Aula 11 - Parte 1
Funções Reais de Várias Variáveis Reais: Domínio, Contradomínio, Gráfico e Conjuntos de Nível.

Mónica Celis.

Cálculo II -Agrup. IV-5.

2020

Sumário da Aula 11 - Parte 1.

1. Introdução.
2. Definição de Função Real de Várias Variáveis Reais. Exemplos.
3. Domínio, Contradomínio e Gráfico.
4. Conjuntos de Nível.

Introdução.

Consideremos o seguinte enunciado:

Introdução.

Consideremos o seguinte enunciado:

O volume V de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio e h é a altura.

Introdução.

Consideremos o seguinte enunciado:

O volume V de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio e h é a altura.
Analisando este enunciado verificamos que a função envolvida requer o uso de duas variáveis independentes.

Introdução.

Consideremos o seguinte enunciado:

O volume V de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio e h é a altura.
Analisando este enunciado verificamos que a função envolvida requer o uso de duas variáveis independentes. Podemos, por exemplo, dizer que o volume de um cilindro, denotado por V, é uma função do raio r e da altura h. Assim,

$$V = V(r, h)$$

é uma função de duas variáveis definida por

$$\boxed{V(r, h) = \pi r^2 h.}$$

Introdução.

Consideremos o seguinte enunciado:

O volume V de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio e h é a altura.
Analisando este enunciado verificamos que a função envolvida requer o uso de duas variáveis independentes. Podemos, por exemplo, dizer que o volume de um cilindro, denotado por V, é uma função do raio r e da altura h. Assim,

$$V = V(r, h)$$

é uma função de duas variáveis definida por

$$\boxed{V(r, h) = \pi r^2 h.}$$

A função volume do cilindro recebe dois números reais e produz a partir deles um único número real.

Definição 1

Dado $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, chamamos ***função real de n variáveis reais*** [a] ***de domínio*** *$\mathcal{D}$ a toda a correspondência que associa de forma única a cada elemento de $\mathcal{D}$ um número real. Notação:*

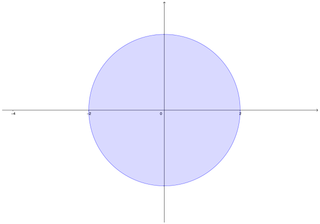
$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}$$

[a] ou campo escalar de n variáveis.

Exemplo 1

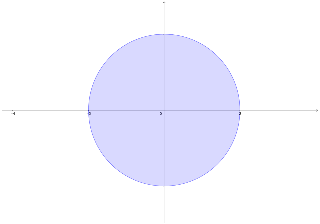
Exemplo 1

Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$ representado por



Exemplo 1

Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$ representado por



A cada ponto (x, y) pertencente a $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, podemos fazer corresponder um número $z \in \mathbb{R}$, dado por

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Neste caso estamos diante de uma função de duas variáveis reais denotada por

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{array}$$

Neste caso estamos diante de uma função de duas variáveis reais denotada por

$$\begin{array}{rcl} f:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2} \end{array}$$

O domínio desta função é o conjunto $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2$, isto é, o conjunto de pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, tais que

$$4-x^2-y^2\geq 0 \qquad ou \qquad x^2+y^2\leq 4$$

Neste caso estamos diante de uma função de duas variáveis reais denotada por

$$\begin{array}{rcl} f:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2} \end{array}$$

O domínio desta função é o conjunto $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2$, isto é, o conjunto de pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, tais que

$$4-x^2-y^2\geq 0 \qquad ou \qquad x^2+y^2\leq 4$$

Escrevemos,

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 4\right\}.$$

Exemplo 2

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$f(x, y) = ln(x - y)$$

Exemplo 2

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$f(x, y) = ln(x - y)$$

A função $f(x, y) = ln(x - y)$ é uma função de duas variaveis. Portanto, o seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$f(x,y) = ln(x-y)$$

A função $f(x,y) = ln(x-y)$ é uma função de duas variaveis. Portanto, o seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.
Sabemos que $ln(x-y)$ é um número real quando

