tokens de los lugares de entrada son absorbidos y los tokens son creados en cada lugar de salida.
- Esto es **instantáneo**.

Multiciplidad de los arcos



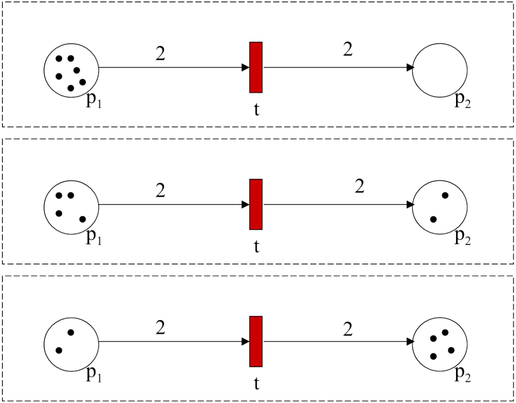
- Si una **multiplicidad** está asociada con un arco, la regla de disparo es ajustada para reflejar la multiplicidad alterando el número de tokens **requeridos** o **producidos**.
- Por ejemplo la red arriba **no puede disparar**.

Multiciplidad de los arcos



- Si una **multiplicidad** está asociada con un arco, la regla de disparo es ajustada para reflejar la multiplicidad alterando el número de tokens **requeridos** o **producidos**.

Ejemplo



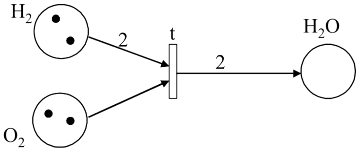
Disparo 1

Disparo 2

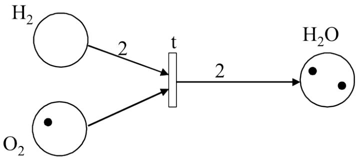
:

Disparo n

Ejemplo



a)

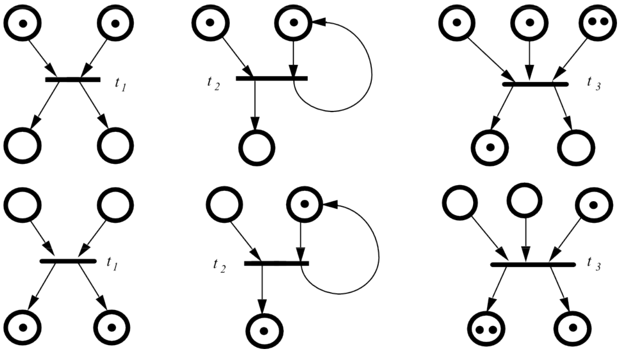


b)

Ejemplo

ANTES DEL DISPARO

DESPUÉS DEL DISPARO



Marcado

El **estado** de una red de Petri en un momento dado, se caracteriza por la distribución de tokens en los lugares, generalmente llamado **marcado** de la red: $m : P \to \mathbb{N}_0$, donde $m(p) = n$ significa que hay n tokens en el lugar p.

Regla de disparo

- Dado un marcado m, una transición t está **habilitada**, $m[t\rangle$, si todos los lugares precedentes de t (aquellos conectados por un arco de entrada) tienen un marcado que es igual o mayor que la multiplicidad del arco de entrada.

Regla de disparo

- Dado un marcado m, una transición t está **habilitada**, $m[t\rangle$, si todos los lugares precedentes de t (aquellos conectados por un arco de entrada) tienen un marcado que es igual o mayor que la multiplicidad del arco de entrada.
- En caso contrario t está **deshabilitada**.

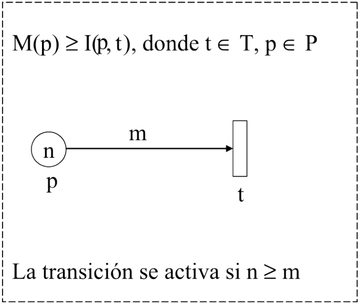
Regla de disparo

- Dado un marcado m, una transición t está **habilitada**, $m[t\rangle$, si todos los lugares precedentes de t (aquellos conectados por un arco de entrada) tienen un marcado que es igual o mayor que la multiplicidad del arco de entrada.
- En caso contrario t está **deshabilitada**.
- Una transición que está habilitada en m puede **disparar**.

