6.4 Aplicaciones de la distribución normal

En los siguientes ejemplos se abordan algunos de los muchos problemas en los que se puede aplicar la distribución normal. El uso de la curva normal para aproximar probabilidades binomiales se estudia en la sección 6.5.

Ejemplo 6.7: Cierto tipo de batería de almacenamiento dura, en promedio, 3.0 años, con una desviación estándar de 0.5 años. Suponga que la duración de la batería se distribuye normalmente y calcule la probabilidad de que una batería determinada dure menos de 2.3 años.

***Solución*:** Empiece construyendo un diagrama como el de la figura 6.14, que muestra la distribución dada de la duración de las baterías y el área deseada. Para calcular la $P(X < 2.3)$ necesitamos evaluar el área bajo la curva normal a la izquierda de 2.3. Esto se logra calculando el área a la izquierda del valor z correspondiente. De donde encontramos que

$$z = \frac{2.3 - 3}{0.5} = -1.4,$$

y entonces, usando la tabla A.3, tenemos

$$P(X < 2.3) = P(Z < -1.4) = 0.0808.$$

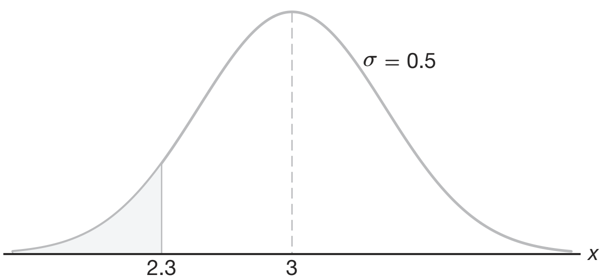

Figura 6.14: Área para el ejemplo 6.7.

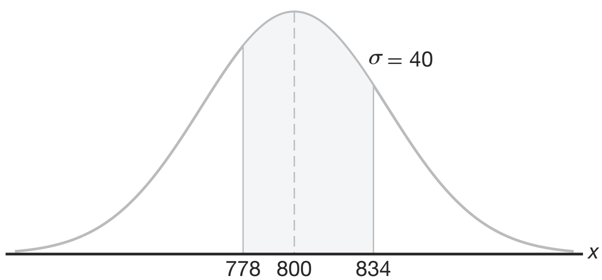

Figura 6.15: Área para el ejemplo 6.8.

Ejemplo 6.8 Una empresa de material eléctrico fabrica bombillas de luz cuya duración, antes de quemarse, se distribuye normalmente con una media igual a 800 horas y una desviación estándar de 40 horas. Calcule la probabilidad de que una bombilla se queme entre 778 y 834 horas.

***Solución*:** La distribución de vida de las bombillas se ilustra en la figura 6.15. Los valores z que corresponden a $x_1 = 778$ y $x_2 = 834$ son

$$z_1 = \frac{778 - 800}{40} = -0.55 \text{ y } z_2 = \frac{834 - 800}{40} = 0.85.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(778 < X < 834) &= P(-0.55 < Z < 0.85) = P(Z < 0.85) - P(Z < -0.55) \\ &= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.9: En un proceso industrial el diámetro de un cojinete de bolas es una medida importante. El comprador establece que las especificaciones en el diámetro sean 3.0 ± 0.01 cm. Esto implica que no se aceptará ninguna parte que no cumpla estas especificaciones. Se sabe que en el proceso el diámetro de un cojinete tiene una distribución normal con media $\mu = 3.0$ y una desviación estándar $\sigma = 0.005$. En promedio, ¿cuántos de los cojinetes fabricados se descartarán?

***Solución*:** La distribución de los diámetros se ilustra en la figura 6.16. Los valores que corresponden a los límites especificados son $x_1 = 2.99$ y $x_2 = 3.01$. Los valores z correspondientes son

$$z_1 = \frac{2.99 - 3.0}{0.005} = -2.0 \text{ y } z_2 = \frac{3.01 - 3.0}{0.005} = +2.0.$$

Por lo tanto,

$$P(2.99 < X < 3.01) = P(-2.0 < Z < 2.0).$$

A partir de la tabla A.3, $P(Z < -2.0) = 0.0228$. Debido a la simetría de la distribución normal, encontramos que

$$P(Z < -2.0) + P(Z > 2.0) = 2(0.0228) = 0.0456.$$

Como resultado se anticipa que, en promedio, se descartarán 4.56% de los cojinetes fabricados.

