Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Licenciatura em Engenharia Informática

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

2021/2022

Escalonamento de Equipas

GRUPO:

A93290 - Joana Alves
A93264 - Maria Cunha
A93296 - Vicente Moreira

Data de Entrega: 03/05/2022

Índice

Índice de Figuras

Introdução

Este projeto tem como objetivo aprofundar os nossos conhecimentos obtidos nas aulas teóricas através da realização prática de um exercício de **otimização de redes**. Assim, foi-nos apresentado um problema de escalonamento de equipas, onde uma empresa presta serviços no local a vários clientes. O objetivo da empresa será organizar e decidir o **número ótimo de equipas**, assim como a **rota** que estas irão percorrer, de forma a minimizar os **custos de operação**, ou seja, minimizar o custo das deslocações entre os vários clientes.

Para além disso, os clientes a serem servidos possuem **horas fixas definidas** de serviço, ou seja, o cliente terá de ser atendido à sua hora definida, sendo que no caso de alguma equipa chegar atrasada ao serviço de algum cliente, este ficará insatisfeito. Esta **restrição** obriga que as equipas cheguem sempre às horas corretas (ou antecipadas) nos respetivos clientes. Assume-se, também, que todas as equipas partem da sede da empresa ao mesmo tempo pelas 9:00, retornando a esta no fim da sua rota.

Segundo o enunciado do trabalho prático, para obtermos as horas de serviço finais dos vários clientes, assim como o número de clientes a servir, necessitamos de aplicar as regras impostas aplicadas ao maior número mecanográfico dos alunos. Sendo **93296** o maior número de estudante do grupo, obtivemos como resultado a **remoção do cliente E**, assim como a definição das horas de serviço do **cliente A (Ana) (ts: 4 –> 10:00)** e o **cliente H (Helena) (ts: 3 –> 9:45).**

Visto que as equipas irão retornar sempre à sede da empresa, e que este retorno implica no aumento do custo de operação de 1 Unidade Monetária, decidimos interpretar este local de retorno como uma "deslocação" semelhante à sede, no entanto, com o custo final da equipa já acrescido à deslocação. Apresentamos de seguida a tabela dos clientes a serem servidos no problema, assim como um grafo representativo de todas as deslocações possíveis entre clientes, com os seus tempos e custos associados: (**Nota**: As setas coloridas no grafo representam deslocações bidirecionais)

J	Nome	aj	Hora de Serviço
1	Ana	4	10:00
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	-	-
6	Fransica	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	3	09:45
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

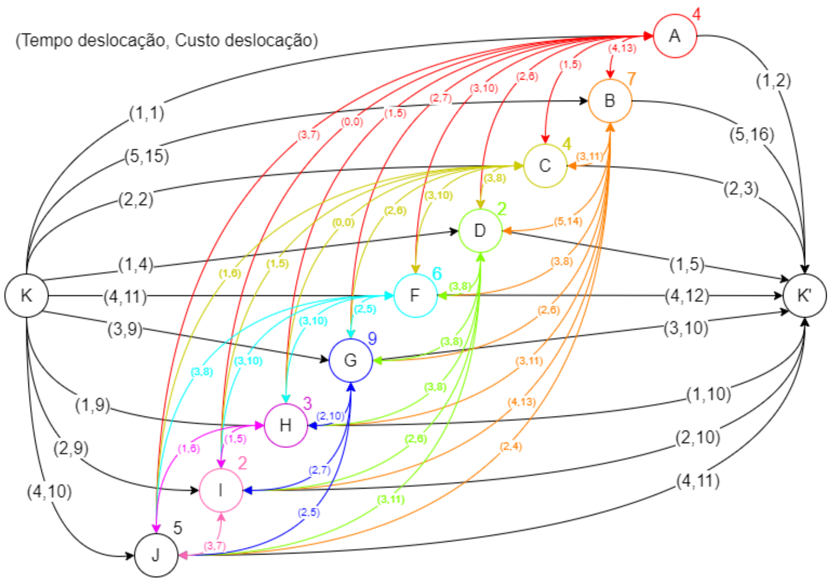

Figura 1 - Tabela de Clientes e Grafo Total

Formulação do Problema e Estratégia Adotada

O exercício em questão é categorizado como um **problema de redes**, em específico, um **problema de rotas** onde é necessário encontrar não só as melhores rotas, como também o número destas, de forma a atender às **restrições** impostas pelos vários clientes e **minimizar** o custo das operações.

