

Aula 11 - Parte 2

Funções Reais de Várias Variáveis Reais: Noções Topológicas em \mathbb{R}^n .

Mónica Celis.

Cálculo II -Agrup. IV-5.

2020.

Sumário da Aula 11 - Parte 2.

1. Resolução exercícios Aula 11 - Parte 1.
1. Distancia Euclidiana. Bola aberta. Bola fechada.
2. Ponto interior. Ponto fronteiro. Conjunto aberto /fechado /limitado.
3. Ponto de acumulação/ Isolado.

Resolução Exercícios Aula 11 - Parte 1.

1. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}.$

Resolução Exercícios Aula 11 - Parte 1.

1. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}.$

O domínio de f é o conjunto

$$D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \text{ tenha significado em } \mathbb{R} \right\}.$$

Resolução Exercícios Aula 11 - Parte 1.

1. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$.

O domínio de f é o conjunto

$$D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \text{ tenha significado em } \mathbb{R} \right\}.$$

Como a expressão $\sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$ só tem significado em \mathbb{R} se o radicando for um número real não negativo então devemos ter

Resolução Exercícios Aula 11 - Parte 1.

1. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}.$

O domínio de f é o conjunto

$$D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \text{ tenha significado em } \mathbb{R} \right\}.$$

Como a expressão $\sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$ só tem significado em \mathbb{R} se o radicando for um número real não negativo então devemos ter

$$\frac{1+x}{1+y} \geq 0 \quad \wedge \quad 1+y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow [(1 + x \geq 0 \wedge 1 + y \geq 0) \vee (1 + x \leq 0 \wedge 1 + y \leq 0)] \wedge 1 + y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow [(1 + x \geq 0 \wedge 1 + y \geq 0) \vee (1 + x \leq 0 \wedge 1 + y \leq 0)] \wedge 1 + y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow [(x \geq -1 \wedge y > -1) \vee (x \leq -1 \wedge y < -1)].$$

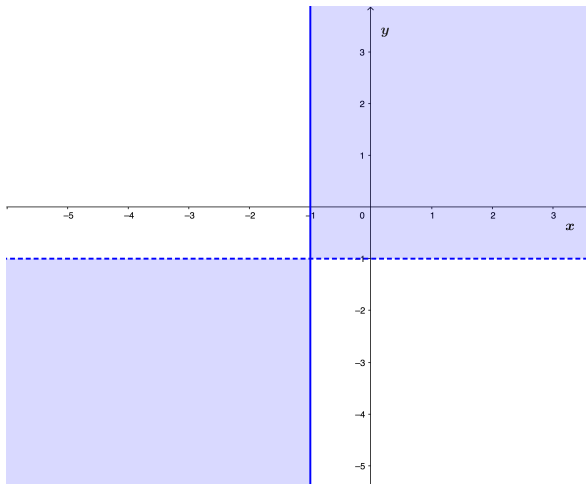
$$\Leftrightarrow [(1+x \geq 0 \wedge 1+y \geq 0) \vee (1+x \leq 0 \wedge 1+y \leq 0)] \wedge 1+y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow [(x \geq -1 \wedge y > -1) \vee (x \leq -1 \wedge y < -1)].$$

Logo, o domínio de f é o conjunto

$$D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq -1 \wedge y > -1) \vee (x \leq -1 \wedge y < -1) \right\}.$$

Representação gráfica.



(b) $g(x, y) = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right).$

(b) $g(x, y) = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right).$

Como a expressão $\ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right)$ só tem significado em \mathbb{R} se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$(b) \quad g(x, y) = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right).$$

Como a expressão $\ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right)$ só tem significado em \mathbb{R} se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} > 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} + x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x > 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \neq -x$$

$$(b) \quad g(x, y) = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right).$$

Como a expressão $\ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right)$ só tem significado em \mathbb{R} se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} > 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} + x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x > 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \neq -x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} > x \wedge y \neq 0.$$

$$(b) \quad g(x, y) = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right).$$

