第1讲 高等数学预备知识

1.1 设函数 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=($　　$)$.

(A) 0　　　　(B) 2

(C) $\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　　　(D) $\begin{cases}2, & |x|>1,\\ 0, & |x|\leqslant 1\end{cases}$

1.2 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $f(x)=$________.

1.3 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

1.4 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2,\end{cases}$ 写出 $f(x)$的反函数 $g(x)$的表达式.

1.5 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$f_1(x)=f[f(x)]$,$f_2(x)=f[f_1(x)]$,$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$$(n=1,2,3,\cdots)$.求 $f_n(x)$的解析表达式.

第2讲 数列极限

2.1 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，则(　　).

(A)对任意 n，$a_n<b_n$ 成立

(B)存在正整数 N，当 $n>N$ 时，总有 $a_n<b_n$

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$必定存在

(D)$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 可能不存在

2.2 设 $x_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}$，$n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

2.3 设 $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$，则对$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$，说法正确的是(　　).

(A)前者存在，但后者不存在

(B)前者存在，且后者也存在

(C)前者不存在，但后者存在

(D)前者不存在，且后者也不存在

2.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________.

2.5 设数列$\{x_n\}$满足 $x_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$，则(　　).

(A)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(B)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，但不为零

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在

(D)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可能存在，也可能不存在

2.6 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}$存在且不为零，则常数 $k=$________.

2.7 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

2.8 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

2.9 设 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，$x_1=\sqrt{2}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.10 设 $x_1=25$，$x_{n+1}=\arctan x_n\,(n=1,2,\cdots)$.

(1)证明数列$\{x_n\}$有极限，并求此极限；

(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+1}}{x_n^3}$.

第3讲 函数极限与连续性

3.1 下列各式正确的是(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　(B)$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

(C)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=1$　　(D)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

3.2 当 $x\to1$ 时,$2e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A)等于 2　　(B)等于 0

(C)为∞　　(D)不存在,但不为∞

3.3 当 $x\to0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　).

(A)$e^{-\sqrt{x}}-1$　　(B)$\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(C)$\ln\sqrt{1+x}$　　(D)$\ln(1-\sqrt{x})$

3.4 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x=$________.

3.5 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$.

3.6 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(2+x^2)\ln(1+x)}$.

3.7 当 $x\to0^+$ 时,若 $\sin x^a$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量,求 a 的取值范围.

3.8 当 $x\to0$ 时,$\tan x-\ln(1+x)\sim ax^b$,求 a 和 b 的值.

3.9 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$,则(　　).

(A)$x=-1$ 为可去间断点,$x=1$ 为无穷间断点

(B)$x=-1$ 为无穷间断点,$x=1$ 为可去间断点

(C)$x=-1$ 和 $x=1$ 均为可去间断点

(D)$x=-1$ 和 $x=1$ 均为无穷间断点

3.10 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

3.11 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(x^2-1)|x|}$，求其间断点，并指出其类型.

3.12 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义，使之连续.

第4讲 一元函数微分学的概念与计算

4.1 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则（　　）.

(A) $f(0)\neq 0$，但 $f'(0)$ 可能不存在

(B) $f(0)=0$，但 $f'(0)$ 可能不存在

(C) $f'(0)$ 存在，但 $f'(0)$ 不一定等于零

(D) $f'(0)$ 存在，且必定有 $f'(0)=0$

4.2 设 $f(x)=x^a|x|$，a 为正整数，则函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）.

(A)极限不存在　　(B)极限存在，但不连续

(C)连续但不可导　　(D)可导

4.3 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$，当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$（　　）.

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.5

4.4 设 $f(x^2)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{1+x^2}$　　(B) $\dfrac{-1}{(1+x)^2}$　　(C) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$　　(D) $\dfrac{-1}{(1+x^2)^2}$

4.5 设 $f(x)=(x-a)\cdot\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 连续，则 $f'(a)=$________.

4.6 设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 $f(x)$ 为可微函数，则 $\mathrm{d}y=$________.

4.7 设函数 $y=y(x)$ 由 $\sin(x^2y)=xy$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$________.

4.8 设 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^y$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$________.

4.9 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1-2t)^{-\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$________.

4.10 设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，则当 $n\geqslant 1$ 时，$y^{(n)}(x)=$________.

4.11 设 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^2)}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4.12 已知 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $g(0)=g'(0)=0$，设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

证明 $f(x)$ 的导函数在 $x=0$ 处连续.

