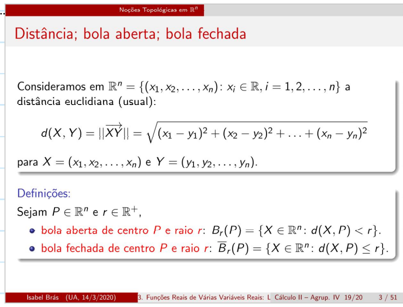
31/03/2020 Sessão 3, TP4-6

Sumário:
Noções topológicas em IR^n: Interior, fronteira e exterior de um conjunto; ponto de acumulação, conjunto limitado.
Noção de função real de várias variáveis reais: domínio, contradomínio e gráfico.
Curvas de nível e superfícies de nível. Exemplos e exercícios.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

S3-Func_rvvr_...


Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

Distância; bola aberta; bola fechada

Consideramos em $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ a distância euclidiana (usual):

$$d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

para $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

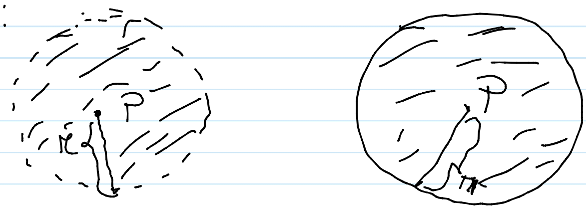
Definições:
Sejam $P \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$,
- bola aberta de centro P e raio r: $B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, P) < r\}$.
- bola fechada de centro P e raio r: $\overline{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, P) \leq r\}$.

Isabel Brás (UA, 14/3/2020) 3. Funções Reais de Várias Variáveis Reais: L Cálculo II – Agrup. IV 19/20 3 / 51

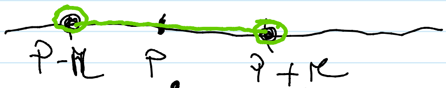
$A = (1, 3)$ $B = (4, 5)$

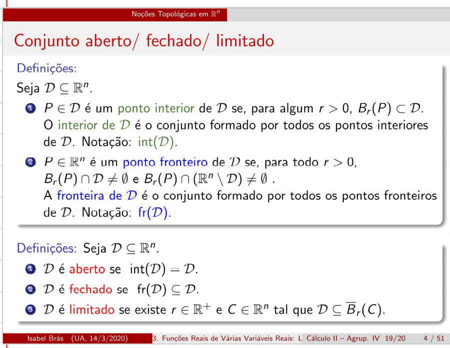
$$d(A, B) = \sqrt{(1-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Em $\mathbb{R}^2$:



Em $\mathbb{R}$:




Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

Conjunto aberto/ fechado/ limitado

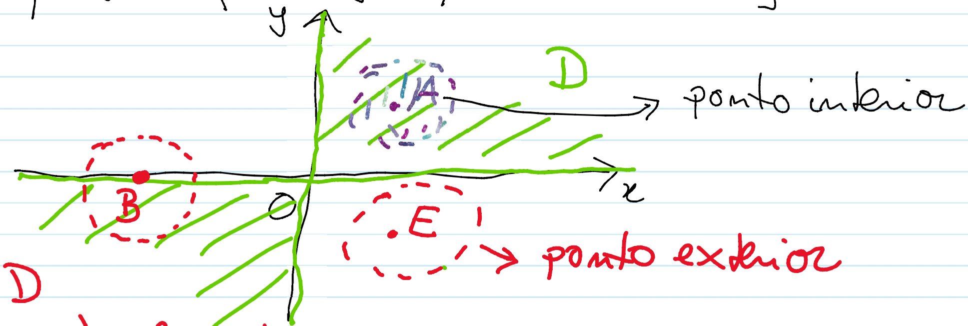
Definições:
Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.
1. $P \in \mathcal{D}$ é um ponto interior de $\mathcal{D}$ se, para algum $r > 0$, $B_r(P) \subset \mathcal{D}$. O interior de $\mathcal{D}$ é o conjunto formado por todos os pontos interiores de $\mathcal{D}$. Notação: $\text{int}(\mathcal{D})$.
2. $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fronteiro de $\mathcal{D}$ se, para todo $r > 0$, $B_r(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ e $B_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$. A fronteira de $\mathcal{D}$ é o conjunto formado por todos os pontos fronteiros de $\mathcal{D}$. Notação: $\text{fr}(\mathcal{D})$.

Definições: Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.
1. $\mathcal{D}$ é aberto se $\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.
2. $\mathcal{D}$ é fechado se $\text{fr}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.
3. $\mathcal{D}$ é limitado se existe $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.

