Fatec
Faculdade de Tecnologia

JUROS, TAXAS e SISTEMAS de AMORTIZAÇÃO

https://cdn.profes.com.br/media/CACHE/images/blog/5/matematica.bem.grandi/79651235-991d-41b5-ab8b-171fc0ee19af/1ea6c593ebf8b4b10b471e9953b57ec6.jpg

1

1

Fatec
Faculdade de Tecnologia

MATEMÁTICA FINANCEIRA

- A **Matemática Financeira** se preocupa com o **valor do dinheiro no tempo**.

  Podemos iniciar o estudo sobre o tema com a seguinte frase:

  “Não se soma ou subtrai quantias em dinheiro que não estejam na mesma data”

  Embora esta afirmativa, seja básica e simples, é absolutamente incrível como a maioria das pessoas esquece ou ignora esta premissa.

2

2

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Todas as ofertas veiculadas em jornais reforçam essa maneira errada de se tratar o assunto.

Por exemplo: uma TV é vendida por R$500,00 à vista, ou em 6 prestações de R$100,00. Acrescenta-se a seguinte informação ou desinformação: total a prazo R$600,00.

O que se percebe é que são somados os valores de datas diferentes, desrespeitando o princípio básico, citado anteriormente, e induzindo a se calcular juros de forma errada.

Esta questão será melhor discutida adiante.

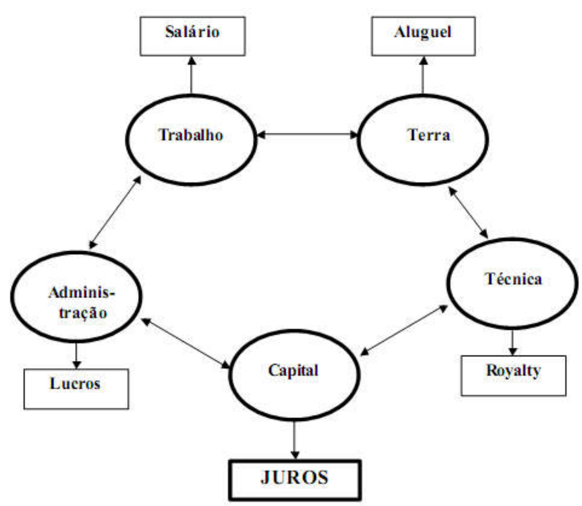
3

3

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Uma palavra que é fundamental nos estudos sobre matemática financeira é **JUROS**.

Para melhor entendermos o significado desta palavra vamos iniciar observando a figura ao lado. Cada um dos fatores de produção é remunerado de alguma forma.



4

4

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Como se pode entender, juros é o que se **paga pelo custo do capital**, ou seja, é o pagamento pela oportunidade de poder **dispor de um capital durante determinado tempo.**

A propósito, estamos muito acostumados com "juros". Lembrem dos seguintes casos:

- compras à crédito;
- cheques especiais;
- prestação da casa própria;
- desconto de duplicata;
- vendas à prazo;
- financiamentos de automóveis;
- empréstimos.

5

5

JUROS SIMPLES

- É o sistema de remuneração de capital sob a matemática de juros quando **somente o valor principal**, ou seja, **o capital inicial** rende juros durante o tempo que foi negociado o financiamento.

  O valor destes juros pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$\mathbf{J = P \times i \times n}$$

Onde:

P = principal — J = juros

i = taxa de juros — n = número de períodos

6

6

Fatec
Faculdade de Tecnologia

JUROS SIMPLES

- O valor que se tem depois do período de capitalização, chamado de valor futuro (F), pode ser calculado por:

$$F = P + J$$
$$F = P + (P \times i \times n)$$
$$F = P \times [1 + (i \times n)]$$

A fórmula acima é pouco utilizada, porque na maioria dos cálculos em matemática financeira usam-se **juros compostos** que serão tratados a seguir.

Obs.: A taxa i tem que ser expressa na **mesma medida de tempo de n**, ou seja, a taxa de juros ao mês para **n** meses.

7

7

Fatec
Faculdade de Tecnologia

JUROS SIMPLES

Exemplo:

Para um capital de R$ 10.000,00 colocado a 20% a.a. durante 3 anos, qual o **valor futuro** considerando-se capitalização a juros simples?

$F = P \times [1 + (i \times n)]$

$F = 10.000,00 \times [1 + (0,20 \times 3)]$

$F = 10.000,00 \times [1 + 0,60]$

$F = 10.000,00 \times 1,60$

$F = 16.000,00$

Exercícios 1 a 4

8

8

Fatec Faculdade de Tecnologia

JUROS COMPOSTOS

- Os juros compostos são aqueles em que o juro do período, **que não tenha sido pago**, é incorporado ao principal ou capital, constituindo um novo capital a cada período, passando assim a também render juros no próximo período.

