Sessão 11 (aula 19) TP4-6

5 de maio de 2020 12:12

Sumário:
Ponto da situação relativo à tarefa 4 e observação sobre um dos exercícios da tarefa 3.
Exercício 14 da ficha (método dos multiplicadores de Lagrange)
Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Exemplos de aplicação envolvendo problemas onde aparecem tais equações.
Conceitos básicos e terminologia sobre EDOs. Exemplos Introdutórios.

Tarefa 4:

17. Determine o ponto do plano $x + 2y + z = 4$ que se encontra mais próximo do ponto da origem, usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Qual é essa distância?

18. Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(3, 1, -1)$.

20. Seja f a função definida em $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ por $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$.

(a) Represente geometricamente o domínio $\mathcal{D}$ e o gráfico de f.
(b) Determine os pontos críticos da função f no interior do seu domínio.
(c) Determine os extremos globais da função f em $\mathcal{D}$.

Exercício 13(b)

Os testes da Hessiana são inconclusivos.

$(0,0)$ ponto crítico de $f(x,y) =$: $f(x, y) = (x - y^3)^2 - x^3$.

objectivo: Provar que $(0,0)$ não é extremante.

$f(0,0) = 0^2 - 0^3 = 0$

Em qualquer vizinhança de $(0,0)$, ou seja em qualquer bola $B_\varepsilon(0,0)$, existem pontos da forma (y^3, y):

$f(y^3, y) = (y^3 - y^3)^2 - y^3$
$= -y^3$

Tomando $y > 0$, $f(y^3, y) < 0 = f(0,0)$

Tomando $y < 0$, $f(y^3, y) > 0 = f(0,0)$

Logo $(0,0)$ não é extremante local de f.

Estudo por definição.

14. Determine os extremos absolutos da função f definida por $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ no círculo $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ é contínua em D, que é compacto, logo, existem extremos absolutos de f em D, pelo Teorema de Weierstrass.

1º parte: Localizar os pontos críticos no $\text{int}(D)$:

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (4x, -4y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Ponto crítico: $P_1 = (0,0)$

2º parte: ... candidatos a extremantes

Ponto crítico: $P_1=(0,0)$

2ª parte: Determinar os candidatos a extremantes em $fr(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}=\mathcal{C}$

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

$$\max/\min \quad f(x,y)=2x^2-2y^2$$
$$\text{s.a.} \quad \underbrace{x^2+y^2-1}_{g(x,y)}=0$$

$f,g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ contínuas em $\mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y)=(4x,-4y)$

$\nabla g(x,y)=(2x,2y)\neq(0,0)$, $(x,y)\in fr(D)=\mathcal{C}$

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4x,-4y)=\lambda(2x,2y)\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x=2\lambda x\\ -4y=2\lambda y\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=\lambda x\\ -2y=\lambda y\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-\lambda)x=0\\ (-2-\lambda)y=0\\ \hline\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \hline \\ y^2=1\end{cases} \vee \begin{cases}2-\lambda=0\\ \hline \\ \hline\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ (2+\lambda)y=0\\ y=1 \vee y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=2\\ -4y=0\\ \hline\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ 2+\lambda=0\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=0\\ 2+\lambda=0\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=2\\ y=0\\ x^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\\ \lambda=-2\end{cases} \vee \begin{cases}x=0\\ y=-1\\ \lambda=-2\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=0\\ \lambda=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=0\\ \lambda=2\end{cases}$$

Pontos candidatos a extremante em $fr(D)$:

$P_2=(0,1)$ $P_3=(0,-1)$ $P_4=(1,0)$ e $P_5=(-1,0)$

Uma tabela de análise dos valores de f:

P	$f(P)$
P_1	0
P_2	-2 ←
P_3	-2 ←
P_4	2 ←
P_5	2 ←

Resposta:

-2 é mínimo global em D, extremantes correspondentes: P_2 e P_3.

2 é máximo global em D, maximizantes: P_4 e P_5.

5. Equações Diferenciais Ordinárias

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 51–92, e versões anteriores de slides de Cálculo II

Isabel Brás

UA, 27/4/2020

Cálculo II – Agrup. IV 19/20

Resumo dos Conteúdos

Equações Diferenciais, o que são?