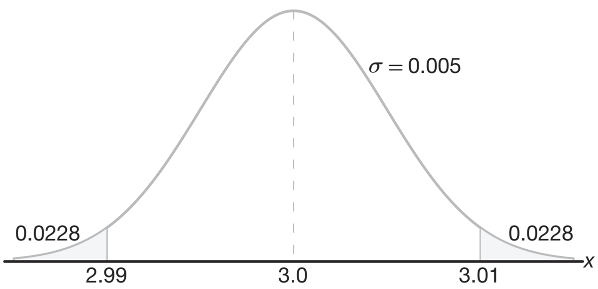

Figura 6.16: Área para el ejemplo 6.9.

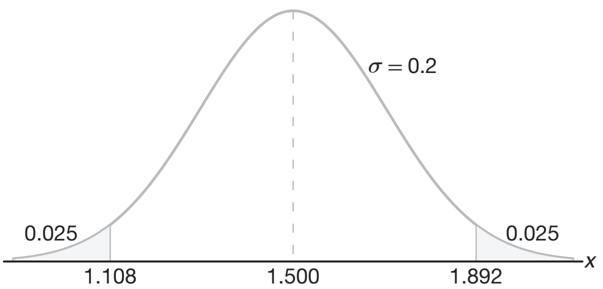

Figura 6.17: Especificaciones para el ejemplo 6.10.

Ejemplo 6.10: Se utilizan medidores para rechazar todos los componentes en los que cierta dimensión no esté dentro de la especificación $1.50 \pm d$. Se sabe que esta medida se distribuye normalmente con una media de 1.50 y una desviación estándar de 0.2. Determine el valor d tal que las especificaciones "cubran" 95% de las mediciones.

***Solución*:** A partir de la tabla A.3 sabemos que

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95.$$

Por lo tanto,

$$1.96 = \frac{(1.50 + d) - 1.50}{0.2},$$

de la que obtenemos

$$d = (0.2)(1.96) = 0.392.$$

En la figura 6.17 se muestra una ilustración de las especificaciones.

Ejemplo 6.11: Cierta máquina fabrica resistencias eléctricas que tienen una resistencia media de 40 ohms y una desviación estándar de 2 ohms. Si se supone que la resistencia sigue una distribución normal y que se puede medir con cualquier grado de precisión, ¿qué porcentaje de resistencias tendrán una resistencia que exceda 43 ohms?

***Solución*:** Se obtiene un porcentaje multiplicando la frecuencia relativa por 100%. Como la frecuencia relativa para un intervalo es igual a la probabilidad de caer en el intervalo, debemos calcular el área a la derecha de $x = 43$ en la figura 6.18. Esto se puede hacer transformando $x = 43$ al valor z correspondiente, con lo cual se obtiene el área a la izquierda de z de la tabla A.3, y después se resta esta área de 1. Encontramos que

$$z = \frac{43 - 40}{2} = 1.5.$$

Por lo tanto,

$$P(X > 43) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

Así, 6.68% de las resistencias tendrán una resistencia que exceda 43 ohms.

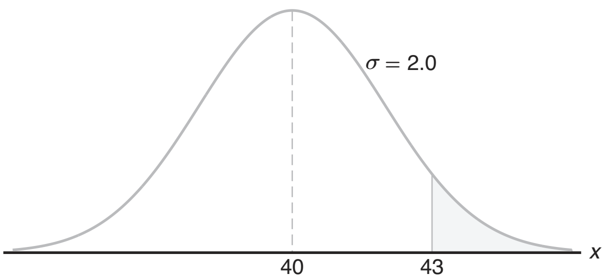

Figura 6.18: Área para el ejemplo 6.11.

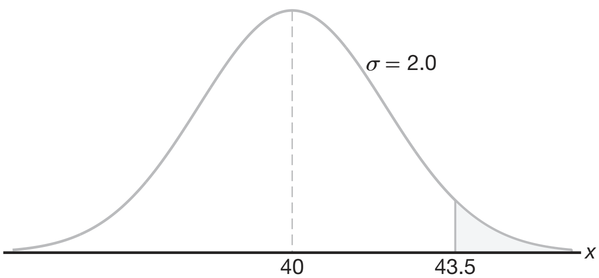

Figura 6.19: Área para el ejemplo 6.12.

Ejemplo 6.12: Calcule el porcentaje de resistencias que excedan 43 ohms para el ejemplo 6.11 si la resistencia se mide al ohm más cercano.

