Sessão 3, TP4-9

30 de março de 2020 18:40

Sumário:
Noções topológicas em IR^n: Interior, fronteira e exterior de um conjunto; ponto de acumulação, conjunto limitado.
Noção de função real de várias variáveis reais: domínio, contradomínio e gráfico.
Curvas de nível e superfícies de nível. Exemplos e exercícios.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto 2x+y$$

S3-Func_rvvr_...

Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

Distância; bola aberta; bola fechada

Consideramos em $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ a distância euclidiana (usual):

$$d(X,Y) = ||\overrightarrow{XY}|| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$

para $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

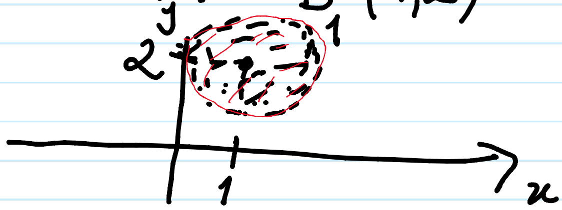
Definições:
Sejam $P \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$,
- bola aberta de centro P e raio r: $B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X,P) < r\}$.
- bola fechada de centro P e raio r: $\overline{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X,P) \leq r\}$.

Exemplo:

$X = (1,1)$, $Y = (2,3)$

$$d(X,Y) = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Bola em $\mathbb{R}^2$: $B_1(1,2)$ $\qquad \overline{B}_1(1,2)$



Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

Conjunto aberto/ fechado/ limitado

Definições:
Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.
1. $P \in \mathcal{D}$ é um ponto interior de $\mathcal{D}$ se, para algum $r > 0$, $B_r(P) \subset \mathcal{D}$. O interior de $\mathcal{D}$ é o conjunto formado por todos os pontos interiores de $\mathcal{D}$. Notação: $\text{int}(\mathcal{D})$.
2. $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fronteiro de $\mathcal{D}$ se, para todo $r > 0$, $B_r(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ e $B_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$. A fronteira de $\mathcal{D}$ é o conjunto formado por todos os pontos fronteiros de $\mathcal{D}$. Notação: $\text{fr}(\mathcal{D})$.

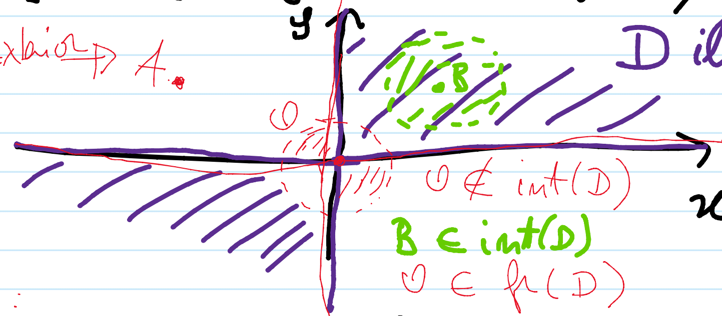
Definições: Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.
1. $\mathcal{D}$ é aberto se $\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.
2. $\mathcal{D}$ é fechado se $\text{fr}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.
3. $\mathcal{D}$ é limitado se existe $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.

Exemplo 1: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

$xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)$

exterior $\to$ A.

D ilimitado



$0 \notin \text{int}(D)$

$B \in \text{int}(D)$

$0 \in \text{fr}(D)$

$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\} \subset D$

$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$ D é fechado

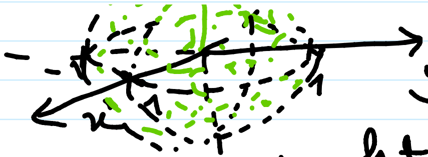
Exemplo 2: $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$

$x^2+y^2+z^2 = 1 \to$ superfície esférica centrada em $(0,0,0)$ e raio 1.

D é limitado

$D = B_1((0,0,0))$

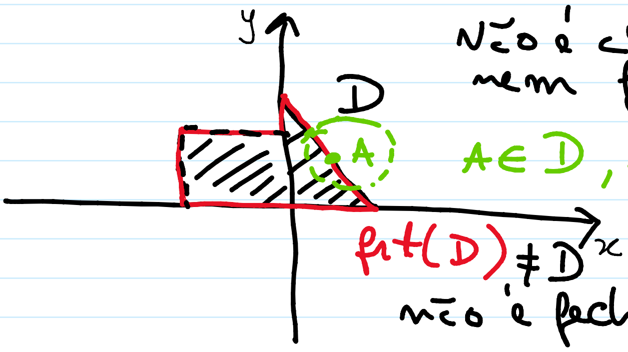
$\text{int}(D) = D$



$\text{int}(D) = D$

$fr(D) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$

como $\text{int}(D)=D$, D é aberto.



