Sessão 13 (aula 21) TP4-6

14 de maio de 2020 06:14

Sumário:
Ponto de situação sobre a Tarefa 5 e 6.
EDO lineares de primeira ordem (resolução usando fator integrante). Exemplos. Problemas de Cauchy (envolvendo este tipo de equações). Exemplo.
Técnica de mudança de variável, como exemplos:
EDO homogéneas.

Em relação à Tarefa 5, as respostas que vi estavam corretas.

TPC
Tarefa 6:

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

(a) $x + yy' = 0$;

(d) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$.

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) $xy' + y = y^2$, $y(1) = 1/2$;

Prazo de entrega estendido até amanhã.

Mais um exemplo de resolução de EDO de variáveis separáveis:

7(c) $(1+x^3)y' = x^2 y$

$$(1+x^3)\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Obs.

$$\frac{dy}{dx} \cancel{=} \frac{p(x)}{q(y)}$$

$$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$$

$$(1+x^3)\,dy = x^2 y\,dx$$

divisão por $y \neq 0$

$$\frac{1}{y}(1+x^3)\,dy = x^2\,dx$$

$$\boxed{\frac{1}{y}\,dy = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx} \div (1+x^3) \neq 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{1+x^3}}{\frac{1}{y}}$$

EDO de variáveis separadas

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{3x^2}^{u'}}{\underbrace{1+x^3}_{u}}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = \ln|1+x^3|^{1/3} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln\sqrt[3]{1+x^3} + C},\ C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^C\sqrt[3]{1+x^3},\ C \in \mathbb{R}$$

$$y = \pm \underbrace{e^C}_{>0}\sqrt[3]{1+x^3},\ C \in \mathbb{R}$$

$$y = K\sqrt[3]{1+x^3},\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$y = 0$ é solução da EDO: $y' = 0$

$(1+x^3)\cdot 0 = x^2 \cdot 0$

EDO

$(1+x^3)y' = x^2 y$

conclusão:

$y = A\sqrt[3]{1+x^3}$, $A \in \mathbb{R}$, é um integral geral da EDO.

completar o 7(c).

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem:

$$a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)\,y = q(x).$$

Quando $b = 0$ ($q = 0$), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

Exemplos:

- $y' + xy = 1$ equação diferencial linear de 1.ª ordem completa.
- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.ª ordem incompleta (ou homogénea).

Note que, se $q = 0$ ou se p e q forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

coeficientes da EDOL

$$\underbrace{a_0(x)}_{\neq 0}\, y' + a_1(x)\, y = b(x)$$

funções de x

termo independente da EDOL

$$y' + \underbrace{\frac{a_1(x)}{a_0(x)}}_{p(x)}\, y = \underbrace{\frac{b(x)}{a_0(x)}}_{q(x)}$$

Exemplos:

(1) $y' + \overset{p(x)}{\boxed{x}}\, y = \underset{q(x)}{\boxed{1}}$ EDOL de ordem 1

(2) $y' + xy = 0$ EDOL de ordem 1 homogénea

$y' = -xy \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{\frac{1}{y}}$ $\quad y \neq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y}\, dy = -x\, dx$ completar a resolução.

→ EDO é de variáveis separáveis.

(3) $y' + y = 1$ é EDO de variáveis separáveis (ver!)

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Para resolver a equação
$$y' + p(x)\,y = q(x),$$
pode multiplicar-se ambos os membros pelo fator integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$, e integrar de seguida em ordem a x.

Exemplo 1: A EDO do Slide 15, $y' + xy = 0$, que resolvemos como equação de variáveis separáveis, é uma EDO linear de 1.ª ordem. Podemos resolvê-la, mais rapidamente, usando o fator integrante $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x)$ obtemos
$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + e^{\frac{x^2}{2}} xy = 0, \quad i.e., \quad \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right) = 0.$$
Integrando vem
$$e^{\frac{x^2}{2}} y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
Assim, um integral geral da equação linear é
$$y = C e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Método do fator integrante para resolução de EDOL de ordem 1:

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

Conhecemos $P(x)$ primitiva de $p(x)$.

$$\underbrace{e^{P(x)} y' + e^{P(x)} p(x)\, y}_{\left(e^{P(x)} y\right)'} = e^{P(x)} q(x)$$

c.A.

$$\left(e^{P(x)} y\right)' = \left(e^{P(x)}\right)' y + e^{P(x)} y'$$
$$= (P(x))'\, e^{P(x)} y + e^{P(x)} y'$$
$$= e^{P(x)} y' + p(x)\, e^{P(x)} y$$

$$\left(e^{P(x)} y\right)' = e^{P(x)} q(x)$$

$$e^{P(y)} y = \int e^{P(x)} q(x)\, dx$$

⋮

Exemplo: $y' + \underbrace{x}_{p(x)}y = 0$

c.A. $\int p(x)\,dx = \int x\,dx = \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{2}}}_{P(x)} + c, \ c \in \mathbb{R}$