  Ou seja, os juros compostos são sempre calculados sobre o **SALDO DEVEDOR.**

9

9

Fatec Faculdade de Tecnologia

JUROS COMPOSTOS

- Pode-se deduzir a expressão da seguinte maneira:

  - No primeiro período:
    $F_1 = P + P \,.\, i = P \,.\, (1 + i)$

  - No segundo período:
    $F_2 = F_1 + F_1 \,.\, i = F_1 \,.\, (1 + i) = P \,.\, (1 + i).(1 + i)$
    $= P \,.\, (1 + i)^2$

  - No terceiro período:
    $F_3 = F_2 + F_2.i = F_2 \,.\, (1 + i) = P \,.\, (1 + i)^2.\, (1 + i)$
    $= P \,.\, (1 + i)^3$

10

10

Fatec
Faculdade de Tecnologia

JUROS COMPOSTOS

- Pode-se deduzir a expressão da seguinte maneira:

  Se generalizarmos para um número de períodos igual a n, tem-se a expressão geral para cálculo de juros compostos, dada por:

$$\mathbf{F = P \times (1 + i)^n}$$

  A fórmula acima é muito utilizada, e através dela pode-se constatar que para o primeiro período o juros simples é igual aos juros compostos.

11

11

Fatec
Faculdade de Tecnologia

JUROS SIMPLES e COMPOSTOS

- **Exemplo**:

  Para um capital de R$ 100.000,00 colocado a 20% a.a. durante 3 anos, qual o **valor futuro** para os casos de considerarmos juros simples e juros compostos?

Fim do ano	Juros simples	Juros compostos
0	100.000,00	100.000,00
1		
2	140.000,00	144.000,00
3		

Exercícios 5 a 9

12

12

Fatec
Faculdade de Tecnologia

TAXAS de JUROS

- Existem diversas taxas de juros utilizadas no mercado financeiro:
  - **Taxa efetiva** – é aquela que, de fato, recebemos ou pagamos em uma operação.

    Podemos encontrar seu valor exato, dividindo os juros recebidos ou pagos pelo capital inicialmente aplicado ou emprestado.

$$\text{Taxa efetiva} = \left(\frac{\text{Juros recebidos ou pagos}}{\text{Capital inicial}}\right) \text{X } 100$$

13

Fatec
Faculdade de Tecnologia

TAXAS de JUROS

- **Taxa efetiva** - Exemplo:

  Uma empresa adquire um título de um banco no valor de R$ 100.000,00 para receber R$ 109.725,00 no final de 360 dias.

  Taxa Efetiva (ie) = Juros Recebidos / Capital Inicial

  Juros Recebidos = R$ 109.725,00 – R$ 100.000,00 = R$ 9.725,00

  ie = R$ 9.725,00/R$ 100.000,00=0,09725 ou 9,725% a.a.

14

Fatec
Faculdade de Tecnologia

TAXA EFETIVA

- Essa taxa pode ser decomposta em duas partes:
  - Uma compreendendo a **recuperação** do poder de compra do investidor, correspondente a inflação, e outra, compreendendo o ganho **real**. Então temos:

    Taxa Efetiva (ie)
    ie = {[(1 + taxa de inflação) * (1 + taxa real)] - 1} * 100
  - Continuando no exemplo anterior:

15

Fatec
Faculdade de Tecnologia

TAXA EFETIVA

- O investidor havia contratado com o banco o recebimento de 5% a.a. de juros real em sua aplicação, acrescidos da taxa de inflação do período, que foi de 4,5%. Neste caso, a taxa de juros efetiva será de 9,725% a.a.:

  ie = {[(1 + 0,045) * (1 + 0,05)] – 1} * 100
  ie = 9,725% a.a.

16

Fatec Faculdade de Tecnologia

TAXA REAL

- A taxa de juros real é calculada **a partir** da taxa efetiva, desconsiderando-se os **efeitos inflacionários** do período.

$$\text{Taxa Real} = \left[\left(\frac{1 + \text{taxa efetiva}}{1 + \text{taxa de inflação}}\right) - 1\right] \text{X } 100$$

  - Suponha que uma aplicação tenha proporcionado a um investidor a taxa de juros efetiva de 15% ao semestre. Considerando que a taxa de inflação no período tenha sido de 5%, a taxa de juros real seria de 9,52% ao semestre.
  - Cálculo a seguir:

17

Fatec Faculdade de Tecnologia

TAXA REAL

- **Cálculo:**

$$\text{Taxa Real} = \left[\left(\frac{1 + 0{,}15}{1 + 0{,}05}\right) - 1\right] \text{X } 100$$

$$\text{Taxa Real} = 9{,}52\% \text{ ao semestre}$$

18

Fatec Faculdade de Tecnologia

TAXA REAL

- Vamos ver uma outra abordagem de uma situação já vista:

Uma empresa adquire um título de um banco, prefixado, no valor de R$ 100.000,00 para receber R$ 109.725,00 no final de 360 dias.

ie conhecida, de **9,725% a.a.**

Considerando que no período a **inflação** foi de **5,5% a.a.**, qual será, nessa nova hipótese, a **taxa real (ir)**?