Isabel Brás (UA, 14/3/2020) 3. Funções Reais de Várias Variáveis Reais: L Cálculo II – Agrup. IV 19/20 4 / 51

Exemplo 1: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$



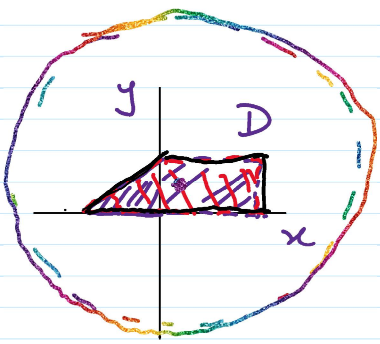
$B \in D$
↳ ponto fronteiro

$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$ → interior de D

$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ → fronteira de D

→ D não é aberto, porque $\text{int}(D) \neq D$.
D é fechado, $\text{fr}(D) \subset D$
D é ilimitado.

Exemplo de conjunto que não é fechado nem aberto:



$\text{int}(D) \neq D$

$\text{fr}(D) \not\subset D$

D é limitado

$int(D) \neq D$

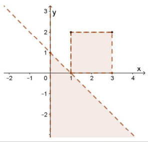
$fr(D) \not\subset D$

D é limitado

Exemplo:
$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x > 0 \wedge x + y < 1) \vee (1 < x < 3 \wedge 0 < y < 2)\}$

- $fr(\mathcal{D}) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ onde
  $\mathcal{F}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x = 0 \wedge y < 1) \vee (x > 0 \wedge x + y = 1)\}$
  $\mathcal{F}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x = 1 \vee x = 3) \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
  $\mathcal{F}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (y = 0 \vee y = 2) \wedge 1 \leq x \leq 3\}$.
  $fr(\mathcal{D}) \not\subseteq \mathcal{D}$, logo $\mathcal{D}$ não é fechado.
- $\mathcal{D}$ não é limitado.
- $\operatorname{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, logo $\mathcal{D}$ é aberto.

Ilustração:



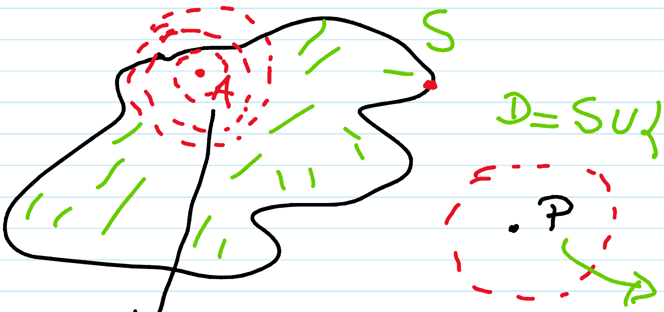
Ponto de acumulação/ isolado

Definições:
Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$ se, para todo $r > 0$, $B_r(P) \cap (\mathcal{D} \setminus \{P\}) \neq \emptyset$.
2. $P \in \mathcal{D}$ é um ponto isolado de $\mathcal{D}$ se não é ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.

Exercício: Mostre que:
todo o ponto interior de $\mathcal{D}$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.

Exemplo:
$\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \colon x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)\} \cup \{(2,0)\}$
$(0,0)$ e $(-2,0)$ são pontos de acumulação de $\mathcal{L}$, indique outros!
$(2,0)$ é um ponto isolado de $\mathcal{D}$, existem outros? ilustração gráfica
Este conjunto é limitado e não é aberto, justifique. Será fechado?



$D = S \cup \{P\}$

ponto isolado

ponto de acumulação

Definição:
Dado $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, chamamos função real a n variáveis reais[a] de domínio $\mathcal{D}$ a toda a correspondência que associa de forma única a cada elemento de $\mathcal{D}$ um número real. Notação:

$$\begin{array}{rcl} f \colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}.$$

[a] ou campo escalar a n variáveis

Definição: Seja $f \colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ao conjunto

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o contradomínio de f.

Definição: Seja $f \colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ao conjunto

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon z = f(x_1, \ldots, x_n), \text{ com } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o gráfico de f.

Exemplo:

$f \colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \ln(xy)$

$D = D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy > 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x > 0 \wedge y = 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$

$CD_f = \{\ln(xy) \colon (x,y) \in D_f\}$

$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = 2x - y$

$= \mathbb{R}$;

$G_f = \{(x, y, \ln(x,y))\} : xy > 0\}$

ver ligações dos slides.