Como a expressão $\ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right)$ só tem significado em \mathbb{R} se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} > 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} + x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x > 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \neq -x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} > x \wedge y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow y^2 > 0 \wedge y \neq 0$$

$$(b) \quad g(x, y) = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right).$$

Como a expressão $\ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right)$ só tem significado em \mathbb{R} se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} > 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} + x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x > 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \neq -x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} > x \wedge y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow y^2 > 0 \wedge y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y \neq 0$$

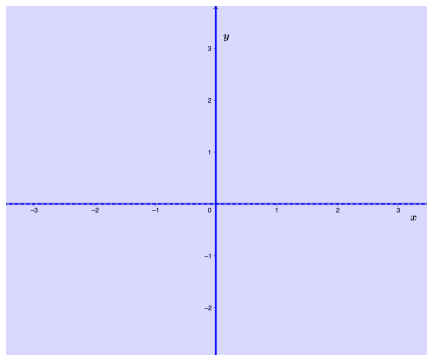
Logo, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}.$$

Logo, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}.$$

Representação gráfica.



(c)
$$h(x, y) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}.$$

(c)
$$h(x, y) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}.$$

Como a expressão $\frac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$ só tem significado em \mathbb{R} se o radicando for um número real não negativo e o denominador diferente de 0 então devemos ter

$$(c) \quad h(x, y) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}.$$

Como a expressão $\frac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$ só tem significado em \mathbb{R} se o radicando for um número real não negativo e o denominador diferente de 0 então devemos ter

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

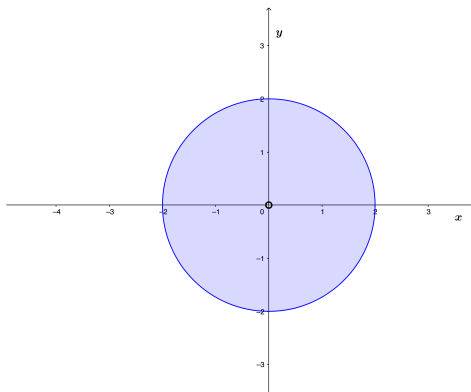
Logo, o domínio de g é o conjunto

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x, y) \neq (0, 0) \right\}. \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4 \right\}. \end{aligned}$$

Logo, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x, y) \neq (0, 0) \right\} .$$
$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4 \right\} .$$

Representação gráfica.



2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Para $k \leq 2$, a curva de nível k de f é

2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Para $k \leq 2$, a curva de nível k de f é

$$C_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - (x^2 + y^2) = k \right\}.$$

2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Para $k \leq 2$, a curva de nível k de f é

$$C_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - (x^2 + y^2) = k \right\}.$$

A curva de nível k é, para $k < 2$, uma circunferência de raio $\sqrt{2 - k}$ e centro em $(0, 0)$, para $k = 2$ temos uma curva degenerada ($x = y = 0$)

2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Para $k \leq 2$, a curva de nível k de f é

$$C_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - (x^2 + y^2) = k \right\}.$$

A curva de nível k é, para $k < 2$, uma circunferência de raio $\sqrt{2 - k}$ e centro em $(0, 0)$, para $k = 2$ temos uma curva degenerada ($x = y = 0$)

$$\begin{aligned} C_{-3} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - (x^2 + y^2 - 3) \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5 \right\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_{-3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\}$$

$$\mathcal{C}_{-2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

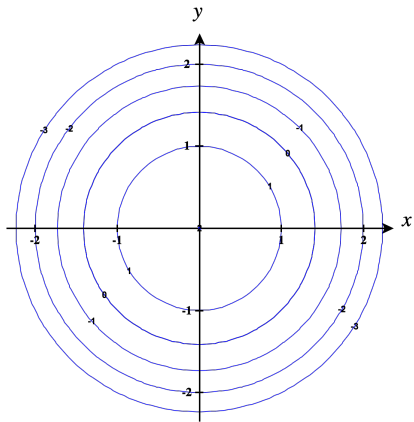
$$\mathcal{C}_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}.$$

$$\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}.$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(0, 0)\}.$$



(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2$, $k = 2, 3, 4, 8$.

(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2$, $k = 2, 3, 4, 8$.

