CÁLCULO II – 2019/20

Ana Foulquié

foulquie@ua.pt

https://portal.educast.fccn.pt/videos?q=eNqrVirOzC3ISY0vSS3KVbJSSsxLVEjLL80pLM1MVaoFAKyiCxY

Teorema de Dirichlet Consideremos uma função f definida num intervalo $[-\pi, \pi]$, seccionalmente diferenciável neste intervalo, então:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)+\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, x \in [-\pi, \pi]$$

onde

$$f(x^+) = \lim_{t\to x, t>x} f(t)\,, f(x^-) = \lim_{t\to x, t<x} f(t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Consideraremos a extensão a todo $\mathbb{R}$ por periodicidade.

Exemplo

Calcule a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0[\\ x & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

e obtenha uma representação gráfica desta série no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$.

Resolução: Neste caso a função $f(x)$ é seccionalmente diferenciável no intervalo $[-\pi, \pi]$. Calculamos os coeficientes da série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\ -x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\ \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{\pi} = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

Para $n = 1, 2 \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,(-1)\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\Big(\,x\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(nx)}{n^2}\bigg|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1).$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{n par} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{n ímpar} \end{cases}$$

Para $n = 1, 2 \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx$$

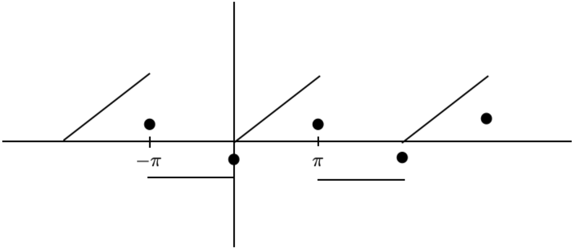
$$= \frac{1}{\pi}\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\Big(\left. x\frac{-\cos(nx)}{n}\right|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}dx\Big)$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{1}{\pi}\Big(\pi\frac{-(-1)^n}{n} - 0\Big) = \frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

A série de Fourier da função $f(x)$ é dada por

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = \begin{cases} -1 & x \in]-\pi, 0[\\ x & x \in]0, \pi[\\ ???? & x = -\pi, 0, \pi. \end{cases}$$

Estamos somente a descrever o intervalo $[-\pi, \pi]$ porque a função é



2π periódica.

$$S(-\pi) = \frac{\pi - 1}{2},\ S(0) = \frac{0 - 1}{2},\ S(\pi) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Cálculo de uma série numérica usando a série de Fourier

Sabemos que $S(0) = -\frac{1}{2}$, pelo que

$$-\frac{1}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Neste caso $a_0 = -1 + \frac{\pi}{2}$ e $a_n = \begin{cases} 0 & \text{n par} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{n ímpar} \end{cases}$

$$-\frac{1}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$$

ou

$$-\frac{1}{2} = \frac{-1+\frac{\pi}{2}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{\pi(2n+1)^2}$$

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Exercício 1. Calcule a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in\in [-\pi, 0[\\ x^2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

e obtenha uma representação gráfica desta série no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$.

Exercício 2. Calcule a série de Fourier da função

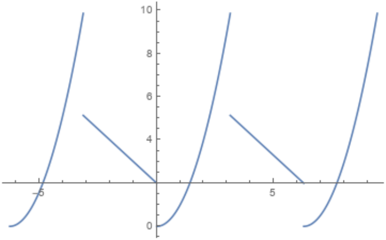
$$f(x) = |2x + 1|, x \in [-\pi, \pi]$$

e obtenha uma representação gráfica desta série no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Resolução do Exercício 1

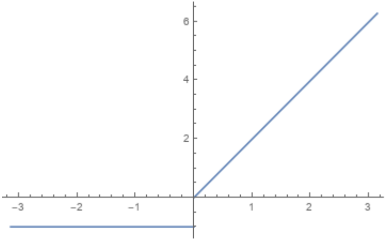
Desenhamos a extensão 2π periódica da função

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in\in [-\pi, 0[\\ x^2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$



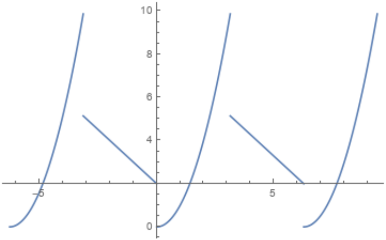
que é uma função seccionalmente diferenciável. Esta função é seccionalmente diferenciável porque a sua derivada é seccionalmente contínua (uma união de gráficos de funções contínuas excepto num conjunto finito de pontos no intervalo $[-\pi, \pi]$)

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x \in\in [-\pi, 0[\\ 2x & x \in [0, \pi] \end{cases}$$



Novamente, a extensão 2π periódica da função

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in\in [-\pi, 0[\\ x^2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$



$$f(\pi^+) = f(-\pi) = 2 - (-\pi) = 2 + \pi.$$

$$f(\pi^-) = f(\pi) = (\pi)^2.$$

$$f(0^+) = 0 \, f(0^-) = 2$$

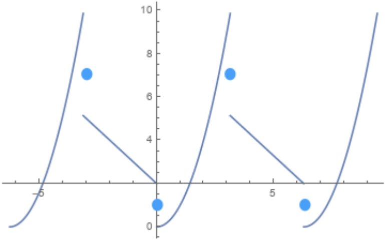
Calculamos os coeficientes de Fourier e obtemos

$$a_0 = \pi + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{6}$$

$$a_n = \frac{-1 + (1 + 2\pi)(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{-2(1 + n^2) + (2 + n^2(2 + \pi - \pi^2))(-1)^n}{n^3}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$



Sabemos que

$S(x) = f(x), x \in \mathbb{R} \setminus \{0, k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}$.

$$S(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{2 + \pi + \pi^2}{2}$$

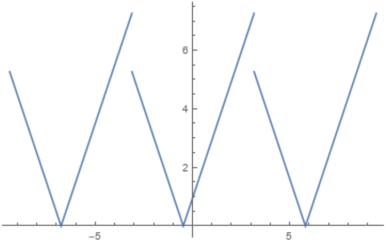
$$S(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

$$S(-\pi) = \frac{2 + \pi + \pi^2}{2}$$

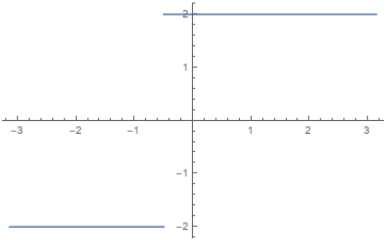
Desenhamos a extensão 2π periódica da função

$$f(x) = |2x+1|, x \in [-\pi, \pi]$$

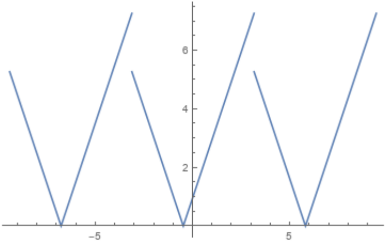
(neste caso no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$)



Esta função é seccionalmente diferenciável porque a sua derivada é seccionalmente contínua (uma união de gráficos de funções contínuas excepto num conjunto finito de pontos no intervalo $[-\pi, \pi]$)


2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3

$$f(x) = |2x+1|, x \in [-\pi, \pi]$$



(neste caso no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$)

$$f(\pi^+) = f(-\pi) = |-2\pi + 1| = 2\pi - 1$$

$$f(\pi^-) = |2\pi + 1| = 2\pi + 1$$

Calculamos os coeficientes de Fourier, e temos em conta que

$$f(x) = |2x+1|,\, x \in [-\pi, \pi]$$

pode ser descrita como

$$f(x) = \begin{cases} -(2x+1) & x \in [-\pi, -\frac{1}{2}[\\ 2x+1 & x \in [-\frac{1}{2}, \pi] \end{cases}$$

Calculamos os coeficientes de Fourier e obtemos

$$a_0 = \frac{1+4\pi^2}{2}\,, a_n = \frac{4(-\cos(\frac{n}{2}) + (-1)^n)}{n^2}$$

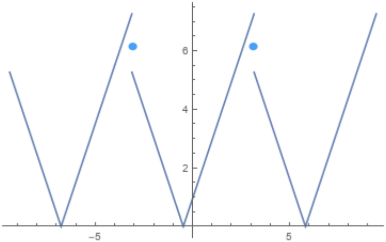
$$b_n = \frac{2(n(-1)^n - 2\sin(\frac{n}{2}))}{n^2}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

Pelo Teorema de Dirichlet sabemos que $S(x) = f(x), x \in \mathbb{R} \setminus k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja em todo ponto onde f é uma função contínua.

$$S(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{2\pi - 1 + 2\pi + 1}{2} = 2\pi.$$

$$S(-\pi) = 2\pi.$$



Vamos começar esta aula a explicar a afirmação do ex. 4, retirado do slide 2 do eLearning.

A sucessão $p_n(x)$ converge pontualmente para a função nula no intervalo $[0, 1]$ mas não converge uniformemente.

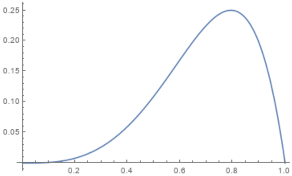
No slide apresentado pela professora Isabel Brás aparecem os gráficos de cada uma destas funções. Observamos que estos gráficos quando consideramos cada x fixo se aproximam sucessivamente ao valor 0, mas quando uma parte do gráfico de cada uma destas funções está perto do gráfico da função nula, a outra parte do gráfico ainda está longe, pelo que intuímos que a convergência não é uniforme. Vamos agora a dar um argumento analítico para entender esta afirmação.

