

Задача 1

①

X/Y	0	1	2	3	\sum
1	0,2	0,08	0,05	0,01	0,34
2	0,18	0,08	0,06	0,01	0,33
3	0,15	0,09	0,07	0,02	0,33
\sum	0,53	0,25	0,18	0,04	

распределение $Y \rightarrow \sum$

частное распределение X

Проверка независимости

$$P(X=1, Y=0):$$

$$P(X=1) \cdot P(Y=0) = 0,34 \cdot 0,53 =$$

$$= 0,1802$$

$$P(X=1, Y=0) = 0,2$$

$$\text{Т.к. } 0,2 \neq 0,1802 \Rightarrow$$

случайные величины X и Y не являются независимыми

③ Коэффициент корреляции между X и Y

$$I. E(X) = \sum_x x \cdot P(X=x) \quad E(Y) = \sum_y y \cdot P(Y=y) \quad \text{матем. ожидание}$$

$$E(X) = 1 \cdot 0,34 + 2 \cdot 0,33 + 3 \cdot 0,33 = 0,34 + 0,66 + 0,99 = 1,99$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0,53 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,18 + 3 \cdot 0,04 = 0,15 + 0,36 + 0,12 = 0,73$$

$$E(XY) = \sum_{x,y} x \cdot y \cdot P(X=x, Y=y) =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 1 \cdot 0,08 + 1 \cdot 2 \cdot 0,05 + 1 \cdot 3 \cdot 0,01 +$$

$$+ 2 \cdot 0 \cdot 0,18 + 2 \cdot 1 \cdot 0,08 + 2 \cdot 2 \cdot 0,06 + 2 \cdot 3 \cdot 0,01 +$$

$$+ 3 \cdot 0 \cdot 0,15 + 3 \cdot 1 \cdot 0,09 + 3 \cdot 2 \cdot 0,07 + 3 \cdot 3 \cdot 0,02 =$$

$$= 0,08 + 0,1 + 0,03 + 0,16 + 0,24 + 0,06 + 0,27 + 0,42 + 0,18 = 1,54$$

II. Ковариация $Cov(X, Y)$:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 1,54 - 1,99 \cdot 0,73 = 0,0873$$

III. Дисперсии X и Y

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot P(X=x) = 1^2 \cdot 0,34 + 2^2 \cdot 0,33 + 3^2 \cdot 0,33 = 4,63$$

$$Var(X) = 4,63 - (1,99)^2 = 4,63 - 3,9601 = 0,6699$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$E(Y^2) = \sum_y y^2 \cdot P(Y=y) = 0^2 \cdot 0,53 + 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,18 + 3^2 \cdot 0,04 =$$

$$= 0 + 0,25 + 0,72 + 0,36 = 1,33$$

$$Var(Y) = 1,33 - (0,73)^2 = 1,33 - 0,5329 = 0,7971$$

Корр. корреляции

$$\rho_{X,Y} = \frac{0,0873}{\sqrt{0,6699} \cdot \sqrt{0,7971}} = \frac{0,0873}{0,7304} \approx \boxed{0,1195}$$

④ Т.к. $\rho_{X,Y} \approx 0,1195$, т.е. $\neq 0$, то случайные величины X и Y являются коррелированными.

⑤ Распределение числа кошек в среднем число кошек в двухкомнатной квартире:

Y	0	1	2	3
P(Y)	0,18	0,08	0,06	0,01

Распределение числа кошек

$$P(Y=0|X=2)=0,18 \quad P(Y=1|X=2)=0,08 \quad P(Y=2|X=2)=0,06 \quad P(Y=3|X=2)=0,01$$

Среднее число кошек в двухкомнатной квартире:

$$E(Y|X=2) = 0 \cdot 0,18 + 1 \cdot 0,08 + 2 \cdot 0,06 + 3 \cdot 0,01 = \\ = 0,08 + 0,12 + 0,03 = \boxed{0,23}$$

⑥ Распределение числа комнат и среднее число комнат в квартире с одним котом

распределение: $P(X=1|Y=1) = 0,08/0,25 = 0,32$

$$P(X=2|Y=1) = 0,08/0,25 = 0,32$$

$$P(X=3|Y=1) = 0,09/0,25 = 0,36$$

среднее число комнат:

$$E(X|Y=1) = 1 \cdot 0,32 + 2 \cdot 0,32 + 3 \cdot 0,36 =$$

$$= 0,32 + 0,64 + 1,08 = \boxed{2,04}$$