Para $k \geq 0$, a curva de nível k de g é

(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2$, $k = 2, 3, 4, 8$.

Para $k \geq 0$, a curva de nível k de g é

$$C_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4y^2 = k \right\}.$$

(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2$, $k = 2, 3, 4, 8$.

Para $k \geq 0$, a curva de nível k de g é

$$C_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4y^2 = k \right\}.$$

A curva de nível k é, para $k > 0$, uma elipse centrada na origem e vértices com eixo maior paralelo ao eixo dos x , para $k = 0$ temos uma curva degenerada ($x = y = 0$)

(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2$, $k = 2, 3, 4, 8$.

Para $k \geq 0$, a curva de nível k de g é

$$C_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4y^2 = k \right\}.$$

A curva de nível k é, para $k > 0$, uma elipse centrada na origem e vértices com eixo maior paralelo ao eixo dos x , para $k = 0$ temos uma curva degenerada ($x = y = 0$)

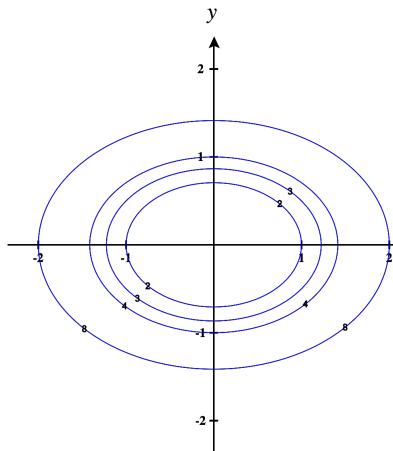
$$\begin{aligned} C_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 = 2x^2 + 4y^2 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = 1 \right\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3/2} + \frac{y^2}{3/4} = 1 \right\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \right\}$$

$$\mathcal{C}_8 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \right\}$$



(c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$

(c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Para $k \geq 0$, a curva de nível k de h é

(c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Para $k \geq 0$, a curva de nível k de h é

$$S_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k \right\}.$$

(c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Para $k \geq 0$, a curva de nível k de h é

$$S_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k \right\}.$$

A curva de nível k é, para $k > 0$, a superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio \sqrt{k} , para $k = 0$ temos uma quadric degenerada ($x = y = z = 0$).

Definição 5

A *distancia euclidiana* entre dois pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) de \mathbb{R}^2 define-se por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Definição 5

A *distancia euclidiana* entre dois pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) de \mathbb{R}^2 define-se por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Definimos em \mathbb{R}^n , de modo análogo, a **distancia euclidiana** entre dois pontos por

$$d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

para $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Exemplo 10

Determine o conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que estejam a uma distancia igual ou menor do que 2 do ponto $P(1, 2)$.

Exemplo 10

Determine o conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que estejam a uma distancia igual ou menor do que 2 do ponto $P(1, 2)$.

Seja $X(x_1, x_2)$ queremos que $d(X, P) \leq 2$, isto é,

$$\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4$$

Exemplo 10

Determine o conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que estejam a uma distancia igual ou menor do que 2 do ponto $P(1, 2)$.

Seja $X(x_1, x_2)$ queremos que $d(X, P) \leq 2$, isto é,

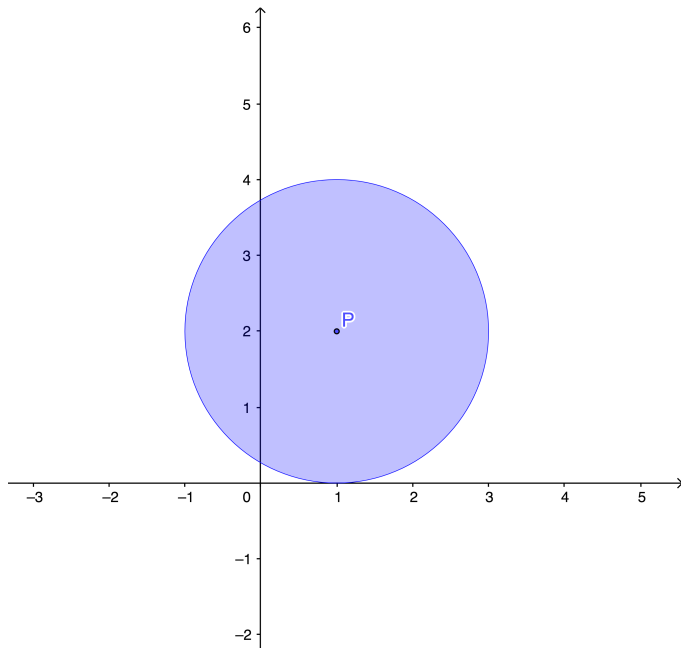
$$\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4$$