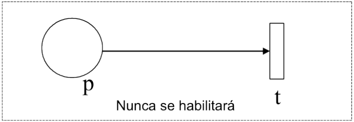
Regla de disparo

- Dado un marcado m, una transición t está **habilitada**, $m[t\rangle$, si todos los lugares precedentes de t (aquellos conectados por un arco de entrada) tienen un marcado que es igual o mayor que la multiplicidad del arco de entrada.
- En caso contrario t está **deshabilitada**.
- Una transición que está habilitada en m puede **disparar**.
- Cuando t en m dispara, un nuevo marcado m' es alcanzado, y se representa como $m[t\rangle m'$.

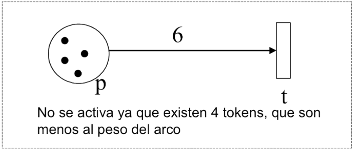
Regla de disparo



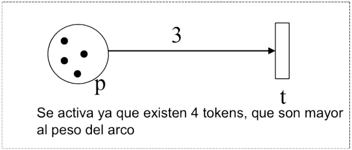
a)



b)

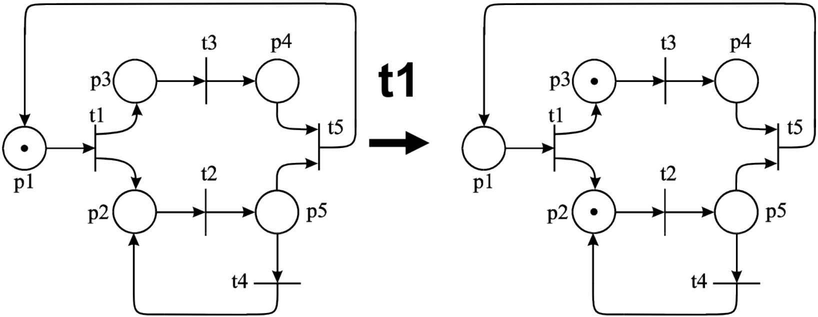


c)

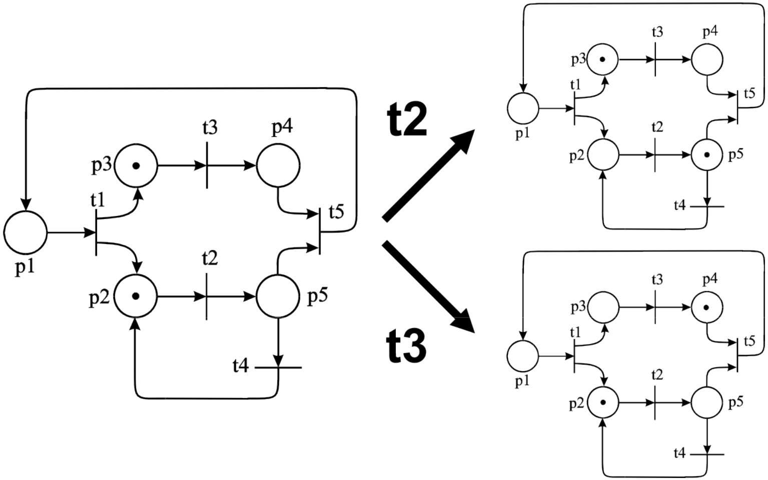


d)

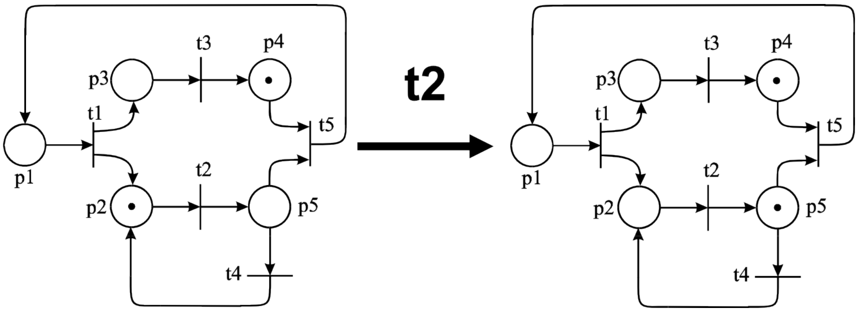
Evolución del marcado: disparo transición t1