第5讲 一元函数微分学的几何应用

5.1 函数 $y=(x-1)^2(x-2)^2(-3\leqslant x\leqslant 4)$ 的值域是________.

5.2 设 $y=2x^2+ax+3$ 在 $x=1$ 处取得极值,求 a 的值,并判定 $x=1$ 是极小值点还是极大值点.

5.3 将长为 a 的一段铁丝截成两段,用一段围成正方形,另一段围成圆,为使正方形与圆的面积之和最小,问两段铁丝的长各为多少?

5.4 若 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$,则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处(　　).

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)无极值　　(D)不一定有极值

5.5 设 $f(x)=f(-x)$,且在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0,f''(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内的单调性和图形的凹凸性分别是(　　).

(A)单调增加,凸　　(B)单调减少,凸

(C)单调增加,凹　　(D)单调减少,凹

5.6 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 的凸区间为________.

5.7 曲线 $y=x^{\frac{5}{3}}+3x+5$ 的拐点坐标为________.

5.8 设 $f(x)$ 的二阶导数连续,且 $(x-1)f''(x)-2(x-1)f'(x)=1-e^{1-x}$.

(1)若 $x=a(a\neq 1)$ 是 $f(x)$ 的极值点,证明:$x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点;

(2)若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点,请确定它是 $f(x)$ 的极大值点还是极小值点.

5.9 曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$(　　).

(A)有且仅有水平渐近线　　(B)有且仅有铅垂渐近线

(C)既有水平渐近线,也有铅垂渐近线　　(D)既无水平渐近线,也无铅垂渐近线

5.10 曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+2}$ 的斜渐近线方程是________.

5.11 函数 $y=x^x$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上(　　).

(A)不存在最大值和最小值　　(B)最大值是 $e^{\frac{1}{e}}$

(C)最大值是 $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$　　(D)最小值是 $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

5.12 作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$ 的图形，并填写下表.

单调增加区间		凹区间	
单调减少区间		凸区间	
极值点		拐　点	
极　值		渐近线	

第1讲 高等数学预备知识

1.1 (D) **解** 由 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 可知

$$f[f(x)]=\begin{cases}2, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$$

因此

$$f[f(x)]=\begin{cases}2, & |x|>1,\\ 0, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$$

故选(D).

1.2 $\dfrac{x}{x^2-2}$ **解** 由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{x^2\left(\dfrac{1}{x}+x\right)}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+x^2\right)}=\frac{\dfrac{1}{x}+x}{\left(\dfrac{1}{x}+x\right)^2-2},$$

因此 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$.

1.3 **解** 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$,即 $x\leqslant 0$,因此

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},x\leqslant 0.$$

1.4 **解** 当 $x<-1$ 时,由 $y=1-2x^2$,得 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}(y<-1)$;

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,由 $y=x^3$,得 $x=\sqrt[3]{y}(-1\leqslant y\leqslant 8)$;

当 $x>2$ 时,由 $y=12x-16$,得 $x=\dfrac{y+16}{12}(y>8)$.

综上,有

$$x=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}, & y<-1,\\ \sqrt[3]{y}, & -1\leqslant y\leqslant 8,\\ \dfrac{y+16}{12}, & y>8,\end{cases}$$

所以 $f(x)$的反函数为

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

1.5 解

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f_1(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

一般地，可用数学归纳法证明，得

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}(n=1,2,3,\cdots).$$

第2讲 数列极限

2.1 (B) **解** 数列极限的概念是描述变量在给定过程中的变化趋势,数列极限存在与否与前有限项的值无关,因此可以排除(A).

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,由极限运算法则可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 必定存在,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$不符合极限运算法则,由无穷小量的性质可知其肯定不存在.因此可以排除(C),(D).故由排除法,应选(B).

2.2 $\dfrac{1}{2}$ **解**

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

2.3 (C) **解** ①$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2+(-1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & n\text{ 为正偶数},\\[2mm] \dfrac{3}{2}, & n\text{ 为正奇数},\end{cases}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在.

②$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{2+(-1)^n}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{3}=\dfrac{1}{2}, & n\text{ 为正偶数},\\[2mm] \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{1}=\dfrac{1}{2}, & n\text{ 为正奇数},\end{cases}$$ 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$存在.