Não é aberto nem fechado.

$A \in D$, $A \notin \text{int}(D)$, $\text{int}(D) \neq D$

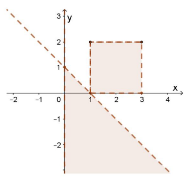
$fr(D) \not\subseteq D$ não é fechado

D não é aberto

Exemplo:
$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge x + y < 1) \vee (1 < x < 3 \wedge 0 < y < 2)\}$

- $fr(\mathcal{D}) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ onde
  $\mathcal{F}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 0 \wedge y < 1) \vee (x > 0 \wedge x + y = 1)\}$
  $\mathcal{F}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 1 \vee x = 3) \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
  $\mathcal{F}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 0 \vee y = 2) \wedge 1 \leq x \leq 3\}$.
  $fr(\mathcal{D}) \not\subseteq \mathcal{D}$, logo $\mathcal{D}$ não é fechado.
- $\mathcal{D}$ não é limitado.
- $\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, logo $\mathcal{D}$ é aberto.

Ilustração:



Ponto de acumulação/ isolado

Definições:
Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

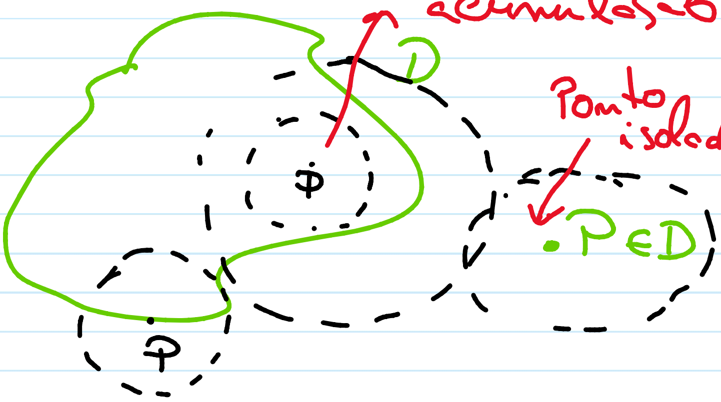
1. $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$ se, para todo $r > 0$, $B_r(P) \cap (\mathcal{D} \setminus \{P\}) \neq \emptyset$.
2. $P \in \mathcal{D}$ é um ponto isolado de $\mathcal{D}$ se não é ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.

Exercício: Mostre que:
todo o ponto interior de $\mathcal{D}$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.

Exemplo:
$\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^2+y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)\} \cup \{(2,0)\}$
$(0,0)$ e $(-2,0)$ são pontos de acumulação de $\mathcal{L}$, indique outros!
$(2,0)$ é um ponto isolado de $\mathcal{D}$, existem outros? • ilustração gráfica
Este conjunto é limitado e não é aberto, justifique. Será fechado?

Ponto de acumulação

Ponto isolado



Definição:
Dado $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, chamamos função real a n variáveis reais[a] de domínio $\mathcal{D}$ a toda a correspondência que associa de forma única a cada elemento de $\mathcal{D}$ um número real. Notação:

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}.$$

[a] ou campo escalar a n variáveis

Definição: Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ao conjunto

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o contradomínio de f.

Definição: Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ao conjunto

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon z = f(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{com } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o gráfico de f.

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

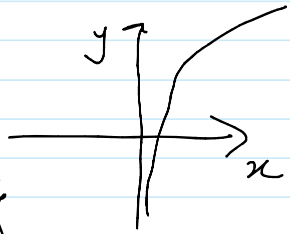
$f(x,y) = \ln(xy)$

$f(1,1) = \ln(1) = 0$

$f(1,2) = \ln(2)$

$D = D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

$CD_f = \{\ln(xy) : (x,y) \in D\}$
$= \mathbb{R}$



Exemplos

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = 2x - y$. ▸ esboço gráfico
  $D_f = \mathbb{R}^2$ e $CD_f = \mathbb{R}$; O gráfico de f é o plano de equação $z = 2x - y$.
- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$. ▸ esboço gráfico
  $D_f = \mathbb{R}^2$ e $CD_f = \mathbb{R}_0^+$; O gráfico de f,
  $\mathcal{G}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$, é um parabolóide circular.
- $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = 4 - y^2$. ▸ esboço gráfico
  $D_g = \mathbb{R}^2$ e $CD_g =]-\infty, 4]$;
  $\mathcal{G}_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 4 - y^2\}$ (cilindro parabólico).
- $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 - y^2$. ▸ esboço gráfico
  $D_h = \mathbb{R}^2$ e $CD_h = \mathbb{R}$;
  $\mathcal{G}_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 - y^2\}$ (parabolóide hiperbólico).
- $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $s(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.
  $D_s = \mathbb{R}^2$ e $CD_s = [\ 1, 1]$;
  $\mathcal{G}_s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \sin(x^2 + y^2)\}$. ▸ esboço gráfico

ver ligações dos slides.