Visto que no problema em questão, os clientes têm **horas de serviço definidas** e, para atender estes clientes com sucesso é necessário que uma equipa chegue ao destino do cliente **na hora definida ou antes desta**, decidimos começar a resolução do problema ao focar-nos nestas restrições. Para isso analisamos a tabela dos tempos de deslocação entre os vários clientes e a sede da empresa com o objetivo de remover todas as arestas que seriam **"inválidas"**, ou seja, deslocações nas quais uma equipa, depois de atender um cliente anterior à sua hora, se deslocar por dada aresta, resulta numa chegada atrasada ao cliente do destino.

Utilizando as tabelas fornecidas, decidimos alterar estas de forma a incluir também as deslocações entre a sede e, apesar das deslocações terem custos bidirecionais iguais, uma deslocação que seria inválida num sentido pode ser válida no sentido oposto, o que nos levou a duplicar os valores na tabela de forma simétrica. Acrescentamos, por último, adjacente aos clientes, o seu tempo de serviço, obtendo a seguinte tabela de tempos de deslocação:

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
		Dest.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K'
	Orig.	Ts:	4	7	4	2	10	6	9	3	2	5	100
1	A	4	-	4	1	2	2	3	2	1	0	3	1
2	B	7	4	-	3	5	3	3	2	3	4	2	5
3	C	4	1	3	-	3	2	3	2	0	1	1	2
4	D	2	2	5	3	-	1	3	3	3	2	3	1
5	E	10	2	3	2	1	-	2	1	2	2	2	2
6	F	6	3	3	3	3	2	-	2	3	3	3	4
7	G	9	2	2	2	3	1	2	-	2	2	2	3
8	H	3	1	3	0	3	2	3	2	-	1	1	1
9	I	2	0	4	1	2	2	3	2	1	-	3	2
10	J	5	3	2	1	3	2	3	2	1	3	-	4
11	K	0	1	5	2	1	2	4	3	1	2	4	-
						tempos de deslocação							

Figura 2 - Tabela dos Tempos de Deslocação

De seguida, começamos por marcar todas as deslocações válidas e inválidas, sendo todas as células válidas aquelas que respeitam o seguinte cálculo: ***tsOrig + ArestaOrig_Dest <= tsDest***. (**Nota:** Este processo foi efetuado manualmente, sendo que, para problemas de maior dimensão, poderá ser utilizado um processo automático de avaliação e "validação").

Para melhor visualizar a validação, colorimos as células das arestas válidas de **verde** e as inválidas **vermelhas**, repetindo o padrão de cor (*copy/paste* formatação) para a tabela dos custos das deslocações, tendo o cuidado desta ter exatamente a mesma dimensão que a tabela de tempos, obtendo os seguintes resultados:

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
		Dest.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K'
	Orig.	Ts:	4	7	4	2	10	6	9	3	2	5	x
1	A	4	-	4	1	2	-	3	2	1	0	3	1
2	B	7	4	-	3	5	-	3	2	3	4	2	5
3	C	4	1	3	-	3	-	3	2	0	1	1	2
4	D	2	2	5	3	-	-	3	3	3	2	3	1
5	E	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	F	6	3	3	3	3	-	-	2	3	3	3	4
7	G	9	2	2	2	3	-	2	-	2	2	2	3
8	H	3	1	3	0	3	-	3	2	-	1	1	1
9	I	2	0	4	1	2	-	3	2	1	-	3	2
10	J	5	3	2	1	3	-	3	2	1	3	-	4
11	K	0	1	5	2	1	-	4	3	1	2	4	-
								tempos de deslocação					

Figura 3 - Tabela Final Tempos de Deslocação

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K'
1	A	-	13	5	6	-	10	7	5	0	7	2
2	B	13	-	11	14	-	8	6	11	13	4	16
3	C	5	11	-	8	-	10	6	0	5	6	3
4	D	6	14	8	-	-	8	8	8	6	11	5
5	E	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	F	10	8	10	8	-	-	5	10	10	8	12
7	G	7	6	6	8	-	5	-	10	7	5	10
8	H	5	11	0	8	-	10	10	-	5	6	10
9	I	0	13	5	6	-	10	7	5	-	7	10
#	J	7	4	6	11	-	8	5	6	7	-	11
#	K	1	15	2	4	-	11	9	9	9	10	-
						custos de deslocação						

