Sumário

EDO lineares de ordem arbitrária; nomenclatura e exemplos.

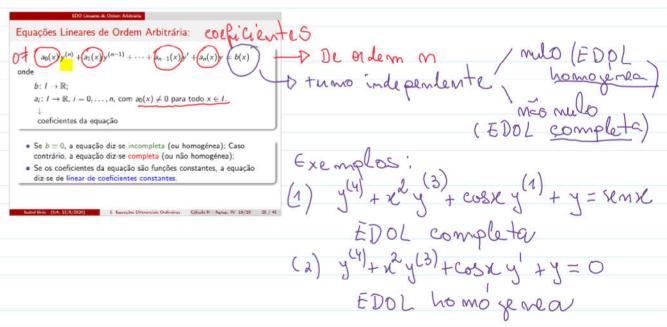
Solução geral de uma EDO linear completa:

(solução partícular) +(solução geral da homogénea associada)

Caracterização do conjunto das soluções de uma EDO linear homogénea como espaço vetorial real,

sistema fundamental de soluções: Wronskiano e Wronskiana. Exemplo.

EDO lineares de coeficientes constantes, determinação da solução geral de equações homogéneas usando o polinómio característico.



Exemplos 1. \[\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \frac{0}{dt} \] EDO linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes; 2. \[\frac{e^x}{(0.5)} + \frac{1}{(0.5)} \] EDO linear completa de primeira ordem; 3. \[\frac{1}{(0.5)} + \frac{1}{(0.5)} + \frac{1}{(0.5)} \] EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.

Equação homogénea associada a uma EDO linear Se na equação $a_0(x)\,y^{(o)}+a_1(x)\,y^{(o-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=b(x)$ tomarmos $b(x)\equiv 0$, obtemos a chamada equação homogénea associada. Exemplo: A equação homógenea associada à equação completa $y''+y=\cos(x)$ é a equação: $y''+y=0\,.$

Robel Urs: (UA, 13/5/930) 5. Equippe Differences Ordinarios Collabb II – Agrep. IV 19/20 27 / 4

A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

$$y'-2y=e^{5x}$$

$$y'-2y=0\;,$$

$$y = \underbrace{C e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3} e^{5x}}_{}, C \in \mathbb{R}.$$

y=yh+yp da EDOL Completa solução quel de homogrea essociede I solução jud de EDOL Completa

Exemplo do slide: P(x)

A) EDOL homogènec assoliada: y (-2) = 0

Uscado o fator indegicante peca) = e-2x

Integrando (l-2xy) =0

y = e e 2 / c e | R e a solução such da E DOL homogenea.

(2) Encontron una solução de y-2y=e. (*)

Tento encontrare
$$J_p = Ke$$
 $X \in \mathbb{R}$.

 $J_p = K.5.e^{SX}$

Assim, $y_p = \frac{1}{3}e^{57}$ de uma solução particular de EDOL

conclusão:

A solução gual da EDOL (completa) é

A solução guel de EDOL (complete) é

y = Ce xx + 1 e 5x, c e [R.

EDO Lineares de Ordero Arbitrária

Solução Geral e Conjunto Fundamental de Soluções

EDO linear homogénea - Conjunto das soluções

Considere-se a EDO

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$
 (1)
onde $a_i \colon I \to \mathbb{R}, \ i = 0, \dots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema:

Sejam $y: I \rightarrow \mathbb{R}, w: I \rightarrow \mathbb{R} \in \alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) y = 0 é solução de (1);
- (ii) Se y e w são soluções de (1), então y + w é solução de (1);
- (iii) Se y é solução de (1), então αy é solução de (1);

lsto é, o conjunto das soluções de (1) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em I.

habal Bris (UA, 13/5/2020

S. Equições Diferenciais Ordinários — Cábalo II - Agrup. IV 10/20 — 29 / 45

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções (cont.)

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem
$$n$$

 $s_0(x) y^{(n)} + s_1(x) y^{(n-1)} - \cdots + s_{n-1}(x) y' + s_n(x) y = 0,$

num dado intervalo I ($a_0,a_1,\ldots a_n$ contínuas em I: $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n$. linearmente independentes e qualquer sua solução, y, pode escrever-se como sua combinação linear, i.e..

So lus $y = C_1 \varphi_1 + \cdots + C_n \varphi_m$ para $C_j \in \mathbb{R}$.