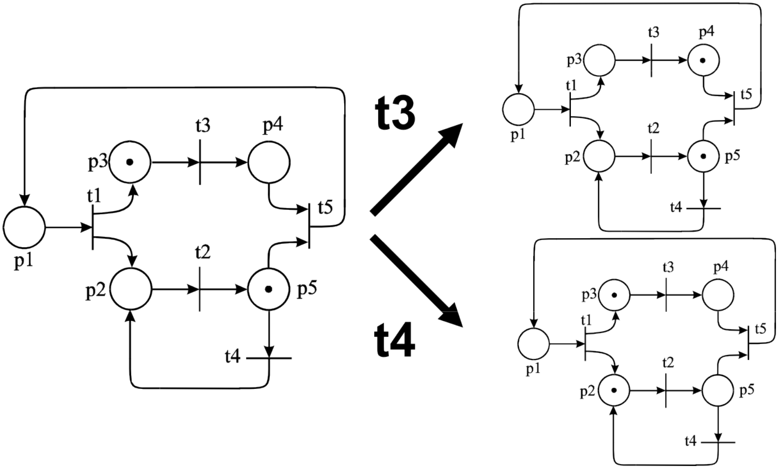
Evolución del marcado: disparo transiciones t2 ó t3



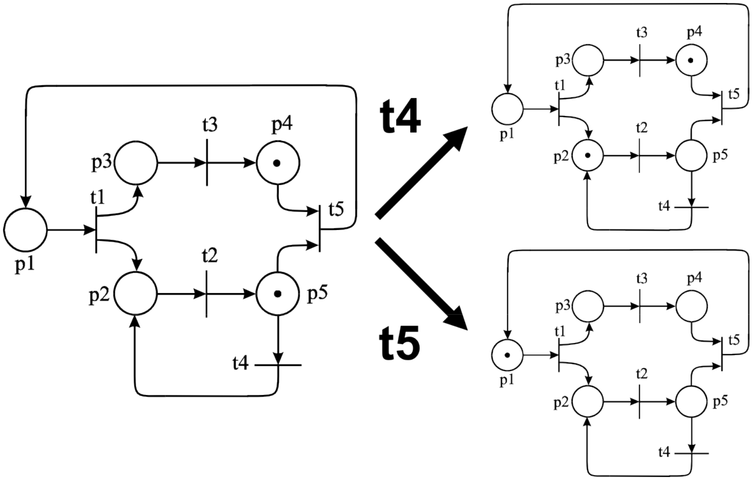
Evolución del marcado: disparo transición t2



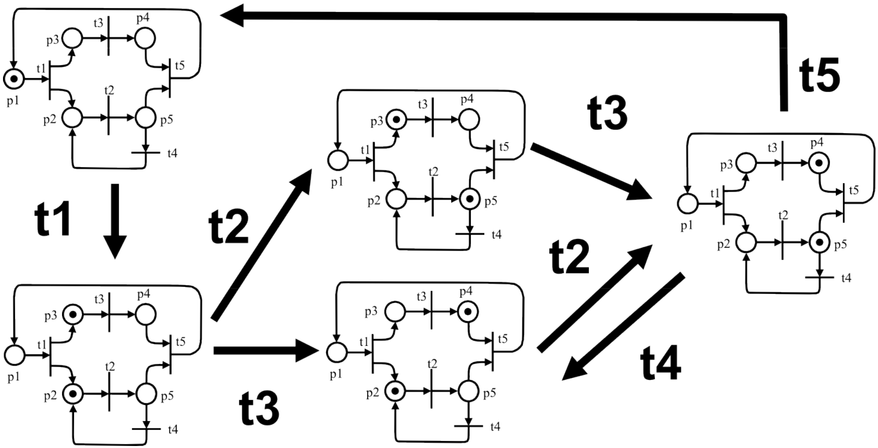
Evolución del marcado: disparo transiciones t3 ó t4