Primeiro vamos tomar limite
$p_n(x) = x^n(1 - x^n)$ quando $n \to +\infty$ para cada $x \in [0, 1]$.
Como devemos saber $x^n \to 0$ quando $n \to +\infty$ para $|x| < 1$, pelo que

$$p_n(x) = x^n(1 - x^n) \to 0(1 - 0) = 0, x \in [0, 1[$$

quando $n \to +\infty$. Para $x = 1$, $p_n(1) = 0$. Neste caso diremos que a sucessão de funções $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge pontualmente para a função $p(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$. Vamos mostrar que esta convergência não é uniforme

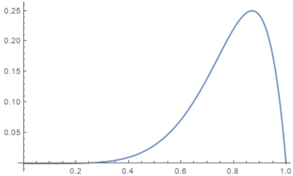
Consideramos por exemplo $p_3(x) = x^3(1 - x^3)$, e usamos um programa de cálculo como o mathemática e desenhamos



O ponto de máximo é dado como um ponto onde a derivada primeira desta função é nula pelo que calculamos

$$p_3'(x) = 3x^2 - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(1 - 2x^3) = 0$$

e obtemos o ponto $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
$p_3(x_0) = x_0^3(1 - x_0^3) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Se fazemos as mesmas contas para $p_5(x) = x^5(1 - x^5)$, e desenhamos 

O ponto de máximo é dado como um ponto onde a derivada primeira desta função é nula pelo que calculamos

$$p_5'(x) = 5x^4 - 10x^9 = 0 \Leftrightarrow 5x^4(1 - 2x^5) = 0$$

e obtemos o ponto $x_0 = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$. Também reparamos que $p_5(x_0) = x_0^5(1 - x_0^5) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Em geral para $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$ a função presenta um máximo no ponto $x_0 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ e $p_n(x_0) = \frac{1}{4}$. Se a convergência fosse uniforme, significaria que podíamos majorar o erro a distância entre os gráficos da função $p_n(x)$ e $p(x)$ por um infinitésimo que não depende de $x \in [0, 1]$

$$|p_n(x) - p(x)| \leq \epsilon_n$$

mas isto não é possível porque para cada n, no ponto $x_0 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, a distância entre os gráficos será exactamente $\frac{1}{4}$.

Quando temos convergência uniforme num intervalo, para valores grandes de n o gráfico da sucessão e o gráfico da função limite deve ser quase idêntico em todo ponto

Exercício: Calcule a soma da série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$$

, no intervalo de convergência desta série.

Vamos identificar esta série com uma função $f(x)$ num certo domínio usando a soma da série geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

Sabemos que podemos derivar e integrar séries de potências termo a termo, no intervalo de convergência da série dada. Neste caso sabemos por exemplo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

se derivamos obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1$$

ou ao integrar obteríamos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x) + k, |x| < 1$$

e neste caso $k = 0$ porque quando substituímos $x = 0$ obtemos a identidade

$$0 = 0 + k.$$

Voltamos ao nosso exercício, determinar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$$

, onde esta série seja convergente Vamos primeiro encontrar a soma da série

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^n$$

que será um problema equivalente, se temos em conta que $f(x) = g(4(x-1))$.

Queremos então determinar

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

que fazemos?

Se tivéssemos (mas não temos!)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

ao derivar termo a termo chegaríamos à série geométrica!

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

Podemos então multiplicar ambos membros desta identidade por x

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

A seguir derivamos ambos membros desta identidade e obtemos

$$(xg(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

e esta identidade terá sentido para $|x| < 1$, pelo que obtemos

$$(xg(x))' = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

$$(xg(x))' = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

Integramos ambos membros desta identidade e obtemos

$$xg(x) = -\ln(1-x) + k$$

mas quando fazemos $x = 0$ obtemos $k = 0$. Chegamos então $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ e finalmente

$$f(x) = g(4(x-1)) = -\frac{\ln(1-4(x-1))}{4(x-1)}$$

e esta identidade será verdadeira para $|4(x-1)| < 1$, ou

$$|x-1| < \frac{1}{4}.$$

O raio de convergência da série dada no enunciado do exercício é $\frac{1}{4}$ e o intervalo de convergência é $]1-\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}[$.

Exercício 1 Determine explícitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{n+2} x^n$$

indicando o intervalo de convergência desta série.

Exercício 2 Determine explícitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n-1}(n+2)(2x-1)^n$$

indicando o intervalo de convergência desta série.

Teorema de Abel Suponhamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $-r < x < r$. e suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ é convergente. Então verifica–se que a série é uniformemente convergente em $[0, r]$ e

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + k, \qquad |x| < 1,$$

O domínio de convergência desta série é $]-1,1]$, uma vez que em $x = 1$ a série obtida é dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, que é convergente (usando o critério de Leibniz como já foi referido anteriormente) e no ponto $x = -1$ obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n}$ que é uma série divergente.

Usando o teorema de Abel temos que
$\ln 2 = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

A seguir iremos comentar a resolução dos exercícios 1 e 2 propostos na aula anterior e vamos estudar o que acontece nos extremos dos intervalos.

Determine explícitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{n+2} x^n$$

indicando o intervalo de convergência desta série.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} (-\frac{1}{2}x)^n$$

Consideramos a função

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n$$

e reparamos que

$$f(x) = \frac{1}{2} g(-\frac{1}{2}x).$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n$$

Multiplicamos ambos membros desta identidade por x^2 e obtemos

$$x^2 g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2}$$

Derivamos ambos membros desta identidade

$$(x^2 g(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}$$

e reparamos

$$(x^2 g(x))' = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

pelo que para $|x| < 1$ obtemos

$$(x^2 g(x))' = x \frac{1}{1-x}$$

$$(x^2 g(x))' = x \frac{1}{1-x} \; |x| < 1$$

Temos em conta que $\frac{x}{1-x} = \frac{x-1+1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$ Integramos ambos membros desta equação

$$x^2 g(x) = -x - \ln(1-x) + k, \; |x| < 1$$

Substituímos $x = 0$ e concluímos que $k = 0$.

$$g(x) = \frac{-x - \ln(1-x)}{x^2}, \; |x| < 1$$

Pelo que chegamos a

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{-\frac{-x}{2} - \ln(1 - \frac{-x}{2})}{(-\frac{-x}{2})^2}$$

$$= 2\frac{\frac{x}{2} - \ln(1 + \frac{x}{2})}{x^2}$$

para $|\frac{-x}{2}| < 1$ ou $|x| < 2$.

$$2\frac{\frac{x}{2} - \ln(1 + \frac{x}{2})}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{1}{n+2}x^n, \ |x| < 2.$$

No ponto $x = 2$, aparece a série (convergente pelo C. Leibniz)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{1}{n+2},$$

Pelo que chegamos a que

$$\lim_{x \to 2^-} (2 \frac{\frac{x}{2} - \ln(1 + \frac{x}{2})}{x^2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{1}{n+2},$$

ou

$$2 \frac{1 - \ln(2)}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{1}{n+2},$$

No ponto $x = -2$, aparece a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n+2}$, divergente (Série de Dirichlet para $\alpha = 1$).

Determine explicitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n-1}(n+2)(2x-1)^n$$

indicando o intervalo de convergência desta série.
Re-escrevemos a função $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(3(2x-1))^n$$

e consideramos a função

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)x^n$$

Temos em conta que $f(x) = \frac{1}{3}g(3(2x-1))$.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)x^n$$

Multiplicamos ambos membros desta identidade por x

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)x^{n+1}$$

integramos os dois membros desta identidade

$$\int xg(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+2} + k$$

desta vez não vamos identificar a constante k.

$$\int xg(x)dx = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + k$$

Obtemos então no intervalo $|x| < 1$ a identidade

$$\int xg(x)dx = x^2 \frac{1}{1-x} + k$$

Derivamos ambos membros desta identidade e obtemos

$$xg(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} + k \right)'$$

Calculamos esta derivada usando a regra da derivada de um quociente e obtemos

$$xg(x) = \frac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

Pelo que

$$g(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2},\ |x| < 1$$

Temos em conta que

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{2-3(2x-1)}{(1-3(2x-1))^2}.$$

para $|3(2x-1)| < 1$ ou $|6(x-\frac{1}{2})| < 1$ ou $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{6}$.
O intervalo de convergência desta série é

$$]\frac{1}{2}-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}+\frac{1}{6}[.$$

Nos pontos extremos deste intervalo podem comprovar que a série é divergente pelo que o intervalo de convergência coincide com o domínio de convergência.

Exercício 1, folha 2

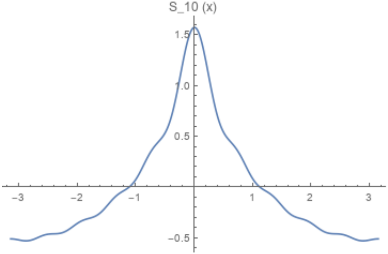
Considere a série de funções

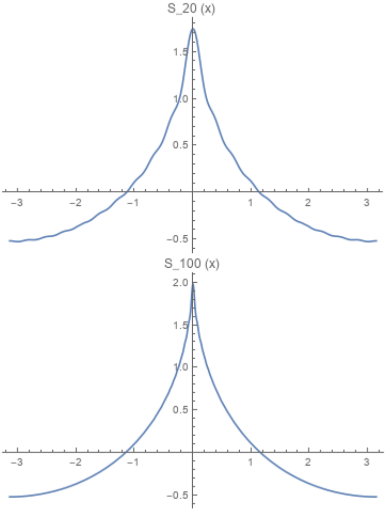
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

1. Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.
2. Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Vamos considerar as somas parciais desta série de funções, por exemplo para $n = 10$

$$S_{10}(x) = \sum_{n=1}^{10} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}} = \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{\cos(10x)}{10\sqrt{11}}$$




S_20 (x)
1.5
1.0
0.5
−0.5
−3
−2
−1
1
2
3
S_100 (x)
2.0
1.5
1.0
0.5
−0.5
−3
−2
−1
1
2
3

Observamos que a sucessão $S_n(x)$ (formada por funções 2π periódicas), converge uniformemente para uma função limite. Como vamos justificar esta afirmação?

Teorema M-Weierstrass

Consideremos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,, x \in E \subset \mathbb{R}$$

Suponhamos que para $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq M_n,\, x \in E$$

, e se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$$

é convergente, então a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

é uniformemente convergente em E. Em particular também podemos referir que é absolutamente convergênte em E.

