

机器学习导论

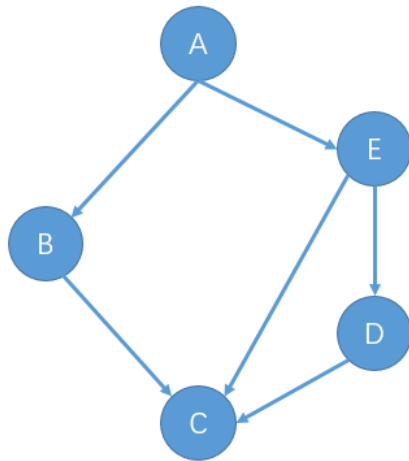
作业五

151220097, 孙旭东, 248381185@qq.com

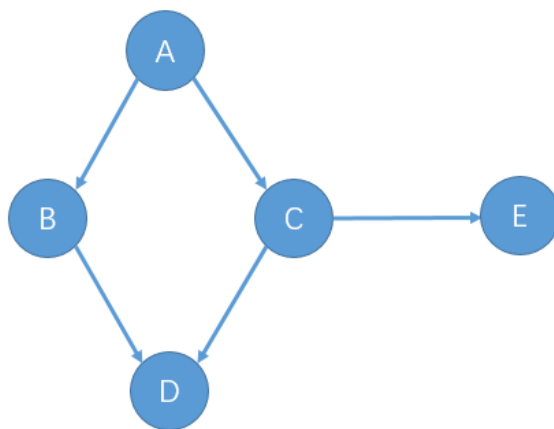
2018 年 6 月 18 日

1 [30pts] Conditional Independence in Bayesian Network

(1) [5pts] 请给出图中贝叶斯网结构的联合概率分布的分解表达式。



(2) [5pts] 请给出下图中按照道德化方法可以找到的所有条件独立的组合(即哪些变量关于哪些变量或者变量集条件独立), 独立也算做条件独立的一种特例。



- (3) [10pts] 在这里，首先我们将给出关于“阻塞”的概念，然后我们根据“阻塞”的概念给出条件独立的充要条件。（大家也可以参考这个网站）

定义 1 (阻塞). 设 X, Y, Z 分别是一个有向无环图 G 里互没有交集的结点集， Z 阻塞 X 中的一结点到 Y 中一结点的通路 P (关于“通路”，在这里只要连通就算一条通路，对路中每条边的方向无任何要求)，当且仅当满足以下条件之一：

1. P 中存在顺序结构 $x \rightarrow z \rightarrow y$ 或同父结构 $x \leftarrow z \rightarrow y$ ，结点 z 包含在集合 Z 中；
2. P 中存在 V 型结构 $x \rightarrow z \leftarrow y$ ，结点 z 及其孩子结点不包含在集合 Z 中。

定理 1 (条件独立). 设 X, Y, Z 分别是一个有向无环图 G 里互没有交集的结点集，如果集合 Z 阻塞 X 到 Y 的任何一条道路，则 X 和 Y 在给定 Z 时条件独立，即 $X \perp\!\!\!\perp Y | Z$ 。

请根据定理1，判断第一问中有哪些条件独立的组合（独立也算条件独立的一种特例）。

- (4) [10pts] 由以上两问我们可知，道德化方法中的“除去集合 z 后， x 和 y 分属两个连通分支”并不构成条件独立性的充要条件。如果对道德化方法稍加修改，在连接 V 型结构父结点前，我们只保留图中 X, Y, Z 及他们的非孩子结点，之后的步骤则相同。请问你认为用修改后的方法可以保证得到全部的正确条件独立集合吗？如果可以，请说明理由；如果不能，请给出反例。

Proof. 此处用于写证明(中英文均可)

(1)

$$\begin{aligned} P(A, B, C, D, E) \\ = P(A)P(B|A)P(C|B, D, E)P(D|E)P(E|A) \end{aligned} \quad (1.1)$$

(2) 条件独立的组合：

$$\begin{aligned} E &\perp A | C \\ E &\perp B | C \\ E &\perp D | C \\ A &\perp D | B, C \end{aligned} \quad (1.2)$$