Qualquer conjunto de n soluções linearmente independente de uma EDO linear homogénea de ordem n é designado por sistema fundamental de soluções dessa equação. Na verdade, de acordo com o teorema anterior, um sistema fundamental de soluções é uma base do subespaço vetorial das soluções da EDOL homógenea.

ds. (UA, 13/N/X000) 5. Equippes Differencial Ordedess — Calcula II

do messo que dizu que esse subispero des soluções tem de EDOL)

dinensão m (ordem de EDOL)

le, le,..., lm à conjunto de soluções l. i.

elic me-se sistema fundametal

de soluções.

Recordando a ind. linear:

19,12,000,9mg são l.i sse

 $x_1 Y_1(u) + x_2 Y_2(u) + \cdots + x_m Y_n(x) = 0$, $\forall x \in I \implies x_2 = 0$, $i = 1, \cdots, m$ $\in x \in x_1(u) = x_2(u) = x_2(u) = x_3(u) = x_4(u) = x$

se dysenx + of coscre) =0, their,

x=0

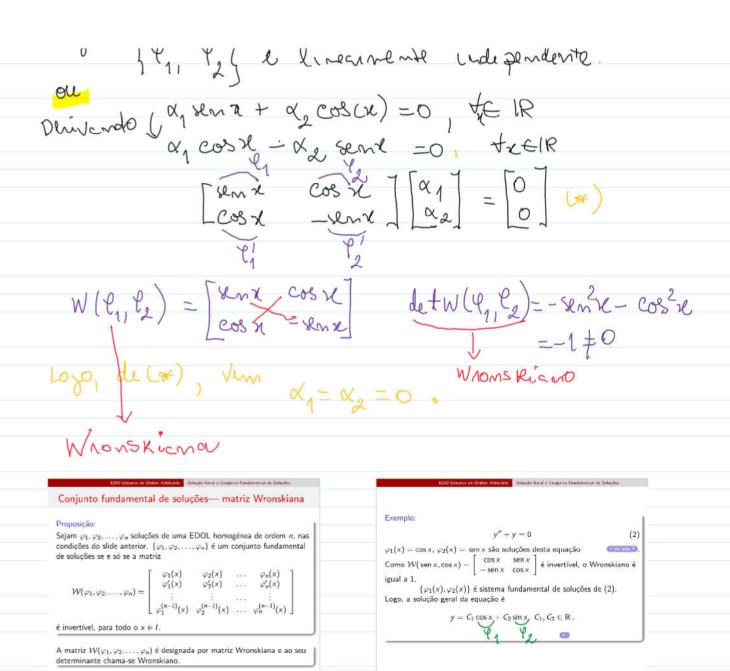
$$\alpha_1.0 + \alpha_2.1=0 \Rightarrow \alpha_2=0$$

火=狐

$$\alpha_{1} \cdot 1 + \alpha_{2} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_{1} = 0$$

Logo 19, 92 à linearneme independente

OLL

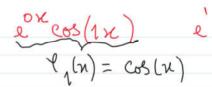


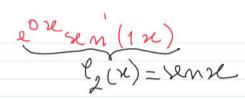
Como encontan, no exemplo, le e le?

1.y" +1:0=0 EDOL com coeficientes constantes
Associando à EDO um polinómio:

Due esterpolinamier as reizes complexes são se pre pres de reizes conjugades;

Perc e per le reizes vemos feren corresponder as soluções: excos(1x) e e es en (1x)





Observações:

- A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para n>1, não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
- Se a EDO linear homogénea tiver coeficientes constantes, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico (ver slides seguintes).

S. Equições Diferenciais Ordinárias — Cáltado II — Agray. IV 10/20 — 31 / 45

EDO linear homogénea com coeficientes constantes

EDO linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$
,

onde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$.

Polinómio associado (polinómio caraterístico):

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$$

As n raízes do polinómio P(r) permitem determinar n soluções linearmente independentes da equação homógenea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homógenea

Exemplos:

1)
$$y'' + 2y' + 3 = 0$$

$$(2) 3y^{(7)} + 5y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$$

Voltendo ao exemplo (1):

P(4) =0 (=) 22+2x+3=0 (=) 2 (=) $M = -2 \pm \sqrt{-8}$

(-) R = -2+18i VR = -2-18i

(=) n=(1+12i / n=(-1-12i

Loso, um conjunto funda nevid de

onde (1/2) = e cos(vax)

Que tipo de noizes pode tu P(X):

Construção dum sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) da EDO linear com coeficientes constantes e homogénea

Considerem-se as raízes de P(r) identificadas e para cada uma delas real e associação de soluções (no final do processo ter-se-à n soluções linearmente independentes):

- 1.º Caso: A raíz, r, é real simples.
 Solução: e^{xx}
 2.º Caso: A raíz, r, é real de mutiplicidade k.
 Soluções: e^{xx}, xe^{xx},..., x^{k-1}e^{xx}
- 3.º Caso: As raízes são complexas conjugadas simples, $\alpha + \beta i$ e
- Soluções: $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
- 4.º Caso: As raízes são complexas conjugadas, $\alpha+\beta i$ e $\alpha-\beta i$, com

Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $x\,e^{\alpha x}\cos(\beta x)$,..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $x\,e^{\alpha x}\sin(\beta x)$,..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$.