Figura 4 - Tabela Final Custos de Deslocação

Com este processo finalizado, obtemos assim todas as arestas válidas do nosso problema de rotas, ou seja, as variáveis presentes no nosso problema, sendo que as linhas das tabelas correspondem aos **"destinos possíveis"** e as colunas às **"chegadas possíveis".** Para validar os cálculos efetuados e visualizar o exercício, decidimos criar o grafo de compatibilidades gerado contendo apenas as arestas válidas entre os vários clientes:

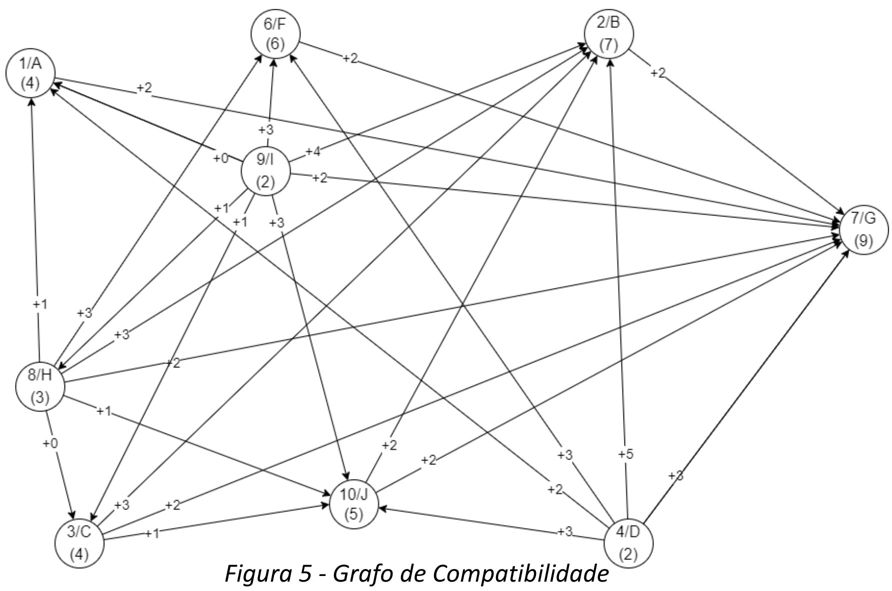

Figura 5 - Grafo de Compatibilidade

Modelo Inicial e Problemas Encontrados

Tendo atendido às **restrições** e obtido as arestas válidas, começamos por montar o grafo correspondente ao problema utilizando a ferramenta ***relax***. Inicialmente, definimos um grafo com **12 nodos** e **44 arestas** (número de células verdes), onde cada aresta possuía os seus respetivos custos e um limite de capacidade de 1, visto que apenas uma equipa pode deslocar-se ao mesmo cliente. Também definimos os nodos de 1 a 10 (exceto 5 -> E) como **consumidores** de 1 unidade, dado que é obrigatório que cada cliente seja servido.

No entanto, apesar de termos definido as arestas de forma "lógica", encontramos problemas quando definimos a quantidade **produtora** no nodo correspondente à partida na sede (11), pois ao definir 9 nodos consumidores necessitaríamos no mínimo 9 unidades produzidas o que nos levou a um modelo incorreto e, por sua conta, a soluções inválidas não representativas do problema.

Depois de várias tentativas com ajustes nas capacidades das arestas, quantidades produtoras no nodo inicial da sede e quantidades consumidoras nos clientes e no nodo da sede de chegada, vários problemas como a obrigatoriedade de serviço nos clientes, a restrição de "retorno" de cada equipa e a não utilização da mesma aresta por duas equipas, concluímos que o nosso modelo/grafo inicial necessitava de algum ajuste adicional, em particular, nos nodos dos clientes. Assim, depois de uma análise extensa das soluções inválidas, percebemos que estes não só são nodos **consumidores** como também nodos **produtores**, dado que uma equipa irá sair do respetivo cliente.

Modelo Final do Problema

Com o problema do modelo anterior identificado, e, com o auxílio de material didático fornecido pelo docente, nomeadamente o documento *"Modelos de Investigação Operacional"* descobrimos o "ajuste" em falta no nosso modelo. Tal como dito anteriormente, os nodos correspondentes aos clientes não só são nodos consumidores como nodos produtores, algo incompatível com o desenho do grafo inicial.