Exemplo 2

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$f(x,y) = ln(x-y)$$

A função $f(x,y) = ln(x-y)$ é uma função de duas variaveis. Portanto, o seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.
Sabemos que $ln(x-y)$ é um número real quando

$$x - y > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > y$$

Exemplo 2

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$f(x, y) = ln(x - y)$$

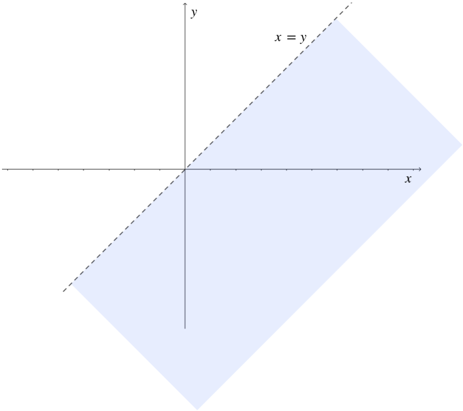
A função $f(x, y) = ln(x - y)$ é uma função de duas variaveis. Portanto, o seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.
Sabemos que $ln(x - y)$ é um número real quando

$$x - y > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > y$$

Logo, o domínio da função é

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x > y\right\}.$$

O seguinte gráfico mostra a região de $\mathbb{R}^2$ que representa graficamente D_f


y
x = y
x

Exemplo 3

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$g(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Exemplo 3

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$g(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem ao domínio de g devem satisfazer que

Exemplo 3

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem ao domínio de g devem satisfazer que

$$x^2 - y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y) > 0$$

Exemplo 3

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem ao domínio de g devem satisfazer que

$$x^2 - y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y) > 0$$

Logo, o domínio da função é

Exemplo 3

Determine e descreva geometricamente o domínio da função:

$$g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem ao domínio de g devem satisfazer que

$$x^2 - y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y) > 0$$

Logo, o domínio da função é

$$D_g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)(x+y) > 0\right\}.$$

Representação gráfica.

Representação gráfica.

$(x-y)(x+y)>0$ é um número real positivo quando

Representação gráfica.

$(x-y)(x+y)>0$ é um número real positivo quando

$$(x-y)>0 \;\; e \;\; (x+y)>0 \qquad ou \qquad (x-y)<0 \;\; e \;\; (x+y)<0$$

Representação gráfica.

$(x - y)(x + y) > 0$ é um número real positivo quando

$$(x - y) > 0 \ \ e \ \ (x + y) > 0 \qquad ou \qquad (x - y) < 0 \ \ e \ \ (x + y) < 0$$

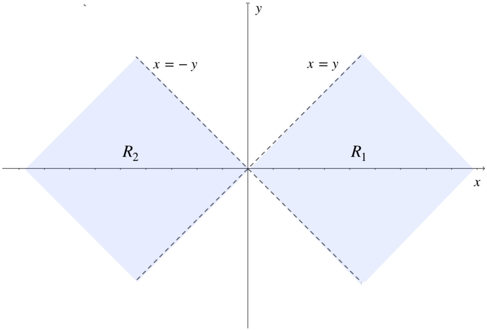


Figura: R_1 é definida pela primeira condição, R_2 é definida pela segunda condição.

Definição 2

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Ao conjunto*

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o ***contradomínio de f*** *.*

Definição 2

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Ao conjunto*

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o ***contradomínio de f*** *.*

Exemplo 4

Encontre o domínio e contradomínio da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Definição 2

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Ao conjunto*

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o ***contradomínio de f*** *.*

Exemplo 4

Encontre o domínio e contradomínio da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

O domínio da função f *é todo* $\mathbb{R}^2$*, isto é,*

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

Definição 2

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Ao conjunto*

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o ***contradomínio de f*** *.*

Exemplo 4

Encontre o domínio e contradomínio da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

O domínio da função f *é todo* $\mathbb{R}^2$*, isto é,*

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

O contradomínio da função f *é*

$$CD_f = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$$

Definição 3

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Ao conjunto*

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, ..., x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ z = f(x_1, ..., x_n), \ com \ (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o ***gráfico de*** f**.**