Equações que envolvem uma função e as suas derivadas e/ou a variável que é o argumento dessa função.
Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

Exemplos:

1. Taxa de variação de temperatura de um objeto:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$T(t) \to$ temperatura do objeto,
$T_m \to$ temperatura do meio ambiente, $k \to$ constante positiva.

Usualmente, existe uma condição inicial sobre a temperatura do objeto.

$\boxed{T(0) = 27}$ por exemplo.

$T(t)$ → tempo

Temperatura no tempo t

$$\boxed{\frac{dT}{dt}(t) = -k\left(T(t) - T_m\right)}$$

$T(t) = ?$

Exemplos (cont.):

2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

deslocamento no tempo $x = x(t)$

$t \to$ v. ind.

oscilador harmónico

$m \to$ massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical;
$x(t) \to$ deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola;
$k > 0 \to$ constante de mola; Ver figura

3. Lei de Kirchhoff aplicada a uma malha constituída por uma bobine em série com uma resistência:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

onde L e R são constantes (indutância e resistência, respetivamente), $I(t)$ a intensidade de corrente e $E(t)$ a tensão da fonte de energia.

$I(t)$ é a função a determinar.

Equação diferencial ordinária

Definição:
Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{(EDO)}$$

$y = y(x)$

derivadas totais

onde y é função (real) de x.

Terminologia associada:
y é designada por variável dependente;
x é designada por variável independente;
Uma EDO diz-se estar na forma normal quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

Exemplo:

$$y' + x + 1 = 0 \quad (*)$$

EDO de ordem 1.

Variável independente: x
" dependente: $y = y(x)$

$y' = -x - 1$ ⇒ Integrando

$$\boxed{y(x) = -\frac{x^2}{2} - x + C, \; C \in \mathbb{R}}$$

Integral geral da equação

Por exemplo:
$y_p(x) = -\frac{x^2}{2} - x$
é uma solução de $(*)$

Notação alternativa: No slide anterior $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função y. Em alternativa, podemos usar a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$ e (re)escrever a EDO na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Exemplos :

1. $$-y' + x^3 - 1 = 0$$

   é uma equação diferencial de ordem 1, onde x é a variável independente e y a variável dependente;

2. $$3t\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

   é uma equação diferencial de ordem 2, onde t é a variável independente e x a variável dependente;

$$-\frac{dy}{dx} + x^3 - 1 = 0$$

EDO de ordem 1

Variável independente: x

" dependente: y

$$\frac{dy}{dx} = +x^3 - 1$$

$$\boxed{y = \frac{x^4}{4} - x + C, \ C \in \mathbb{R}}$$

EDO de ordem 2.

Solução de uma EDO

Definição

Chama-se solução da equação diferencial

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

num intervalo I, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n, tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo:

$\varphi_1(x) =$ sen x e $\varphi_2(x) = \cos x -$ sen x são duas soluções (em $\mathbb{R}$) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!

$y'' + y = 0$ $\quad$ $y = y(x)$

$\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x, \ x \in \mathbb{R}$

$\varphi_1'(x) = \cos x$

$\varphi_1''(x) = -\operatorname{sen} x$

$\varphi_1''(x) + \varphi_1(x) = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \varphi_1$ é solução da equação.

$\varphi_2(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

$\varphi_2'(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$; $\varphi_2''(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x$

$\therefore \varphi_2''(x) + \varphi(x) = \cancel{-\cos(x)} + \cancel{\operatorname{sen} x} + \cancel{\cos x} - \cancel{\operatorname{sen} x} = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Assim, φ_2 é também solução da EDO.

Outra solução: $y = \cos x$ verificar!

As soluções são forma (vamos ver à frente, mas pode verificar que todas são soluções):

$$\boxed{y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

a esta família de funções chamamos a solução geral da equação, ver o slide seguinte.

Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

Integral Particular (ou solução particular): Solução que faz parte do integral geral;

Solução Singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral;

Solução Geral: Conjunto de todas as soluções.