Exemplo

A série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ é uniformemente convergente (e absolutamente) convergente em $\mathbb{R}$.
Neste caso podemos verificar que

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente pelo que se aplicamos o Teorema M-Weierstrass podemos concluir que esta série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Para a série dada no exercício, vamos tentar aplicar de forma análoga este Critério M-Weierstrass

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

Consideramos que

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, x \in \mathbb{R}$$

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

é convergente (pelo critério de comparação no limite, com a série de Dirichlet para $\alpha = 1 + \frac{1}{2}$.) Concluímos então que a série é absoluta e uniformemente convergente para $x \in \mathbb{R}$.

A segunda afirmação deste exercício é provar que o limite uniforme de esta série é uma função contínua. A ideia que devemos ter é a seguinte: Para cada n, estivemos a desenhar os gráficos da somas parciais. Pela convergência uniforme provada, sabemos que o gráfico das somas parciais e o gráfico da função limite, para valores de n muito grandes, é quase idêntico para $x \in \mathbb{R}$. Então como cada um destas somas parciais são somas de funções contínuas é muito natural que o gráfico da função limite seja o gráfico de uma função contínua.

Continuidade, integração e convergência uniforme

Teorema Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ uma série de funções, com $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que a série converge uniformemente em E e denotemos $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

• Se cada uma da funções f_n é uma função continua em E então a função s é uma função continua em E.

• Para $[a, b]$ intervalo finito, $[a, b] \subset E$, temos que

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Exercícios propostos

Exercício 1 Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{nx}$$

Encontre um intervalo onde possa afirmar que esta série converge uniformemente. Explique se nesse intervalo a função limite será ou não uma função contínua.

Exercício 2 Considere a série de funções

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (3+x)^n$$

Encontre um intervalo onde possa afirmar que esta série converge uniformemente. Calcule a função limite $f(x)$, e verifique que é uma função contínua nesse intervalo.

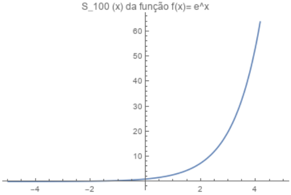
Série de Taylor da função exponencial

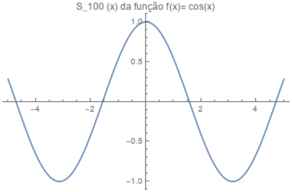
Considere a série de Taylor das seguintes funções

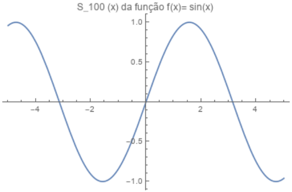
$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \; x \in \mathbb{R}.$$


S_100 (x) da função f(x)= e^x
60
50
40
30
20
10
−4
−2
2
4


S_100 (x) da função f(x)= cos(x)
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−4
−2
2
4


S_100 (x) da função f(x)= sin(x)
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−4
−2
2
4

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3\cdots+\ldots,\ |x|<1$$

ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n,\ |x|<1$$

Exercício Obtenha uma representação em série de potências. Em cada caso indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a) e^{-x^2}; (b) xe^{1-x}, ; (c) $\sinh(3x)$

(d) $2\cos^2 x$ (e) $\frac{1}{4+x}$ (f) $\frac{1}{2x+3}$.

Exercício (Aparece uma dica de resolução!)

Obtenha uma representação em série de potências. Em cada caso indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a)	e^{-x^2} ;	(b)	$xe^{1-x}, ;$
(c)	$\sinh(3x) = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}$	(d)	$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$
(e)	$\frac{1}{4+x} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-(-\frac{x}{4})},$	(f)	$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{2x}{3})}, .$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-x^2)^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

$$xe^{1-x} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(1-x)^n = (x-1+1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n(x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

$$= (x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n(x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n(x-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n(x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

Agora chamo a atenção que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(x-1)^n$$

pelo que, se continuamos o cálculo

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(x-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1} + \frac{1}{n!}(-1)^n \right)(x-1)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-n}{n!}(-1)^n \right)(x-1)^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

Obtivemos uma série de potências centrada em $c = 1$. Se queremos obter a série de potências centrada em $c = 0$

$$xe^{1-x} = xee^{-x} = xe\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e}{n!}(-1)^n x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}.$$

Exercício

Calcule a (função) soma das séries seguintes:

1. $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$
2. $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Sabemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \; x \in \mathbb{R}$$

pelo que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{(-x)}, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{1+x^3}$$

onde $|x^3| < 1$ ou de forma equivalente $|x| < 1$.

Exercício

Calcule a soma das séries indicadas

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\,;$$

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (n+1)}\,; \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}\,.$$

Aula 5

Exercício 1 Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{nx}$$

Encontre um intervalo onde possa afirmar que esta série converge uniformemente. Explique se nesse intervalo a função limite será ou não uma função contínua.

Resolução

Para valores $x > 0$ o termo geral desta série é dado por $\frac{1}{n^2}e^{nx}$. Este termo verifica que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}e^{nx} = +\infty.$$

Podemos justificar isto porque quando calculamos o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^2} = +\infty$$

para valores a reais e $a > 1$. Isto pode ser justificado porque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{a^n}{n^2}} = a\frac{n^2}{(n+1)^2} = a > 1$$

(podemos dizer que a sucessão $\frac{a^n}{n^2}$é geometricamente crescente, de razão a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{nx}$$

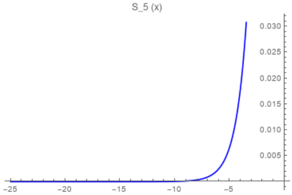
é divergente, pela condição necessária de convergência.
Para valores de $x < 0$, verifica-se que $|e^{nx}| = e^{nx} < 1$. Podemos então considerar

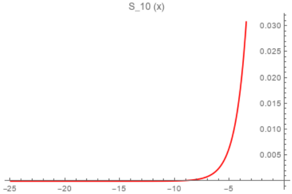
$$\left| \frac{1}{n^2} e^{nx} \right| < \frac{1}{n^2}\,, x < 0$$

e se temos em conta que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente, pelo critério M-Weierstrass, podemos afirmar que no intervalo $]-\infty, 0[$ esta série é absoluta (ainda que esta afirmação é redundante uma vez que esta série está formada por termos positivos) e uniformemente convergente.


S_5 (x)
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
-25
-20
-15
-10
-5


S_10 (x)
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
-25
-20
-15
-10
-5

Exercício 2 Considere a série de funções

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (3+x)^n$$

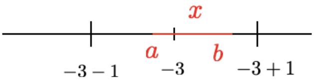
Encontre um intervalo onde possa afirmar que esta série converge uniformemente. Calcule a função limite $f(x)$, e verifique que é uma função contínua nesse intervalo.

Resolução

Para os valores de x tais que $|x+3|>1$ esta série é divergente.
Para os valores de x tais que $|x+3|<1$ esta série é convergente.
Estas afirmações podem ser justificadas por exemplo por aplicação do critério do quociente ou do critério da raiz n-ésima.
Portanto o raio de convergência desta série está centrado no ponto $c=-3$ e de raio 1, ou seja o intervalo $]-3-1,-3+1[=]-4,-2[$.

Se consideramos agora qualquer intervalo $[a, b] \subset]-4, -2[$, obtemos que para $x \in [a, b]$ verifica-se

$$|x + 3| < d < 1$$



e portanto teremos a majoração para $x \in [a, b]$

$$|n^2(x+3)^n| < n^2 d^n,\ d < 1$$

A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 d^n$$

é convergente, (por aplicação do critério de d'Alembert), pelo que podemos afirmar, pelo critério M-Weierstrass que esta série no intervalo $[a, b]$ escolhido dentro do intervalo de convergência da série é absoluta e uniformemente convergente.

Gráfico das somas parciais no intervalo $[-4, -4+02]$

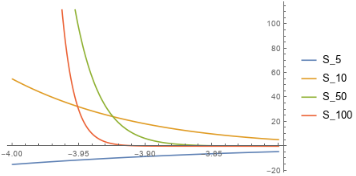
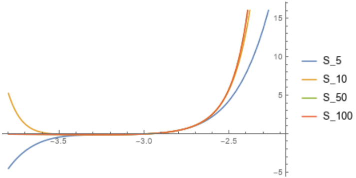


Gráfico das somas parciais no intervalo $[-4+0.2, -2-02]$



Vamos determinar explícitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(3+x)^n$$

Consideramos a série geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \ |x| < 1$$

Derivamos em ordem a x e temos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \ |x| < 1$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, \ |x| < 1$$

Voltamos a derivar em ordem a x

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}, \ |x| < 1$$

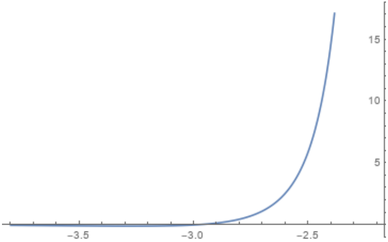
e voltamos a multiplicar ambos membros desta identidade por x

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n, \ |x| < 1$$

Finalmente chegamos a

$$\frac{(x+3)(x+4)}{(1-(x+3))^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (x+3)^n, \ |x+3| < 1$$

Desenhamos esta função no intervalo $[-4+0.2, -2-0.2]$



Teorema de Cauchy-Hadamard

Considere-se a série de potências, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$; então, existe $r \in [0, +\infty]$ que designamos por *raio de convergência* tal que:

- A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ é absolutamente convergente em $|x| < r$;
- A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ é divergente em $|x| > r$;
- A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ é uniformemente convergente em $[a, b] \subset]-r, r[$.

Ainda podemos acrescentar este resultado que fala da continuidade no domínio de convergência.