Logo, o conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 pedido é

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \right\}.$$

A representação gráfica do conjunto é:

A representação gráfica do conjunto é:



Definição 6

Sejam $P \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$, definimos

- A **bola aberta de centro em P e raio r** como o conjunto

$$B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, P) < r\}.$$

- A **bola fechada de centro em P e raio r** como o conjunto

$$\overline{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, P) \leq r\}.$$

Em particular,

Em particular,

Em \mathbb{R} : $B_r(p) =]p - r, p + r[$, intervalo aberto.

Em particular,

Em \mathbb{R} : $B_r(p) =]p - r, p + r[$, intervalo aberto.

Em \mathbb{R}^2 : $B_r(P)$ corresponde ao interior de um círculo centrado em P e raio r .

Em particular,

Em \mathbb{R} : $B_r(p) =]p - r, p + r[$, intervalo aberto.

Em \mathbb{R}^2 : $B_r(P)$ corresponde ao interior de um círculo centrado em P e raio r .

Em \mathbb{R}^3 : $B_r(P)$ corresponde ao interior da esfera centrada em P e raio r .

Em particular,

Em \mathbb{R} : $B_r(p) =]p - r, p + r[$, intervalo aberto.

Em \mathbb{R}^2 : $B_r(P)$ corresponde ao interior de um círculo centrado em P e raio r .

Em \mathbb{R}^3 : $B_r(P)$ corresponde ao interior da esfera centrada em P e raio r .

Definição 7

*Um ponto $P \in \mathcal{D}$ diz-se um **ponto interior** de um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ se existe um $r > 0$ tal que $B_r(P) \subset \mathcal{D}$.*

*O **interior** de \mathcal{D} é o conjunto formado por todos os pontos interiores de \mathcal{D} e denota-se por $\text{int}(\mathcal{D})$.*

Exemplo 11

O interior do conjunto $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ é o conjunto

$$\text{int}(\mathcal{D}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Representação gráfica,

Exemplo 11

O interior do conjunto $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ é o conjunto

$$\text{int}(\mathcal{D}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Representação gráfica,

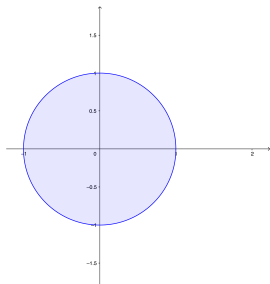


Figura: Conjunto \mathcal{D} .

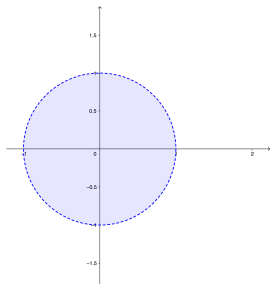
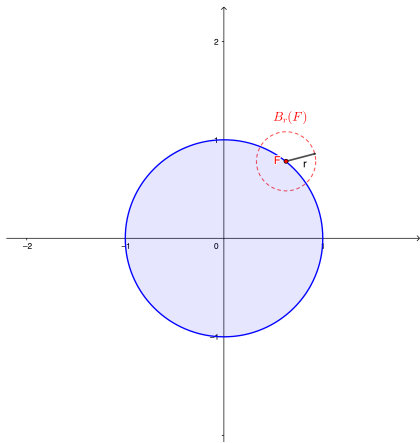


Figura: $\text{int}(\mathcal{D})$.