Evolución del marcado: disparo transiciones t4 ó t5



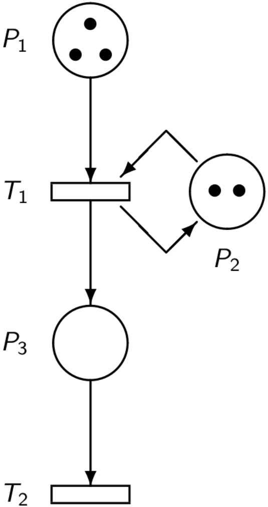
Evolución del marcado



Alcanzabilidad

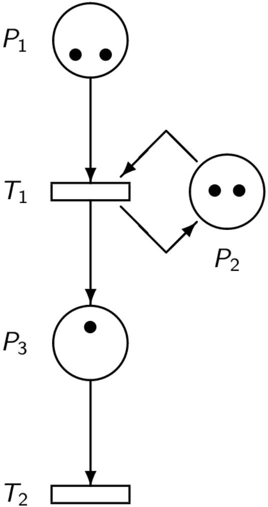
- A partir de un marcado inicial y siguiendo la regla de disparo podemos progresar por todos los estados del modelo. A esto se le llama algunas veces como el juego del token.
- Continuando de esta manera, podemos obtener el **conjunto de alcanzabilidad**, que son todos los estados posibles del modelo.
- Diferentes marcados iniciales pueden llevar a diferentes estados de alcanzabilidad, por lo cual **el marcado inicial es una parte importante de la definición del modelo**.
- Si registramos todos los estados del juego del token y las transiciones entre los estados, obtenemos el **grafo (árbol) de alcanzabilidad**.

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



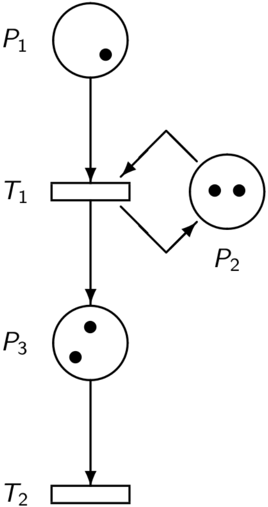
$$(3, 2, 0)$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



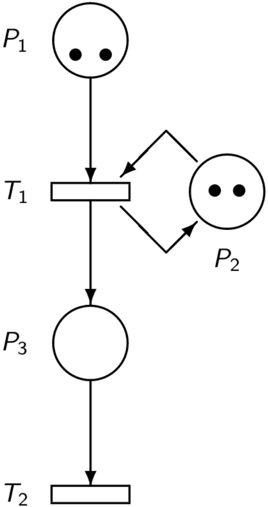
$$(3,2,0) \xrightarrow{T_1} (2,2,1)$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



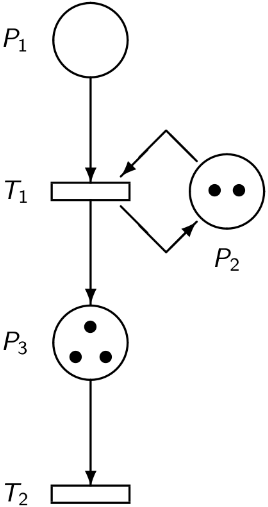
$$(3,2,0) \xrightarrow{T_1} (2,2,1) \xrightarrow{T_1} {\color{red}(1,2,2)}$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



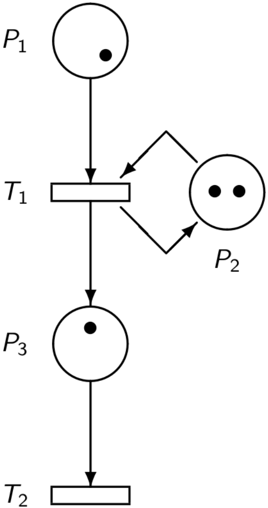
$$\begin{tikzcd}
(3,2,0) \arrow[d, "T_1"] & \\
(2,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (2,2,0) \\
(1,2,2) &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



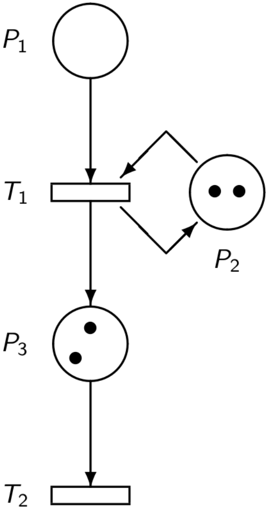
$$\begin{tikzcd}
(3,2,0) \arrow[d, "T_1"] & \\
(2,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (2,2,0) \\
(1,2,2) \arrow[d, "T_1"] & \\
{\color{red}(0,2,3)} &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