Teorema de Abel Suponhamos que
$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $-r < x < r$. e suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ é convergente. Então verifica–se que a série é uniformemente convergente em $[0, r]$ e

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n.$$

Aplicação: Séries de potências deduzidas por derivação e integração e manipulação algébrica

Vamos aplicar os teoremas apresentados para obter a representação explícita de novas séries de potências a partir de séries já conhecidas. Começaremos então pela serie de potências que tínhamos deduzido pelo cálculo da série geométrica.

Tendo em atenção que, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x| < 1$ vamos mostrar que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},\ |x| < 1\,.$$

Demonstração

Fazendo a mudança de variável $x \mapsto -x^2$ na série geométrica obtemos imediatamente a representação em série de potências da função $\dfrac{1}{1+x^2}$, em $|x^2| < 1 \equiv |x| < 1$.

Vamos mostrar que:

$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, |x| < 2\,.$$

Demonstração

Para a função $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x/2}$, e fazendo a mudança de variável $x \mapsto -\dfrac{x}{2}$ obtemos a representação procurada, com intervalo de convergência $\left| -\dfrac{x}{2}\right| < 1 \equiv |x| < 2\,.$

Vamos provar:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1},\ |x| < 1.$$

Demonstração

Aplicando o teorema anterior (para a série derivada) à série geométrica obtemos directamente a primeira identidade, i.e. a representação em série para a função $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Vamos provar:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \; x \in \,]-1,1].$$

Demonstração

Para a representação em série da função logaritmo, basta determinar a série integral da função $\dfrac{1}{1+x}$

que é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ (pois, basta tomar $-x$ em lugar de x na representação em série da função $\dfrac{1}{1-x}$. Neste caso podemos afirmar que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + k, \qquad |x| < 1,$$

onde k é uma constante real. Fazemos $x = 0$ nesta identidade e obtemos que $k = 0$. O dominio de convergência desta série é $]-1, 1]$.

O dominio de convergência desta série é $]-1,1]$, uma vez que em $x=1$ a série dada é dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, que é convergente (usando o critério de Leibniz como já foi referido anteriormente) e no ponto $x=-1$ obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n}$ que é uma série divergente. Temos então obtido:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n}}{n},\ x\in]-1,1].$$

Usando o teorema de Abel temos que

$$\ln 2=\lim_{x\to 1^{-}}\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Vamos provar:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in [-1,1].$$

Demonstração

Para a representação em série da função arco-tangente, se temos em conta que

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

basta determinar a série integral da função

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \ |x| < 1$$

pelo que

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + k\,, x \in]-1,1[$$

Se tomamos $x = 0$ obtemos que $k = 0$.

Agora, em $x = 1$ a série dada é dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, que é simplesmente convergente; e, portanto, como a função $\arctan x$ é continua em $[-1, 1]$; assim e usando o teorema de Abel temos que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{x \to 1^-} \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

De forma análoga podemos fazer a discussão no ponto $x = -1$.

Exercício

Determine uma representação em série de potências, centrada em $x = 1$, para cada uma das seguintes funções (indicando o intervalo onde tal é válida):

(a) $\dfrac{1}{3+x}$; (b) $\dfrac{1}{2-3x}$; (c) $\dfrac{x^2+2}{x+1}$; (d) $\dfrac{1}{x^2+2x}$.

Resolução

(a) Consideramos

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{4+x-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{x-1}{4})^n$$

para

$$\left|\frac{x-1}{4}\right| < 1 \text{ ou }, |x-1| < 4.$$

Resolução

(b) Consideramos

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2-3(x-1)-3} = \frac{1}{-1-3(x-1)}$$

$$= \frac{-1}{1+3(x-1)} = (-1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-3(x-1))^n$$

e esta representação é válida para $|-3(x-1)| < 1$ ou $|x-1| < \frac{1}{3}$.

Resolução

(c) Consideramos

$$\frac{x^2+2}{x+1} = x-1+\frac{3}{x+1} = x-1+\frac{3}{2+(x-1)} = (x-1)+\frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}}$$

e obtemos

$$\frac{x^2+2}{x+1} = (x-1)+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{x-1}{2})^n, \quad \left|-\frac{x-1}{2}\right| < 1 \text{ ou } , |x-1| < 2.$$

(d) Considere

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{x(x+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{-1}{2}}{x+2}\,.$$

Agora procuramos a representação em série de potências centrada em $x=1$ para cada um dos termos anteriores e obtemos:

$$\frac{\frac{1}{2}}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+x-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-(x-1))^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n\,,\quad |x-1|<1.$$

$$\frac{\frac{-1}{2}}{x+2} = \frac{\frac{-1}{2}}{3+x-1} = \frac{-1}{6}\frac{1}{(1+\frac{x-1}{3})} = \frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}\,,$$

identidade válida para $\frac{x-1}{3} < 1$ ou $|x-1| < 3$, pelo que finalmente obtemos

$$\frac{1}{x^2+2x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n}{63^n}\right)(x-1)^n\,, \quad |x-1| < 1.$$

Exercícios propostos

Exercício 1 Encontre o desenvolvimento em série de Taylor, centrada em $x = 2$ da função

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x - 4}$$

e indique o maior intervalo de convergência para este desenvolvimento. Verifique que o polinómio de Taylor desta função de ordem 2 centrado no ponto $x = 2$ é dado pelos primeiros três termos desta série de Taylor obtida.

Exercício 2 Considere a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n+2)(1-3x)^n$$

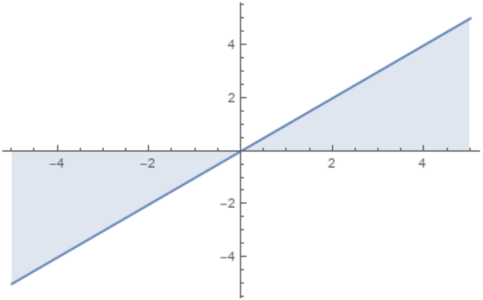
Determine explícitamente a função f e indique o intervalo de convergência desta série. Mostre que esta série converge absoluta e uniformemente num intervalo fechado dentro dum intervalo fechado $[a, b]$ contido neste intervalo de convergência.

Extensão par de uma função: Série de Fourier de Cossenos

Extensão ímpar de uma função: Série de Fourier de Senos

Extensão par de uma função: Série de Fourier de Cossenos

Função ímpar $f(-x) = -f(x)$

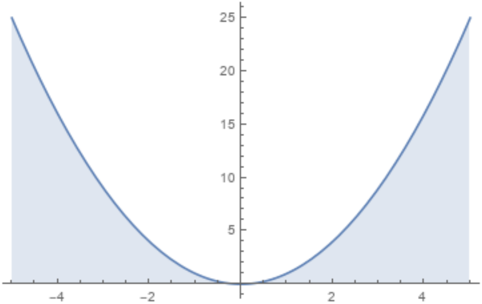


Importante! $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Exemplos de funções ímpares

$$f(x) = x,\ x^5,\ x^7,\ \sin(x),\ \sin(2x),\ \ldots,$$

Função par $f(-x) = f(x)$



Importante! $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Exemplos de funções pares

$$f(x) = 1, x^2, x^4, x^6, \cos(x), \cos(2x), \ldots,$$

O produto de duas funções pares é uma função par

$$f(x) = x^2x^6 = x^8$$

O produto de duas funções ímpares é uma função par

$$f(x) = x^3x^5 = x^8$$

O produto de uma função par vezes uma função ímpar é uma função ímpar

$$f(x) = x^2x^5 = x^7$$

Série de Fourier

Seja f uma função definida num intervalo $[-\pi, \pi]$, integrável neste intervalo, então:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx, \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)dx$$

O teorema de Dirichlet nos garante condições nas quais a nossa série de Fourier representa a nossa função no intervalo $[-\pi, \pi]$

Série de Fourier de uma função ímpar

Seja f **uma função ímpar**, definida num intervalo $[-\pi, \pi]$, integrável neste intervalo, então:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

onde

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Diremos que a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos.

Série de Fourier de uma função par

Seja f **uma função par**, definida num intervalo $[-\pi, \pi]$, integrável neste intervalo, então:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Diremos que a série de Fourier de uma função par é uma série de cossenos.

Será que podemos expressar a função ímpar $f(x) = x$ como uma série de cossenos? (ou uma outra função qualquer?)

• Para poder expressar uma função como uma série de cossenos a nossa função deve ser uma função par!

• A série de Fourier "representa" a nossa função no intervalo $[-\pi, \pi]$

Vamos modificar a nossa pergunta: **Será que podemos expressar a função ímpar $f(x) = x$ como uma série de cossenos no intervalo $[0, \pi]$?**

• Para poder expressar uma função como uma série de cossenos a nossa função deve ser uma função par.

• Vamos extender a nossa função f(x) $=$ x, definida no intervalo $[0, \pi]$ ao intervalo $[-\pi, \pi]$ para que seja uma função par.

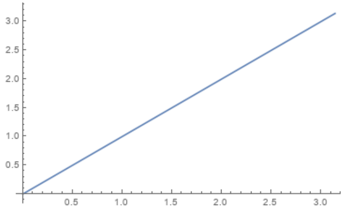
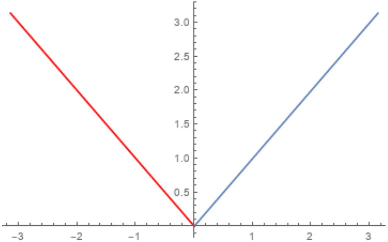
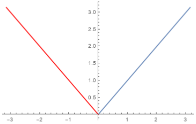


Gráfico de $g(x)$, extensão par no intervalo $[-\pi, \pi]$ da função $f(x) = x$, definida no intervalo $[0, \pi]$.