Exercícios 10 a 13

19

Fatec Faculdade de Tecnologia

TAXA REAL

- Aplicando a fórmula:

ir = {[(1+0,09725)/(1+0,055)]-1}*100
ir = {[1,09725/1,055]-1}*100
ir = {1,040047-1}*100
ir = 0,040047*100
ir = 4,005 % a.a.

No primeiro exemplo que vimos, aplicação híbrida, a taxa de inflação era de 4,5% e a de aplicação, 5% (real).

Neste **posfixado**, com **inflação maior**, a **ir** caiu para 4% a.a.

20

TAXA EQUIVALENTE

- Duas taxas são equivalentes quando são aplicadas sobre o mesmo capital, para um mesmo intervalo de tempo, produzindo o mesmo montante.

  A fórmula para cálculo é a seguinte:

$$i_q = \left[(1 + i)^{\frac{q}{t}} - 1 \right] \text{ x } 100$$

sendo:
i_q = taxa que eu quero
i_t = taxa que eu tenho
q = prazo que eu quero
t = prazo que eu tenho

21

TAXA EQUIVALENTE

- Por exemplo, qual seria a taxa equivalente mensal de uma aplicação cuja taxa anual é de 12%?

$$i_q = \left[(1 + 0{,}12)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] \text{ x } 100$$

$$i_q = 0{,}95\%$$

Exercícios 14 e 15

22

Fatec Faculdade de Tecnologia **FINANCIAMENTOS**

- **Amortização de dívidas**

A disponibilidade de recursos é fundamental para a concretização de **investimentos**. Quando os recursos próprios são insuficientes, as empresas costumam recorrer a **empréstimos.**

O valor desses empréstimos, o **principal**, será restituído à instituição financeira, acrescido de sua remuneração, os **juros.**

A forma de devolução do principal + juros, chama-se **"sistema de amortização".** Os sistemas mais usados serão vistos a seguir.

23

Fatec Faculdade de Tecnologia **FINANCIAMENTOS**

- **Sistema francês de amortização (price)**

Também conhecido como **"sistema price"** ou **"sistema de prestação constante"** é muito utilizado nas compras de prazos menores e no crédito direto ao consumidor.

Neste sistema as **prestações são constantes**, ou seja, correspondem a uma **série uniforme "a".**

A parcela de **juros decresce** com o tempo, ao passo que a parcela de **amortização aumenta** com o tempo.

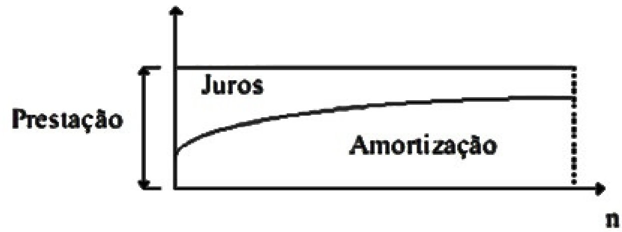
Graficamente pode-se apresentar este comportamento da seguinte maneira:

24

FINANCIAMENTOS

- **Sistema francês de amortização (price)**

Como em todos os sistemas corretos de amortização, no sistema Price a prestação é a soma da amortização com os juros do período, ou seja:



$$\mathbf{p_k = a_k + j_k}$$

onde:
$\mathbf{p_k}$ **:** prestação no período k
$\mathbf{a_k}$: amortização no período k
$\mathbf{j_k}$ **:** Juros no período k

25

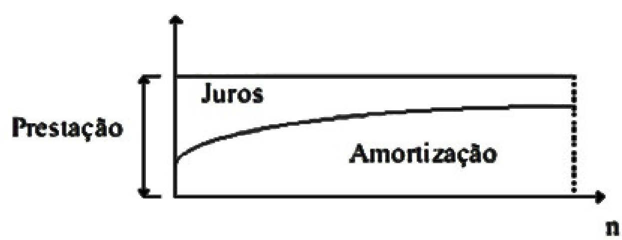
FINANCIAMENTOS

- **Sistema francês de amortização (price)**

A fórmula para cálculo do valor constante das prestações é:

$$P = F.\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}$$

F = Valor financiado
n = nº de parcelas



$$\mathbf{p_k = a_k + j_k}$$

onde:
$\mathbf{p_k}$ **:** prestação no período k
$\mathbf{a_k}$: amortização no período k
$\mathbf{j_k}$ **:** Juros no período k