还有一些冗余的条件独立组合，也属于合法的条件独立组合

$$\begin{aligned}
 E &\perp A|C, B \\
 E &\perp A|C, D \\
 E &\perp A|C, B, D \\
 E &\perp B|C, A \\
 E &\perp B|C, D \\
 E &\perp B|C, A, D \\
 E &\perp D|C, A \\
 E &\perp D|C, B \\
 E &\perp D|C, A, B \\
 A &\perp D|B, C, E
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

(3) 条件独立的组合：

$$\begin{aligned}
 A &\perp\!\!\!\perp C|B, E \\
 A &\perp\!\!\!\perp C|B, E, D \\
 A &\perp\!\!\!\perp D|E \\
 A &\perp\!\!\!\perp D|B, E \\
 B &\perp\!\!\!\perp D|A \\
 B &\perp\!\!\!\perp D|E \\
 B &\perp\!\!\!\perp D|A, E \\
 B &\perp\!\!\!\perp E|A \\
 B &\perp\!\!\!\perp E|A, D
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

(4) 不可以得到全部的正确条件独立的组合，反例如下：

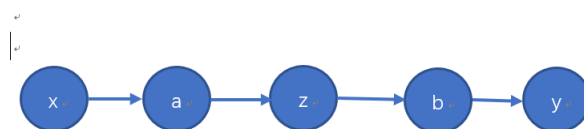


图 1: 反例

按照充要条件，有：

$$x \perp\!\!\!\perp y|z \tag{1.5}$$

但是根据题意， a 作为 x 的子节点会被删除，那么 x 和 y 不再连通：

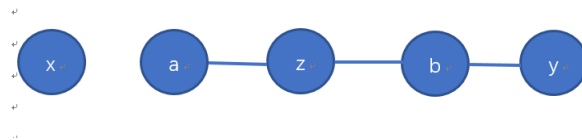


图 2: 反例

就有 x 和 y 直接独立，不能得到上述条件独立的组合。

2 [20pts] Naive Bayes Classifier

通过对课本的学习，我们了解了采用“属性条件独立性假设”的朴素贝叶斯分类器。现在我们有如下表所示的一个数据集：

表 1: 数据集					
编号	x_1	x_2	x_3	x_4	y
样本1	1	1	1	0	1
样本2	1	1	0	0	0
样本3	0	0	1	1	0
样本4	1	0	1	1	1
样本5	0	0	1	1	1

(1) [10pts] 试计算： $\Pr\{y = 1 | \mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\}$ 与 $\Pr\{y = 0 | \mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\}$ 的值：

(2) [10pts] 使用“拉普拉斯修正”之后，再重新计算上一问中的值。

Solution.

(1)

$$\Pr\{y = 1 | \mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} = \frac{\Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1) | y = 1\} \Pr\{y = 1\}}{\Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\}} \quad (2.1)$$

根据“属性条件独立性假设”的思想，有：

$$\begin{aligned} & \Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1) | y = 1\} \\ &= \Pr\{x_1 = 1 | y = 1\} \Pr\{x_2 = 1 | y = 1\} \Pr\{x_3 = 0 | y = 1\} \Pr\{x_4 = 1 | y = 1\} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{0}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

以及

$$\begin{aligned} & \Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} \\ &= \Pr\{x_1 = 1\} \Pr\{x_2 = 1\} \Pr\{x_3 = 0\} \Pr\{x_4 = 1\} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{18}{625} \end{aligned} \quad (2.3)$$

所以可得：

$$\Pr\{y = 1 | \mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} = 0 \quad (2.4)$$

类似的

$$\Pr\{y = 0 | \mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} = \frac{\Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1) | y = 0\} \Pr\{y = 0\}}{\Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\}} \quad (2.5)$$

根据“属性条件独立性假设”的思想，有：

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1) | y = 0\} \\
 &= \Pr\{x_1 = 1 | y = 0\} \Pr\{x_2 = 1 | y = 0\} \Pr\{x_3 = 0 | y = 0\} \Pr\{x_4 = 1 | y = 0\} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{16}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