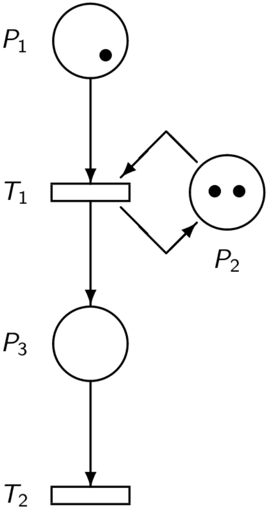
$$\begin{tikzcd}
(3,2,0) \arrow[d, "T_1"] & \\
(2,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (2,2,0) \arrow[d, "T_1"] \\
(1,2,2) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & \color{red}{(1,2,1)} \\
(0,2,3) &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



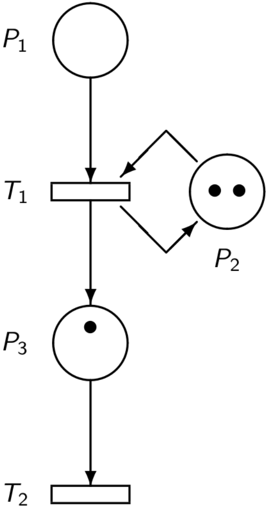
$$\begin{tikzcd}
(3,2,0) \arrow[d, "T_1"] & \\
(2,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (2,2,0) \arrow[d, "T_1"] \\
(1,2,2) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (1,2,1) \arrow[d, "T_1"] \\
(0,2,3) \arrow[r, "T_2"] & (0,2,2)
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



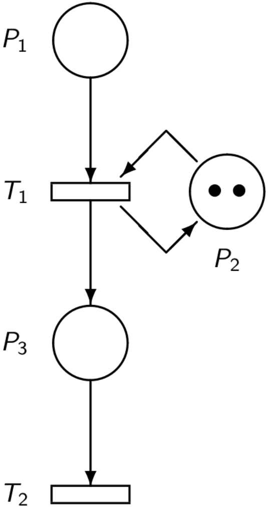
$$
\begin{tikzcd}
(3,2,0) \arrow[d, "T_1"] & & \\
(2,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (2,2,0) \arrow[d, "T_1"] & \\
(1,2,2) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (1,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & \color{red}{(1,2,0)} \\
(0,2,3) \arrow[r, "T_2"] & (0,2,2) &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



$$
\begin{tikzcd}
(3,2,0) \arrow[d, "T_1"] & & \\
(2,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (2,2,0) \arrow[d, "T_1"] & \\
(1,2,2) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (1,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (1,2,0) \arrow[d, "T_1"] \\
(0,2,3) \arrow[r, "T_2"] & (0,2,2) \arrow[r, "T_2"] & \color{red}{(0,2,1)}
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo: grafo de alcanzabilidad



$$
\begin{tikzcd}
(3,2,0) \arrow[d, "T_1"] & & & \\
(2,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (2,2,0) \arrow[d, "T_1"] & & \\
(1,2,2) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (1,2,1) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"] & (1,2,0) \arrow[d, "T_1"] & \\
(0,2,3) \arrow[r, "T_2"] & (0,2,2) \arrow[r, "T_2"] & (0,2,1) \arrow[r, "T_2"] & \color{red}{(0,2,0)}
\end{tikzcd}
$$

Formalización

La estructura de una red de Petri es $PN = (P, T, F, W, M_0)$ donde:

- $P = p_1, p_2, ..., p_m$ es un conjunto finito de lugares (nodos), donde $m \geq 0$.
- $T = t_1, t_2, ..., t_n$ es un conjunto finito de transiciones, donde $n \geq 0$.
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ es un conjunto de arcos.
- $W : F \rightarrow \{1, 2, 3, ...\}$ es una función de peso.
- $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, 3, ...\}$ es la marca inicial.