Cálculo do coeficientes da série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \pi.$$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = 0.$$

Escrevemos a série de Fourier, da função g

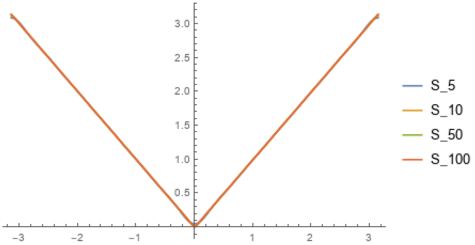
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

Neste caso $a_0 = \pi$, e $a_n = \frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{-4}{n^2}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \cos((2n+1)x)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

Representamos o gráfico das somas parciais da série de Fourier, e reparamos que estas somas parciais no intervalo $[0, \pi]$ são uma boa aproximação da função $f(x) = x$.



Descrição teórica do método exemplificado

Consideremos uma função $f(x)$ definida no intervalo $[0,\pi]$, integrável. Pretendemos calcular uma série de Fourier para esta função onde somente apareçam cossenos. Isto seria natural no caso que a função f fosse uma função par. Definiremos uma nova função g definida no intervalo $[-\pi,\pi]$, chamada extensão par da função f, que pode ser definida como

$$g(x) = \begin{cases} f(-x) & x \in [-\pi, 0] \\ f(x) & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

A série de Fourier desta função g, no intervalo $[-\pi, \pi]$ pode ser obtida como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

onde os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Usamos que a função $g(x)$ que estamos a integrar uma função para (resultado da multiplicação de uma função par por outra função par), num intervalo simétrico portanto

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos(nx) dx$$

e agora, a função g é exatamente a nossa função f, no intervalo $[0, \pi]$, pelo que re-escrevemos este integral como

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx.$$

e a série de Fourier obtida, em principio para a função $g(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ é a série que procurávamos para a função f no intervalo $[0, \pi]$.

Exercícios proposto 1

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{2}{\pi}(1-x), & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

a) Justifique se a série de Fourier desta função poderá ser escrita somente em termos de somas de senos ou somente em termos de somas de cossenos. Calcule a sua série de Fourier.

b) Considere esta função definida somente no intervalo $[0, \pi]$ e calcule uma série de Fourier de cossenos para esta função.

c) Represente as somas parciais das séries obtidas nas alíneas anteriores para $n = 10$ e $n = 20$.

d) Quando tenha estudado o Teorema de Dirichlet, justifique qual é a representação de cada uma das séries de Fourier obtidas.

Exercícios proposto 2

Considere a função

$$f(x) = x\cos x$$

a) Justifique se a série de Fourier desta função poderá ser escrita somente em termos de somas de senos ou somente em termos de somas de cossenos. Calcule a sua série de Fourier.

b) Considere esta função definida somente no intervalo $[0, \pi]$ e calcule uma série de Fourier de cossenos para esta função.

Considere para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier as fórmulas

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Exercício 1 Encontre o desenvolvimento em série de Taylor, centrada em $x = 2$ da função

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x - 4}$$

e indique o maior intervalo de convergência para este desenvolvimento. Verifique que o polinómio de Taylor desta função de ordem 2 centrado no ponto $x = 2$ é dado pelos primeiros três termos desta série de Taylor obtida.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 1 & x^2 + 3x - 4 \\ \hline & x \end{array}$$

Resolução:

$$
\begin{array}{rl}
\;x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & \big|\; x^2 + 3x - 4 \\
-\;\underline{x^3 + 3x^2 - 4x \phantom{{}+1}} & \;\;x \\
-3x^2 + 4x + 1 &
\end{array}
$$

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^2 + 3x - 4 \\ \cline{2-2} -\quad x^3 + 3x^2 - 4x & x - 3 \\ \cline{1-1} -3x^2 + 4x + 1 & \\ -\quad -3x^2 - 9x + 12 & \\ \cline{1-1} 13x - 11 & \end{array}$$

Reescrevemos a fração

$$\frac{x^3+1}{x^2+3x-4} = x - 3 + \frac{13x-11}{x^2+3x-4}$$

$$\frac{13x-11}{x^2+3x-4} = \frac{13x-11}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$$

$$A = \frac{63}{5},$$

$$B = \frac{2}{5}$$

Queremos obter a série de Taylor centrada em $c = 2$.

$$\frac{1}{x+4} = \frac{1}{x-2+2+4} = \frac{1}{x-2+6} = \frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{x-2}{6}}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{x-2}{6})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(x-2)^n.$$

Esta fórmula é válida para $|-\frac{x-2}{6}| < 1$ ou $|x-2| < 6$.

Queremos obter a série de Taylor centrada em $c = 2$.

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2+2-1} = \frac{1}{x-2+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-(x-2))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x-2)^n.$$

Esta fórmula é válida para $|-(x-2)| < 1$ ou $|x-2| < 1$.

Queremos obter a série de Taylor centrada em $c = 2$.

$$\frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} = A\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(x-2)^n + B\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-2)^n.$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(A\frac{(-1)^n}{6^{n+1}} + B(-1)^n\right)(x-2)^n$$

Esta fórmula é válida para $|x-2| < 1$. (a interseção dos intervalos obtidos anteriormente!)

$$\frac{x^3+1}{x^2+3x-4} = x-3+\frac{13x-11}{x^2+3x-4}$$

$$= x-3+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{63}{5}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}+\frac{2}{5}(-1)^n\right)(x-2)^n.\ |x-2|<1$$

O polinómio de Taylor de ordem 2, centrado em $c=2$ é dado por

$$T_2^2(x) = x-3+\left(\frac{63}{5}\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{63}{5}\frac{-1}{6^2}-\frac{2}{5}\right)(x-2)$$

$$+\left(\frac{63}{5}\frac{1}{6^3}+\frac{2}{5}\right)(x-2)^2.$$

$$= 3/2+(x-2)/4+11/24(x-2)^2.$$

Funções reais de várias variáveis reais

Consideremos

$$f(x, y), x, y \in \mathbb{R}$$

e tal que $f(x, y)$ toma um valor real. (ou em geral funções reais de mais do que uma variável real)

Exemplos

$$f(x, y) = x + y, \qquad g(x, y) = x^y,$$

$$h(x, y) = \cos(x - y),, \qquad m(x, y) = \frac{x}{y - 2}.$$

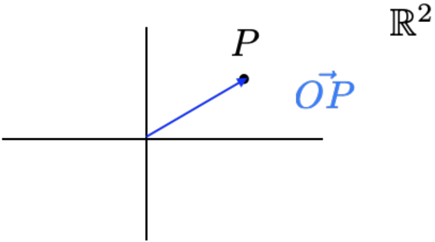
Exemplos de funções reais de três variáveis reais

$$f(x, y, z) = x + y + 2z \qquad g(x, y, z) = x^y + xz,$$

$$h(x, y, z) = \cos(x - y) + \sin(xyz), \qquad m(x, y, z) = \frac{x}{y - 2}$$

Queremos falar de noções como limite, continuidade, derivada!

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ espaço afim ou espaço vetorial



$$P = (x, y) \qquad \vec{OP} = (x, y)$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}\,,$$

A ideia geométrica que temos de $\mathbb{R}^2$ é a ideia de um espaço de duas dimensões, onde podemos falar de largura e comprimento e a ideia geométrica que temos de $\mathbb{R}^3$ é a do espaço de três dimensões e que corresponde ao espaço onde falamos de comprimento, largura e altura de um objeto que são as três variáveis que visualizamos no nosso quotidiano.
Podemos portanto entender cada elemento (x, y) no conjunto $\mathbb{R}^2$ como um ponto, de coordenadas x e y, ou se falamos do elemento (x, y, z) no conjunto $\mathbb{R}^3$ como um ponto de coordenadas x, y e z.

Nos conjuntos $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ podemos definir respectivamente as operações de soma e multiplicação por um número real, que chamamos escalar e diremos que com estas operações cada um destes conjuntos têm uma estrutura de espaço vetorial. Mais concretamente, em $\mathbb{R}^2$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \lambda(x_1, y_1) & = & (\lambda x_1, \lambda y_1) \end{array} \right.$$

ou respectivamente em $\mathbb{R}^3$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) & = & (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ \lambda(x_1, y_1, z_1) & = & (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \end{array} \right.$$

Se fixamos um ponto e dois vetores,
$\{O = (0,0), e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$, em $\mathbb{R}^2$ ou
$\{O = (0,0,0), e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$, em $\mathbb{R}^3$,
chamamos a isto referencial.
Identificamos as coordenadas de cada ponto $P = (x, y)$, em $\mathbb{R}^2$,
como as coordenadas do vetor de posição OP,

$$OP = x(1,0) + y(0,1)$$

ou para $P = (x, y, z)$, em $\mathbb{R}^3$ as coordenadas do vetor de posição OP,

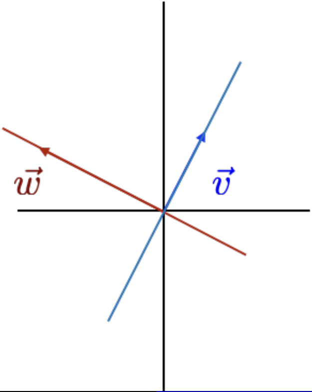
$$OP = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Ortogonalidade a um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$

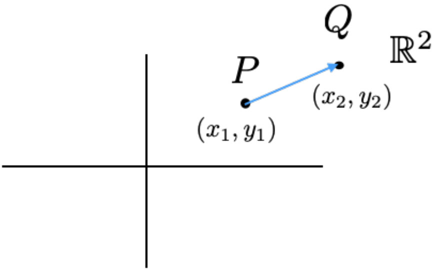
Dado um vetor $\vec{v} = (1, 2)$. O conjunto dos vetores $\vec{w} = (x, y)$ que verificam

$$\vec{v}.\vec{w} = 0 \Leftrightarrow (1, 2).(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0.$$

$$\vec{w} = (x, y) = (-2y, y) = y(-2, 1), y \in \mathbb{R}$$



Distância em $\mathbb{R}^2$ associada à norma definida em $\mathbb{R}^2$



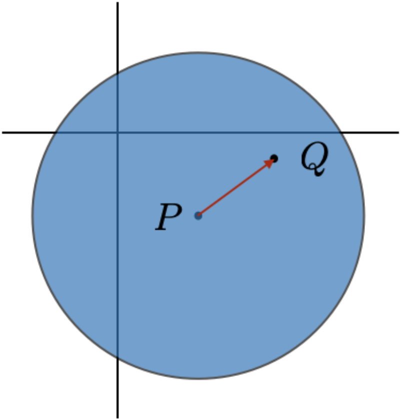
Norma do vetor $\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ}.\vec{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

e definiremos com **distância entre os pontos** P **e** Q

$$d(P, Q) = \|PQ\|$$

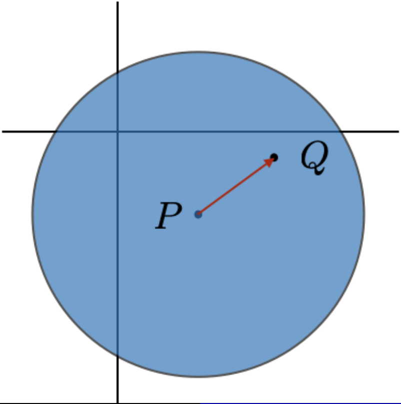
Exemplo Calcule os pontos que distam do ponto $(1,-1)$ uma distância menor ou igual a 2.