以及

$$\Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} = \frac{18}{625} \tag{2.7}$$

又因为

$$\Pr\{y = 0\} = \frac{2}{5} \tag{2.8}$$

综上可得

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{y = 0 | \mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} \\
 &= \frac{\Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1) | y = 0\} \Pr\{y = 0\}}{\Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\}} \\
 &= \frac{\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}}{\frac{18}{625}} \\
 &= \frac{125}{144}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

(2) 首先有：

$$\Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} = \frac{18}{625} \tag{2.10}$$

根据上题，结合“拉普拉斯修正”，可得：

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1) | y = 1\} \\
 &= \Pr\{x_1 = 1 | y = 1\} \Pr\{x_2 = 1 | y = 1\} \Pr\{x_3 = 0 | y = 1\} \Pr\{x_4 = 1 | y = 1\} \\
 &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \\
 &= \frac{18}{625}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

还有：

$$\Pr\{y = 1\} = \frac{4}{7} \tag{2.12}$$

所以得到：

$$\Pr\{y = 1 | \mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} = \frac{4}{7} \tag{2.13}$$

类似的，根据“拉普拉斯修正”，可得：

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1) | y = 0\} \\
 &= \Pr\{x_1 = 1 | y = 0\} \Pr\{x_2 = 1 | y = 0\} \Pr\{x_3 = 0 | y = 0\} \Pr\{x_4 = 1 | y = 0\} \\
 &= \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \\
 &= \frac{1}{16}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

还有：

$$\Pr\{y = 0\} = \frac{3}{7} \quad (2.15)$$

所以得到：

$$\Pr\{y = 0 | \mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)\} = \frac{625}{672} \quad (2.16)$$

3 [50pts] Ensemble Methods in Practice

由于出色的性能和良好的鲁棒性，集成学习方法 (Ensemble methods) 成为了极受欢迎的机器学习方法，在各大机器学习比赛中也经常出现集成学习的身影。在本次实验中我们将结合两种经典的集成学习思想：Boosting和Bagging，对集成学习方法进行实践。

本次实验选取UCI数据集Adult，此数据集为一个二分类数据集，具体信息可参照链接，为了方便大家使用数据集，已经提前对数据集稍作处理，并划分为训练集和测试集，大家可通过此链接进行下载。

由于Adult是一个类别不平衡数据集，本次实验选用AUC作为评价分类器性能的评价指标，AUC指标的计算可调用sklearn算法包。

- (1) [5pts] 本次实验要求使用Python 3或者Matlab编写，要求代码分布于两个文件中，BoostMain.py、RandomForestMain.py (Python) 或 BoostMain.m、RandomForestMain.m (Matlab)，调用这两个文件就能完成一次所实现分类器的训练和测试；
- (2) [35pts] 本次实验要求编程实现如下功能：
 - [10pts] 结合教材8.2节中图8.3所示的算法伪代码实现AdaBoost算法，基分类器选用决策树，基分类器可调用sklearn中决策树的实现；
 - [10pts] 结合教材8.3.2节所述，实现随机森林算法，基分类器仍可调用sklearn中决策树的实现，当然也可以自行手动实现，在实验报告中请给出随机森林的算法伪代码；
 - [10pts] 结合AdaBoost和随机森林的实现，调查基学习器数量对分类器训练效果的影响 (参数调查)，具体操作如下：分别对AdaBoost和随机森林，给定基分类器数目，在训练数据集上用5折交叉验证得到验证AUC评价。在实验报告中用折线图的形式报告实验结果，折线图横轴为基分类器数目，纵轴为AUC指标，图中有两条线分别对应AdaBoost和随机森林，基分类器数目选取范围请自行决定；
 - [5pts] 根据参数调查结果，对AdaBoost和随机森林选取最好的基分类器数目，在训练数据集上进行训练，在实验报告中报告在测试集上的AUC指标；
- (3) [10pts] 在实验报告中，除了报告上述要求报告的内容外还需要展现实验过程，实验报告需要有层次和条理性，能让读者仅通过实验报告便能了解实验的目的，过程和结果。

实验报告.

