# Sessão 14 (aula 22) TP4-9

Sumário:

EDO lineares de ordem arbitrária; nomenclatura e exemplos.
Solução geral de uma EDO linear completa:
(solução particular) +(solução geral da homogénea associada)
Caracterização do conjunto das soluções de uma EDO linear homogénea como espaço vetorial real, sistema fundamental de soluções: Wronskiano e Wronskiana. Exemplo.
EDO lineares de coeficientes constantes, determinação da solução geral de equações homogéneas usando o polinómio característico.



## Equações Lineares de Ordem Arbitrária: coeficientes

$$\underbrace{a_0(x)}_{\neq 0}\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

→ De ordem $n$

→ termo independente: nulo (EDOL homogénea); não nulo (EDOL completa)

onde

$b\colon I \to \mathbb{R}$;

$a_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

↓

coeficientes da equação

- Se $b = 0$, a equação diz-se incompleta (ou homogénea); Caso contrário, a equação diz-se completa (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de linear de coeficientes constantes.



Exemplos:

(1) $y^{(4)} + x^2 y^{(3)} + \cos x\, y^{(1)} + y = \operatorname{sen} x$

EDOL completa

(2) $y^{(4)} + x^2 y^{(3)} + \cos x\, y' + y = 0$

EDOL homogénea



## Exemplos

1.
$$1\,\frac{d^2x}{dt^2} + 1\,x = 0$$
EDO linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes;

2. coeficientes
$$e^x y' - \cos x\, y = x \quad b(x)$$
EDO linear completa de primeira ordem;

3.
$$1\cdot y^{(5)} - 2y' = 0 \quad b(x)$$
EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.





## Equação homogénea associada a uma EDO linear

Se na equação

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

tomarmos $b(x) = 0$, obtemos a chamada equação homogénea associada.

Exemplo:

A equação homógenea associada à equação completa

$$y'' + y = \cos(x)$$

é a equação:

$$y'' + y = 0\,.$$

## Solução geral de uma EDO linear completa

**Teorema:**
A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

**Exemplo:**
$$y' - 2y = e^{5x}.$$
A equação homogénea associada é a equação
$$y' - 2y = 0\,,$$
cuja solução geral é dada por $y_h = C\,e^{2x}$, com $C \in \mathbb{R}$. Uma solução da EDO completa é $y_p = \frac{1}{3}e^{5x}$ [Verifique!]. Assim, a solução geral da equação completa é
$$y = \underbrace{C\,e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3}e^{5x}}_{y_p}\,,\quad C \in \mathbb{R}.$$



$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

$y_p$ → uma solução da EDOL completa

$y_h$ → solução geral da homogénea associada

→ solução geral da EDOL completa

Exemplo do slide:

(1) EDOL homogénea associada: $y' \overset{p(x)}{-2} y = 0$

usando o fator integrante $\mu(x) = e^{-2x}$,

$$e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = 0\cdot e^{-2x}$$

$$(e^{-2x}y)' = 0$$

Integrando ↓

$$e^{-2x}y = c\,,\quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = c\,e^{2x}\,,\quad c \in \mathbb{R}$$

Logo,

$y_h = c\,e^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$ é a solução geral da EDOL homogénea.

(2) Encontrar uma solução de

$$y' - 2y = e^{5x}. \quad (*)$$

Tento encontrar $y_p = K e^{5x}$, $K \in \mathbb{R}$.

$$y_p' = K\cdot 5\cdot e^{5x}$$

substituindo em $(*)$:

$$5K e^{5x} - 2K e^{5x} = e^{5x}$$

$$3K e^{5x} = e^{5x}$$

$$K = \frac{1}{3}$$

Assim, $y_p = \frac{1}{3}e^{5x}$ é uma solução particular da EDOL.

<u>Conclusão:</u>

A solução geral da EDOL (completa) é

A solução geral da EDOL (completa) é

$$y = \underbrace{c e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3} e^{5x}}_{y_p}, \quad c \in \mathbb{R}.$$



## EDO linear homogénea – Conjunto das soluções

Considere-se a EDO:

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

onde $a_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema:

Sejam $y : I \to \mathbb{R}$, $w : I \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $y = 0$ é solução de (1);

(ii) Se $y$ e $w$ são soluções de (1), então $y + w$ é solução de (1);

(iii) Se $y$ é solução de (1), então $\alpha y$ é solução de (1);

Isto é, o conjunto das soluções de (1) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em $I$.





## EDO linear homogénea – Conjunto das soluções (cont.)

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem $n$

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

num dado intervalo $I$ ($a_0, a_1, \ldots a_n$ contínuas em $I$; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite $n$ soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, linearmente independentes e qualquer sua solução, $y$, pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

solução geral $y = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n$, para $C_j \in \mathbb{R}$.

Qualquer conjunto de $n$ soluções linearmente independente de uma EDO linear homogénea de ordem $n$ é designado por sistema fundamental de soluções dessa equação. Na verdade, de acordo com o teorema anterior, um sistema fundamental de soluções é uma base do subespaço vetorial das soluções da EDOL homógenea.