2.4 1 **解** 所给极限为"$\infty-\infty$"型,表达式中含有根式,可先将其变形,即

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=1.\end{aligned}$$

2.5 (A) **解** 因 $x_n>0$,所以数列$\{x_n\}$有下界. 又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1$,由数列极限的保号性可知,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$,即当 $n>N$ 时数列$\{x_n\}$是单调减少的,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的. 结合极限的运算法则,通过反证法易知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

【注】 ①$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 与 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 之间的区别:前者从第 N 项开始满足 $x_{n+1}<x_n$,而后者从指定项(默认第一项)开始满足. 但从考查极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的角度而言,两个条件没有本质上的区别.

②若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=2$,令 $u_n=\frac{1}{x_n}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=2$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 利用无穷小与无穷大之间的关系,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

③若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可能存在,也可能不存在. 如当 $x_n=\frac{1}{n}$时存在,当$x_n=n$时不存在.

2.6 100 **解**
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^k\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right]}$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99-k}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-1}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99-k}}{k\left(-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}n^{99-k+1}.$$

由此可知,极限存在且不为零的充要条件是 $99-k+1=0$,即 $k=100$.

2.7 **解** 因为$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}>(3^n)^{\frac{1}{n}}=3$,又
$$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\times 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\times 3^{\frac{1}{n}},\quad \lim_{n\to\infty}3\times 3^{\frac{1}{n}}=3,$$
由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

2.8 **解** 因为
$$1\leqslant\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n},$$
而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1.$$

2.9 **解** 由于 $x_1=\sqrt{2}<2$,$x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2$,设 $x_k<2$,则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$,故对于任意正整数 n,都有 $0<x_n<2$,即数列$\{x_n\}$为有界数列. 注意到
$$x_n-x_{n-1}=\sqrt{2+x_{n-1}}-x_{n-1}=\frac{2+x_{n-1}-x_{n-1}^2}{\sqrt{2+x_{n-1}}+x_{n-1}},$$
其分母大于 0,其分子
$$2+x_{n-1}-x_{n-1}^2>2+x_{n-1}-2x_{n-1}=2-x_{n-1}>0,$$
故 $x_n-x_{n-1}>0$,即$\{x_n\}$为单调增加且有上界的数列.

由单调有界准则可知数列$\{x_n\}$存在极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由于 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}}$,从而 $A=\sqrt{2+A}$,$A^2-A-2=0$,解得

$A=2$或 $A=-1$. 由于 $x_n>0$,因此 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$,则 $A=-1$ 应舍去,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

2.10 (1)**证明** 显然 $x_n>0$,由不等式 $\arctan x<x, x>0$ 知,$x_{n+1}=\arctan x_n<x_n$,于是$\{x_n\}$单调减少,由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由 $x_{n+1}=\arctan x_n$,知 $A=\arctan A$,于是 $A=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2)**解**
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\arctan x_n}{x_n^3}\xlongequal{x_n=t}\lim_{t\to0^+}\frac{t-\arctan t}{t^3}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{3t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^2}{3t^2(1+t^2)}=\frac{1}{3}.$$

第3讲 函数极限与连续性

3.1 (B) **解** 对于(A)，$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=0$，选项不正确；

对于(B)，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$，选项正确；

对于(C)，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$，无穷小量乘以无穷小量还是无穷小量，选项不正确；

对于(D)，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，无穷小量乘以有界变量还是无穷小量，选项不正确.

3.2 (D) **解** 由于$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$，因此

$$\lim_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\quad \lim_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

可知$\lim\limits_{x\to1}2e^{\frac{1}{x-1}}$不存在，也不为$\infty$，故选(D).

【注】 当$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷大量，但是当$x\to x_0$时，$a^{f(x)}$不一定为无穷大量.这里还应分$a>1$，$0<a<1$两种情形讨论，还需要讨论当$x\to x_0$时，$f(x)\to+\infty$还是$f(x)\to-\infty$，否则必然导致运算错误.

3.3 (B) **解** 由等价无穷小量公式：当$x\to0^+$时，

$$e^{-\sqrt{x}}-1\sim-\sqrt{x},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x},\quad \ln\sqrt{1+x}=\frac{1}{2}\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x,\quad \ln(1-\sqrt{x})\sim-\sqrt{x},$$

故选(B).

3.4 e^3 **解** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}\right]^x=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{e^2}{e^{-1}}=e^3$.

【注】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+d}=e^{ab}$是常用的公式，应熟记.

相仿，
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=e^{2a}.$$

上述两种表达式变形是求极限运算的常见技巧，为固定模式的求解方法，应熟记.

