Sessão 12 (aula 20) TP4-9

Sumário:

Continuação do assunto da aula anterior.
Problema de condições iniciais (PVI) e problema de condições de fronteira (PVF). Exemplos.
Equações de variáveis separáveis/separadas (como identificá-las) e integral geral.
Resolução de EDO de variáveis separáveis. Exemplos e exercícios.
Tarefas 5 (Noções básicas sobre EDO) e 6(EDO de variáveis separáveis)
Equações diferenciais ordinárias lineares (EDOL) de ordem 1: resolução por fator integrante.

EDO – Introdução, Conceitos e Terminologia

Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

Integral Particular (ou solução particular): Solução que faz parte do integral geral;

Solução Singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral;

Solução Geral: Conjunto de todas as soluções.

EDO – Introdução, Conceitos e Terminologia

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0$.

- Determinação de um integral geral:

$$\begin{aligned}(y')^2 - 4y &= 0\\ y' &= 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0\end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned}(y')^2 &= 4y\\ y'(y)^{-\frac{1}{2}} &= 2, \quad y > 0\end{aligned}$$

integrando em ordem a x,

$$\int y'(y)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int 2\,dx,\ y > 0.$$ vimos na aula passada.

determinando as primitivas e simplificando, obtem-se o seguinte integral geral: $y = (x+C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$;

- Notar que $y = 0$ é também solução da EDO, mas não pertence ao integral geral obtido, esta solução é uma solução singular da EDO (em relação ao referido integral geral).
- Tomando no integral geral C=0 e C=1, obtem-se duas soluções particulares: $y = x^2$ e $y = (x+1)^2$, respetivamente.

$y = (x+c)^2, \ c \in \mathbb{R}$

se $y = 0$, $y' = 0$ logo $\underbrace{(0)}_{y'}^2 - 4 \cdot \underbrace{0}_{y} = 0$ Verdade

Portanto $y = 0$ é solução da EDO, não faz parte da família de soluções:

$y = (x+c)^2, \ c \in \mathbb{R}$.

conclusão, $y = 0$ é solução singular (relativamente ao int. geral)

Exercícios/exemplos:

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em $\mathbb{R}$) das equações diferenciais dadas:

(b) $z = \cos x$ $\qquad\qquad z'' + z = 0$;

$z' = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

$z'' = (-\operatorname{sen} x)' = -\cos x$

como $z'' + z = \underbrace{-\cos x + \cos x}_{=0}, \ \forall x \in \mathbb{R}$, z é solução da EDO.

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

(a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);
(b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);

(a) $y = \underbrace{C}_{\text{uma constante}}x, \ C \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ ordem 1

$y' = (Cx)' = C$. Logo, $\boxed{y = y'x}$ EDO de ordem 1 com integral geral dado.

(b) $y = Ax + B$ a ordem de EDO deve ser 2.

$y' = A$

$\boxed{y'' = 0}$ EDO de ordem 2 com integral geral dado.

$\boxed{y'' = 0}$ EDO de ordem 2 com integral geral dado.

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \operatorname{sen} x = 0$.
(b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.

$\boxed{y^{(p)} = f(x)}$

4(a) $y'' - \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow y'' = \operatorname{sen} x$

$\Leftrightarrow y' = \int \operatorname{sen} x \, dx$

$\Leftrightarrow y' = -\cos x + A \quad , A \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = \int (-\cos x + A) \, dx$

$\Leftrightarrow \boxed{y = -\operatorname{sen} x + Ax + B \quad , A, B \in \mathbb{R}}$

solução geral da EDO

(b) $\varphi(x) = 2x - \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x + \underbrace{2x}_{A} + \underbrace{0}_{B}$

logo $\varphi(x)$ faz parte da solução geral. Mais,

$\varphi(0) = 2.0 - \operatorname{sen}(0) = 0$ ✓

$\varphi'(x) = 2 - \cos x$

$\varphi'(0) = 2 - \cos(0) = 1$ ✓

ou/ Para que φ seja solução é da forma:

$\varphi(x) = -\operatorname{sen} x + Ax + B$, para algum $A, B \in \mathbb{R}$

Pretendemos que

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\operatorname{sen}(0) + A.0 + B = 0 \\ A - \cos(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = 2 \end{cases}$$

c.A. $\varphi'(x) = -\cos(x) + A$

logo $\varphi(x) = -\operatorname{sen} x + 2x$ é solução e satisfez as condições dadas.