é o mesmo que dizer que esse subespaço das soluções tem dimensão $n$ (ordem da EDOL)

$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ conjunto de soluções l.i. chama-se sistema fundamental de soluções.

Recordando a ind. linear:

$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ são l.i sse

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0, \ \forall x \in I \Rightarrow \alpha_i = 0, i = 1, \ldots, n$$

Exemplo:

$$\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = \cos x, \ x \in \mathbb{R}$$

se $\alpha_1 \operatorname{sen} x + \alpha_2 \cos(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

$x = 0$: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Logo $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é linearmente independente.

ou

o $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é linearmente independente.

ou

Derivando ↓ $\alpha_1 \operatorname{sen} x + \alpha_2 \cos(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 \cos x - \alpha_2 \operatorname{sen} x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\operatorname{sen} x}^{\varphi_1} & \overbrace{\cos x}^{\varphi_2} \\ \underbrace{\cos x}_{\varphi_1'} & \underbrace{-\operatorname{sen} x}_{\varphi_2'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\det W(\varphi_1, \varphi_2)}_{\text{Wronskiano}} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

Wronskiana

Logo, de $(*)$, vem $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.



## Conjunto fundamental de soluções— matriz Wronskiana

**Proposição:**
Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluções de uma EDOL homogénea de ordem $n$, nas condições do slide anterior. $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ é um conjunto fundamental de soluções se e só se a matriz

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

é invertível, para todo o $x \in I$.

A matriz $\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ é designada por matriz Wronskiana e ao seu determinante chama-se Wronskiano.





**Exemplo:**

$$y'' + y = 0 \qquad (2)$$

$\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \operatorname{sen} x$ são soluções desta equação (Ver slide 7).
Como $\mathcal{W}(\operatorname{sen} x, \cos x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$ é invertível, o Wronskiano é igual a 1,

$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ é sistema fundamental de soluções de (2).

Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 \underbrace{\cos x}_{\varphi_1} + C_2 \underbrace{\sin x}_{\varphi_2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



Como encontrar, no exemplo, $\varphi_1$ e $\varphi_2$?

$1.y'' + 1.y^{(0)} = 0$ EDOL com coeficientes constantes

Associando à EDO um polinómio:

$P(r) = r^2 + 1$ polinómio característico

$P(r) = 0 \Leftrightarrow r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = i \vee r = -i$

Observação:
Para estes polinómios as raízes complexas são sempre pares de raízes conjugadas:

$$r = \overset{0}{\alpha} \pm \underset{1}{\beta} i$$

Para o par de raízes vamos fazer corresponder as soluções:

$$e^{0x} \cos(1x) \quad \text{e} \quad e^{0x} \operatorname{sen}(1x)$$

soluções:

$$\underbrace{e^{0x}\cos(1x)}_{\varphi_1(x)=\cos(x)} \quad \text{é} \quad \underbrace{e^{0x}\operatorname{sen}(1x)}_{\varphi_2(x)=\operatorname{sen} x}$$



## Observações:

1. A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
2. Se a EDO linear homogénea tiver coeficientes constantes, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico (ver slides seguintes).





## EDO linear homogénea com coeficientes constantes

EDO linear homogénea de ordem $n$ com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0\,,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$.
Polinómio associado (polinómio caraterístico):

$$P(r) = a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n$$

As $n$ raízes do polinómio P(r) permitem determinar $n$ soluções linearmente independentes da equação homógenea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homógenea.



Exemplos:

1) $y'' + 2y' + 3 = 0$

$P(r) = r^2 + 2r + 3$

(2) $3y^{(7)} + 5y^{(3)} - 2y' = 0$

$P(r) = 3r^7 + 5r^3 - 2r$

Voltando ao exemplo (1):

$P(r) = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r + 3 = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 3}}{2}$

$\Leftrightarrow r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$

$\Leftrightarrow r = \dfrac{-2 + \sqrt{8}\, i}{2} \vee r = \dfrac{-2 - \sqrt{8}\, i}{2}$

$\Leftrightarrow r = -1 + \sqrt{2}\, i \vee r = -1 - \sqrt{2}\, i$

Logo, um conjunto fundamental de soluções é

$\{\varphi_1, \varphi_2\}$

onde $\varphi_1(x) = e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)$ e $\varphi_2(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$



Construção dum sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) da EDO linear com coeficientes constantes e homogénea:

Que tipo de raízes pode ter P(r):

Construção dum sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) da EDO linear com coeficientes constantes e homogénea:

Considerem-se as raízes de P(r) identificadas e para cada uma delas real e para cada par delas complexas (se existirem) proceda-se à seguinte associação de soluções (no final do processo ter-se-à $n$ soluções linearmente independentes):

- 1.º Caso: A raíz, $r$, é real simples.
  Solução: $e^{rx}$
- 2.º Caso: A raíz, $r$, é real de mutiplicidade $k$.
  Soluções: $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}$
- 3.º Caso: As raízes são complexas conjugadas simples, $\alpha+\beta i$ e $\alpha-\beta i$.
  Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$
- 4.º Caso: As raízes são complexas conjugadas, $\alpha+\beta i$ e $\alpha-\beta i$, com multiplicidade $k$.
  Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$,
  $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),\ x e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$