Formalización

- En una red de Petri, se permite que más de un arco conecte un lugar con una transición o una transición con un lugar.
- Si P es el conjunto de lugares de la red de Petri y T es el conjunto de transiciones, se define:
  - Función incidencia previa, $I : P \times T \to N$
    $I(p_i, t_j)$ =número de arcos que unen el lugar p_i con la transición t_j.
  - Función incidencia posterior, $O : T \times P \to N$
    $O(t_j, p_i)$ =número de arcos que unen la transición t_j con el lugar p_i.
  - Peso o valoración de un arco: etiqueta de valor $I(p, t)$ u $O(t, p)$. Un arco no etiquetado tiene peso uno.

Formalización

- Una red de Petri es **ordinaria** si sus funciones de incidencia sólo pueden tomar valores 0 y 1 (todos sus arcos son de peso unitario).
- Una red de Petri es **generalizada** si sus funciones de incidencia pueden tomar cualquier valor entero mayor o igual que cero.
- Una red de Petri es **pura** o **no reflexiva** si ningún lugar es a la vez entrada y salida de una misma transición.

Marcado

- Un marcado M de una red de Petri es una función desde el conjunto de lugares P al conjunto de los enteros no negativos N, $M : P \to N$
- Si n es el número de lugares de la red de Petri, un **marcado** puede interpretarse vector de dimensión n, $M = (m_1, m_2, ..., m_n)$, en el que m_i es el número de tokens que M asigna a p_i y se verifica $M(p_i) = m_i$.

Ejecución I

Una red de Petri se ejecuta de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Una transición t se dice que está **habilitada** en una red de Petri con un marcado M si todos sus lugares de entrada contienen al menos tantos tokens como arcos haya desde cada lugar a la transición, esto es, si $M(p) \geq I(p, t)$ para todo lugar de entrada de la transición t.
   Una transición sin lugares de entrada, que se denomina **transición fuente**, está siempre habilitada puesto que no tiene restricciones de entrada.

Ejecución II

2. Una transición habilitada puede **dispararse** retirando de cada lugar de entrada tantos tokens como arcos haya desde el lugar hacia la transición $(I(p, t))$ y depositando tantos tokens en cada lugar de salida como arcos haya desde la transición al lugar $(O(t, p))$. La selección de cuál entre todas las transiciones habilitadas es la próxima en dispararse es arbitraria y se supone que se decide en un nivel de abstracción inferior.

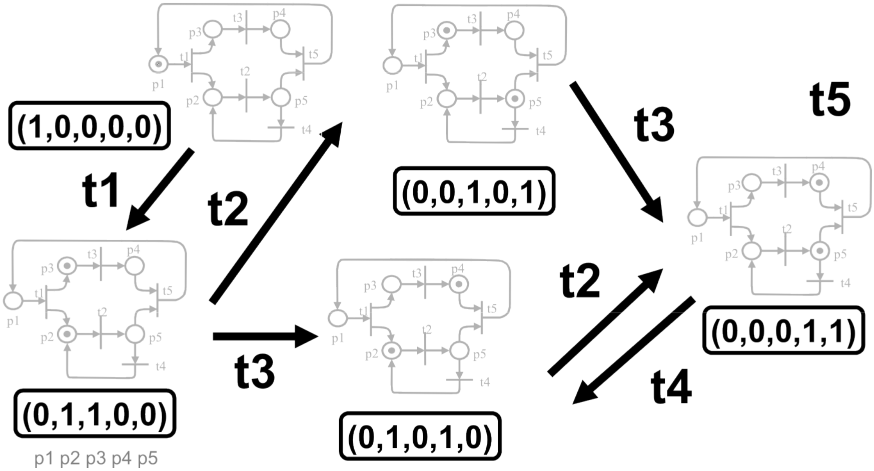
Ejecución III

3. El disparo de una transición modifica la distribución de tokens en los lugares. Si, desde un marcado M_i, se produce el disparo de una transición t, el nuevo marcado que se obtiene, M_j, se calcula mediante la expresión:
   $M_j(p) = M_i(p) + O(t,p) - I(p,t) \forall p \in P$.
   Los tokens se utilizan para definir la ejecución de la red de Petri. Una transición sin lugares de salida, que se denomina **transición sumidero**, elimina testigos de la red de Petri.