***Solución*:** Este problema difiere del ejemplo 6.11 en que ahora asignamos una medida de 43 ohms a todos los resistores cuyas resistencias sean mayores que 42.5 y menores que 43.5. Lo que estamos haciendo realmente es aproximar una distribución discreta por medio de una distribución continua normal. El área que se requiere es la región sombreada a la derecha de 43.5 en la figura 6.19. Encontramos ahora que

$$z = \frac{43.5 - 40}{2} = 1.75.$$

En consecuencia,

$$P(X > 43.5) = P(Z > 1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401.$$

Por lo tanto, 4.01% de las resistencias exceden 43 ohms cuando se miden al ohm más cercano. La diferencia 6.68% – 4.01% = 2.67% entre esta respuesta y la del ejemplo 6.11 representa todos los valores de resistencias mayores que 43 y menores que 43.5, que ahora se registran como de 43 ohms.

Ejemplo 6.13: La calificación promedio para un examen es 74 y la desviación estándar es 7. Si 12% del grupo obtiene A y las calificaciones siguen una curva que tiene una distribución normal, ¿cuál es la A más baja posible y la B más alta posible?

***Solución*:** En este ejemplo comenzamos con un área de probabilidad conocida, calculamos el valor z y después determinamos x con la fórmula $x = \sigma z + \mu$. Un área de 0.12, que corresponde a la fracción de estudiantes que reciben A, está sombreada en la figura 6.20. Necesitamos un valor z que deje 0.12 del área a la derecha y, por lo tanto, un área de 0.88 a la izquierda. A partir de la tabla A.3, $P(Z < 1.18)$ tiene el valor más cercano a 0.88, de manera que el valor z que se desea es 1.18. En consecuencia,

$$x = (7)(1.18) + 74 = 82.26.$$

Por lo tanto, la A más baja es 83 y la B más alta es 82.

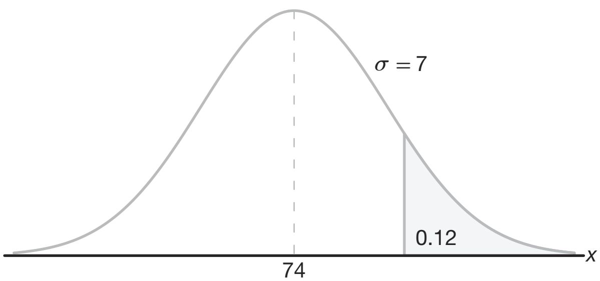

Figura 6.20: Área para el ejemplo 6.13.

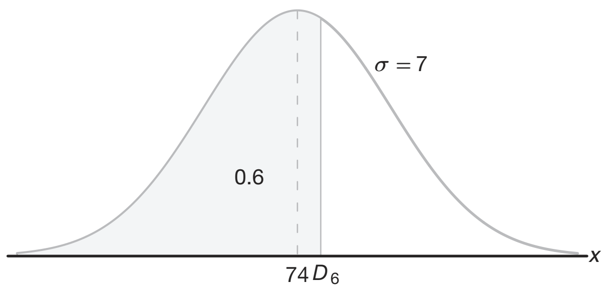

Figura 6.21: Área para el ejemplo 6.14.

Ejemplo 6.14: Remítase al ejemplo 6.13 y calcule el sexto decil.

***Solución*:** El sexto decil, escrito como D_6, es el valor x que deja 60% del área a la izquierda, como se muestra en la figura 6.21. En la tabla A.3 encontramos que $P(Z < 0.25) \approx 0.6$, de manera que el valor z deseado es 0.25. Ahora, $x = (7)\,(0.25) + 74 = 75.75$. Por lo tanto, $D_6 = 75.75$. Es decir, 60% de las calificaciones son 75 o menos.

Ejercicios

6.1 Dada una distribución continua uniforme, demuestre que

a) $\mu = \frac{A+B}{2}$, y

b) $\sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12}$.

6.2 Suponga que X tiene una distribución continua uniforme de 1 a 5. Determine la probabilidad condicional $P(X > 2.5 \mid X \leq 4)$.

6.3 La cantidad de café diaria, en litros, que sirve una máquina que se localiza en el vestíbulo de un aeropuerto es una variable aleatoria X que tiene una distribución continua uniforme con $A = 7$ y $B = 10$. Calcule la probabilidad de que en un día determinado la cantidad de café que sirve esta máquina sea

a) a lo sumo 8.8 litros;

b) más de 7.4 litros, pero menos de 9.5 litros;

c) al menos 8.5 litros.

6.4 Un autobús llega cada 10 minutos a una parada. Se supone que el tiempo de espera para un individuo en particular es una variable aleatoria con distribución continua uniforme.