Exer.13; ficha 2

1 de abril de 2020 11:06

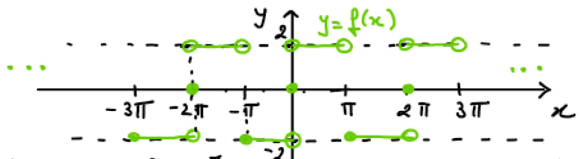
13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respetivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

A série dos senos de f é a série da extensão 2π-periódica da sua extensão ímpar:

$$f_i(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -2, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

extensão ímpar de f

Esse extensão 2π-periódica tem o seguinte gráfico:



Como f_i é ímpar em $[-\pi, \pi]$, a série de Fourier de f é uma série de senos, ou seja,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[a_m \cos(mx) + b_m \operatorname{sen}(mx)\right] dx$$

onde $a_m = 0, \ \forall m \in \mathbb{N}_0$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f_i(x) \operatorname{sen}(mx)}_{\text{função par}} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}(mx)\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[-\frac{1}{m} \cos(mx)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{4}{\pi m} \left(\cos(m\pi) - \cos(0)\right)$$

$$= -\frac{4}{m\pi} \left((-1)^m - 1\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{m\pi}, & \text{se } m \text{ ímpar} \\ 0, & \text{se } m \text{ par} \end{cases}$$

Assim, $$f \sim \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{8}{(2m-1)\pi} \operatorname{sen}((2m-1)x).$$

Análise da convergência / determinação da soma:

A série converge para todo o $x \in \mathbb{R}$, pois satisfaz as condições do Teorema de Dirichlet; esta análise vai ser feita em $[-\pi, \pi]$, pois por periodicidade a propriedade de ser seccionalmente diferenciável estende-se a $\mathbb{R}$.

(i) f é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$, pois apresenta apenas três pontos de descontinuidade:

$$x = -\pi, \ x = 0 \ \text{e} \ x = \pi \quad (\text{ver gráfico})$$

e os limites laterais de f nesse pontos são finitos:

$\lim_{x \to -\pi^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \to -\pi^+} f(x) = -2 \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -2 \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \to \pi^+} f(x) = -2$ — repare que são iguais, como devia ser.

(ii) f' é seccionalmente contínua.

Em $[-\pi, \pi]$, f' não existe em $x = -\pi, x = 0$ e $x = \pi$

$$f'(x) = 0, \quad x \neq -\pi, 0, \pi.$$

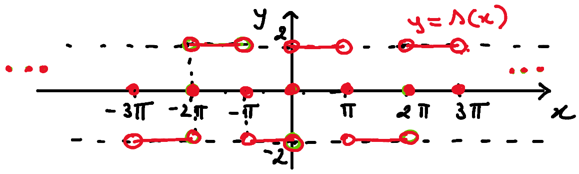
Logo f' é contínua em $]-\pi, 0[$, $]0, \pi[$ e os limites laterais de f' nesses pontos são nulos (finitos).

Conclusão: Pelo Teorema de Dirichlet a série de Fourier converge para a função $s(x)$, que no intervalo $[-\pi,\pi]$ está assim definida:

$$s(x) = \begin{cases} -2 & , \text{ se } -\pi < x < 0 \\ 2 & , \text{ se } 0 < x < \pi \\ \dfrac{-2+2}{2} & , \text{ se } x = 0, -\pi, \pi \end{cases}$$

semi-soma dos limites laterais

Gráfico de $s(x)$:



A série dos cossenos é a série da função constante:

$$f(x) = 2, \; x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a série tem apenas uma parcela: $a_0 = 2$, as restantes são nulas.