Resolução:

Consideramos os pontos Q de coordenadas (x, y). Denotamos $P(1, -1)$.

$$d(P, Q) \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \leq 2$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$$



Alguns conceitos topológicos

Podemos definir, a bola aberta de centro P e raio r

$$B_r(P) = \{Q, d(P,Q) < r\}$$

Podemos definir, a bola fechada de centro P e raio r

$$\overline{B}_r(P) = \{Q, d(P,Q) \leq r\}$$

Se consideramos em $\mathbb{R}^2$ o ponto P de coordenadas (a,b), neste caso

$$B_r((a,b)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$$

A equação

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

representa uma circunferência de centro (a,b) e raio r. Portanto $B((a,b),r)$ é um círculo de raio r centrado no ponto (a,b) (sem considerar o bordo!).

Se consideramos $B_r(P)$ em $\mathbb{R}^3$, teríamos obtido que estes conjuntos são esferas centradas no ponto P e de raio r (também neste caso sem o bordo!).

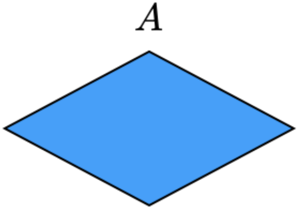
Ponto interior a um conjunto. Conjunto aberto.

Seja P um ponto do conjunto A, em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$:

• P é um ponto interior de A se existe um $r > 0$ tal que $B_r(P) \subset A$.

• int A é o conjunto formado pelos pontos interiores de A.

• A é um conjunto aberto se todos os seus pontos são pontos interiores. $A =$ int A.



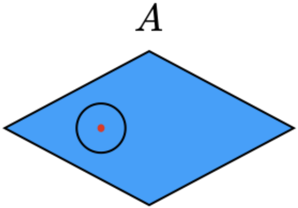
Ponto interior a um conjunto. Conjunto aberto.

Seja P um ponto do conjunto A, em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$:

• P é um ponto interior de A se existe um $r > 0$ tal que $B_r(P) \subset A$.

• int A é o conjunto formado pelos pontos interiores de A.

• A é um conjunto aberto se todos os seus pontos são pontos interiores. $A = \text{int } A$.



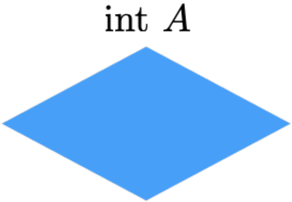
Ponto interior a um conjunto. Conjunto aberto.

Seja P um ponto do conjunto A, em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$:

• P é um ponto interior de A se existe um $r > 0$ tal que $B_r(P) \subset A$.

• int A é o conjunto formado pelos pontos interiores de A.

• A é um conjunto aberto se todos os seus pontos são pontos interiores. $A =$ int A.

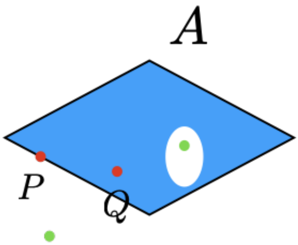


Um ponto interior pertence sempre ao conjunto.

Ponto de acumulação de um conjunto. Conjunto Fechado.

Consideremos A um conjunto de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Diremos que P é um ponto de acumulação de A se para cada $r > 0$ existe um ponto Q, ponto do conjunto A e distinto do ponto P tal que $d(P, Q) < r$.

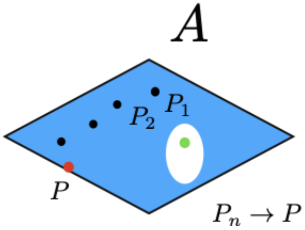
$$\{B_r(P) \setminus \{P\}\} \cap A \neq \emptyset$$



Mas afinal com esta definição que parece tão complicada, o que é que é um ponto de acumulação?
A ideia que temos de ficar é a seguinte:

Ponto de acumulação de um conjunto. Conjunto Fechado.

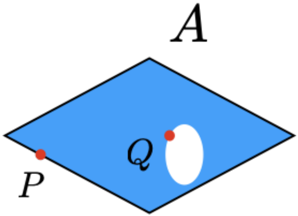
"Um ponto P diz-se de acumulação de um conjunto A, se nos podemos aproximar tudo o que quisermos, sempre por pontos distintos de P e que pertencem ao conjunto A". Portanto, P é ponto de acumulação de um conjunto, se podemos construir uma sucessão de pontos deste conjunto, que chamaremos P_n tais que P_n não coincide com o ponto P, e $\lim_{n\to+\infty} d(P_n, P) = 0$.



Todo ponto interior é ponto de acumulação.
Um ponto fronteiro pode ser ou não de acumulação! (no video afirma que todo ponto fronteiro é de acumulação mas está errado! , pense na ilha das Azores e Portugal, a ilha é ponto fronteiro e não é de acumulação!)
Todo ponto P do conjunto A que não é de acumulação é ponto isolado.

Diremos que um ponto P é ponto fronteiro de um conjunto A se para todo $r > 0$

$$B_r(P) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(P) \cap \{\mathbb{R}^2 \setminus A\} \neq \emptyset.$$

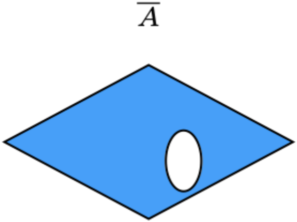


Um ponto fronteiro pode pertencer ou não ao conjunto.
$\mathrm{fr}(A)$ é o conjunto de pontos fronteiros de A.

Conjunto Fechado.

Diremos que um conjunto é fechado se contém todos os seus pontos de acumulação ou de forma equivalente se contém a sua fronteira Definimos o fecho de A

$$\overline{A} = A \cup \mathrm{fr}(A).$$

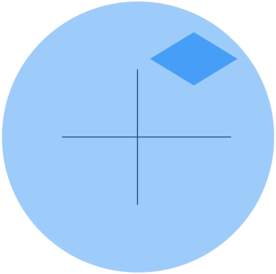


Conjunto limitado (*bounded*)

Diremos que o conjunto A é limitado se existe $r > 0$ tal que

$$A \subset B_r(P)$$

onde P é um ponto fixo.
Se visualizamos este conjunto em $\mathbb{R}^2$ estaremos a dizer que este conjunto está dentro de uma região finita.



Exemplo:

Considere o conjunto

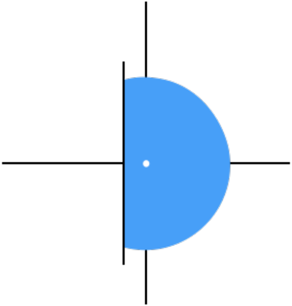
$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4, x \geq -\frac{1}{2} \right\}$$

a) Represente geométricamente este conjunto.

b) Identifique o int A, $\mathrm{fr}\, A$, $\overline{A}$.

c) Discuta se os pontos $P(0, 0), Q(0, 1), R(2, 0)$ são pontos de acumulação do conjunto A.

Resolução:



$P(0,0)$ é ponto de acumulação (é ponto fronteiro), $Q(0,1)$ é ponto de acumulação (é ponto interior), $R(2,0)$ é ponto de acumulação (é ponto fronteiro).

$$\text{int } A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4, x > -\frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{fr } A = \{(0,0)\}\,\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, \}\cup\left\{(-\frac{1}{2}, y), y \in [-\frac{sqrt15}{2}, \frac{\surd}{}\right.$$

$$\overline{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq -\frac{1}{2}\right\}$$

Exercícios propostos:

Exercício 1 Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ definido pelas condições

$$\frac{1}{4} < x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{4}, x^2 + y^2 \neq \frac{9}{16}$$

a) Represente geométricamente este conjunto.

b) Identifique o int A, $\mathrm{fr}\, A$, $\overline{A}$.

c) Discuta se os pontos $P(0,0), Q(0,1), R(0,\frac{3}{4})$ são pontos de acumulação do conjunto A.

Exercícios propostos:

Exercício 2 Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ definido pelas condições

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y^2, y < x\right\}$$

a) Represente geométricamente este conjunto.

b) Identifique o int A, $\operatorname{fr} A$, $\overline{A}$.

c) Discuta se este conjunto é limitado.

d) Discuta se os pontos $P(1, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $R(-1, 0)$ são pontos de acumulação do conjunto A.

Exercício 9, folha 1

Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1+x) \leq x$, para todo $x > -1$.

Fórmula de Taylor ou Mac-Laurin com resto de Lagrange

Seja f uma função real de variável real $\mathsf{C}^{n+1}(]-r,r[)$, com $r>0$. Então, para todo $x \in]-r,r[$

$$f(x) = T_0^n f(x) + R_0^n f(x)\,,$$

com

$$T_0^n f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$R_0^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \xi_x \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

$R_0^n f$ é chamado *resto de Lagrange de ordem* n *da função* f.

