16. Seja f a função 2π–periódica tal que $f(x) = |\text{sen}\,(x)|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Mostre que a série de Fourier associada a f é

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

(a) $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \,\text{sen}(nx)\right)$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad , \; n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

Assim,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\text{sen}\,x|}_{\text{Função par}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\,x\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = -\frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\text{sen}\,x|\cos(nx)}_{\text{função par}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,x\cos(nx)\,dx$$

Notar que:

$$\boxed{\text{sen}\,a\cos b = \frac{1}{2}\left(\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)\right)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\text{sen}(x+nx) + \text{sen}(x-nx)\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}((n+1)x) + \text{sen}((1-n)x)\,dx$$

Caso $n=1$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}(2x) + \text{sen}(0)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\cos(2\pi) - \cos(0)\right) = 0$$

Caso $n>1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{(n+1)\pi}\left(\cos((n+1)\pi) - \cos(0)\right) + \frac{1}{\pi(n-1)}\left(\cos((n-1)\pi) - \cos(0)\right)$$

$$= -\frac{1}{(n+1)\pi}\left((-1)^{n+1} - 1\right) + \frac{1}{\pi(n-1)}\left(\underbrace{(-1)^{n-1}}_{(-1)^{n+1}} - 1\right)$$

têm a mesma paridade.

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - (-1)^{n+1}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right), & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Nota:

$$\boxed{1-(-1)^{n+1} = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1}\right), & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{m-1-m-1}{m^2-1}\right), & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-4}{\pi(m^2-1)}, & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim,

$$f \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m)^2-1}\cos(2mx)$$

$$f \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1}\cos(2mx)$$

(b) Justifique que a série da alínea anterior é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ e identifique a sua soma, $s(x)$.

A série é convergente uniformemente em $\mathbb{R}$ sse $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}$ o for.

Ora

$$\left|\frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}\right| \leq \frac{1}{4m^2-1} \leq \frac{1}{4m^2-3m^2} = \frac{1}{m^2}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$4m^2-1 \geq 4m^2-3m^2 \Leftrightarrow -1 \geq -3m^2 \Leftrightarrow 1 \leq 3m^2$

Assim, pelo critério de Weierstrass, a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(c) Esboce o gráfico de $s(x)$, no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Note que a função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e que a sua derivada é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$.

A análise da derivada de f em $[0, 2\pi]$, por exemplo, por periodicidade, essa análise estende-se a $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ -\operatorname{sen} x, & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Logo

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{se } 0 < x < \pi \\ -\cos(x) & \text{se } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$ e não existe em $x = 0, \pi, 2\pi$

mais,

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to \pi^-} f'(x) = \lim_{x \to \pi^-} (\cos x) = -1$$

$$\lim_{x \to \pi^+} f'(x) = \lim_{x \to \pi^+} (-\cos x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2\pi^-} f'(x) = \lim_{x \to 2\pi^-} (-\cos x) = -1$$

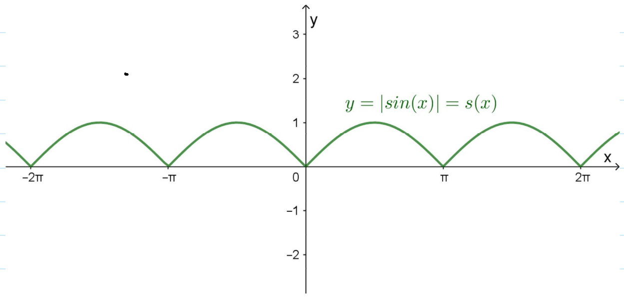
$$\lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^-} (-\cos x) = -1 \qquad x \to \pi^+$$

Como todos estes limites são finitos, f é seccionalmente contínua em $[0, 2\pi]$ e portanto também o é em $\mathbb{R}$ (por periodicidade).

Deste modo, como f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo Teorema de Dirichlet,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, $f(x) = s(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



(d) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$

Sabe-se que

$$|\operatorname{sen}(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Assim, para $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{4n^2 - 1}$$

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$

$$\pi = 2 - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$

Isto é,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = - \frac{\pi - 2}{4}$$