Para resolver esse problema, decidimos **dividir** os nodos dos clientes em dois nodos por cada cliente, um nodo de "entrada" e um nodo de "saída". Para manter consistência, mantivemos os números identificadores de clientes, sendo os números de 1 a 10 representantes dos nodos de saída e criamos 10 novos nodos de entrada, de 13 a 22. (13 -> A, 14 -> B, ...)

Depois de adicionados aos grafos, fizemos os ajustes necessários, ou seja, nas arestas alteramos os nodos de destino para os nodos de entrada dos clientes correspondentes e definimos os nodos de entrada como consumidores de 1 unidade e os de saída produtores de 1 unidade.

Apresentamos de seguida uma simplificação de cada par de nodos de cada cliente resultante do ajuste no modelo, com o seu custo associado:

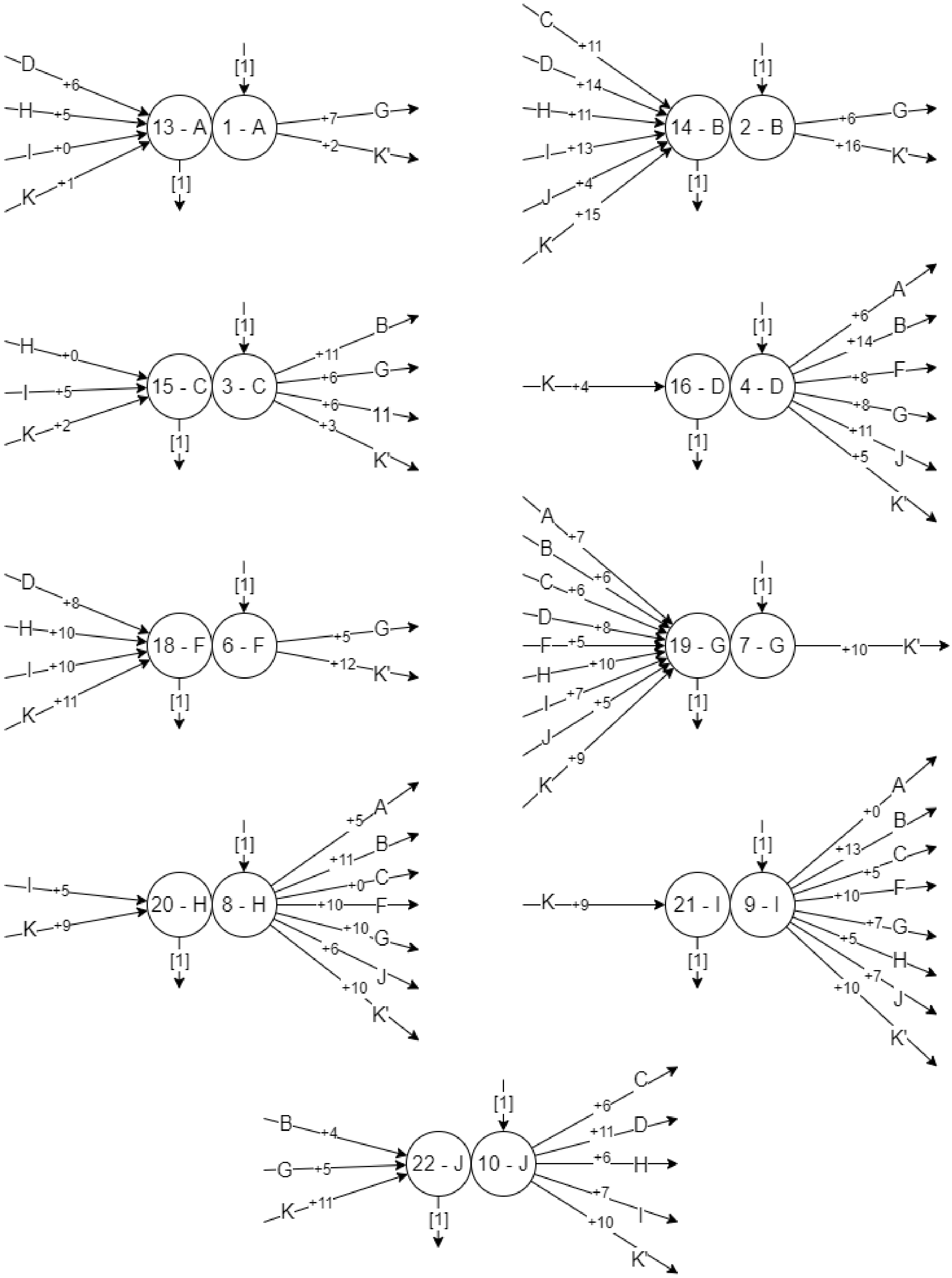

Figura 6 – Pares de Nodos Cliente

Inicialmente, também incluímos novas arestas de ligação entre os nodos de entrada e saída nos clientes, com um custo nulo, no entanto, como estas arestas não serão utilizadas, visto que o nodo de entrada irá consumir uma unidade, não sendo esta transportada pela aresta de ligação, decidimos mais tarde removê-las do modelo final.