Resolução de exercícios

Calculamos o polinómio de Taylor, centrado em $c = 0$, de ordem 1, da função $f(x) = \ln(1 + x)$.

$$T_0^1(x) = f(0) + f'(0)x = 0 + x = x$$

A fórmula de Taylor diz

$$\ln(x + 1) = x + \text{erro}$$

$$\text{erro} = R_0^1(x) = f''(\xi_x)\frac{x^2}{2!} = \frac{-1}{(1 + \xi_x)^2}\frac{x^2}{2!} \leq 0.$$

onde ξ_x está entre 0 e x. ($-1 < x$, porque fora deste intervalo a função $f(x) = \ln(x + 1)$ não está definida.)

Exercício

Calcule a soma das séries indicadas

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\,;$$

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (n+1)}\,; \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}\,.$$

Resolução

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n)!} = \cos(2\pi) = 1$$

Resolução

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(e^1 + e^{-1}\right).$$

- Domínio
- Contradomínio
- Gráfico
- Conjuntos de nível

Domínio de uma função f $(n = 2)$

$$f: \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

D é chamado **domínio da função** f. Quando a função é dada por uma fórmula, o domínio é o maior conjunto onde esta fórmula está bem definida.

Exemplo

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = e^{x^2+y^2}, & D_f = \mathbb{R}^2 \\ g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, & D_g = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ h(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2), & D_h = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\right\}. \end{array}$$

Contradomínio de uma função f $(n = 2)$

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array}$$

$CD_f = \{f(x, y) : (x, y) \in D\}$ é chamado **contradomínio da função** f. **Exemplo**

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = e^{x^2+y^2}, & CD_f = [1, +\infty[\\ \\ g(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}, & CD_g =]0, +\infty[\\ \\ h(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2), & CD_h =]-\infty, \ln 4]. \end{array}$$

Gráfico de uma função f $(n = 2)$

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

$G_f = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$ é chamado **gráfico da função** f. O gráfico da função f é visualizado em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

$$G_f = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = e^{x^2+y^2}\right\}$$

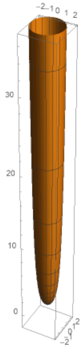
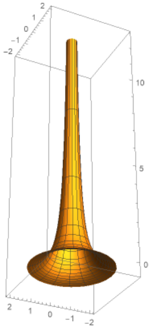


Gráfico de uma função f $(n = 2)$

Exemplo

$$g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$G_g = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, z = \frac{1}{x^2 + y^2}\right\}$$



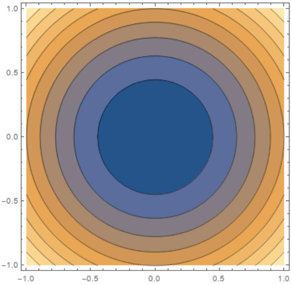
Curvas de nível ($n = 2$)

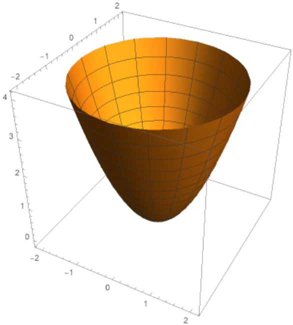
$$\begin{array}{rccc} f: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

$$C_k = \left\{(x,y) \in D_f : (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = k\right\}$$

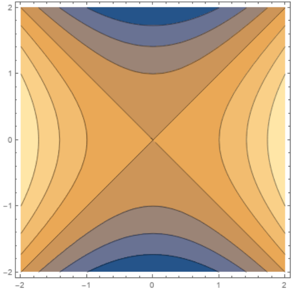
(mapas topográficos, mapas de curvas isotérmicas, mapas de curvas isobáricas.)

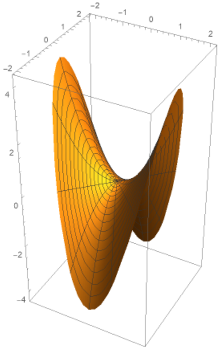
Exemplo $f(x,y) = x^2 + y^2$ (paraboloide elíptico).





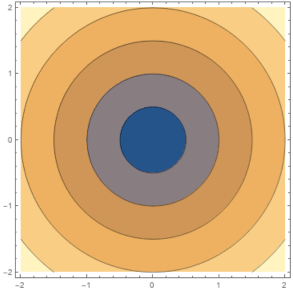
Exemplo $f(x, y) = x^2 - y^2$ (paraboloide hiperbólico).

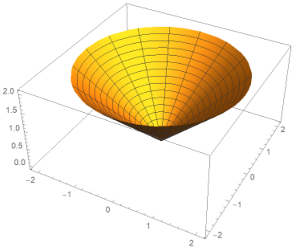




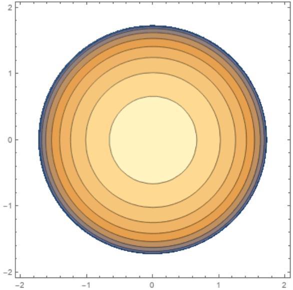
Curvas de nível ($n = 2$)

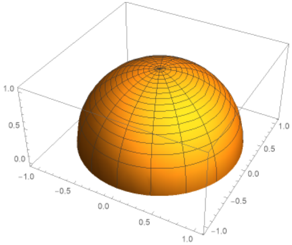
Exemplo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (cone).





Exemplo $f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ (semi-esfera).



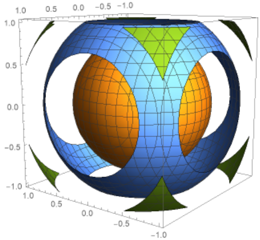


Superfícies de nível ($n = 3$)

$$f: \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array}$$

$$S_k = \left\{(x, y, z) \in D_f : (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = k\right\}$$

Exemplo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$



Exercícios propostos

Exercício 1 Determine o domínio das funções:

$$\begin{aligned} &a) \quad f(x,y) = \sqrt{y - x^2 + 2} \\ &b) \quad g(x,y) = \ln(9x^2 + 4y^2 - 1) \\ &c) \quad h(x,y) = \tfrac{x+3}{\ln(1-y-2x)}. \end{aligned}$$

Exercício 2 Para cada uma das seguintes funções

$$\begin{aligned} &a) \quad f(x,y) = 5 - (x+1)^2 - y^2 \\ &b) \quad g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ &c) \quad h(x,y) = \sqrt{1 - y^2} \end{aligned}$$

Descreva (analítica e geometricamente) as curvas de nível e obtenha os gráficos de cada uma delas.

Exercício 1 Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ definido pelas condições

$$\frac{1}{4} < x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{4}, x^2 + y^2 \neq \frac{9}{16}$$

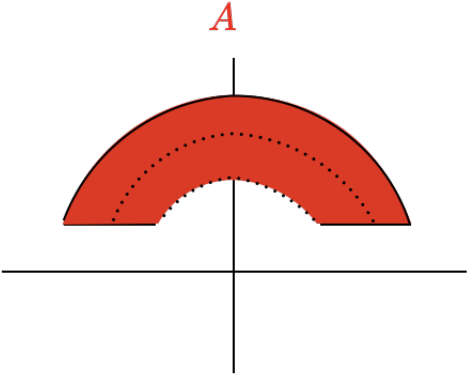
a) Represente geométricamente este conjunto.

b) Identifique o int A, $\operatorname{fr} A$, $\overline{A}$.

c) Discuta se os pontos $P(0,0), Q(0,1), R(0,\frac{3}{4})$ são pontos de acumulação do conjunto A.

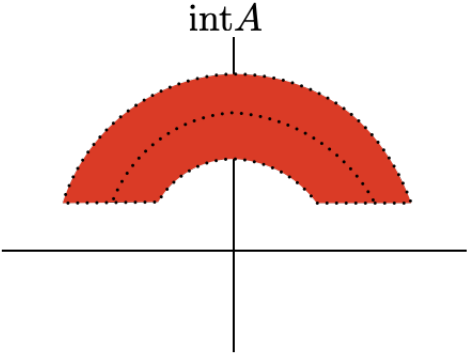
Resolução

$$A = \left\{ \frac{1}{4} < x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{4}, x^2 + y^2 \neq \frac{9}{16} \right\}$$



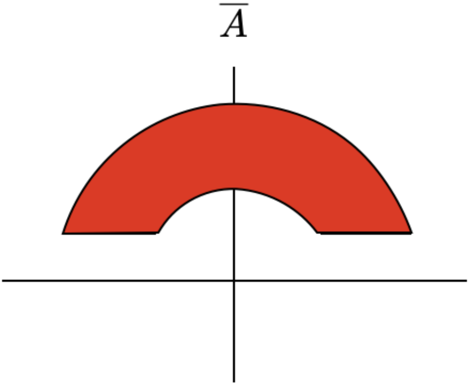
Resolução

$$\text{int } A = \left\{ \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 1, y > \frac{1}{4}, x^2 + y^2 \neq \frac{9}{16} \right\}$$



Resolução

$$\overline{A} = \left\{ \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{4} \right\}$$



$$\operatorname{fr} A = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup L_1 \cup L_2$$

onde

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq \frac{1}{4}\}$$

$$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, y \geq \frac{1}{4}\}$$

$$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{9}{16}, y \geq \frac{1}{4}\}$$

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{4}, x \in [\frac{-\sqrt{15}}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4}]\}$$

$$L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{4}, x \in [\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}]\}.$$

O ponto $Q(0,1)$ é de acumulação do conjunto A porque para qualquer r, $r>0$,

$$B_r(0,1)\setminus\{Q(0,1)\}\cap A\neq\emptyset$$

ou podemos construir uma sucessão P_n, de pontos que pertecem ao conjunto A, tais que $d(P_n,P)\to 0$. Neste caso

$$P_n(0,1-\frac{1}{n}),\ n\geq 5.$$

Da mesma forma procedemos com o ponto $R(0,\frac{3}{4})$.
O ponto $P(0,0)$ não é ponto de acumulação do conjunto A, porque existe $r>0$ tal que

$$B_r(0,1)\setminus\{P(0,0)\}\cap A=\emptyset$$

Por exemplo $r=\frac{1}{10}$.