Disparo

- Los tokens son **indivisibles**; esto es, un token puede quitarse de un lugar sólo por una transición. Esto hace que el disparo de una transición pueda deshabilitar otras transiciones retirando los tokens de los lugares de entrada compartidos. Exceptuando esta restricción, el disparo de las transiciones se desarrolla de una manera asíncrona.
- Un marcado M_j se dice que es **inmediatamente alcanzable** desde un marcado M_i si M_j puede obtenerse disparando una transición habilitada por M_i.
- Un marcado M_k se dice que es **alcanzable** desde un marcado M_i si existe una secuencia de disparo de transiciones que transforma M_i en M_k.
- El **conjunto de alcanzabilidad**, $R(M)$, de una red de Petri marcada es el conjunto de todos los marcados alcanzables desde M.

Conjunto de alcanzabilidad



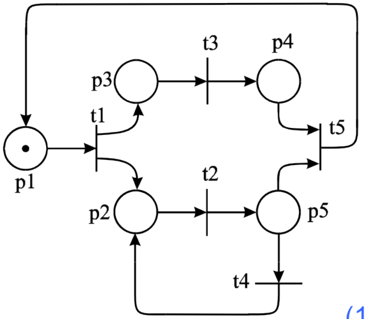
Árbol de alcanzabilidad

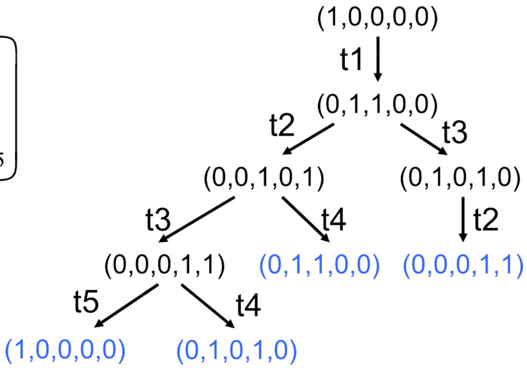
- El árbol de alcanzabilidad de una PN representa el conjunto de todos los marcados alcanzables desde el marcado M_0
- Consiste en un grafo en forma de árbol en el que cada nodo es un marcado alcanzable de la red y los nodos se conectan mediante arcos etiquetados con la transición que se dispara para pasar de un marcado a otro.
- Partiendo del estado inicial M_0, se generan todos los estados alcanzables desde éste mediante el disparo de una transición. A partir de cada estado, se vuelve a repetir el proceso, apareciendo, en consecuencia, un grafo en forma de árbol.

Árbol de alcanzabilidad

- Para representar esta estructura infinita con un árbol finito, se deja de expandir el árbol cuando se alcanza un marcado frontera (hojas del árbol). Éste es el que verifica alguna de las siguientes condiciones:
  a) Es un marcado muerto, esto es, un marcado en el que no hay ninguna transición habilitada.
  b) Es un marcado que ya ha aparecido en el árbol de alcanzabilidad, lo que se denomina nodo duplicado.
  c) Es un marcado que sólo se diferencia de otro presente en el árbol por tener un número distinto de testigos en algún lugar y que habilita el mismo conjunto de transiciones que el primero. Estos marcados se representan con una w en la posición correspondiente al lugar con distinto número de testigos.
- Así, el árbol de alcanzabilidad de cualquier RdP es finito.