Obtenção da Solução Ótima

Com o modelo/grafo finalizados, basta apenas definir a quantidade produtora/consumidora na sede da empresa, o que irá ditar a **quantidade de equipas** a ser utilizadas. Para descobrir o número de equipas com o menor custo total, decidimos avaliar o custo conforme o número de equipas utilizadas é incrementado, gravando os vários resultados na seguinte tabela:

Número de Equipas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Custo Total Final	*-	*-	67	72	80	94	108	127	149

*Problema Impossível

Figura 7 – Custos de Operação para N Equipas

Como podemos concluir, são apenas necessárias **3 equipas** para obter o custo de operação mínimo, respeitando os horários de serviço dos clientes.

Mais tarde, percebemos que existe uma solução mais eficaz para determinar o número de equipas. Esta envolve adicionar apenas uma nova aresta no grafo, de origem na sede de partida (11) e destino a mesma sede (12), tendo esta aresta um custo nulo e capacidade infinita. Assim, basta definir a quantidade produtora/consumidora da sede da empresa com o seu valor máximo (9) e as equipas não necessárias à solução utilizarão essa aresta. No nosso exemplo obtivemos **6 equipas inutilizadas**, o que confirma a nossa solução ótima de apenas **3 equipas necessárias**.

Ficheiros

Ficheiro Input

```
22
45
  1  19  7  1
  1  12  2  1
  2  19  6  1
  2  12  16 1
  3  14  11 1
  3  19  6  1
  3  22  6  1
  3  12  3  1
  4  13  6  1
  4  14  14 1
  4  18  8  1
  4  19  8  1
  4  22  11 1
  4  12  5  1
  6  19  5  1
  6  12  12 1
  7  12  10 1
  8  13  5  1
  8  14  11 1
  8  15  0  1
  8  18  10 1
  8  19  10 1
  8  22  6  1
  8  12  10 1
  9  13  0  1
  9  14  13 1
  9  15  5  1
  9  18  10 1
  9  19  7  1
  9  20  5  1
  9  22  7  1
  9  12  10 1
  10 14  4  1
  10 19  5  1
  10 12  11 1
  11 13  1  1
  11 14  15 1
  11 15  2  1
  11 16  4  1
  11 18  11 1
  11 19  9  1
  11 20  9  1
  11 21  9  1
  11 22  10 1
  11 12  0  1000
1
1
```

```
1
1
0
1
1
1
1
1
9
-9
-1
-1
-1
-1
0
-1
-1
-1
-1
-1
```

Ficheiro Output

```
END OF READING
 NUMBER OF NODES = 22, NUMBER OF ARCS = 45
 CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
 CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
 ***********************************
 TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
 TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
   1 12  1.
   2 19  1.
   3 22  1.
   4 18  1.
   6 12  1.
   7 12  1.
   8 15  1.
   9 20  1.
   10 14  1.
   11 13  1.
   11 16  1.
   11 21  1.
   11 12  6.
 OPTIMAL COST =   67.
 NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 29
 NUMBER OF ITERATIONS =  37
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  3
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  0
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  4
 ***********************************
```

Solução Ótima

Interpretação do Resultado

Depois de obter os resultados, recorremos a uma avaliação e análise destes mesmos. Começamos por denotar o valor do custo de operação obtido de **67 Unidades Monetárias** e, de seguida, montamos o grafo relativo à solução obtida:

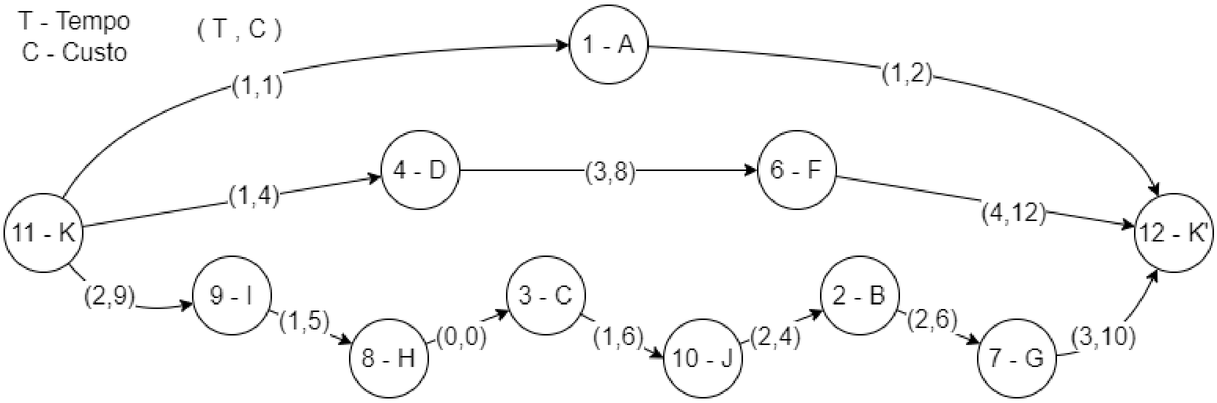

Figura 8 - Grafo Solução Ótima

Definição dos Percursos das Equipas

Com os percursos definidos pelas várias equipas, simulamos a representação destes num contexto real, ou seja, representando os nomes dos vários clientes, as horas a que foram atendidos, e os vários custos entre cada deslocação. Obtemos assim estas 3 tabelas:

Equipa 1							
J	**Cliente**	**Tempo Espera**	**aJ**	**Hora de Serviço**	**Deslocação**	**T**	**C**
	Keleirós		0	9:00	K -> A	1	1
1	Ana	45m	4	10:00	A -> K'	1	2
	Keleirós		5	10:15			
					Custo de Operação:		3

Equipa 2							
J	**Cliente**	**Tempo Espera**	**aJ**	**Hora de Serviço**	**Deslocação**	**T**	**C**
	Keleirós		0	9:00	K -> D	1	4
4	Diogo	15m	2	9:30	D -> F	3	8
6	Francisca	15m	6	10:30	F -> K'	4	12
	Keleirós		10	11:30			
					Custo de Operação:		24

Equipa 3							
J	**Cliente**	**Tempo Espera**	**aJ**	**Hora de Serviço**	**Deslocação**	**T**	**C**
	Keleirós		0	9:00	K -> I	2	9
9	Inês	0m	2	9:30	I -> H	1	5
8	Helena	0m	3	9:45	H -> C	0	0
3	Carlos	15m	4	10:00	C -> J	1	6
10	José	0m	5	10:15	J -> B	2	4
2	Beatriz	0m	7	10:45	B -> G	2	6
7	Gonçalo	0m	9	11:15	G -> K'	3	10
	Keleirós		12	12:00			
					Custo de Operação:		40

Custo Equipa 1:	3
Custo Equipa 2:	24
Custo Equipa 3:	40
Total:	67

Figura 9 - Planeamento das Equipas

Validação do Modelo

Para validar o modelo, começamos por analisar as variáveis básicas utilizadas na solução ótima. Assim, colorimos estas na tabela dos custos de forma a salientá-las:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K'
1	A	-	13	5	6	-	10	7	5	0	7	2
2	B	13	-	11	14	-	8	6	11	13	4	16
3	C	5	11	-	8	-	10	6	0	5	6	3
4	D	6	14	8	-	-	8	8	8	6	11	5
5	E	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	F	10	8	10	8	-	-	5	10	10	8	12
7	G	7	6	6	8	-	5	-	10	7	5	10
8	H	5	11	0	8	-	10	10	-	5	6	10
9	I	0	13	5	6	-	10	7	5	-	7	10
10	J	7	4	6	11	-	8	5	6	7	-	11
11	K	1	15	2	4	-	11	9	9	9	10	-
					custos de deslocação							

Figura 10 - Tabela Variáveis Básicas

Como podemos ver, analisando a tabela linha por linha ou coluna por coluna, descobrimos que na grande parte dos casos, a aresta escolhida representa uma das arestas de menor custo nessa linha/coluna e, nos casos de só haver uma escolha possível, esta foi sempre selecionada.

