Sessão 2, TP4-9

27 de março de 2020 14:22

$\{ 1, \quad 0 < x < \pi.$

13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respetivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Extensão par:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi[\\ f(-x), & x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

$$= 2, \quad x \in [-\pi, \pi[$$

Extensão ímpar:

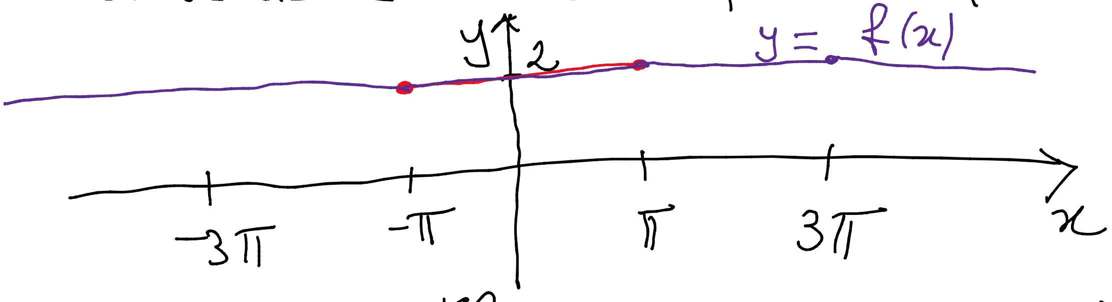
$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & x \in]0, \pi[\\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2, & x \in]0, \pi[\\ 0, & x = 0 \\ -2, & x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

Série de Fourier de cossenos de f:

$\downarrow$

série da extensão 2π-periódica par:



$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \, dx = \frac{2}{\pi} (\pi + \pi) = 4$$

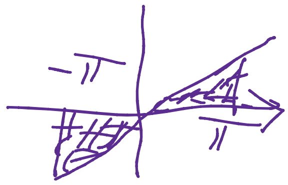
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{2 \cdot \cos(nx)}_{\text{par}} \, dx$$

$n \quad \pi \quad 2\pi$ par

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{2\operatorname{sen}(nx)}_{\text{i-par}}\,dx = 0$$



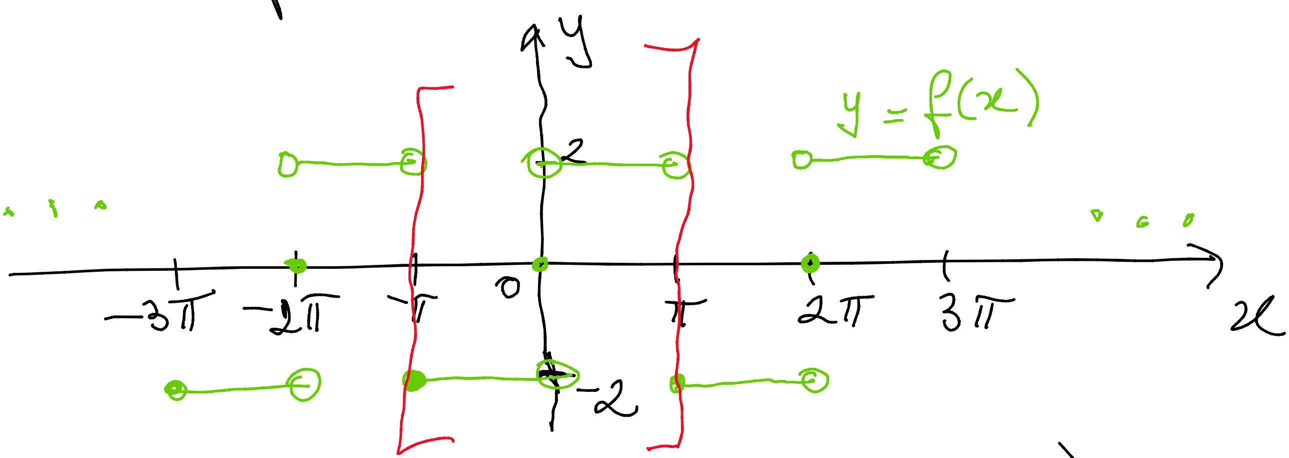
$2 = 2$

↳ série de cossenos de f (só tem um termo).

