Sessão 5;TP4_9

14/04/2020
Sumário:
Cálculo de limites (continuação).
Continuidade.
Derivação parcial de primeira ordem: definições e interpretação geométrica.
Derivação parcial de ordem superior; Teorema de Scharwarz.

S3-
Func_rvvr_...

https://docs.google.com/document/d/1Q6PFEUtHAGrVTbQSK15-afPhNBosjJSOG1aLiQrwhkQ/edit?ts=5e94e2d1

Duas proposições — cálculo de alguns limites

Proposição: [Infinitésimo por limitada]

Sejam $f, g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$. Se $\lim_{X\to A} f(X) = 0$ e se g é uma função limitada em $\mathcal{D} \cap B_r(A)$, para algum $r > 0$, então $\lim_{X\to A} f(X)g(X) = 0$.

0 limitada

Proposição: [Mudança de variável]

Sejam $f, u\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e g uma função real de variável real tal que $f(X) = g(u(X))$. Se $\lim_{X\to A} u(X) = c$ e $\lim_{z\to c} g(z) = \ell$, então

$$\lim_{X\to A} f(X) = \lim_{z\to c} g(z) = \ell$$

Exercícios:

Usando as proposições do slide anterior (escolhendo a que se adequa), calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{x-y} - 1}{y - x}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$

Ver Resoluções no moodle

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(\underbrace{x^2+y^2}_{z\,\to\,0})}{\underbrace{x^2+y^2}_{z}} = \lim_{z\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1$$

Continuidade

Definição:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$. Se P é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$, f diz-se contínua em P, se $\lim_{X\to P} f(X) = f(P)$.
Caso P seja ponto isolado de $\mathcal{D}$, consideramos que f é contínua em P.
Ao conjunto de pontos onde f é contínua chamamos domínio de continuidade de f.

Proposição:

Se $f, g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $P \in \mathcal{D}$ e $\alpha\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(\mathcal{D}) \subseteq I$, é contínua em $f(P)$, então

1. $f + g$, fg e λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, são contínuas em P.
2. $\frac{f}{g}$ é contínua em P, desde que $g(P) \neq 0$.
3. $\alpha \circ f$ é contínua em P.

Exemplos/Exercícios:

1. Determine o domínio de continuidade da função de domínio em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = \frac{3xy - 5x^3}{y^3 - xy}$.
2. Mostre que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é descontínua em $(0,0)$.

(1) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 - xy \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y(y^2 - x) \neq 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge y^2 \neq x\}$

A função é o quociente de funções contínuas em D_f, logo contínua em D_f.

Derivada parcial em ordem a x

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in int(\mathcal{D})$. Fixando $y = b$, fica definida uma função, g_b, real de uma variável, x, tal que

$$g_b : \begin{array}{ccc} \{x \in \mathbb{R} : (x, b) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g_b(x) = f(x, b) \end{array}$$

À derivada de g_b em $x = a$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a x em (a, b), denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, *i.e.*,

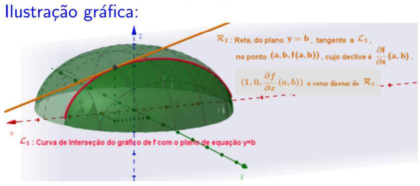
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real[a].
Notação alternativa: $f'_x(a, b)$.

[a] Podem considera-se derivadas iguais a $+\infty$ (ou $-\infty$) mas, neste contexto, não irão ser relevantes

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a x

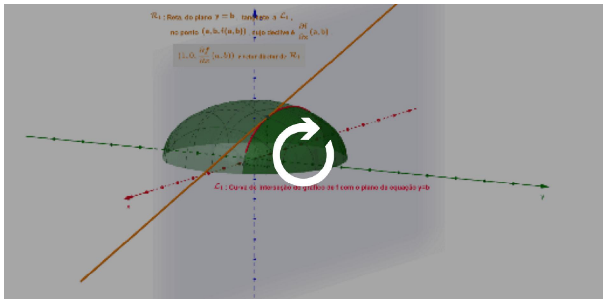
1. A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) é o declive da reta, $\mathcal{R}_1$, tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $y = b$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.
Ilustração gráfica:



applet
outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_1$ tem equações cartesianas:
$$\begin{cases} y = b \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) \end{cases}$$
3. $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$ é vetor diretor de $\mathcal{R}_1$.