Definição 3

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Ao conjunto*

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, ..., x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ z = f(x_1, ..., x_n), \ com \ (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}\}$$

*chamamos o **gráfico de** f.*

Exemplo 5

No exemplo 1 vimos que o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *é o conjunto*

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

O contradomínio de f é

$$CD_f = [0, 2].$$

Definição 3

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Ao conjunto*

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, ..., x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ z = f(x_1, ..., x_n), \ \textit{com}\ (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o ***gráfico de*** f***.***

Exemplo 5

No exemplo 1 vimos que o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *é o conjunto*

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

O contradomínio de f *é*

$$CD_f = [0, 2].$$

O gráfico dessa função é o conjunto

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

e, geometricamente, representa o hemisfério superior da esfera de centro na origem e raio 2.

e, geometricamente, representa o hemisfério superior da esfera de centro na origem e raio 2.

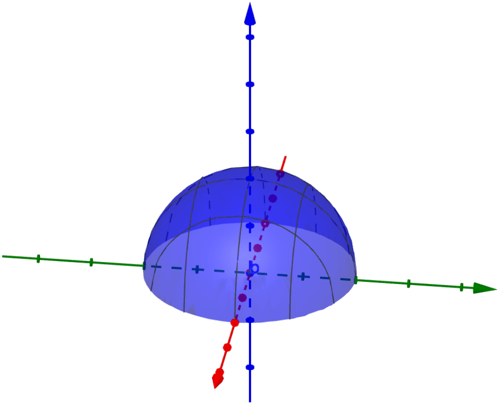


Figura: Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Observação 1

Se a função em questão depender de mais do que duas variáveis, o gráfico é um conjunto de pontos num espaço de dimensão maior do que 3*, que não podemos visualizar.*

Observação 1

Se a função em questão depender de mais do que duas variáveis, o gráfico é um conjunto de pontos num espaço de dimensão maior do que 3*, que não podemos visualizar.*

Definição 4

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Ao conjunto*

$$\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D} : \; f(x_1, x_2, ..., x_n) = k\}$$

chamamos ***conjunto de nível*** k ***de*** f*.*
Para $n = 2$*, o conjunto* $\mathcal{N}_k$ *passa a denotar-se por* $\mathcal{C}_k$ *e a designar-se por* ***curva de nível*** k ***de*** f*.*
Para $n = 3$*, o conjunto* $\mathcal{N}_k$ *passa a denotar-se por* $\mathcal{S}_k$ *e a designar-se por superfície de nível* k *de* f*.*

Observação 1

Se a função em questão depender de mais do que duas variáveis, o gráfico é um conjunto de pontos num espaço de dimensão maior do que 3*, que não podemos visualizar.*

Definição 4

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Ao conjunto*

$$\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D} : \ f(x_1, x_2, ..., x_n) = k\}$$

chamamos ***conjunto de nível*** k ***de*** f*.*
Para $n = 2$*, o conjunto* $\mathcal{N}_k$ *passa a denotar-se por* $\mathcal{C}_k$ *e a designar-se por* ***curva de nível*** k ***de*** f*.*
Para $n = 3$*, o conjunto* $\mathcal{N}_k$ *passa a denotar-se por* $\mathcal{S}_k$ *e a designar-se por superfície de nível* k *de* f*.*

Nota 1

Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Nota 1

Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplo 6

Para a função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *do exemplo 1, algumas curvas de nível são:*

Nota 1

Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplo 6

Para a função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *do exemplo 1, algumas curvas de nível são:*

$$\mathcal{C}_0 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 4;$$

Nota 1

Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplo 6

Para a função $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *do exemplo 1, algumas curvas de nível são:*

$$\mathcal{C}_0 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 4;$$

$$\mathcal{C}_1 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 3;$$

Nota 1

Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplo 6

Para a função $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *do exemplo 1, algumas curvas de nível são:*

$$\mathcal{C}_0 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 = 4;$$

$$\mathcal{C}_1 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 1 \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 = 3;$$