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

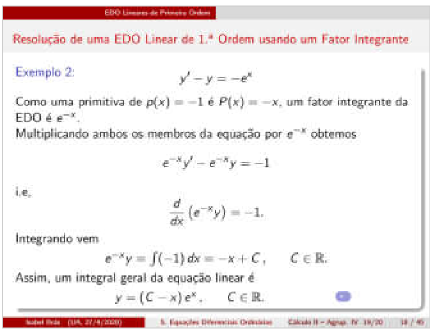
$$\underbrace{e^{\frac{x^2}{2}} y' + x\, e^{\frac{x^2}{2}} y}_{\left(e^{x^2/2} y\right)'} = 0 \cdot e^{x^2/2}$$

$$\left(e^{x^2/2} y\right)' = 0$$

$$e^{x^2/2} y = \int 0\,dx$$

$$e^{x^2/2} y = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y = c\, e^{-x^2/2}, \quad c \in \mathbb{R}}$$


EDO Lineares de Primeira Ordem

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Exemplo 2: $y' - y = -e^x$

Como uma primitiva de $p(x) = -1$ é $P(x) = -x$, um fator integrante da EDO é e^{-x}.
Multiplicando ambos os membros da equação por e^{-x} obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1$$

i.e.,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int(-1)\,dx = -x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)\,e^x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Isabel Brás (UA, 27/4/2020) | 5. Equações Diferenciais Ordinárias | Cálculo II – Agrup. IV 19/20 | 18 / 45

Outro exemplo:

$\underbrace{y' - 1y}_{P(x)} = \underbrace{e^{-x}}_{q(x)}$ EDOL de ordem 1

Usando um fator integrante:

c.A. $\int \underbrace{(-1)}_{p(x)}\,dx = -x + c, \ c \in \mathbb{R}$

$$\mu(x) = e^{-x}$$

$$\underbrace{\underbrace{e^{-x}}_{\mu(x)} y' - \underbrace{e^{-x}}_{\mu(x)} y}_{\left(e^{-x}y\right)'} = \underbrace{e^{-x}}_{\mu(x)} e^{-x}$$

$$\left(e^{-x}y\right)' = e^{-2x}$$

$$e^{-x}y = \int e^{-2x}\,dx$$

$$e^{-x}y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)e^{x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}e^{-x} + c\,e^{x}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}e^{-x} + Ce^{x}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

EDO Lineares de Primeira Ordem

PVI associado a EDO Linear de Primeira Ordem:

Teorema (existência e unicidade de solução):
Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)\,y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo:
O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^{x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única $y = -xe^{x}$, para $x \in \mathbb{R}$. Porquê?

Isabel Brás (UA, 27/4/2020) 5. Equações Diferenciais Ordinárias Cálculo II - Agrup. IV 19/20 18 / 45

exemplo de PVI com EDOL de ordem 1

$$\begin{cases} y' - y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$$

$$0 = -\frac{1}{2}e^{-0} + Ce^{-0} \Leftrightarrow C - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

Resposta: A solução do PVI é a função:

$$y = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}.$$

Exercício: 8.(b)
Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

(b) $x^3y' - y - 1 = 0$;

$$x^3y' - y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3y' - y = 1 \Leftrightarrow y' \underbrace{- \frac{1}{x^3}}_{P(x)} y = \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

c. A.

$$\int \left(-\frac{1}{x^3}\right) dx = -\int x^{-3}\, dx = -\frac{x^{-2}}{-2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}x^{-2}}_{P(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Logo, o fator integrante a usar é

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{\frac{1}{2}x^{-2}} = e^{\frac{1}{2x^2}}.$$

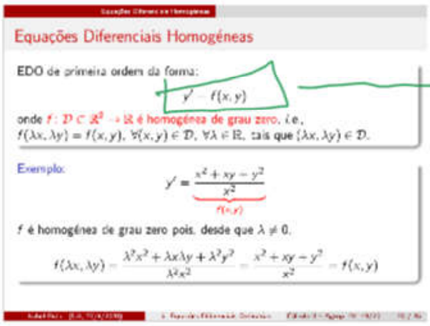
Multiplicando ambos os membros da EDO:

$$\underbrace{e^{\frac{1}{2x^2}}y' - \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{2x^2}}y}_{\left(e^{\frac{1}{2x^2}}y\right)'} = e^{\frac{1}{2x^2}}\frac{1}{x^3}$$

$$\left(e^{\frac{1}{2x^2}}y\right)' = \ \ldots \ \text{completar!}$$

Mudança de variável em EDO:

(Dois casos simples)



$$y' = \underbrace{f(x,y)}_{\text{função homogénea de grau zero, isto é,}}$$ EDO homogénea

$$\underbrace{f(\lambda x, \lambda y)}_{\in D_f} = f(x,y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ desde que } (\lambda x, \lambda y) \in D_f.$$

Exemplo:

$$y' = \underbrace{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}}_{f(x,y)} \qquad x \neq 0 \qquad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

se $\lambda \neq 0$,
$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\cancel{\lambda^2} x^2 + \cancel{\lambda} x \cancel{\lambda} y + \cancel{\lambda^2} y^2}{\cancel{\lambda^2} x^2} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$$
$$= f(x,y), \quad \forall (\lambda x, \lambda y) \in D_f$$

logo, f é homogénea de grau zero.

Voltando à EDO:

$$y' = \frac{x^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$(\alpha) \qquad \underbrace{y'}_{z'x+z} = 1 + \underbrace{\frac{y}{x}}_{z} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^2}_{z} \qquad x \neq 0$$

Mudança de variável:

$$z = \frac{y}{x} \iff \boxed{zx = y}$$

$y = zx$ logo $y' = (zx)' = z'x + zx'$
$$= z'x + z$$

$z = z(x)$

De (α),
$$z'x + \cancel{z} = 1 + \cancel{z} + z^2$$
$$z'x = 1 + z^2$$
$$\frac{dz}{dx} x = 1 + z^2 \qquad x \neq 0$$
$$\frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$$

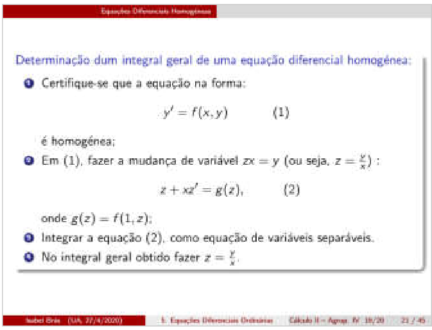
$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\operatorname{arctg}(z) = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\ln|x| + c\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = x\,\operatorname{tg}\left(\ln|x| + c\right), \quad c \in \mathbb{R}$$



$y' = f(x,y)$ EDO é homogénea

M. de V.: $zx = y$ $\qquad y' = z'x + z$

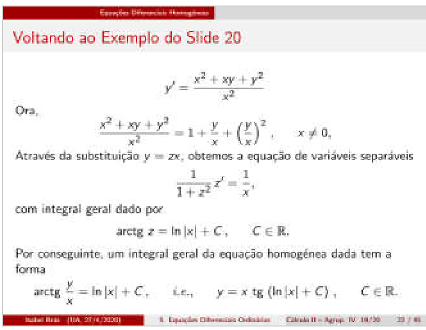
$$z'x + z = f(x, zx) \quad \text{é homogénea de grau zero}$$

$$z'x + z = f(1,z)$$

$$\frac{dz}{dx}\,x = \underbrace{f(1,z) - z}_{\neq 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{f(1,z) - z}\,dz = \frac{1}{x}\,dx}$$

EDO de variáveis separadas



Exercício:

Verifique que a mudança de variável $z = \frac{y}{x}, x \neq 0$, transforma a equação $y' = \frac{y}{y+x}$ numa de variáveis separavéis.

Resolva a EDO por esse método.

$$z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow zx = y$$

$$z'x + z = y'$$

$z'x + z = y'$

substituindo na EDO

$$z'x + z = \frac{zx}{zx + x}$$

$$z'x + z = \frac{z\cancel{x}}{\cancel{x}(z+1)} \quad z \neq -1$$

$$z'x = \frac{z}{z+1} - z$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{z - z(z+1)}{z+1}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{\cancel{z} - \cancel{z} - z^2}{z+1} \quad z \neq 0$$

$$-\frac{z+1}{z^2}dz = \frac{1}{x}dx$$

$$-\int \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\,dz = \ln|x| + C$$

$$-\ln|z| - \frac{z^{-1}}{-1} = \ln|x| + C$$

$$-\ln|z| + \frac{1}{z} = \ln|x| + C, \; C \in \mathbb{R}$$

$\frac{y}{x}$

Voltando à variável y

$$-\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$$

$$-\ln|y| + \cancel{\ln|x|} + \frac{x}{y} = \cancel{\ln|x|} + C$$

$$\boxed{-\ln|y| + \frac{x}{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$\ln|y| = +\frac{x}{y} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{+\frac{x}{y} + C}$$

$y = 0$, também é solução

$$\vdots$$

$$y = K e^{\frac{x}{y}}, \; K \in \mathbb{R}$$