

▼ Exercício de Avaliação - SAT Solving

- **Número:** PG50457
- **Nome:** Joana Maia Teixeira Alves
- **Curso:** Mestrado em Engenharia Informática (MEI)

NOTA: Para facilitar a escrita, o símbolo lógico da negação é representado pelo caracter !

Variáveis do Programa:

- **CPU:** CPU1 e CPU2
- **RAM:** RAM1 e RAM2
- **Motherboard:** MB1 e MB2
- **Placa Gráfica:** PG1, PG2 e PG3
- **Monitor:** MON1, MON2, MON3

▼ Desenvolvimento das Restrições do Enunciado para CNF:

- Cada computador tem que ter obrigatoriamente:

- **(1)** uma única motherboard:

$$\begin{aligned} & (MB1 \vee MB2) \wedge (MB1 \Rightarrow !MB2) \wedge (MB2 \Rightarrow !MB1) \\ & = (MB1 \vee MB2) \wedge (!MB1 \vee !MB2) \wedge (!MB2 \vee MB1) \quad \text{\#simplificando...} \\ & = (MB1 \vee MB2) \wedge (!MB1 \vee !MB2) \end{aligned}$$

- **(2)** um único CPU (segue o raciocínio da motherboard):

$$(CPU1 \vee CPU2) \wedge (!CPU1 \vee !CPU2)$$

- **(3)** uma única memória RAM (segue o raciocínio da motherboard):

$$(RAM1 \vee RAM2) \wedge (!RAM1 \vee !RAM2)$$

- **(4)** uma única placa gráfica:

$$\begin{aligned} & (PG1 \vee PG2 \vee PG3) \wedge (PG1 \Rightarrow !PG2 \wedge !PG3) \wedge \\ & (PG2 \Rightarrow !PG1 \wedge !PG3) \wedge (PG3 \Rightarrow !PG2 \wedge !PG1) \end{aligned}$$

$$= (PG1 \vee PG2 \vee PG3) \wedge (!PG1 \vee !PG2) \wedge$$

$$(!PG1 \vee !PG3) \wedge (!PG2 \vee !PG3)$$

Assim, obtemos a seguinte restrição:

$$(MB1 \vee MB2) \wedge (!MB1 \vee !MB2) \quad \wedge$$

$$(CPU1 \vee CPU2) \wedge (!CPU1 \vee CPU2) \quad \wedge$$

$$(RAM1 \vee RAM2) \wedge (!RAM1 \vee !RAM2) \quad \wedge$$

$$(PG1 \vee PG2 \vee PG3) \wedge (!PG1 \vee !PG2) \wedge (!PG1 \vee !PG3) \wedge (!PG2 \vee !PG3)$$

- **(5)** A motherboard MB1 quando combinada com a placa gráfica PG1, obriga à utilização da RAM1:

$$(MB1 \wedge PG1) \Rightarrow RAM1$$

$$= !(MB1 \wedge PG1) \vee RAM1$$

$$= !MB1 \vee !PG1 \vee RAM1$$

- **(6)** A placa gráfica PG1 precisa do CPU1, excepto quando combinada com uma memória RAM2:

$$PG1 \wedge !RAM2 \Rightarrow CPU1$$

$$= !(PG1 \wedge !RAM2) \vee CPU1$$

$$= !PG1 \vee RAM2 \vee CPU1$$

- **(7)** O CPU2 só pode ser instalado na motherboard MB2:

$$CPU2 \Rightarrow MB2$$

$$= !CPU2 \vee MB2$$

- **(8)** O monitor MON1 para poder funcionar precisa da placa gráfica PG1 e da memória RAM2:

$$MON1 \Rightarrow PG1 \wedge RAM2$$

$$= !MON1 \vee (PG1 \wedge RAM2)$$

$$= (!MON1 \vee PG1) \wedge (!MON1 \vee RAM2)$$

- **(9)** O monitor MON2 precisa da memória RAM2 para poder trabalhar com a placa gráfica PG3:

$$\begin{aligned} & \text{MON2} \wedge \text{PG3} \Rightarrow \text{RAM2} \\ & = \neg(\text{MON2} \wedge \text{PG3}) \vee \text{RAM2} \\ & = \neg\text{MON2} \vee \neg\text{PG3} \vee \text{RAM2} \end{aligned}$$