Problemas de Valores Iniciais e Problemas de Valores na Fronteira

Problema de valores iniciais

Definição:

Chama-se problema de valores iniciais (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Exemplo:

$y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

Isabel Brás (UA, 27/4/2020) 5. Equações Diferenciais Ordinárias Cálculo II – Agrup. IV 19/20 10 / 45

$$\begin{cases} y'' - \operatorname{sen} x = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

P.V.I ou P.C.I

$$\begin{cases} y'' + x = 0 ✓ \\ y(0) = 1 ✓ \\ y'(0) = 0 ✓ \end{cases}$$

Verificação: $y = -\frac{x^3}{6} + 1$

$y(0) = -\frac{0}{6} + 1 = 1$ ✓

$y'(x) = -\frac{3}{6}x^2$

$y'(0) = 0$ ✓

$(y(0) = 0$ ✓

$y'(x) = -\frac{3}{6}x^2$

$y'(0) = 0$ ✓

$y'(x) = -\frac{1}{2}x^2$

$y''(x) = -x$ logo $y''(x) + x = 0$ ✓

logo $y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é uma solução do P.V.I.

Existência e Unicidade de Solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, i.e., do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

Problema de valores na fronteira

Definição:
Chama-se problema de valores na fronteira (ou problema de fronteira) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo:
O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

$y'' = -x$

$y' = -\frac{x^2}{2} + C$

$y = -\frac{x^3}{6} + Cx + D, \quad C, D \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} C = ? \\ D = ? \end{cases}$

Equações de variáveis separáveis

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para p e q dependentes apenas de x e de y, respetivamente.

Determinação dum integral geral

1. Escrever a equação na forma:
$$y'q(y) = p(x) \qquad (1)$$
2. Integrar ambos os membros de (1), para obter um integral geral da equação na seguinte forma implícita:
$$Q(y) = P(x) + C, \; C \in \mathbb{R},$$
onde $Q(y)$ é uma primitiva de $q(y)$ e $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$.

Justificação do método

$y' = \frac{p(x)}{q(y)} \qquad q(y) \neq 0$

$y'q(y) = p(x) \qquad y(x)$

$\int \underbrace{y'q(y)\,dx}_{dy} = \int p(x)\,dx$

Nota que: $\frac{dy}{dx} = y'(x)$, $dy = y'dx$

$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$

$\boxed{Q(y) = P(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}}$

em vez de:

$\frac{dy}{dx} q(y) = p(x)$

$q(y)\,dy = p(x)\,dx$

$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$

chega-se ao mesmo ponto

Exemplo 1: $y' = \frac{1}{y}e^x, y \neq 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$yy' = e^x$$

Integrando em ordem a x, que é o mesmo que:

$$\int y\,dy = \int e^x\,dx,$$

obtem-se $\frac{y^2}{2} = e^x + K$, $K \in \mathbb{R}$ e portanto

$$y^2 = 2e^x + C, \; C \in \mathbb{R}$$

é um integral geral da EDO.

$y' = \frac{1}{y}e^x \Leftrightarrow y' = \frac{\overbrace{e^x}^{p(x)}}{\underbrace{y}_{q(y)}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}e^x, \quad y \neq 0$

$y\,dy = e^x\,dx$

$\int y\,dy = \int e^x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$$y^2 = 2e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

é um integral geral da EDO.

$$\int y\,dy = \int e^x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = 2e^x + 2C,\ C \in \mathbb{R}$$

Integral geral $\boxed{y^2 = 2e^x + K,\ K \in \mathbb{R}}$

Exemplo 2: $y' + xy = 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$\frac{1}{y}y' = -x, \quad \text{para } y \neq 0,$$

integrando,

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int x\,dx,$$

obtem-se, sucessivamente

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + K,\ K \in \mathbb{R} \\ |y| &= e^{-\frac{x^2}{2}+K} \\ |y| &= Ae^{-\frac{x^2}{2}},\ A \in \mathbb{R}^+ \\ y &= Be^{-\frac{x^2}{2}},\ B \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{aligned}$$

Como $y = 0$ também é solução da EDO, obtem-se o integral geral:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}.$$

$$y' + xy = 0 \Leftrightarrow y' = -xy \quad y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{\overset{p(x)}{-x}}{\underset{q(y)}{\frac{1}{y}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\frac{1}{y}}$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int (-x)\,dx$$

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-x^2/2 + C}$$

$$|y| = e^C e^{-x^2/2}$$

$$|y| = K e^{-x^2/2},\ K \in \mathbb{R}^+$$

$$(*) \quad y = A e^{-x^2/2},\ A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$y = 0$ é solução da EDO, pois $\underbrace{0}_{y'} + x \cdot \underbrace{0}_{y} = 0$. Logo, podemos juntar $y = 0$ a $(*)$.

