$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

que es la función de densidad de la distribución exponencial con $\lambda = 1/\beta$.

Aplicaciones de la distribución exponencial y la distribución gamma

En la explicación anterior establecimos las bases para la aplicación de la distribución exponencial en el "tiempo de llegada" o tiempo para problemas con eventos de Poisson. Aquí ilustraremos algunas aplicaciones de modelado y después procederemos a analizar el papel que la distribución gamma desempeña en ellas. Observe que la media de la distribución exponencial es el parámetro β, el recíproco del parámetro en la distribución de Poisson. El lector debería recordar que con frecuencia se dice que la distribución de Poisson no tiene memoria, lo cual implica que las ocurrencias en periodos sucesivos son independientes. El importante parámetro β es el tiempo promedio entre eventos. En la teoría de confiabilidad, donde la falla de equipo con frecuencia se ajusta a este proceso de Poisson, β se denomina **tiempo medio entre fallas**. Muchas descomposturas de equipo siguen el proceso de Poisson y por ello se aplica la distribución exponencial. Otras aplicaciones incluyen tiempos de supervivencia en experimentos biomédicos y tiempo de respuesta de computadoras.

En el siguiente ejemplo mostramos una aplicación simple de la distribución exponencial a un problema de confiabilidad. La distribución binomial también desempeña un papel en la solución.

Ejemplo 6.17: Suponga que un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de operación antes de fallar, en años, está dado por T. La variable aleatoria T se modela bien mediante la distribución exponencial con tiempo medio de operación antes de fallar $\beta = 5$. Si se instalan 5 de estos componentes en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al final de 8 años al menos dos aún funcionen?

***Solución*:** La probabilidad de que un componente determinado siga funcionando después de 8 años es dada por

$$P(T > 8) = \frac{1}{5}\int_8^{\infty} e^{-t/5}\, dt = e^{-8/5} \approx 0.2.$$

Representemos con X el número de componentes que todavía funcionan después de 8 años. Entonces, utilizando la distribución binomial tenemos

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{5} b(x; 5, 0.2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} b(x; 5, 0.2) = 1 - 0.7373 = 0.2627.$$

En el capítulo 3 se incluyen ejercicios y ejemplos en los que el lector ya se enfrentó a la distribución exponencial. Otros que implican problemas de tiempo de espera y de confiabilidad se pueden encontrar en el ejemplo 6.24 y en los ejercicios y ejercicios de repaso al final de este capítulo.

La propiedad de falta de memoria y su efecto en la distribución exponencial

En los tipos de aplicación de la distribución exponencial en los problemas de confiabilidad y de tiempo de vida de una máquina o de un componente influye la **propiedad de**