Que tipo de «cizas pode tu P(X):

> rait real simples

> rait real com multiplicidade K

> Per de reizes complexes si-ples

Exemplo: $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 4y' + 8y = 0$

Polinómio característico: $r^5 + 2r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 4r + 8$

Raízes do polinómio característico (-2 simples); $i\sqrt{2}$ e $-i\sqrt{2}$, raízes duplas;

Sistema fundamental de soluções:

 $\{e^{-2x}, \cos(\sqrt{2}x), x\cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x), x\sin(\sqrt{2}x)\}$

Assim, a solução geral da equação dada é

 $y = B e^{-2x} + (C_1 + C_2x) \cos(\sqrt{2}x) + (D_1 + D_2x) \sin(\sqrt{2}x)$,

com $B, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

P(x) = 15 + 2x4 + 4 12 + 8 12 + 4 12 + 8 7(-2) = (-2) +2(-2)+4(-2)+8(-2)+8(-2)+8

1124848 -2 -2 0 -8 0 -8 1 0 4 0 4 0 = R

P(e)=(e+2)(r4+4r2+4) = (x+2) (x2+2)2

P(K) = 0(=) K=-2 V K2+2=0

(=) "=-2 V r=+ \frac{1}{20} duplas

Rciz/PMS/Cizes de P(rc)

x=-2 (siples)

r=0± Tai (dupla)

Solução do S. F.S.

Cos (V2x), sen(\(\sum 2x \) x cos(√24), x sen(√2x)

um S.F. du S. de EDOL é

{e^{-2γ}, cos(√2χ), χεν(√2χ), χ cos(√2χ), χ sen(√2χ) } Logo, α so lug ≥0 grd de € DOL e

y = c1 = 24 + c2 cos((Ex) + C3 &n ((Ex) + C4 x cos ((Ex) + C4 x en ((Ex)) + C4 x cos ((Ex) + C4 x en ((Ex)) + C4 x

Determine a solução geral das seguintes EDOL:

(1) $y^{(3)} - 13y' + 12y = 0$

(-) r=3 v x =- 4 v l=1

Um sistema fundam tal de soluções é:

3x -4x 22 7

Oureje, a solução ynd de EDOL é

 $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{-2x} + C_3 e^{-2x}$

(2) y + 9y(2) = 0P(K) = 12 + 9 K2

P(x) = 0 (=) x2 (x2+9) =0

(=) K=0 V 12+9=0

(=) 1=0, V 1= 23 i V 1 = ot 3 i e dupla si-ples

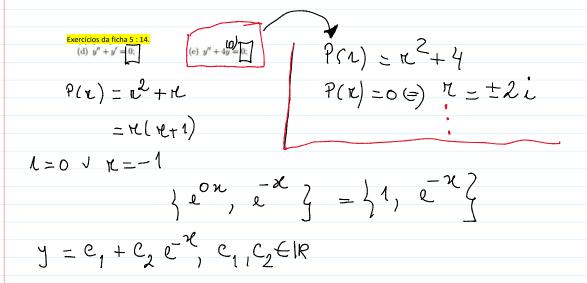
Um sistema fundametal de soluções e: 4 e⁰μ, κε⁰κ, σⁿeos(3χ), e⁰χεν(3χ) ζ

11, x, cos(3x), sen(3x) 4

solução xnd de EDOL é

solução grad de EDOL é

 $y = c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 \cos(3x) + c_4 \sin(3x), c_1 c_2 c_3 c_4 c_4 R$ $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos(3x) + c_4 \cos(3x), c_1 \in \mathbb{R}$



TPC: Tarefa 8, já disponível no moodle

Tarefa 8: Exercícios 13; 14(a) a c da ficha 5

13. Considere a EDO linear (EDOL) homogénea (de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$
, $x \in]1, \infty[$.

- (a) Mostre que $\{x,e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.
- (b) Obtenha a solução geral da EDO.
- (c) Resolva agora a EDO

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \quad x \in]1, \infty[,$$

começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y=\beta x^2$ para certo $\beta\in\mathbb{R}$

14. Determine a solução geral das seguintes EDOL homogéneas

(a)
$$y' + y = 0$$
;

(c)
$$y'' - 4y' + 4y = 0$$
;