▼ SAT Solver - Questões

Questão (1)

Conversão das Variáveis Proposicionais do Programa:

- 1 = CPU1
- 2 = CPU2
- 3 = RAM1
- 4 = RAM2
- 5 = MB1
- 6 = MB2
- 7 = PG1
- 8 = PG2
- 9 = PG3
- 10 = MON1
- 11 = MON2
- 12 = MON3

Fórmulas Proposicionais do Problema:

Fórmula (1): $(5 \vee 6) \wedge (\neg 5 \vee \neg 6)$

Fórmula (2): $(1 \vee 2) \wedge (\neg 1 \vee \neg 2)$

Fórmula (3): $(3 \vee 4) \wedge (\neg 3 \vee \neg 4)$

Fórmula (4): $(7 \vee 8 \vee 9) \wedge (\neg 7 \vee \neg 8) \wedge (\neg 7 \vee \neg 9) \wedge (\neg 8 \vee \neg 9)$

Fórmula (5): $\neg 5 \vee \neg 7 \vee 3$

Fórmula (6): $\neg 7 \vee 4 \vee 1$

Fórmula (7): $\neg 2 \vee 6$

Fórmula (8): $(\neg 10 \vee 7) \wedge (\neg 10 \vee 4)$

Fórmula (9): $\neg 11 \vee \neg 9 \vee 4$

▼ Questão (2)

Nota: Começar por instalar a biblioteca PySAT :

```
!pip install python-sat[pblib,aiger]
```

De seguida adicionamos todas as fórmulas obtidas das restrições do problema:

```
from pysat.solvers import Minisat22

s = Minisat22()    # cria o solver s

s.add_clause([5, 6])    # restrição de apenas uma motherboard
s.add_clause([-5, -6])

s.add_clause([1, 2])    # restrição de apenas um CPU
s.add_clause([-1, -2])

s.add_clause([3, 4])    # restrição de apenas uma memória RAM
s.add_clause([-3, -4])

s.add_clause([7, 8, 9])    # restrição de apenas uma placa gráfica
s.add_clause([-7, -8])
s.add_clause([-7, -9])
s.add_clause([-8, -9])

s.add_clause([-5, -7, 3]) # MB1 quando combinada com PG1, obriga à utilização da RAM1:

s.add_clause([-7, 4, 1])  # PG1 precisa do CPU1, excepto quando combinada com RAM2:

s.add_clause([-2, 6])     # O CPU2 só pode ser instalado na motherboard MB2:

s.add_clause([-10, 7])    # MON1 para poder funcionar precisa da PG1 e RAM2
s.add_clause([-10, 4])

s.add_clause([-11, -9, 4]) # MON2 precisa da RAM2 para poder trabalhar com PG3

if s.solve():            # testa a satisfatibilidade
    print("SAT")
    print(s.get_model())  # imprime o modelo
else:
    print("UNSAT")

☞ SAT
[1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, -9, -10, -11]
```

▼ Questão (3)

- (a) O monitor MON1 só poderá ser usado com uma motherboard MB1?

Para obtermos a resposta adequada do SAT solver, temos de adicionar uma nova cláusula, nomeadamente a negação do que estamos a querer provar, pois sendo F a nova cláusula e Γ o conjunto de cláusulas já existentes no solver, $\Gamma \models F$ sse $\Gamma, \neg F$ **UNSAT**. Assim, para provarmos que o monitor MON1 só pode ser usado com uma motherboard MB1 temos de obter o resultado UNSAT ao adicionar a negação disso mesmo.