Note que, o interior de \mathcal{D} não inclui os pontos da circunferência que limita o círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1, pois se F é um ponto desta circunferência não podemos encontrar um $r > 0$ tal que $B_r(F)$ esteja completamente contida no conjunto \mathcal{D} . Observemos:

Note que, o interior de \mathcal{D} não inclui os pontos da circunferência que limita o círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1, pois se F é um ponto desta circunferência não podemos encontrar um $r > 0$ tal que $B_r(F)$ esteja completamente contida no conjunto \mathcal{D} . Observemos:



Definição 8

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores de \mathcal{D} , isto é, se

$$\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Definição 8

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores de \mathcal{D} , isto é, se

$$\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Exemplo 12

Em \mathbb{R} , o conjunto $I =]a, b[$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ é um conjunto aberto.

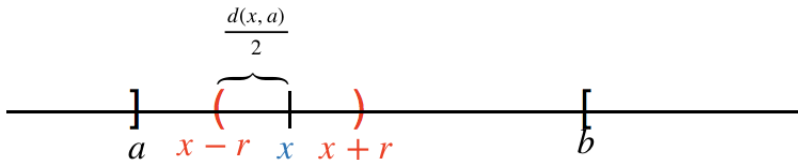
Definição 8

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores de \mathcal{D} , isto é, se

$$\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Exemplo 12

Em \mathbb{R} , o conjunto $I =]a, b[$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ é um conjunto aberto. Sabemos que I é aberto se todos seus pontos são pontos interiores, isto é, se para todo $x \in I$ existe um $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset I$.



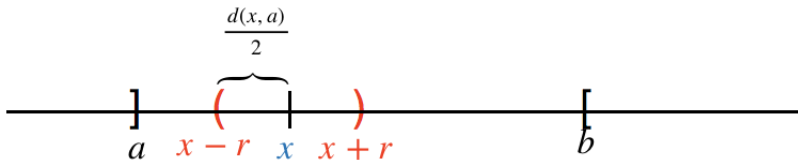
Definição 8

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores de \mathcal{D} , isto é, se

$$\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Exemplo 12

Em \mathbb{R} , o conjunto $I =]a, b[$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ é um conjunto aberto. Sabemos que I é aberto se todos seus pontos são pontos interiores, isto é, se para todo $x \in I$ existe um $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset I$.



Se consideramos, por exemplo, $r = \frac{1}{2} \min \{d(x, a), d(x, b)\}$, garantimos que para qualquer $x \in]a, b[$ temos que $B_r(x) \subset I$. Logo, I é aberto.

Se consideramos, por exemplo, $r = \frac{1}{2} \min \{d(x, a), d(x, b)\}$, garantimos que para qualquer $x \in]a, b[$ temos que $B_r(x) \subset I$. Logo, I é aberto. Em geral, toda bola aberta $B_r(X)$ de \mathbb{R}^n é um conjunto aberto.

Se consideramos, por exemplo, $r = \frac{1}{2} \min \{d(x, a), d(x, b)\}$, garantimos que para qualquer $x \in]a, b[$ temos que $B_r(x) \subset I$. Logo, I é aberto. Em geral, toda bola aberta $B_r(X)$ de \mathbb{R}^n é um conjunto aberto.

Definição 9

Um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto fronteiro** de um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ se para todo $r > 0$, $B_r(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ e $B_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$. Em outras palavras, se qualquer bola aberta de centro P tem pontos que pertencem a \mathcal{D} e pontos que não pertencem a \mathcal{D} .

A **fronteira** de \mathcal{D} é o conjunto formado por todos os pontos fronteiros de \mathcal{D} e denota-se por $\text{fr}(\mathcal{D})$.

Exemplo 13

A fronteira da esfera (sólida),

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

é a superfície esférica

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Exemplo 13

A fronteira da esfera (sólida),

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

é a superfície esférica

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Observação 2

Um ponto fronteiro de \mathcal{D} pode ou não pertencer ao conjunto \mathcal{D} .

Exemplo 13

A fronteira da esfera (sólida),

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

é a superfície esférica

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Observação 2

Um ponto fronteiro de \mathcal{D} pode ou não pertencer ao conjunto \mathcal{D} .