3.5 解 由于
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^+}\frac{-1}{x}=-\infty,$$
因此
$$\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0,$$
可得
$$\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{-\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{2}{x}}}=0.$$

3.6 解 所给极限为“$\frac{0}{0}$”型，先进行等价无穷小代换，再拆分，可简化运算.
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(2+x^2)\ln(1+x)}\xlongequal{(*)}\lim_{x\to0}\frac{1}{2+x^2}\cdot\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$
$$\xlongequal{(**)}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

【注】 在上述运算中(*)处利用等价无穷小代换.(**)处将非零因子$\frac{1}{2+x^2}$单独求极限，再将表达式拆分，前者利用重要极限公式，后者利用“有界变量与无穷小量之积仍为无穷小量”的性质.

3.7 解 由于当$x\to0^+$时，$\sin x^a\sim x^a$，由题设知$\sin x^a$是比x高阶的无穷小量，因此有
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^a}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^a}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{a-1}=0,$$
由此知$a>1$.

又当$x\to0^+$时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，由题设知$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$是比$x$高阶的无穷小量，因此有
$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{a}}}{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\lim_{x\to0^+}x^{\frac{2}{a}-1}=0,$$
故有$\frac{2}{a}-1>0$，即$0<a<2$.

综上，由此可知$1<a<2$.

3.8 解 当$x\to0$时，由$\begin{cases}\tan x=x+0x^2+o(x^2),\\ \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\end{cases}$得$\tan x-\ln(1+x)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，于是$a=\frac{1}{2}$，$b=2$.

3.9 (B) **解** 所给表达式为分式，当$x^2-1=0$时，可解得$x_1=-1$，$x_2=1$，即$f(x)$有两个间断点$x_1=-1$，$x_2=1$，由于
$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\infty,\quad \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},$$
故$x_1=-1$为无穷间断点，$x_2=1$为可去间断点. 故选(B).

3.10 -2 **解** 因为$f(x)$在$x=0$处连续，所以$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$. 又
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}ae^{2x}=a,$$

所以 $a=-2$.

3.11 解 $f(x)$在 $x=0$, $x=1$, $x=-1$ 处无定义,所以 $f(x)$有 3 个间断点,因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=-1,$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty,$$

所以 $x=0$ 为跳跃间断点;$x=1$ 为可去间断点;$x=-1$ 为无穷间断点.

3.12 解 因为

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)-1}{1-\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2}{\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]^2}=-\frac{4}{\pi^2}\neq f(1),$$

所以函数在 $x=1$ 处不连续. 若修改定义令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$,则函数在 $x=1$ 处连续.

【注】 本题只研究函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的连续性,所以限制在使 $f(x)$有定义的 $x=1$ 的某邻域内进行讨论.

第4讲 一元函数微分学的概念与计算

4.1 (C) **解** 对于(A),由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,且分母的极限为零,可知必有分子极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,由于$f(x)$在$x=0$处连续,由连续的定义知$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,故(A)不正确,应排除(A).又由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

可知应排除(B),(D).选(C).

【注】 应熟记下面的结论:

若$f(x)$在$x=0$处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,则①$f(0)=0$;②$f'(0)=A$.

4.2 (D) **解** 由题设知$f(0)=0$,则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^a=0=f'_+(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^a|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x^a)=0=f'_-(0),$$

由于$f'_+(0)=f'_-(0)$,可知$f'(0)$存在,且为零.故选(D).

4.3 (D) **解** 因为 $dy=f'(x^2)d(x^2)=2xf'(x^2)dx=2xf'(x^2)\Delta x$,

所以得

$$0.1=-2f'(1)\cdot(-0.1),$$

即$f'(1)=0.5$.故选(D).

4.4 (B) **解** 由于$f(x^2)=\dfrac{1}{1+x^2}$,可得$f(x)=\dfrac{1}{1+x}(x\geqslant 0)$,$f'(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}(x\geqslant 0)$,故选(B).

4.5 $\varphi(a)$ **分析** 概念题.①有的同学用公式法求出$f'(a)$,但这是错误解法;②应该用"导数定义"求出.

解 ①公式法.

$f'(a)=f'(x)\Big|_{x=a}=[\varphi(x)+(x-a)\cdot\varphi'(x)]\Big|_{x=a}=\varphi(a)+0=\varphi(a)$.错误,因为$\varphi(x)$仅连续,$\varphi'(x)$不一定存在!