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 = \frac{15}{4};$$

Nota 1

Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplo 6

Para a função $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *do exemplo 1, algumas curvas de nível são:*

$$\mathcal{C}_0 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 4;$$

$$\mathcal{C}_1 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 3;$$

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = \frac{15}{4};$$

$$\mathcal{C}_{\frac{4}{3}} : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = \frac{20}{9};$$

$$\mathcal{C}_{\frac{3}{2}} : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{7}{4};$$

$$\mathcal{C}_{\frac{3}{2}} : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = \frac{7}{4};$$

$$\mathcal{C}_2 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 \;\Leftrightarrow\; x = y = 0$$

$$\mathcal{C}_{\frac{3}{2}} : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = \frac{7}{4};$$

$$\mathcal{C}_2 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 \;\Leftrightarrow\; x = y = 0$$

Para $k < 0$ e $k > 2$, as curvas de nível $\mathcal{C}_k$ são conjuntos vazios.

$$\mathcal{C}_{\frac{3}{2}} : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = \frac{7}{4};$$

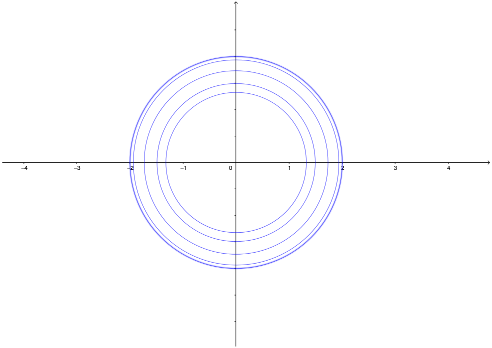
$$\mathcal{C}_2 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 \;\Leftrightarrow\; x = y = 0$$

Para $k < 0$ e $k > 2$, as curvas de nível $\mathcal{C}_k$ são conjuntos vazios.
A figura a seguir mostra as curvas de nível da função f, determinadas anteriormente.

$$\mathcal{C}_{\frac{3}{2}} : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{7}{4};$$

$$\mathcal{C}_2 : \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Para $k < 0$ e $k > 2$, as curvas de nível $\mathcal{C}_k$ são conjuntos vazios.
A figura a seguir mostra as curvas de nível da função f, determinadas anteriormente.



Exemplo 7

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x, y) = 4 - y^2$.

O domínio da função é : $D_g = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 7

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x, y) = 4 - y^2$.

O domínio da função é : $D_g = \mathbb{R}^2$.

O contradomínio da função é $CD_g =]-\infty, 4]$

Exemplo 7

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x, y) = 4 - y^2$.

O domínio da função é : $D_g = \mathbb{R}^2$.

O contradomínio da função é $CD_g =]-\infty, 4]$

O gráfico da função é $\mathcal{G}_g = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - y^2\right\}$ *(cilindro parabólico).*

Exemplo 7

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x, y) = 4 - y^2$.

O domínio da função é : $D_g = \mathbb{R}^2$.

O contradomínio da função é $CD_g =]-\infty, 4]$

O gráfico da função é $\mathcal{G}_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - y^2\}$ *(cilindro parabólico).*

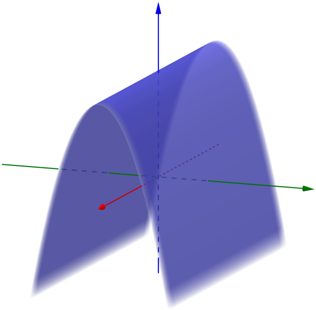


Figura: *Gráfico de* $g(x, y) = 4 - y^2$.

Para $k \leq 4$, a curva de nível k de g é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k = 4 - y^2\right\}$$

Para $k \leq 4$, a curva de nível k de g é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k = 4 - y^2\right\}$$

Trata-se da união de duas retas de equações $y = \sqrt{4 - k}$ e $y = -\sqrt{4 - k}$.

Para $k \leq 4$, a curva de nível k de g é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k = 4 - y^2\right\}$$

Trata-se da união de duas retas de equações $y = \sqrt{4-k}$ e $y = -\sqrt{4-k}$.