1. 实验说明 本次实验环境为：

OS: Windows10

编程语言: python 3.6

实验的输入文件放在/adult_dataset/文件夹中。

运行方法：

python BoostMain.py

python RandomForestMain.py

2. **实验目的** 本次实验的主要工作在于实现集成学习的经典算法—AdaBoost算法和随机森林算法。在实现算法之后通过交叉验证的手段来探究基分类器数目和算法性能之间的关系，寻找最优的基分类器数目。在这个过程中，加深对于AdaBoost算法和随机森林算法的理解，同时掌握参数调试的技巧和思想。

3. 实验过程

- a. AdaBoost算法的实现使用python 3.6，借助了sklearn包。

具体的，首先要定义class AdaBoost:

关键的成员变量为 α 和 h 。其中 α 是不同的基分类器对应的权重， h 是所有的基分类器组成的列表。

关键的成员函数为 fit 和 $predict$ 。其中 fit 函数负责了分类器的训练工作， $predict$ 则负责了测试样例的预测工作。

fit 函数根据参数 X_{train}, y_{Train}, T 来执行。函数会进行分类器数目 T 次迭代。在第 t 次迭代时，根据训练样例 X_{Train}, y_{Train} ，样例权重 D_t 来训练一个新的基分类器 h_t ，根据预测结果 $y_{Pred} = h_t(X_{Train}, D_t)$ 和 y_{Train} 来计算误差 ϵ :

$$incorrect_i = \begin{cases} 1 & y_{Pred_i} = y_{Train_i}; \\ 0 & y_{Pred_i} \neq y_{Train_i}; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\epsilon = average(incorrect, weights = D_t) \quad (3.2)$$

其中 $average$ 是计算加权平均的函数。得到误差之后就可以得到该分类器的权重 α_t ，即:

$$\alpha_t = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \quad (3.3)$$

保存 h_t 和 α_t ，然后更新样例权重:

$$D_{t+1}(X_i) = \frac{D_t(X_i) \exp(-\alpha_t y_i h(X_i))}{Z_t} \quad (3.4)$$

其中

$$Z_t = \sum_{i=1}^n D_t(X_i) \exp(-\alpha_t y_i h(X_i)) \quad (3.5)$$

注意到 D_1 设置每一项为 $\frac{1}{m}$ 。

$predict$ 函数接受测试数据 X_{Test} 之后，使用 α 和 h_t 来进行预测

$$H(X_{Test}) = sign\left(\sum_{t=1}^T \alpha_t h_t(X_{Test})\right) \quad (3.6)$$

在实现基分类器的简单决策树的时候，调用了sklearn包的sklearn.tree.DecisionTreeClassifier。

- b. 随机森林算法的实现使用python 3.6，借助了sklearn包。

类似的，也要定义class RandomForest:

关键的成员变量为 h ，即所有基分类器组成的列表。

Algorithm 1 RandomForestFit**Require:**

- 1: X : 训练集属性
- 2: y : 训练集类别
- 3: T : 基分类器数目
- 4: k : 随机决策树每次划分时随机选择的属性个数

Ensure: h : 基分类器列表

- 5: **for** t from 1 to T **do**
- 6: $Xs, ys = \text{Sample}(X, y)$
- 7: $f = \text{ExtraTreesFit}(Xs, ys, k)$
- 8: $h.append(f)$
- 9: **end for**

关键的成员函数为 fit 和 $predict$ 。

随机森林算法伪代码如下：

fit 函数进行 T 次迭代，每次迭代对训练集进行 $bootstrap$ 采样，然后用采样到的样本训练

Algorithm 2 RandomForestPredict**Require:** X : 测试集属性**Ensure:** $pred$: 预测的类别

- 1: $pred = 0$
- 2: **for** t from 1 to T **do**
- 3: $pred = pred + h_t(X)$
- 4: **end for**
- 5: $pred = \text{sign}(pred)$