②导数定义.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a).$$

【注】 求导数时,当函数不具备"导数存在"的条件时,往往只能用"导数定义"求.

4.6 $\left[e^{f(x)}f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)\right]dx$ **解** 可以利用 $dy=y'dx$，先求 y' 再求 dy，也可以直接利用微分运算.

$$\begin{aligned}dy&=e^{f(x)}d[f(\ln x)]+f(\ln x)d[e^{f(x)}]\\&=\left[e^{f(x)}f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)\right]dx.\end{aligned}$$

4.7 $\frac{y-2xy\cos(x^2y)}{x^2\cos(x^2y)-x}dx$ **解** 原式两端对 x 求导，得

$$\cos(x^2y)\cdot(x^2y)'=y+xy',$$

$$\cos(x^2y)\cdot(2xy+x^2y')=y+xy',$$

可解得
$$y'=\frac{y-2xy\cos(x^2y)}{x^2\cos(x^2y)-x},\quad dy=y'dx=\frac{y-2xy\cos(x^2y)}{x^2\cos(x^2y)-x}dx.$$

4.8 $\frac{1}{x(1+\ln y)}dx$ **解** 将 $x=y^y$ 两端取对数，得

$$\ln x=y\ln y,$$

两端关于 x 求导，得
$$\frac{1}{x}=y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'=(1+\ln y)y',$$

$$y'=\frac{1}{x(1+\ln y)},$$

因此
$$dy=y'dx=\frac{1}{x(1+\ln y)}dx.$$

4.9 $(1+2x)e^{2x}$ **解** $f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1-2t)^{-\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to0}\left[(1-2t)^{-\frac{1}{2t}}\right]^{2x}=xe^{2x}$，

因此
$$f'(x)=(xe^{2x})'=e^{2x}+xe^{2x}\cdot2=(1+2x)e^{2x}.$$

4.10 $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$ **解** 对原式化简，得

$$y=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

则当 $n\geqslant1$ 时，

$$\begin{aligned}y^{(n)}(x)&=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)}\\&=\frac{1}{4}(\cos 4x)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

4.11 **解** $\frac{dy}{dx}=2xe^{x^2}$，$\frac{dy}{d(x^2)}=\frac{2xe^{x^2}dx}{2xdx}=e^{x^2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=2(1+2x^2)e^{x^2}$.

> **【注】** 要能区分这样几个符号：
>
> ①$dx^2=(dx)^2$，$dx^n=(dx)^n$，这叫"微分的幂"；
>
> ②$d(x^2)=2xdx$，$d(x^n)=nx^{n-1}dx$，这叫"幂的微分"；
>
> ③$d^2x=0$，这是因为$\frac{d^2x}{dx^2}=(x)''=0$，于是 $d^2x=0$.

4.12 **证明** 因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0=f(0)$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连

续.又根据导数定义,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0).$$

当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$,则

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$=g''(0)-\frac{1}{2}g''(0)=\frac{1}{2}g''(0)=f'(0),$$

所以 $f(x)$的导函数在 $x=0$ 处连续.

第5讲 一元函数微分学的几何应用

5.1 $[0,400]$ **解** $\frac{dy}{dx}=2(x-1)(x-2)^2+2(x-1)^2(x-2)$

$$=2(x-1)(x-2)(2x-3).$$

令$\frac{dy}{dx}=0$,得驻点:$x=1,2,\frac{3}{2}$.

$$y_{\max}=\max\left\{y(1),y(2),y\left(\frac{3}{2}\right),y(-3),y(4)\right\}$$

$$=\max\left\{0,0,\frac{1}{16},400,36\right\}=400,$$

$$y_{\min}=\min\left\{y(1),y(2),y\left(\frac{3}{2}\right),y(-3),y(4)\right\}$$

$$=\min\left\{0,0,\frac{1}{16},400,36\right\}=0.$$

故函数值域是$[0,400]$.

【注】 本题解法是标准解法,适用于所有可导函数,但如果读者有一定的观察力,立刻可以得到答案,具体解法为$y=(x-1)^2(x-2)^2\geqslant 0$,$x=1,2\in[-3,4]$时,$y_{\min}=0$;$y_{\max}\leqslant\max\{(x-1)^2\}\times\max\{(x-2)^2\}=(-4)^2(-5)^2=400$,$x=-3\in[-3,4]$时等号成立.

如果上述两个最大值不能在同一点取到,则只能用本题的标准解法.

