

机器学习导论

作业三

学号, 作者姓名, 邮箱

2018 年 4 月 24 日

1 [15pts] Decision Tree I

- (1) [5pts] 假设一个包含三个布尔属性 X, Y, Z 的空间, 并且目标函数是 $f(x, y, z) = x \text{ XOR } z$, 其中 XOR 为异或运算符。令 H 为基于这三个属性的决策树, 请问: 目标函数 f 可实现吗? 如果可实现, 画出相应的决策树以证明; 如果不可实现, 请论证原因;
- (2) [10pts] 现有如表 1所示数据集:

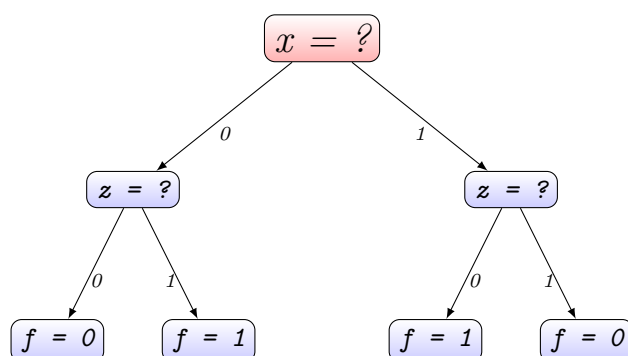
表 1: 样例表

X	Y	Z	f
1	0	1	1
1	1	0	0
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

请画出由该数据集生成的决策树。划分属性时要求以信息增益 (information gain)为准则。当信息增益 (information gain)相同时, 依据字母顺序选择属性即可。

Solution.

(1) 目标函数 f 是可以实现的，决策树如下所示：



(2) 按照信息增益为准则，划分依据为：

第一层根结点：

如果选择 X 划分：

$$\begin{aligned} Gain(D, X) &= Ent(D) - \sum_{v=1}^2 \frac{|D^v|}{|D|} Ent(D^v) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

如果选择 Y 划分：

$$Gain(D, Y) = 1 - 1 = 0 \quad (1.2)$$

如果选择 Z 划分：

$$Gain(D, Z) = 1 - \frac{3}{4} \times 0.918 = 0.6885 \quad (1.3)$$

所以选择 Z 划分。

第二层第一个结点都是同一类，现在考虑第二个结点的划分：

如果选择 X 划分：

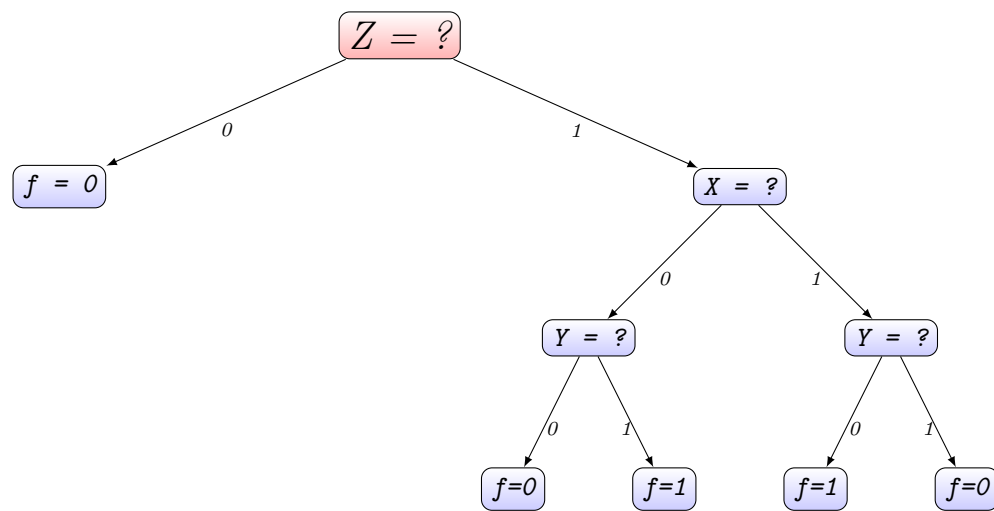
$$Gain(D, X) = 0.918 - 0.918 = 0 \quad (1.4)$$