$$\begin{aligned} &!(\text{MON1} \Rightarrow \text{MB1}) \\ &= !(\neg \text{MON1} \vee \text{MB1}) \\ &= \text{MON1} \wedge \neg \text{MB1} \end{aligned}$$

```
s.add_clause([10])
s.add_clause([-5])

if s.solve():
    print("SAT")
    print(s.get_model())
else:
    print("UNSAT")
```

```
SAT
[1, -2, -3, 4, -5, 6, 7, -8, -9, 10, -11]
```

Resposta: Tal como referido acima, como obtivemos como resultado o valor SAT, então podemos comprovar que não é verdade que o MON1 só pode ser usado com uma motherboard MB1. Para além disto, através da análise das restrições (5) e (8), conseguimos denotar o conflito entre estas cláusulas e esta alínea.

- **(b)** Um cliente pode personalizar o seu computador da seguinte forma: uma motherboard MB1, o CPU1, a placa gráfica PG2 e a memória RAM1?

Para obtermos a resposta a esta pergunta temos de adicionar uma nova cláusula (tendo em conta que a cláusula anterior tem de ser comentada ou retirada, uma vez que influencia o resultado de todas as cláusulas adicionados depois da mesma).

$$\text{MB1} \wedge \text{CPU1} \wedge \text{PG2} \wedge \text{RAM1}$$

```
s.add_clause([5])
s.add_clause([1])
s.add_clause([8])
s.add_clause([3])

if s.solve():
    print("SAT")
    print(s.get_model())
```

```

else:
    print("UNSAT")

SAT
[1, -2, 3, -4, 5, -6, -7, 8, -9, -10, -11]

```

Resposta: Uma vez que o resultado obtido foi SAT, podemos concluir que é possível um cliente personalizar o seu computador desta forma.

- (c) É possível combinar a motherboard MB2, a placa gráfica PG3 e a RAM1 num mesmo computador?

Para obtermos a resposta a esta alínea temos de seguir o raciocínio da alínea anterior, isto é, adicionar esta nova cláusula ao problema tendo em conta que as cláusulas das alíneas anteriores têm de ser comentadas/retiradas.

$$MB2 \wedge PG3 \wedge RAM1$$

```

s.add_clause([6])
s.add_clause([9])
s.add_clause([3])

if s.solve():
    print("SAT")
    print(s.get_model())
else:
    print("UNSAT")

SAT
[1, -2, 3, -4, -5, 6, -7, -8, 9, -10, -11]

```

Resposta: Como o SAT solver devolveu SAT como resultado, podemos concluir que é possível fazer combinação de motherboard MB2 com a placa gráfica PG3 e a memória RAM1.

- ▼ (d) Para combinarmos a placa gráfica PG2 e a RAM1 temos que usar o CPU2?

Para obtermos uma resposta válida a esta alínea temos de seguir o raciocínio da alínea (a), ou seja, adicionar uma cláusula com a negação do que queremos provar e esperar obter UNSAT como resultado, pois, recordando, sendo F a cláusula a ser provada e Γ o conjunto de cláusulas já presentes no solver $\Gamma \models F$ sse $\Gamma, \neg F$ **UNSAT**.

$$\begin{aligned}
 & ! (PG2 \wedge RAM1 \Rightarrow CPU2) \\
 & = ! (!(PG2 \wedge RAM1) \vee CPU2)
 \end{aligned}$$

$$= \neg (\neg PG2 \vee \neg RAM1 \vee CPU2)$$

$$= PG2 \wedge RAM1 \wedge \neg CPU2$$

```
s.add_clause([8])
s.add_clause([3])
s.add_clause([-2])

if s.solve():
    print("SAT")
    print(s.get_model())
else:
    print("UNSAT")

SAT
[1, -2, 3, -4, 5, -6, -7, 8, -9, -10, -11]
```

Resposta: Como obtivemos o valor SAT como resultado e não UNSAT como era esperado, podemos concluir que não temos de usar o CPU2 para combinarmos a placa gráfica PG2 e a memória RAM2. Para além disto, podemos ver pelo valor das variáveis que o CPU escolhido foi o CPU1.

```
s.delete() # apaga o solver s
```