Integral geral: $y = A e^{-x^2/2},\ A \in \mathbb{R}$.

Exercício:

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

(b) $xy' - y = 0$;

$$xy' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \qquad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{1/x}{\frac{1}{y}} \qquad y \neq 0,\ x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

integrando,

$$\int \underbrace{y' \frac{1}{y}\,dx}_{dy} = \int \frac{1}{x}\,dx \quad \ldots$$

completar!

ou

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

ou

$$x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$x\,dy - y\,dx = 0 \quad \times \frac{1}{xy}, \; x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

$$\frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C, \; C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + C}, \; C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{C} e^{\ln|x|}, \; C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = k\,|x|, \; k \in \mathbb{R}^+$$

$$y = A\,x, \; A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Como $y=0$ é também solução, um integral geral da EDO é

$$y = Ax, \; A \in \mathbb{R}.$$

TPC:
Tarefa 5

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em $\mathbb{R}$) das equações diferenciais dadas:

   (a) $y = \operatorname{sen} x - 1 + e^{-\operatorname{sen} x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$;

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A\operatorname{sen}(x+B) \qquad \text{com} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

   (c) $y' - \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0$.

TPC
Tarefa 6:

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

   (a) $x + yy' = 0$;

   (d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$.

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

   (a) $xy' + y = y^2$, $\quad y(1) = 1/2$;

EDO Lineares de Primeira Ordem

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I, com $\boxed{a_0(x) \neq 0}$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$\boxed{y' + p(x)\,y = q(x).}$$

Quando $b \equiv 0$ ($q \equiv 0$), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

Exemplos:
- $y' + xy = 1$ equação diferencial linear de 1.ª ordem completa.
- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.ª ordem incompleta (ou homogénea).

Note que, se $q \equiv 0$ ou se p e q forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

Isabel Brás (UA, 13/5/2020) 5. Equações Diferenciais Ordinárias Cálculo II – Agrup. IV 19/20 18 / 45

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

$$y' + \underbrace{\boxed{\frac{a_1(x)}{a_0(x)}}}_{p(x)} y = \underbrace{\boxed{\frac{b(x)}{a_0(x)}}}_{q(x)}$$

Exemplo:

$b(x)$

- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.ª ordem incompleta (ou homogénea).

Note que, se $q \equiv 0$ ou se p e q forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

$y' + xy = 1$

$\boxed{y' + xy = 0}$

existe relação entre as EDO

↳ EDO de variáveis separáveis.

Exemplo:

$$\boxed{x^2}\,\boxed{y'} + 1 \cdot \boxed{y} = \boxed{\operatorname{sen} x} \quad b(x)$$

$x \neq 0$

$$y' + \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2}}}_{p(x)} y = \underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}}}_{q(x)}$$

EDO Linear de Primeira Ordem

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Para resolver a equação
$$y' + p(x)\,y = q(x),$$
pode multiplicar-se ambos os membros pelo fator integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$, e integrar de seguida em ordem a x.

Exemplo 1: A EDO do Slide 15, $y' + xy = 0$, que resolvemos como equação de variáveis separáveis, é uma EDO linear de 1.ª ordem. Podemos resolvê-la, mais rapidamente, usando o fator integrante $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x)$ obtemos
$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + e^{\frac{x^2}{2}} xy = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right) = 0.$$
Integrando vem
$$e^{\frac{x^2}{2}} y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
Assim, um integral geral da equação linear é
$$y = C e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Justificação do método:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$p(x)$ tem $P(x)$ como primitiva.

considere-se $\mu(x) = e^{P(x)}$.

$$\underbrace{e^{P(x)} y' + p(x)\, e^{P(x)} y}_{\left(e^{P(x)} y\right)'} = e^{P(x)} q(x)$$

$$\left(e^{P(x)} y\right)' = e^{P(x)} q(x)$$

$$e^{P(x)} y = \int e^{P(x)} q(x)\, dx$$

⋮

Exemplo: $y' + \underbrace{\boxed{x}}_{p(x)} y = 0$

c.A.

$$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Multiplicando ambos os membros da EDO por $\mu(x)$:

$$\underbrace{e^{\frac{x^2}{2}} y' + x\, e^{\frac{x^2}{2}} y}_{\left(e^{x^2/2} y\right)'} = 0 \cdot e^{x^2/2}$$

$$\left(e^{x^2/2} y\right)' = 0$$

integrando

$$e^{x^2/2} y = A, \quad A \in \mathbb{R}$$

$$y = A\, e^{-x^2/2}, \quad A \in \mathbb{R}$$