Série de senos

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in]0,\pi[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -2 & \text{se } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

extensão periódica:



Extensão ímpar da função (é ímpar), logo

$a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{par}}\ \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{\text{i-par}}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{impar}}\,\underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{\text{i-par}}}_{\text{par}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{2}\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$\ldots = -\frac{4}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -2, & n \text{ i-par} \end{cases} \qquad = \begin{cases} \frac{8}{n\pi}, & \text{se } n \text{ i-par} \\ 0, & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{(2n-1)\pi}\operatorname{sen}\left((2n-1)x\right)$$

No caso da série dos cossenos:

$2 = 2$ (Existe convergência em todo $x \in \mathbb{R}$, para o valor da função)

No caso da série dos senos:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -2 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

e f é 2π-periódica.

Existem em $[-\pi, \pi]$ descontinuidades em:

$x = -\pi$

$x = 0$

$x = \pi$

$$\lim_{x \to 0^-,\ \pi^-,\ -\pi^+} f(x) = \begin{cases} 2 \\ -2 \\ -2 \end{cases} \quad \text{finito}$$

$$\lim_{x \to 0^+,\ \pi^+,\ -\pi^+} f(x) = \begin{cases} 2 \\ -2 \\ 2 \end{cases} \quad \text{finito}$$

$|\pi^+$ $-\pi^+$ 2

como todos estes limites são finitos
f é seccionalmente contínua.

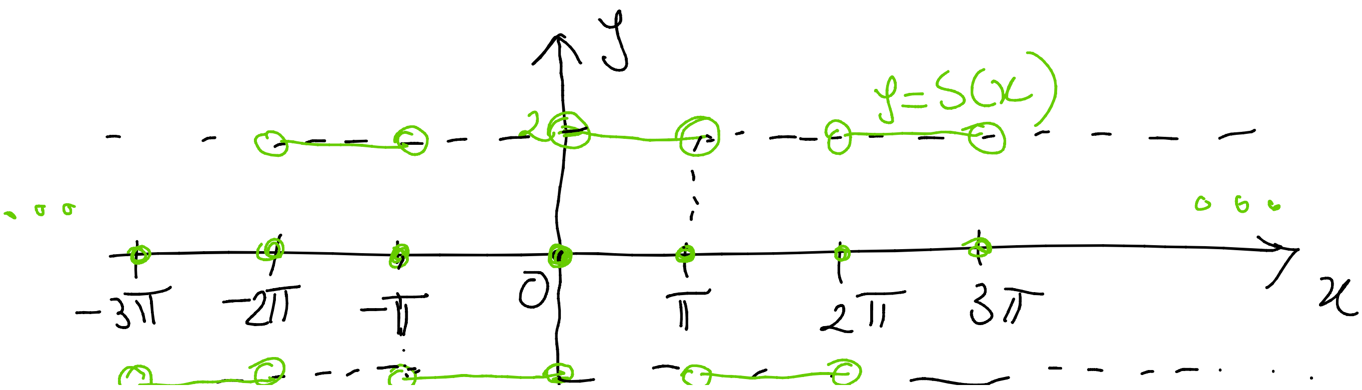
A função f' não existe em $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e
$f'(x) = 0$, $\forall x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Logo, f' é seccionalmente contínua.
Assim, f é seccionalmente diferenciável.
Pelo T. de Dir., a série de senos converge em todo $x \in \mathbb{R}$. A sua soma $S(x)$, é

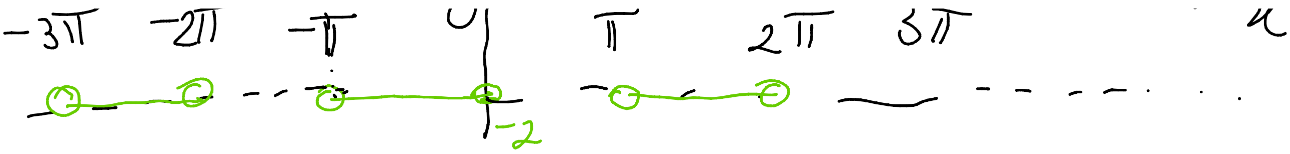
$$S(x) = \begin{cases} f(x), & (k-1)\pi < x < k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, & x = k\pi \end{cases}$$

No intervalo $[-\pi, \pi]$

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{-2+2}{2} & x = -\pi \\ 0 & x = 0 \\ 0 & x = \pi \\ -2 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \\ 0, & x = -\pi, 0, \pi \end{cases}$$





-3π
-2π
$-\pi$
0
π
2π
3π
x
-2