如果选择 Y 划分：

$$Gain(D, Y) = 0.918 - 0.918 = 0 \quad (1.5)$$

所以按照字母顺序选择 X 划分。

根据数据集生成的决策树如下：



2 [20pts] Decision Tree II

考虑如下矩阵：

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$$

该矩阵代表了6个样本数据，每个样本都包含2个特征 f_1 和 f_2 。这6个样本数据对应的标签如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

在这个问题中，我们要构造一个深度为2的树进行分类任务。

- (1) [5pts] 请计算根结点 (root) 的熵值 (entropy)；
- (2) [10pts] 请给出第一次划分的规则，例如 $f_1 \geq 4, f_2 \geq 3$ 。对于第一次划分后产生的两个结点，请给出下一次划分的规则；
提示：可以直观判断，不必计算熵。
- (3) [5pts] 现在回到根结点 (root)，并且假设我们是建树的新手。是否存在一种划分使得根结点 (root) 的信息增益 (information gain) 为0？

Solution.

- (1) 根结点的熵值为

$$Ent(D) = -\left(\frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6}\right) = 1.000 \quad (2.1)$$

- (2) 规则如图1所示。第一次划分的规则为 $f_1 \leq 6$ 。不满足 $f_1 \leq 6$ 的结点的所有样本的标签都是1，所以这一部分不需要再次划分。第一次划分之后，满足 $f_1 \leq 6$ 的节点的第二次划分的规则为 $f_2 \leq 1$ ，其中满足 $f_2 \leq 1$ 的结点的样本的标签都是1，不满足的都是0，所以不需要再次划分。

- (3) 规则如图2所示。按照 $f_2 \leq 2$ 来划分，将 D 分成了 D^1 和 D^2 两个部分。其中 D^1 包含第一个和第四个样例。由此可得

$$Ent(D^1) = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = 1.000 \quad (2.2)$$

$$Ent(D^2) = -\left(\frac{2}{4} \log_2 \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \log_2 \frac{2}{4}\right) = 1.000 \quad (2.3)$$

所以可得信息增益为

$$\begin{aligned} Gain(D, f_2 \leq 2) &= Ent(D) - \sum_{v=1}^2 \frac{|D^v|}{|D|} Ent(D^v) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{6} \times 1 + \frac{4}{6} \times 1\right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

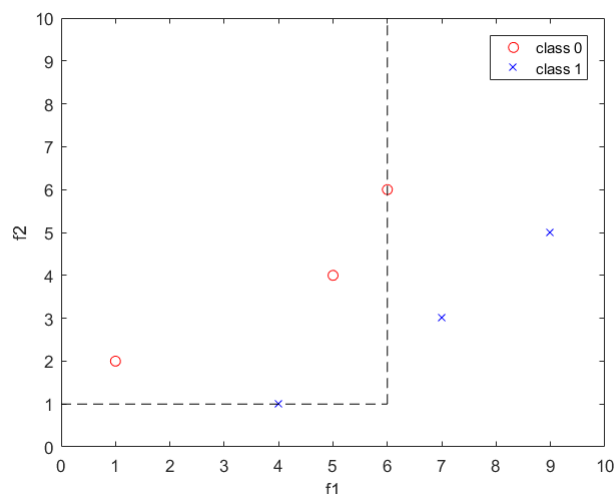


图 1: 划分规则

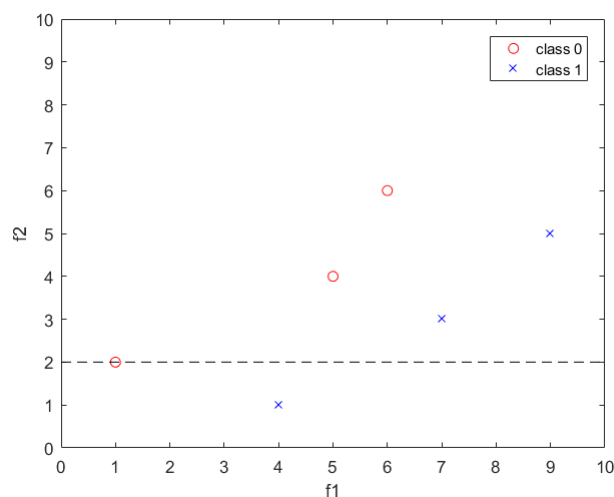


图 2: 划分规则

3 [25pts] Universal Approximator

已知函数 $f: [-1, 1]^n \mapsto [-1, 1]$ 满足 ρ -Lipschitz 性质。给定误差 $\epsilon > 0$, 请构造一个激活函数为 $\text{sgn}(\mathbf{x})$ 的神经网络 $\mathcal{N}: [-1, 1]^n \mapsto [-1, 1]$, 使得对于任意的输入样本 $\mathbf{x} \in [-1, 1]^n$, 有 $|f(\mathbf{x}) - \mathcal{N}(\mathbf{x})| \leq \epsilon$ 。