5.2 **解** $y=2x^2+ax+3$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且处处可导,则

$$y'=4x+a.$$

由于y在$x=1$处取得极值,因此必有$y'\big|_{x=1}=0$,可得

$$a=-4.$$

又

$$y''=4,\quad y''\big|_{x=1}=4>0,$$

可知$x=1$为y的极小值点.

5.3 **解** 设围成圆的一段长为x,围成正方形的一段长为$a-x$,则正方形与圆的面积之和

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{a-x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(a-x)^2}{16}(0<x<a),$$

$$S'=\frac{x}{2\pi}-\frac{a-x}{8},$$

令$S'=0$,解得$x=\frac{\pi a}{\pi+4}$,$S''\big|_{x=\frac{\pi a}{\pi+4}}=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}>0$,故当$x=\frac{\pi a}{\pi+4}$时,面积之和最小,即围成圆的一段长为

$\frac{\pi a}{\pi+4}$，围成正方形的一段长为$\frac{4a}{\pi+4}$时，正方形与圆的面积之和最小.

5.4 (A) **解** 由于$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1<0$，则存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}<0$，由于$(x-x_0)^2>0$，于是$f(x)-f(x_0)<0$，所以$f(x_0)>f(x)$，$x_0$为极大值点. 故选(A).

5.5 (B) **解** 当$x>0$时，由$f'(x)>0$可知$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加；由$f''(x)<0$可知$f(x)$在$(0,+\infty)$内为凸曲线. 由$f(x)=f(-x)$可知$f(x)$关于y轴对称，则$f(x)$在$(-\infty,0)$内单调减少，为凸曲线，选(B).

5.6 $(-1,1)$ **解** $y=\frac{1}{x^2-1}$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

对x求导，可得
$$y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2},\quad y''=\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

在定义域内，y有二阶导数，且没有二阶导数为零的点，曲线没有拐点. 当$(x^2-1)^3<0$，即$x^2-1<0$时，$y''<0$，可知曲线y的凸区间为$(-1,1)$.

5.7 $(0,5)$ **解** $y=x^{\frac{5}{3}}+3x+5$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+3,\quad y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}.$$

当$x=0$时，y''不存在；当$x<0$时，$y''<0$；当$x>0$时，$y''>0$. 当$x=0$时，$y=5$. 可知$(0,5)$为所求曲线的拐点.

5.8 **分析** 考查①判别极值点的充分条件，②驻点是取得极值的必要条件.

(1)**证明** 由$x=a(a\neq 1)$是$f(x)$的极值点，得$f'(a)=0$.

将$x=a$代入条件$(x-1)f''(x)-2(x-1)f'(x)=1-e^{1-x}$，得

$$f''(a)=\frac{1-e^{1-a}}{a-1}\begin{cases}>0, & a>1,\\ >0, & a<1\end{cases}\Rightarrow f''(a)>0,$$

故$x=a$是$f(x)$的极小值点.

(2)**解** 因为$f'(1)=0$，且$f''(1)=\lim\limits_{x\to 1}f''(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-e^{1-x}}{x-1}=1>0$，故$x=1$是$f(x)$的极小值点.

5.9 (A) **解** $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$，由渐近线的求法可知正确选项为(A).

5.10 $y=x-2$ **解** 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+2)}=1=a,$$

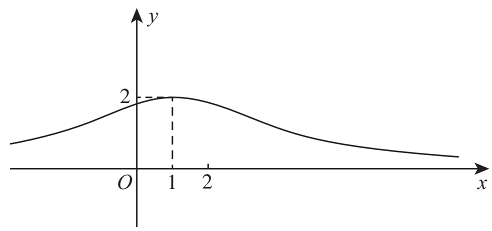
$$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}=-2=b,$$

因此所求斜渐近线方程为$y=x-2$.

5.11 (D) **解** $y'=x^x(\ln x+1)$，令$y'=0$，得$x=\frac{1}{e}$. 当$x>\frac{1}{e}$时，$y'>0$，函数单调增加，故选(D).

5.12 解

单调增加区间	$(-\infty,1)$
单调减少区间	$(1,+\infty)$
极值点	1
极　值	2
凹区间	$(-\infty,0),(2,+\infty)$
凸区间	$(0,2)$
拐　点	$\left(0,\frac{3}{2}\right),\left(2,\frac{3}{2}\right)$
渐近线	$y=0$



函数图形如图所示.