Curvas de Nível/ Superfícies de Nível

Definições:
Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $k \in CD_f$. Ao conjunto

$$\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D} \colon f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\}$$

chamamos conjunto de nível k de f.
Para $n = 2$, o conjunto $\mathcal{N}_k$ passa a denotar-se por $\mathcal{C}_k$ e a designar-se por curva de nível k de f.
Para $n = 3$, o conjunto $\mathcal{N}_k$ passa a denotar-se por $\mathcal{S}_k$ e a designar-se por superfície de nível k de f.

Nota:
Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplos

1. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = 4 - y^2$.
   $CD_g =]-\infty, 4]$. Para $k \leq 4$, a curva de nível k de g é
   $$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : k = 4 - y^2\}.$$
   Trata-se da união de duas retas de equações $y = \sqrt{4-k}$ e $y = -\sqrt{4-k}$. applet
2. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 - y^2$. $CD_h = \mathbb{R}$;
   $$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : k = x^2 - y^2\}, \text{com } k \in \mathbb{R}$$ applet
   A a curva de nível k é, para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = k$ e, para $k = 0$, a reunião as duas retas de equações $y = x$ e $y = -x$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = 2x - 5y + 3z$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, a superfície de nível k de f é o plano ortogonal ao vetor $(2,-5,3)$ que passa no ponto $(0,0,\frac{k}{3})$.

$$CD_g = \{4 - y^2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} =]-\infty, 4]$$

C.A.

$y^2 \geq 0$, $-y^2 \leq 0$ $\quad 4 - y^2 \leq 4$

$$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - y^2 = k\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = \underbrace{4-k}_{\geq 0}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{4-k} \vee y = -\sqrt{4-k}\}$$

$k = 0$

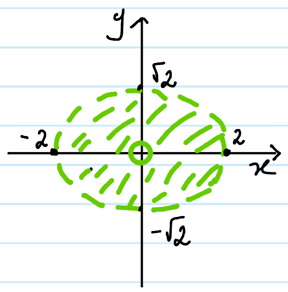
$$\mathcal{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 \vee y = -2\}$$

Exercícios:

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos e caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em R2 e em R3).

(a)
$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$

$$x^2 + 2y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \to$$ elipse centrada em $(0,0)$ com semi-eixos 2 e $\sqrt{2}$.



$\text{int}(S) = S$, logo S é aberto.

$\text{fr}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 4\} \cup \{(0,0)\}$

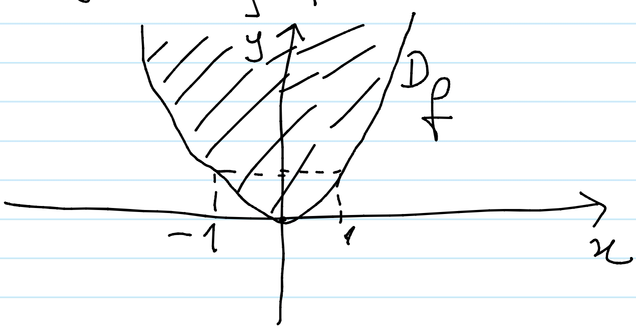
S é limitado, por exemplo, para $r = 2$
$S \subset \overline{B}_r(0,0)$.

2. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente:

(a) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$; $\qquad$ (b) $f(x,y,z) = \sqrt{y - x^2}$;

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

$y = x^2$
Parábola



3. Determine as curvas / superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as do ponto de vista geométrico:

(a) $f(x, y) = x - 4y$; (c) $f(x, y) = x^2 + y^2$; (e) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$;

$D_f = \mathbb{R}^2$ $\quad CD_f = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{C}_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = K\}, \ K \in \mathbb{R}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 4y = K\}$ é uma reta de declive $\frac{1}{4}$ e ordenada na origem $-\frac{K}{4}$

C.A. $x - 4y = K \Leftrightarrow -4y = -x + K$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{K}{4}$

1. ex., $K = 3$

$\mathcal{C}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\}$

$\hookrightarrow$ conjunto dos pontos do Domínio de f em que a função é igual a 3.