Que tipo de raízes pode ter $P(r)$:

→ raiz real simples
→ raiz real com multiplicidade K

→ par de raízes complexas simples
→ " " " com multiplicidade K



Exemplo: $y^{(5)}+2y^{(4)}+4y^{(3)}+8y^{(2)}+4y'+8y=0$

Polinómio característico: $r^5+2r^4+4r^3+8r^2+4r+8$

Raízes do polinómio característico: $-2$ (simples); $i\sqrt{2}$ e $-i\sqrt{2}$, raízes duplas;

Sistema fundamental de soluções:
$\{e^{-2x},\ \cos(\sqrt{2}x),\ x\cos(\sqrt{2}x),\ \operatorname{sen}(\sqrt{2}x),\ x\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\}$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = B e^{-2x} + (C_1+C_2x)\cos(\sqrt{2}x) + (D_1+D_2x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x),$$

com $B, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.



$P(r) = r^5+2r^4+4r^3+8r^2+4r+8$

$P(-2) = (-2)^5+2(-2)^4+4(-2)^3+8(-2)^2+4(-2)+8$
$= 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 1 & 2 & 4 & 8 & 4 & 8 \\
-2 & & -2 & 0 & -8 & 0 & -8 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 = R
\end{array}$$

$P(r) = (r+2)(r^4+4r^2+4)$
$= (r+2)(r^2+2)^2$

$P(r)=0 \Leftrightarrow r=-2 \vee r^2+2=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{r=-2}_{\text{raiz simples}} \vee \underbrace{r=\pm\sqrt{2}i}_{\text{raízes duplas}}$

Raiz/pares raízes de $P(r)$ — solução do S.F.S.

$r=-2$ (simples) — $e^{-2x}$

$r=0\pm\sqrt{2}i$ (dupla) — $\cos(\sqrt{2}x)$, $\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$, $x\cos(\sqrt{2}x)$, $x\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$

Um S.F. de S. da EDOL é
$\{e^{-2x}, \cos(\sqrt{2}x), \operatorname{sen}(\sqrt{2}x), x\cos(\sqrt{2}x), x\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\}$

Logo, a solução geral da EDOL é
$y = c_1e^{-2x} + c_2\cos(\sqrt{2}x) + c_3\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + c_4x\cos(\sqrt{2}x) + c_5x\operatorname{sen}(\sqrt{2}x),\ c_i\in\mathbb{R}$

Exercícios:
Determine a solução geral das seguintes EDOL:

(1) $y^{(3)} - 13y' + 12y = 0$

(2) $y^{(4)} + 9y^{(2)} = 0$

(1) $P(x) = x^3 - 13x + 12$

$P(x) = 0$

$P(1) = 1 - 13 + 12 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -13 & 12 \\ 1 & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0 = R} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \\ +1 \\ \hline 49 \end{array}$$

$P(x) = (x-1)(x^2 + x - 12)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \vee x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 12}}{2} \vee x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \vee x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1+7}{2} \vee x = \frac{-1-7}{2} \vee x = 1$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -4 \vee x = 1$

Um sistema fundamental de soluções é:

$$\{ e^{3x}, e^{-4x}, e^{x} \}$$

Ou seja, a solução geral da EDOL é

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

(2) $y^{(4)} + 9y^{(2)} = 0$

$P(x) = x^4 + 9x^2$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 9) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{é dupla}} \vee \underbrace{x = 3i \vee x = -3i}_{\text{simples}}$

Um sistema fundamental de soluções é:

$$\{ e^{0x}, x e^{0x}, e^{0x}\cos(3x), e^{0x}\operatorname{sen}(3x) \}$$

$$\{ 1, x, \cos(3x), \operatorname{sen}(3x) \}$$

Solução geral da EDOL é

solução geral da EDOL é

$$y = c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 \cos(3x) + c_4 \operatorname{sen}(3x),\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos(3x) + c_4 \operatorname{sen}(3x),\ c_i \in \mathbb{R}$$

Exercícios da ficha 5 : 14.

(d) $y'' + y' = \boxed{0};$

(e) $y'' + 4y \overset{\omega)}{=} \boxed{0};$

$P(r) = r^2 + 4$

$P(r) = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$

$P(r) = r^2 + r$

$= r(r+1)$

$r = 0 \vee r = -1$

$$\{e^{0x}, e^{-x}\} = \{1, e^{-x}\}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

TPC: Tarefa 8, já disponível no moodle

Tarefa 8: Exercícios 13; 14(a) a c da ficha 5

13. Considere a EDO linear (EDOL) homogénea (de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad x \in ]1, \infty[.$$

(a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.
(b) Obtenha a solução geral da EDO.
(c) Resolva agora a EDO

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \quad x \in ]1, \infty[,$$

começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.

14. Determine a solução geral das seguintes EDOL homogéneas:

(a) $y' + y = 0;$ (b) $y'' - y = 0;$ (c) $y'' - 4y' + 4y = 0;$