Definição 10

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **fechado** se todos os pontos fronteiros de \mathcal{D} lhe pertencem, isto é, se

$$fr(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}.$$

Exemplo 14

Represente geometricamente e caracterize desde o ponto de vista topológico o seguinte conjunto

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \right\}.$$

Exemplo 14

Represente geometricamente e caracterize desde o ponto de vista topológico o seguinte conjunto

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \right\}.$$

Representação geométrica.

$$|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1 - |x| \Leftrightarrow |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|$$

- $x \geq 0$

$$|x| - 1 \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow x - 1 \leq y \leq 1 - x$$

Exemplo 14

Represente geometricamente e caracterize desde o ponto de vista topológico o seguinte conjunto

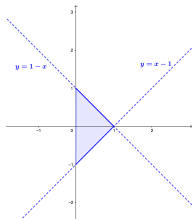
$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \right\}.$$

Representação geométrica.

$$|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1 - |x| \Leftrightarrow |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|$$

- $x \geq 0$

$$|x| - 1 \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow x - 1 \leq y \leq 1 - x$$

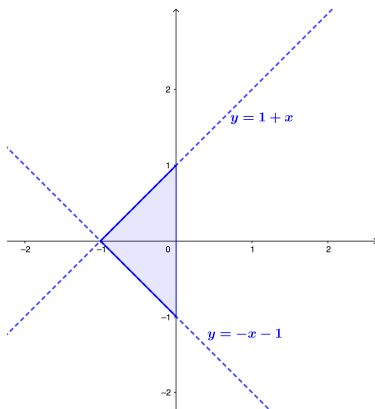


- $x < 0$

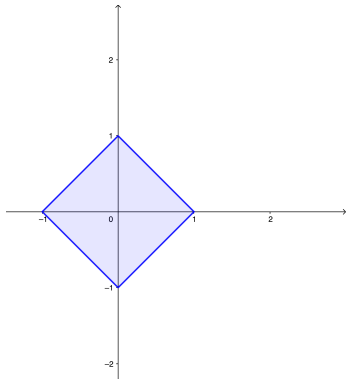
$$|x| - 1 \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow -x - 1 \leq y \leq 1 + x$$

- $x < 0$

$$|x| - 1 \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow -x - 1 \leq y \leq 1 + x$$



Logo, a representação geométrica do conjunto T é



O interior de T é:

$$\operatorname{int}(T) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \right\}.$$

O interior de T é:

$$\text{int}(T) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \right\}.$$

A fronteira de T é:

$$\text{fr}(T) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1 \right\}.$$

O interior de T é:

$$\text{int}(T) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \right\}.$$

A fronteira de T é:

$$\text{fr}(T) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1 \right\}.$$

Como $\text{fr}(T) \subset T$, então T é um conjunto fechado.

Definição 11

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe um $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.

Definição 11

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe um $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.

Exemplo 15

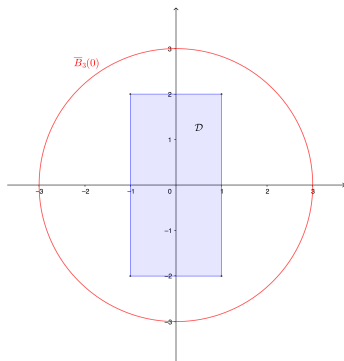
O conjunto $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ é limitado, pois está contido, por exemplo, na bola $\overline{B}_3(0)$.

Definição 11

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe um $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.

Exemplo 15

O conjunto $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ é limitado, pois está contido, por exemplo, na bola $\overline{B}_3(0)$.



Definição 12

Dizemos que $P \in \mathbb{R}^n$ é um **ponto de acumulação** de um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ se, para todo $r > 0$, a bola $B_r(P)$ tem pontos de \mathcal{D} distintos de P , ou seja,

$$B_r(P) \cap (\mathcal{D} \setminus \{P\}) \neq \emptyset.$$

Um ponto $P \in \mathcal{D}$ diz-se um **ponto isolado** de \mathcal{D} se não é um ponto de acumulação de \mathcal{D} .