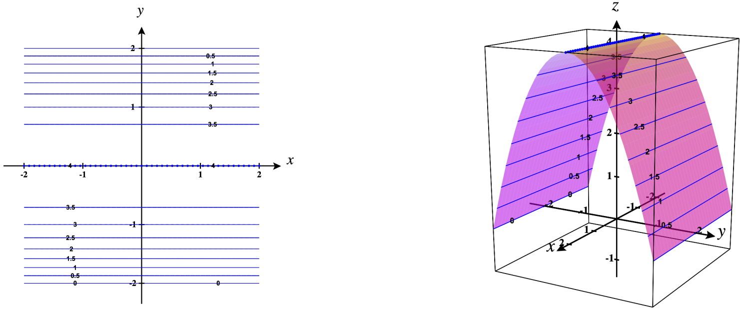


Figura: Curvas de nível de $g(x, y) = 4 - y^2$.

Exemplo 8

Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x, y) = x^2 - y^2$.

Exemplo 8

Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x, y) = x^2 - y^2$.

O domínio da função é : $D_g = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 8

Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x, y) = x^2 - y^2$.

O domínio da função é : $D_g = \mathbb{R}^2$.

O contradomínio da função é $CD_g = \mathbb{R}$.

Exemplo 8

Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x, y) = x^2 - y^2$.

O domínio da função é : $D_g = \mathbb{R}^2$.

O contradomínio da função é $CD_g = \mathbb{R}$.

O gráfico da função é $\mathcal{G}_g = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\right\}$ *(paraboloíde hiperbólico).*

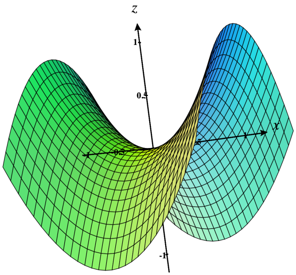


Figura: *Gráfico de* $h(x, y) = x^2 - y^2$.

Exemplo 9

As curvas de nível de h são

Exemplo 9

As curvas de nível de h são

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ k = x^2 - y^2\right\}, \ \textit{com } k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 9

As curvas de nível de h são

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ k = x^2 - y^2\right\}, \ \textit{com } k \in \mathbb{R}.$$

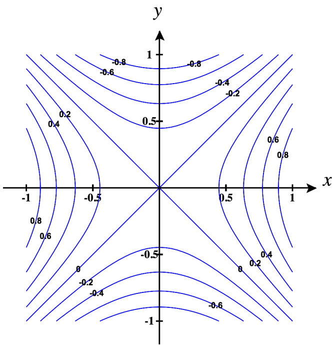
A curva de nível k *é, para* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *a hipérbole de equação* $x^2 - y^2 = k$ *e, para* $k = 0$, *a reunião das duas retas de equações* $y = x$ *e* $y = -x$.

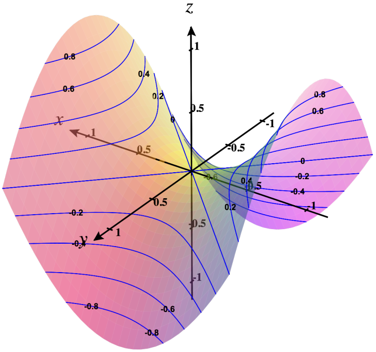
Exemplo 9

As curvas de nível de h são

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ k = x^2 - y^2\right\}, \ \textit{com } k \in \mathbb{R}.$$

A curva de nível k é, para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = k$ e, para $k = 0$, a reunião das duas retas de equações $y = x$ e $y = -x$.





Exercício 1

1. *Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.*
   (a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$.
   (b) $g(x,y) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$.
   (c) $h(x,y) = \dfrac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$.
2. *Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.*
   (a) $f(x,y) = 2-\left(x^2+y^2\right),\ k = -3,-2,-1,0,1,2.$
   (b) $h(x,y) = 2x^2+4y^2,\ k = 2,3,4,8.$
   (c) $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2.$