(Lipschitz 条件为: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in [-1, 1]^n, \exists \rho > 0, \text{ s.t. } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \rho \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$, 其中 $\text{sgn}(\mathbf{x})$ 的定义参见《机器学习》第98页。)

- (1) [5pts] 请画出构造的神经网络 \mathcal{N} 的示意图;
- (2) [10pts] 请对构造的神经网络进行简要的说明(写清每一层的线性组合形式, 也就是结点间的连接方式和对应的权重);

(3) [10pts] 证明自己构造的神经网络的拟合误差满足要求。

Solution. 此处用于写解答(中英文均可)

- (3) [5pts] 通过上一题实验我们可以发现，即使使用现成的网络结构也不一定能达到与其相同的训练效果。请大家分析其中的原因，并谈谈本次实验的感想，以及对深度学习调参的体会。

实验报告.

(1)

对CNN的见解：卷积神经网络是一种非常强大的，适合用于图像，视频识别以及自然语言处理的神经网络。卷积神经网络本身就是一种特殊的神经网络，其训练的流程为：输入层接受训练集数据，通过隐层一层层传递到输出层，输出与真实标签进行比较，得到损失函数，然后再通过反向传播来调整隐层的参数，进而降低损失函数，来使得预测结果逼近与真实标签。CNN中比较特殊的隐层结构是卷积层和pooling层，其中卷积层主要承担了对特定模式的识别工作，pooling层主要起到了采样的作用。

卷积层的概念：是卷积神经网络的核心，承担了卷积神经网络大部分的工作量。

卷积层的作用：卷积层的作用主要在于提取特征，这个操作类似于信号处理中的滤波，和人类大脑认知世界也有几分相似。这个操作的实现用到了卷积的方法。具体的，如果输入的数据大小为 $H \times W \times D$ (此处先假设batch size为1，其中D表示channel数量)，那么卷积层就会有诸多大小为 $H' \times W' \times D$ 的filter(其中 $H' < H$ 而且 $W' < W$)。通过将一个个filter“覆盖”在输入数据上，会得到输入数据上的一个和filter相同大小的数据块，把数据块和filter对应位置的元素相乘然后求和，可以得到一个标量值，把filter“覆盖”到数据的不同位置可以得到很多标量值，将这些标量值按照顺序排列起来可以得到一个activation map，每一个filter针对每一个输入数据都会得到一个activation map，把多个filter对应的activation map堆叠在一起就可以得到下一个隐层的输入数据。每一个卷积层得到的activation map其实就是对某种特征的提取，如果map中某个元素值很大，就说明这个元素对应的输入数据的特定位置有可能存在某种特征。所以activation map实际上可以反应出特征在输入数据集中的分布。卷积层可以识别的特征多种多样的，一般第一卷积层只能识别一些简单的特征，例如边缘，曲线，角，更多层的卷积层可以识别到更加复杂的特征。

Pooling层的概念：pooling层也是卷积神经网络中一个重要的结构，他的主要功能在于对数据进行采样。

Pooling层的作用：总体来讲pooling层的作用在于减少数据大小，减少参数，降低运算量，减低训练时间，防止过拟合，提高泛化能力，同时还可以保持特征的不变形（包括平移，旋转，尺度等方面）。具体的，pooling层就是按照一定的比例对输入数据进行采样，常见的有max-pooling和average-pooling。常见的做法是将数据分成 2×2 的数据块然后从每个数据块中选择一个最大值（或者平均值）来代替整个数据块。其中max-pooling采样操作还能够保持输入数据的特征不变型，比如说某个数据块中出现了某个特征，反映在输入数据上就是某个元素的值非常大。当我们在对这个数据块采样的时候，为了在下一层维持这个特征的表现，我们选择了最大的数值作为采样后的结果，这背后蕴含了即便数据缩小了，我们仍然尽可能保持原有的特征这一思想，所以实践中往往max-pooling表现会比较好。实践中会在卷积层之间周期性的插入pooling层来提升整体的效果。

(2)