O conjunto dos pontos de acumulação de \mathcal{D} se chama **conjunto derivado** de \mathcal{D} e denota-se por \mathcal{D}' .

Exemplo 16

Consideremos o conjunto

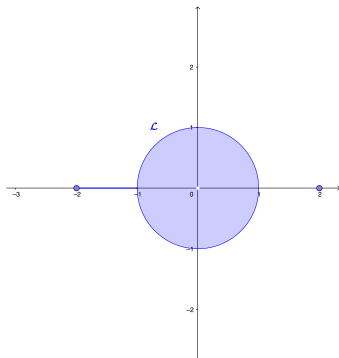
$$\mathcal{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1) \right\} \cup \{(2, 0)\}.$$

Exemplo 16

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1) \right\} \cup \{(2, 0)\}.$$

A representação gráfica do conjunto é



O conjunto dos pontos de acumulação de \mathcal{L} é

$$\mathcal{L}' = \left\{ (x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)) \right\}$$

O conjunto dos pontos de acumulação de \mathcal{L} é

$$\mathcal{L}' = \left\{ (x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)) \right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto \mathcal{L} , mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação, isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto \mathcal{L} .

O conjunto dos pontos de acumulação de \mathcal{L} é

$$\mathcal{L}' = \left\{ (x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)) \right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto \mathcal{L} , mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação, isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto \mathcal{L} .

O único ponto isolado de \mathcal{L} é o ponto $(2, 0)$.

O conjunto dos pontos de acumulação de \mathcal{L} é

$$\mathcal{L}' = \left\{ (x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)) \right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto \mathcal{L} , mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação, isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto \mathcal{L} .

O único ponto isolado de \mathcal{L} é o ponto $(2, 0)$.

O interior de \mathcal{L} é o conjunto:

O conjunto dos pontos de acumulação de \mathcal{L} é

$$\mathcal{L}' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1) \right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto \mathcal{L} , mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação, isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto \mathcal{L} .

O único ponto isolado de \mathcal{L} é o ponto $(2, 0)$.

O interior de \mathcal{L} é o conjunto:

$$\text{int}(\mathcal{L}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 < 1 \vee (y = 0 \wedge -2 < x < -1) \right\}$$

O conjunto dos pontos de acumulação de \mathcal{L} é

$$\mathcal{L}' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1) \right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto \mathcal{L} , mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação, isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto \mathcal{L} .

O único ponto isolado de \mathcal{L} é o ponto $(2, 0)$.

O interior de \mathcal{L} é o conjunto:

$$\text{int}(\mathcal{L}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 < 1 \vee (y = 0 \wedge -2 < x < -1) \right\}$$

A fronteira de \mathcal{L} é o conjunto:

O conjunto dos pontos de acumulação de \mathcal{L} é

$$\mathcal{L}' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1) \right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto \mathcal{L} , mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação, isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto \mathcal{L} .

O único ponto isolado de \mathcal{L} é o ponto $(2, 0)$.

O interior de \mathcal{L} é o conjunto:

$$\text{int}(\mathcal{L}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 < 1 \vee (y = 0 \wedge -2 < x < -1) \right\}.$$

A fronteira de \mathcal{L} é o conjunto:

$$\text{fr}(\mathcal{L}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\} \cup \{(2, 0), (0, 0), (-2, 0)\}.$$

Exercício 2

Considere o seguinte conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \geq 1 \wedge x - y + 1 > 0 \wedge x^2 - y \leq 0 \right\}.$$

- (a) *Represente geometricamente o conjunto A.*
- (b) *Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de A.*
- (c) *A é um conjunto limitado? Justifique.*
- (d) *A é um conjunto fechado? Justifique.*
- (e) *A é um conjunto aberto? Justifique.*

Exercício 3

Considere o seguinte conjunto

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1 \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

- (a) *Represente geometricamente o conjunto B .*
- (b) *Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de B .*
- (c) *B é um conjunto limitado? Justifique.*
- (d) *B é um conjunto fechado? Justifique.*
- (e) *B é um conjunto aberto? Justifique.*