De forma a efetuar uma validação mais forte, decidimos também recriar o problema na ferramenta ***lp_solve.*** Para isso, fomos traduzindo os vários parâmetros do problema, começando pela função objetivo, tendo esta apenas as várias arestas a serem utilizadas com o seu respetivo custo associado.

```
min: custoArestas;

//CUSTO DE TODAS AS ARESTAS
custoArestas = 7  a01_07 + 2  a01_12 +
               6  a02_07 + 16 a02_12 +
               11 a03_02 + 6  a03_07 + 6  a03_10 + 3  a03_12 +
               6  a04_01 + 14 a04_02 + 8  a04_06 + 8  a04_07 + 11 a04_10 + 5  a04_12 +
               5  a06_07 + 12 a06_12 +
               10 a07_12 +
               5  a08_01 + 11 a08_02 + 0  a08_03 + 10 a08_06 + 10 a08_07 + 6  a08_10 + 10 a08_12 +
               0  a09_01 + 13 a09_02 + 5  a09_03 + 10 a09_06 + 7  a09_07 + 5  a09_08 + 7  a09_10 + 10 a09_12 +
               4  a10_02 + 5  a10_07 + 11 a10_12 +
               1  a11_01 + 15 a11_02 + 2  a11_03 + 4  a11_04 + 11 a11_06 + 9  a11_07 + 9  a11_08 + 9  a11_09 + 10 a11_10;
```

De seguida traduzimos as restrições de fluxo do próprio grafo e o controlo de equipas. Para isso definimos duas variáveis para cada vértice, uma de entrada e outra de saída. Depois das respetivas arestas adicionadas à entrada e saída e o controlo de fluxo garantido, assegurando que uma unidade atravessa o cliente, repetimos este processo para as restantes arestas

```
//-----------------RESTRICOES DO GRAFO/FLUXO---------------------
v01Entrada = a04_01 + a08_01 + a09_01 + a11_01;
v01Saida   = a01_07 + a01_12;
v01Entrada = v01Saida;
v01Entrada >= 1;
```

Por último, definimos que todas as arestas serão variáveis binárias, visto que estas podem ou não ser percorridas apenas uma vez.

```
bin a01_02,a01_03,a01_04,a01_06,a01_07,a01_08,a01_09,a01_10,a01_12;
bin a02_01,a02_03,a02_04,a02_06,a02_07,a02_08,a02_09,a02_10,a02_12;
bin a03_01,a03_02,a03_04,a03_06,a03_07,a03_08,a03_09,a03_10,a03_12;
bin a04_01,a04_02,a04_03,a04_06,a04_07,a04_08,a04_09,a04_10,a04_12;
bin a06_01,a06_02,a06_03,a06_04,a06_07,a06_08,a06_09,a06_10,a06_12;
bin a07_01,a07_02,a07_03,a07_04,a07_06,a07_08,a07_09,a07_10,a07_12;
bin a08_01,a08_02,a08_03,a08_04,a08_06,a08_07,a08_09,a08_10,a08_12;
bin a09_01,a09_02,a09_03,a09_04,a09_06,a09_07,a09_08,a09_10,a09_12;
bin a10_01,a10_02,a10_03,a10_04,a10_06,a10_07,a10_08,a10_09,a10_12;
bin a11_01,a11_02,a11_03,a11_04,a11_06,a11_07,a11_08,a11_09,a11_10;
```

Com o modelo finalizado, corremos a ferramenta ***lp_solve*** e obtivemos a seguinte solução: (**Nota:** a solução apresentada foi resumida para facilitar a leitura e apenas mostrar a informação essencial à validação)

Variables	result		Variables	result
	67		a09_08	1
custoArestas	67		a10_02	1
a01_12	1		a11_01	1
a02_07	1		a11_04	1
a03_10	1		a11_09	1
a04_06	1		v11Saida	3
a06_12	1		v11Entrada	3
a07_12	1		v12Entrada	3
a08_03	1		v12Saida	3

Visto que obtemos um valor da função objetivo (custo) igual, assim como a utilização das mesmas arestas, acreditamos ter chegado à solução ótima do problema em questão.

Conclusão

Com a realização deste trabalho prático, acreditamos ter alcançado com sucesso a solução ótima do problema proposto. Reconhecemos que este exercício prático contribuiu positivamente para o aprofundamento e consolidação da elaboração de problemas de redes. Para além disso, aperfeiçoamos a nossa capacidade de interpretação, formulação e desenvolvimento de problemas da área de otimização de redes e escalonamento de equipas e suas rotas.