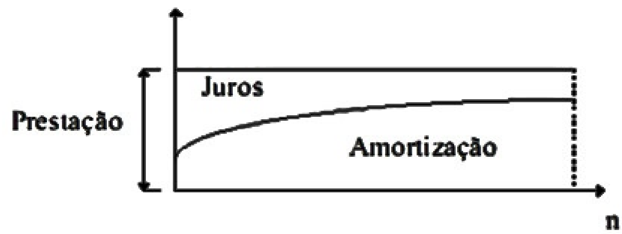
26

Fatec FINANCIAMENTOS

Faculdade de Tecnologia

- **Sistema francês de amortização (price)**

Os juros no período k são calculados sobre o saldo devedor anterior:



$$j_k = i^*(\text{Saldo devedor})_{k-1}$$

Quanto menor o saldo devedor menores serão os juros e, como as prestações são constantes no sistema Price, a amortização crescerá com o tempo.

27

Fatec FINANCIAMENTOS

Faculdade de Tecnologia

- **Sistema de amortização constante (SAC)**

É o sistema normalmente utilizado para financiamentos de longo prazo.

Neste sistema as amortizações são constantes e calculadas da seguinte forma:

$$P = \frac{F}{n}$$

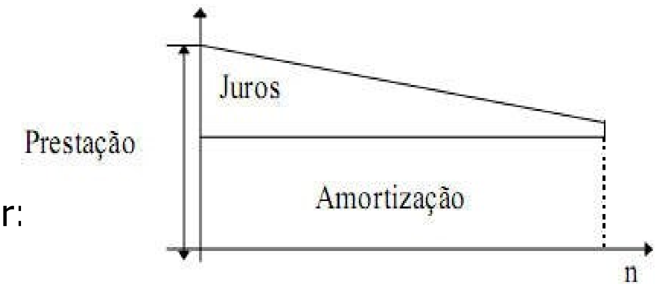
Onde **P** é a parcela de amortização do financiamento **F** e **n** é o número de prestações.

28

FINANCIAMENTOS

○ Sistema de amortização constante (SAC)

Graficamente a prestação pode ser representada assim:



O juro é calculado por:

$$J_n = i\,.SD_{(n-1)}$$

E o Saldo Devedor por: $SD_n = SD_{(n-1)} - Q$

29

FINANCIAMENTOS

○ O período de carência

A concessão de um período de carência é muito utilizada pelas instituições financeiras.

Durante o período de carência paga-se somente juros e o principal permanece inalterado, ou ainda, não se paga juros e estes são capitalizados acrescendo o principal.

Exercício 16

30

Fatec FINANCIAMENTOS

- **Outros sistemas de amortização**

O Sistema Americano:

Neste sistema paga-se apenas os juros e o principal é amortizado no final do empréstimo.

Sistema de Pagamento Único:

É muito utilizado para financiamentos industriais de capital de giro. Juros e principal são pagos no final do empréstimo. Nada mais do que achar F dado P.

31

Fatec FINANCIAMENTOS

- **Outros sistemas de amortização**

Pagamento antecipado:

Os juros são cobrados antecipadamente e o principal é pago ao final do empréstimo. É uma forma conhecida de "aumentar" a taxa de juros efetiva cobrada por uma instituição financeira.

É uma prática habitual principalmente nas operações de desconto de duplicatas e títulos de curto prazo emitidos pela empresa *(commercial papers)*.

A fórmula do desconto comercial composto é:

$$\mathbf{VA = VN*(1\text{-}d)^n}$$

Exercício 17 a 20

32

Fatec
Faculdade de Tecnologia

FINANCIAMENTOS

- **Outros sistemas de amortização**

  Pagamento antecipado:

  No entanto é uma

33

Fatec
Faculdade de Tecnologia

Etapa concluída
Muito Obrigado!

34

34

Fatec
Faculdade de Tecnologia

BIBLIOGRAFIA

- HOJI, Masakazu. Matemática Financeira: didática, objetiva e prática – 1. ed, - São Paulo: Atlas, 2016.
- HOJI, Masakazu. Administração Financeira e Orçamentária: matemática financeira aplicada, estratégias financeiras, orçamento empresarial. 10. ed. - São Paulo: Atlas, 2012.
- OLIVEIRA, Alessandro M. Apostila de Engenharia Econômica. 2017.
- https://comocalcular.com.br/matematica/tabela-sac/

35