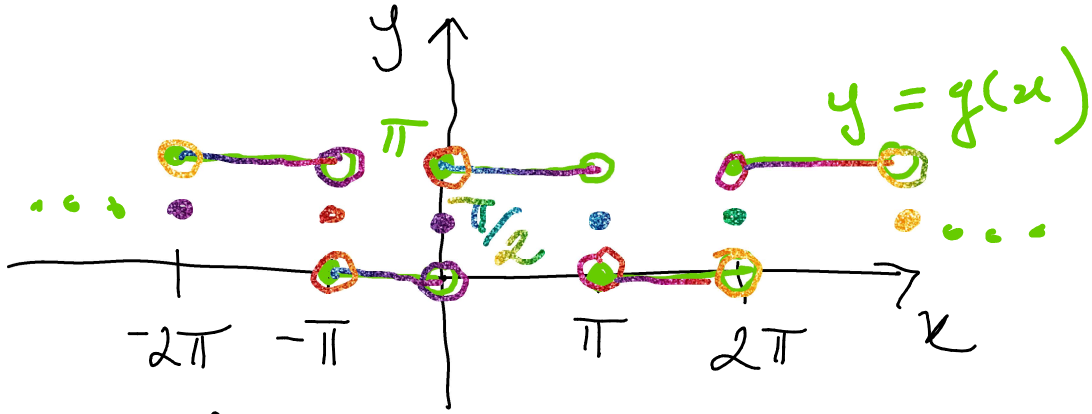
Sessão 2, TP4-6

26 de março de 2020 15:29

Sumário:
Séries de Fourier. Teorema de Dirichlet.
Acompanhamento dos trabalhos. Resolução de alguns exercícios.

Exemplo do slide 52

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \pi \qquad \frac{0+\pi}{2}$$

Derivada de g:

$$g'(x) = 0, \quad x \neq 0, \ x \neq \pi, \ x \neq -\pi$$

$$\lim_{x \to k\pi^-} g'(x) = 0 = \lim_{x \to k\pi^+} g'(x)$$

Logo, g é secc. dif.

Pelo T. de D. a série de Fourier associada é convergente em $\mathbb{R}$. A soma da série é

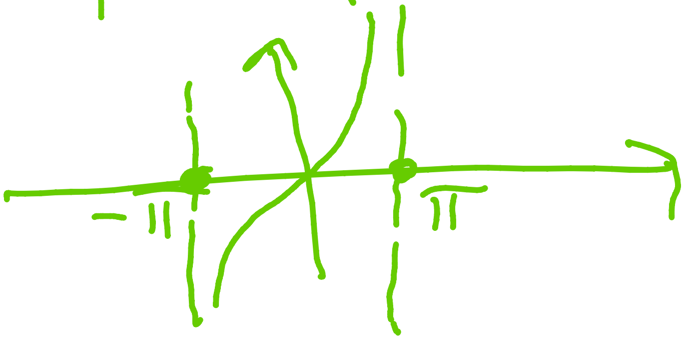
$f(x)$ se $x \neq k\pi$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k\pi \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se } x = k\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \pi & \text{se } 0 < x < \pi \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \vee x = \pi \vee x = -\pi \end{cases}$$

$x \in [-\pi, \pi]$

Exemplo de f. não sec. dif.



Exemplo do cálculo de uma série numérica:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$x = 0$, $\cos((2n-1)x) = 0$

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$+\frac{\pi}{2} = +\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{4 \cdot 2} = \frac{4}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{}$$

$$\frac{''}{4\cdot 2} = \frac{4}{4}\sum_{n=1} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

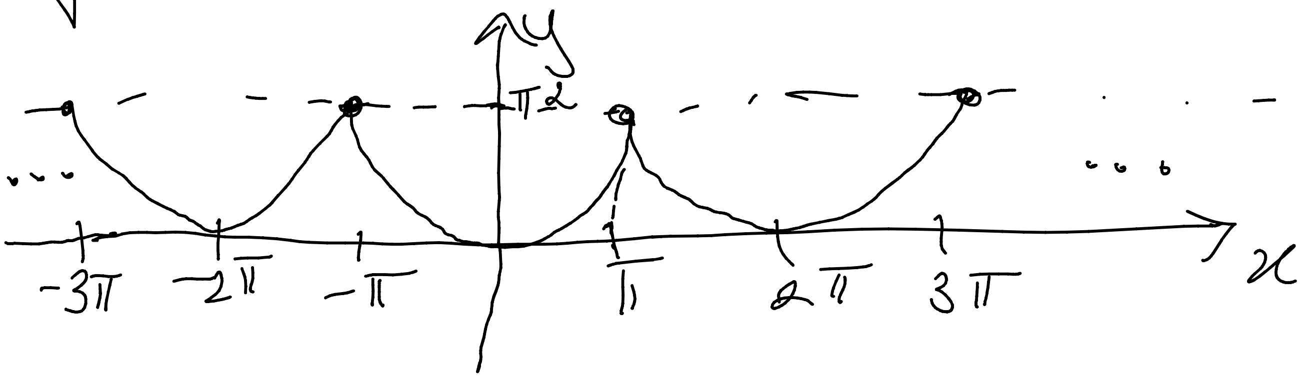
1

15.(a)

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(nx), \quad x\in[-\pi,\pi]$$

(b) $f(x) = x^2, \quad x\in[-\pi,\pi]$ 2π- periódica

f é contínua em $\mathbb{R}$



$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \pi^2 = \lim_{x\to\pi^+} f(x)$$

A derivada de f não existe nos pontos: $x = (2k-1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Nos restantes pontos a derivada é finita. Mais, $x\in[-\pi,\pi]$,

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = \lim_{x\to\pi^-}(2x) = 2\pi$$

$$\lim_{x\to-\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to-\pi^-} f'(x) = 2\pi$$

Os limites laterais existem e são finitos. f é seccional/ dif.

os limites laterais são finitos. f é seccional/ dif.
Logo, pelo T. de Dirichlet:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular se $x \in [-\pi, \pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx).$$

(d) conv. uniforme
Usar o critério de Weierstrass.

$$\left| (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) \right| = \frac{4}{n^2} |\cos(nx)| \leq 1$$

$$\leq \frac{4}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}$ é convergente, S. Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$.

Assim, a série em estudo converge uniformemente em $\mathbb{R}$.