一个随机决策树模型并保存。随机决策树模型在每次划分的时候会先随机挑选 k 个属性，然后在其中寻找最优的划分属性。

$predict$ 函数用 T 个随机决策树的模型对测试样例进行预测，然后将预测结果相加取符号作为输出的预测结果：

$$H(XTest) = \text{sign}\left(\sum_{t=1}^T h_t(XTest)\right) \quad (3.7)$$

在实现基分类器的随机决策树的时候，调用了sklearn包的sklearn.tree.ExtraTreeClassifier。

- c. 对AdaBoost和随机森林算法使用5折交叉验证来寻找最优的基分类器数目。5折交叉验证的做法为：首先将初始训练集随机划分成等分的5份，选择其中的四份作为新的训练集 XTr 和 yTr ，剩下一份作为新的验证集 XCV 和 yCV 。用 XTr 和 yTr 来训练AdaBoost模型或者随机森林模型，训练好模型之后在 XCV 上进行预测，预测得到的结果 $yPred$ 和 yCV 计算AUC指标。事先确定基分类器范围，然后在范围内进行上述交叉验证AUC评价，统计所有AUC指标，找到最大的AUC对应的基分类器数目 t ，作为AdaBoost预测测试集所用的基分类器数目。

注意到划分时为了防止类别不平衡，所以采用了StratifiedSplit，即在划分的子集中各个类别仍然保持和原来一样的比例。

过程伪代码如下：

Algorithm 3 CrossValidationForAuc

Require: $XTrain$: 训练集属性

1: $yTrain$: 训练集标签

2: N : 基分类器范围

Ensure: T : 最优基分类器数目

3: $maxAuc = 0, T = 1$

4: **for** t from 1 to N **do**

5: $Auc = 0$

6: **for** $TrIdx, CVIdx$ in StratifiedSplit($XTrain, yTrain$) **do**

7: $XTr, yTr = XTrain[TrIdx], yTrain[TrIdx]$

8: $XCV, yCV = XTrain[CVIdx], yTrain[CVIdx]$

9: $f = model.fit(XTr, yTr)$

10: $yPred = f.predict(XCV)$

11: $Auc = Auc + ComputeAuc(yCV, yPred)$

12: **end for**

13: **if** $Auc \geq maxAuc$ **then**

14: $T = t$

15: **end if**

16: **end for**

对于AdaBoost和随机森林模型使用交叉验证得到的结果如下：

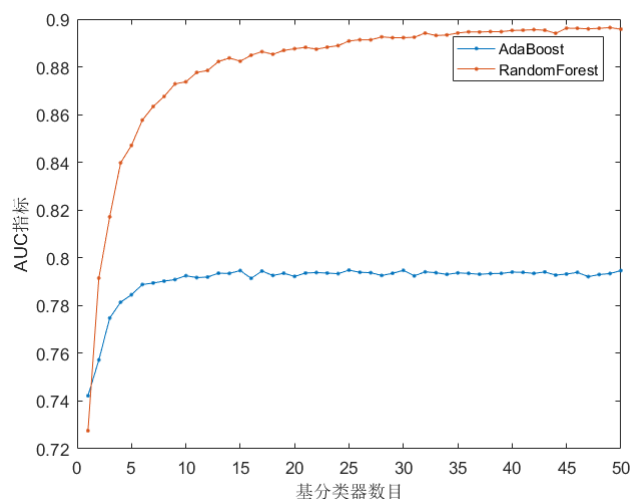


图 3: AdaBoost和随机森林在不同基分类器数目时的AUC指标

d. 选取最优的基分类器数目，即AdaBoost选取25个基分类器，随机森林选取49个基分类器。

在测试集上测试得到的结果如下：

表 2: AdaBoost和随机森林在测试集上的AUC指标

算法	AUC指标
AdaBoost	0.8223965975124728
随机森林	0.8942615694173404

4. 实验结果本次实验完成了题目的所有要求：包括AdaBoost和随机森林算法的实现，使用交叉验证方法调整参数，在测试集上完成预测并且得到AUC性能指标。