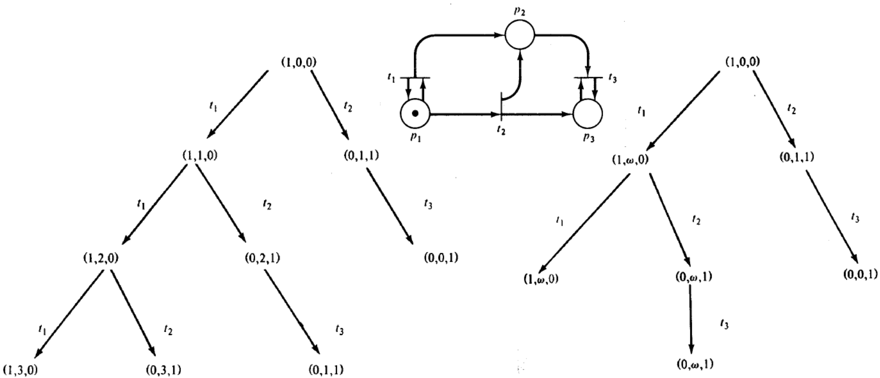
Árbol de alcanzabilidad: ejemplo





Red de Petri **Árbol de alcanzabilidad**

Árbol de alcanzabilidad: ejemplo



Árbol de alcanzabilidad infinito

Árbol de alcanzabilidad finito con la notación w

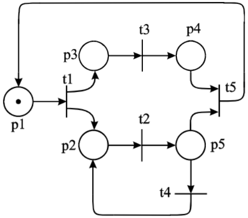
Máquina de testigos I

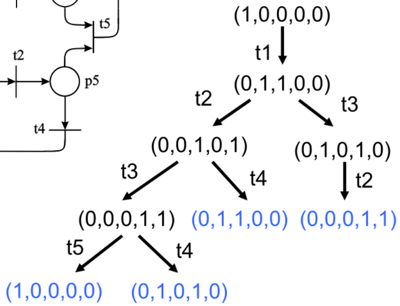
- La máquina de testigos (MT) es una modificación de la técnica del árbol de alcanzabilidad que presenta una estructura gráfica más compacta.
- En la MT se define el estado de una RdP marcada como la colección de los nombres de los lugares que contienen testigos. El número de veces que el nombre de un lugar aparece en un estado es igual al número de testigos que el lugar contiene en ese estado.
- La MT es un grafo dirigido que está formado por todos los posibles estados (con esta nueva notación) en que puede estar una red de Petri dada y por las posibles transiciones entre ellos. Los estados se encierran en óvalos y se unen entre sí mediante arcos dirigidos etiquetados con el nombre de la transición que se dispara para pasar de un estado a otro de los que conecta el arco.

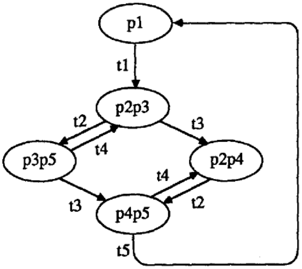
Máquina de testigos II

- La técnica de la máquina de testigos es especialmente útil para representar el conjunto de estados de una red de Petri marcada que contenga muchos lugares y muy pocos testigos en cada estado; mientras que con la técnica del árbol de alcanzabilidad habría que enumerar todas los lugares de la red, con la técnica de la máquina de testigos sólo es necesario indicar el nombre de una parte pequeña de ellas.

Máquina de testigos: ejemplo







Propiedades (i)

- Alcanzabilidad.
  - Técnicas para verificar si cierto estado es alcanzable.
- Cubrimiento.
  - Técnicas para verificar si un estado que “cubre” a otro es alcanzable.
- Capacidad.
  - Técnicas para limitar el número de tokens que puede recibir cierto place.
- Acotación.
  - Técnicas para verificar si el número de tokens que puede recibir un place está acotado.
- Reversibilidad.
  - Técnicas para verificar si la red puede volver al estado inicial.

Propiedades (ii)

- Conservación.
  - Técnicas para verificar si ciertas ecuaciones sobre el número de tokens que contienen los Places se conservan durante toda las posibles ejecuciones.
- Invariantes.
  - Invariantes en Places = conservación.
  - Invariantes en transiciones = secuencia de disparos que hace que la red vuelve al estado inicial de la secuencia.
- Deadlock / Liveness (vivacidad).
  - Deadlock=ninguna transición está activada.
  - Distintos niveles de liveness (vivacidad de las transiciones).
- Persistencia.
  - Si las transiciones que están habilitadas lo siguen estando pese al disparo de otras transiciones.

Otros Tipos de Redes de Petri

- Coloreadas.
  - Añadir una estructura de datos a los tokens, que puede ser comprobada y modificada por las transiciones.
- Con tiempo.
  - Diversas maneras de expresar intervalos de tiempo (tiempo en transiciones, arcos, Places, tokens).
- Estocásticas.
  - Una distribución de probabilidad asociada a las transiciones.
- Orientadas a objetos.
- Híbridas.
- ...

Recursos

- Petri Net, Scholarpedia.
- Petri Net, Wikipedia.