Derivada parcial em ordem a x



Derivada parcial em ordem a y

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Fixando $x = a$, fica definida uma função, g_a, real de uma variável, y, tal que

$$g_a : \begin{array}{ccc} \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & g_a(y) = f(a, y) \end{array}$$

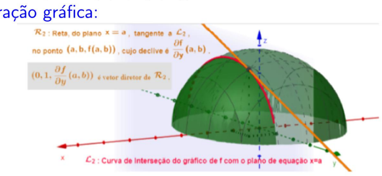
À derivada de g_a em $y = b$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a y em (a, b), denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, *i.e.*,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real.
Notação alternativa: $f'_y(a, b)$.

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a y

1. A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o declive da reta, $\mathcal{R}_2$, tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.
Ilustração gráfica:



applet
outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_2$ tem equações cartesianas:
$$\begin{cases} x = a \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \end{cases}$$
3. $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$ é vetor diretor dessa reta.

Exemplo de cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ por definição:

$f(x,y) = x^2 y^3$, $(a,b) = (-1,2)$ constante

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h, 2) - f(-1, 2)}{h}$$

incremento no ponto

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h)^2 \cdot 2^3 - (-1)^2 \cdot (2^3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8(-1+h)^2 - 8}{h}$$

$$= \lim \frac{8(h^2 - 2h + \cancel{1} - \cancel{1})}{} = \lim (8h - 16) = -16$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\quad}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\quad}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8(h^2-2h+\cancel{1}-\cancel{1})}{h} = \lim_{h\to 0}(8h-16) = -16$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1,2+h)-f(-1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1\cdot(2+h)^3-8}{h} = \cdots$$

$$f(x,y) = x^2y^3$$

Usando propriedades:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 \underbrace{y^3}_{\text{constante}}) = y^3 \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = y^3(2x) = 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = (2xy^3)\Big|_{\substack{x=-1\\ y=2}} = 2(-1).2^3 = -16$$

Derivação parcial: exemplos

Na prática, se a função f estiver definida numa vizinhança de um ponto por uma única expressão derivável (usando regras de derivação) em relação a uma das variáveis, por exemplo x, considerando as restantes constantes, a derivada de f em ordem a x, nessa vizinhança, é a expressão obtida dessa derivação.

Exemplos:

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + xy + \ln(1+y^2)$. Para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, existem as derivadas parciais de f em ordem a x (a y) e $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{2y}{1+y^2}.$$
2. $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = \cos(xy^2) + \ln(zy^3)$. Para todo o $(x,y,z) \in \mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -y^2\sin(xy^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2xy\sin(xy^2) + \frac{3}{y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{z}$.

① $f(x,y) = x^2 + xy + \ln(1+y^2)$

$D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + 0 = 2x + y, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + x + \frac{(1+y^2)'_y}{1+y^2} = x + \frac{2y}{1+y^2}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

② $f(x,y,z) = \cos(xy^2) + \underbrace{\ln(zy^3)}_{\text{const.}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(xy^2).(xy^2)'_x \quad \text{ou} \quad -\operatorname{sen}(xy^2).\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)$$

$$= -\operatorname{sen}(xy^2)\,y^2, \ \forall (x,y,z) \in D$$

Derivação parcial: exemplos

Em alguns casos, apenas a definição é utilizável. Tal como nas funções a uma variável, deve usar-se as definições para determinar as derivadas parciais num ponto P, se na vizinhança do ponto P a função não está definida por uma expressão analítica única.

Exemplos:

1. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{se } x \neq y \\ x^3, & \text{se } x = y \end{cases}$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 3$ e que $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)$ não existe.

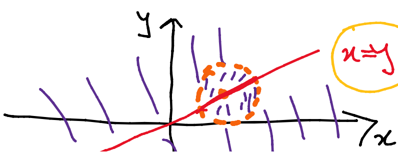
①

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

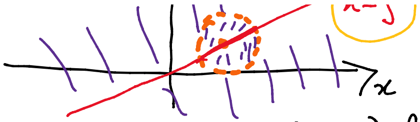
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0}(0) = 0$$

②



$x \neq y$ → obrigatório usar a definição.



usar a definição.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a,a)}{h} \quad \cdots$$

Diferencial de uma função real de uma variável real

Reta Tangente/Linearização em torno de um ponto:

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 \in \text{int}(D)$. A função L definida por

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \, ,$$

cujo gráfico é a reta tangente, é a chamada linearização de f em x_0.

Diferencial: Como L é uma boa aproximação local de f, para x próximo de x_0, tomando $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ e $\Delta x := x - x_0$, $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$.
O diferencial de f em x_0 é a função, que depende de Δx, definida por

$$df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Como $dx(\Delta x) = \Delta x$, escreve-se:

$$\boxed{df = f'(x_0)dx \ .}$$

(ver interpretação geométrica no slide seguinte e/ou em GeoGebra, agradecimentos a Ana Breda)