Exemplos

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = 2x - y$. ‣ esboço gráfico
  $D_f = \mathbb{R}^2$ e $CD_f = \mathbb{R}$; O gráfico de f é o plano de equação $z = 2x - y$.
- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$. ‣ esboço gráfico
  $D_f = \mathbb{R}^2$ e $CD_f = \mathbb{R}_0^+$; O gráfico de f,
  $\mathcal{G}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$, é um parabolóide circular.
- $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = 4 - y^2$. ‣ esboço gráfico
  $D_g = \mathbb{R}^2$ e $CD_g =]-\infty, 4]$;
  $\mathcal{G}_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 4 - y^2\}$ (cilindro parabólico).
- $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 - y^2$. ‣ esboço gráfico
  $D_h = \mathbb{R}^2$ e $CD_h = \mathbb{R}$;
  $\mathcal{G}_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 - y^2\}$ (parabolóide hiperbólico).
- $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $s(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.
  $D_s = \mathbb{R}^2$ e $CD_s = [-1, 1]$;
  $\mathcal{G}_s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \sin(x^2 + y^2)\}$. ‣ esboço gráfico

Curvas de Nível/ Superfícies de Nível

Definições:
Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $k \in CD_f$. Ao conjunto

$$\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D} \colon f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\}$$

chamamos conjunto de nível k de f.
Para $n = 2$, o conjunto $\mathcal{N}_k$ passa a denotar-se por $\mathcal{C}_k$ e a designar-se por curva de nível k de f.
Para $n = 3$, o conjunto $\mathcal{N}_k$ passa a denotar-se por $\mathcal{S}_k$ e a designar-se por superfície de nível k de f.

Nota:
Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplos

1. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = 4 - y^2$.
   $CD_g =]-\infty, 4]$. Para $k \leq 4$, a curva de nível k de g é
   $$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon k = 4 - y^2\}.$$
   Trata-se da união de duas retas de equações $y = \sqrt{4-k}$ e $y = -\sqrt{4-k}$. ‣ applet
2. $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 - y^2$. $CD_h = \mathbb{R}$;
   $$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon k = x^2 - y^2\}, \text{com } k \in \mathbb{R}$$ ‣ applet
   A a curva de nível k é, para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = k$ e, para $k = 0$, a reunião as duas retas de equações $y = x$ e $y = -x$.
3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = 2x - 5y + 3z$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, a superfície de nível k de f é o plano ortogonal ao vetor $(2,-5,3)$ que passa no ponto $(0, 0, \frac{k}{3})$.

$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : k = 4 - y^2\}$

P. ex. $(k = 0)$

$\mathcal{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - y^2 = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 \vee y = -2\}$

curva de nível 0 de g

e.A. $k = 4 - y^2 \Leftrightarrow y^2 = \underbrace{4 - k}_{\geq 0}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{4-k} \vee y = -\sqrt{4-k}$

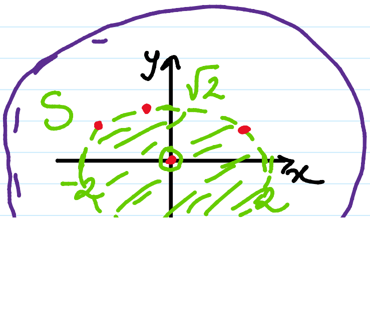
retas

Exercícios:

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos e caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em R2 e em R3).

(a)

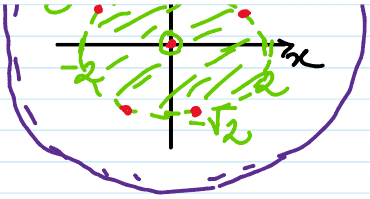
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$$



e.A.

$x^2 + 2y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

$\text{int}(S) = S$, logo S é aberto



int$(S) = S$, logo S é aberto

fr$(S) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 = 4\} \cup \{(0,0)\}$

S não é fechado, porque fr$(S) \not\subset S$

S é limitado.

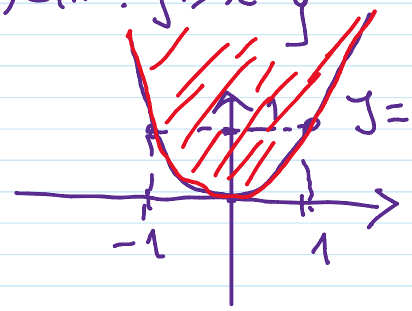
2. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente:

(a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$; (b) $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2}$;

$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$

$y = x^2$ equação de uma parábola



3. Determine as curvas / superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as do ponto de vista geométrico:

(a) $f(x, y) = x - 4y$; (c) $f(x, y) = x^2 + y^2$; (e) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$;

$D_f = \mathbb{R}^2$ $CD_f = \mathbb{R}$

$k \in \mathbb{R}$, qualquer.

$\mathcal{C}_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x - 4y = k\}$

reta de declive $\frac{1}{4}$ e ordenada na origem $-\frac{k}{4}$

C.A. $x - 4y = k \Leftrightarrow -4y = -x + k \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{k}{4}$

Por exemplo:

$\mathcal{C}_0 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{4}x\}$ → curva de nível 0

conjunto dos pontos do domínio da função onde ela é nula.