Exercício 1 Determine o domínio das funções:

$$
\begin{aligned}
a) &\quad f(x,y) = \sqrt{y - x^2 + 2} \\
b) &\quad g(x,y) = \ln(9x^2 + 4y^2 - 1) \\
c) &\quad h(x,y) = \tfrac{x+3}{\ln(1-y-2x)}.
\end{aligned}
$$

Resolução: Encontre o domínio de $f(x,y) = \sqrt{y - x^2 + 2}$

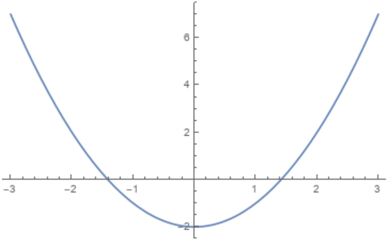
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 2 \geq 0\}$$

Para desenhar os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que verificam esta condição:
$\mathbf{1}$. Desenhamos os pontos dados pela condição $y - x^2 + 2 = 0$.
$\mathbf{2}$. Esta curva desenhada vai dividir o plano em duas "partes". Os pontos que verificam a desigualdade $>$ vão estar numa destas partes e os pontos que verificam a desigualdade $<$ estarão na outra parte do plano. Para decidir basta escolher um ponto numa dessas partes do plano e substituir na equação.

A equação

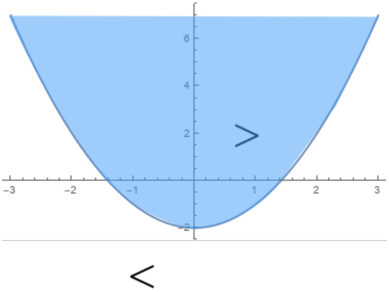
$$y - x^2 + 2 = 0$$

representa os pontos de uma parábola. Calculamos os pontos de corte $y = 0, x = \pm\sqrt{2}$, $x = 0, y = -2$ e representamos



Escolhemos por exemplo o ponto $P(0, 2)$

Escolhemos o ponto $P(0, 2)$ e verificamos $0 - 2^2 + 2 = -2 < 0$.



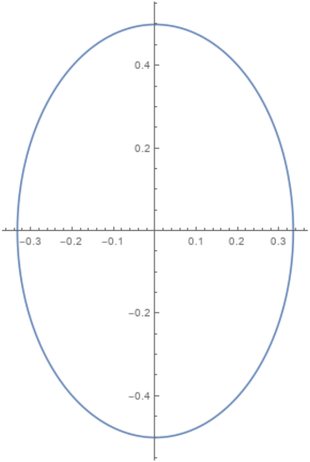
Resolução: Encontre o domínio de $g(x, y) = \ln(9x^2 + 4y^2 - 1)$

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 - 1 > 0\}$$

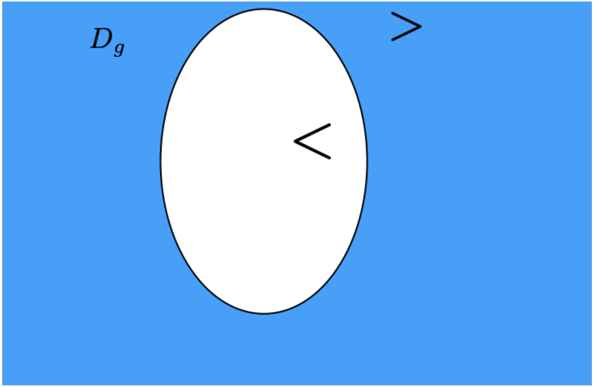
A equação

$$9x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

representa uma elipse no plano. Os pontos de corte são $(0, \pm\frac{1}{2})$, e $(\pm\frac{1}{3}, 0)$.



Escolhemos o ponto $P(0,0)$ e verificamos que $0+0-1<0$, pelo que decidimos qual é a região que representa o domínio da função g.



Exercício 2 Para cada uma das seguintes funções

$$\begin{aligned} a) \quad & f(x,y) = 5 - (x+1)^2 - y^2 \\ b) \quad & g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ c) \quad & h(x,y) = \sqrt{1 - y^2} \end{aligned}$$

Descreva (analítica e geometricamente) as curvas de nível e obtenha os gráficos de cada uma delas.

Descreva as curvas de nível e o gráfico de $f(x,y) = 5 - (x+1)^2 - y^2$

O gráfico é dado pelos pontos

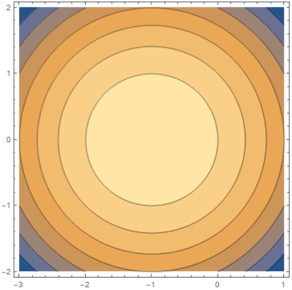
$$G_f = \left\{(x,y,z) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5 - (x+1)^2 - y^2 = z\right\}$$

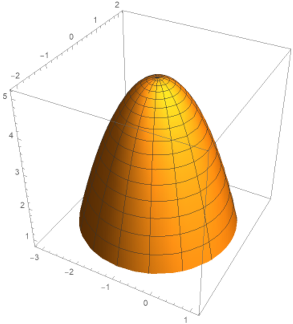
e as curvas de nível,

$$C_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k\right\}$$

$$k = 5 - (x+1)^2 - y^2 \iff (x+1)^2 + y^2 = 5 - k$$

Reparamos que $5 - k \geq 0$, pelo que somente existem curvas de nível para $z \leq 5$. Para cada corte no gráfico pelo plano $z = k$ aparece uma circunferência centrada em $(-1, 1, k)$, de raio $\sqrt{5-k}$





As curvas de nível nos ajudam a visualizar os cortes por planos constantes $z = k$.
Nesta figura, para a desenhar precisamos também fazer os cortes, nos planos constantes $y = k$ e $x = k$. Ou seja na equação deste gráfico,

$$z = 5 - (x+1)^2 - y^2$$

fazemos $y = k$ ou $x = k$ e observamos que obtemos parábolas.

Descreva as curvas de nível e o gráfico de $g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

O gráfico é dado por

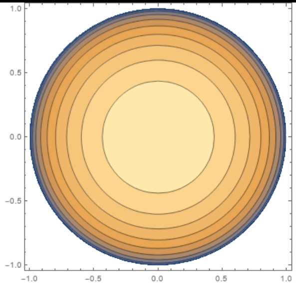
$$G_g = \left\{(x,y,z) : (x,y) \in D_g,\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} = z\right\},$$

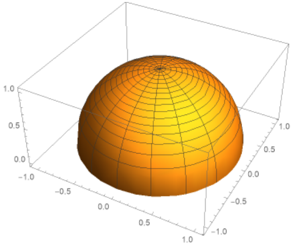
onde $D_g \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, e as curvas de nível são dadas por

$$C_k = \{(x,y) \in D : g(x,y) = k\}$$

$$k = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Longleftrightarrow 1 - x^2 - y^2 = k^2 \Longleftrightarrow 1 - k^2 = x^2 + y^2.$$

Reparamos que $k^2 \leq 1$ e $k \geq 0$, pelo que somente existem curvas de nível para $k \in [0,1]$. Para cada corte no gráfico pelo plano $z = k$ aparece uma circunferência centrada em $(-1, 1, k)$, de raio $\sqrt{1 - k^2}$.





As curvas de nível nos ajudam a visualizar os cortes por planos constantes $z = k$. Nesta figura, para a desenhar precisamos também fazer os cortes, nos planos constantes $y = k$ e $x = k$. Ou seja na equação deste gráfico,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

fazemos $y = k$ ou $x = k$ e observamos que obtemos circunferências (semi- neste caso pela condição $z \geq 0$).

Descreva as curvas de nível e o gráfico de $h(x,y) = \sqrt{1-y^2}$

O gráfico é dado por

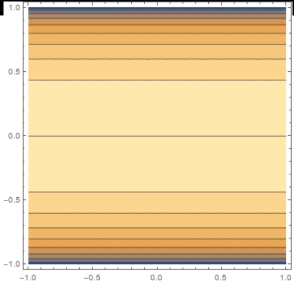
$$G_h = \left\{(x,y,z) : (x,y) \in D_h,\ \sqrt{1-y^2} = z\right\}$$

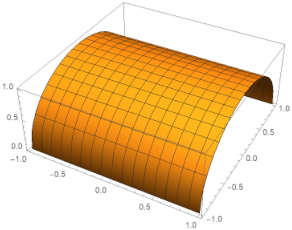
onde $D_h = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\right\}$, e as curvas de nível são dadas por

$$C_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = k\right\}$$

$$k = \sqrt{1-y^2} \iff 1-y^2 = k^2 \iff 1-k^2 = y^2.$$

Reparamos que $k^2 \leq 1$ e $k \geq 0$, pelo que somente existem curvas de nível para $k \in [0,1]$. Para cada corte no gráfico pelo plano $z = k$ aparecem duas retas $y = \sqrt{1-k^2}$ ou $y = -\sqrt{1-k^2}$.





As curvas de nível nos ajudam a visualizar os cortes por planos constantes $z = k$. Nesta figura, para a desenhar precisamos também fazer os cortes, nos planos constantes $y = k$ e $x = k$. Ou seja na equação deste gráfico,

$$y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

fazemos $x = k$ e observamos que obtemos circunferências (semi- neste caso pela condição $z \geq 0$) de raio 1, pelo que percebemos que estamos a desenhar um cilindro.

Aula 10: Retas, planos, cónicas e quádricas no plano e no espaço

Vamos lembrar os objetos geométricos dos que vamos tratar neste curso com uma certa frequência. Lembramos que no plano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço $\mathbb{R}^3$ identificaremos os pontos de coordenadas (x, y) ou (x, y, z) respectivamente com o vetor de posição que este ponto representa pelo que teremos uma dupla interpretação vetor ou ponto do plano ou espaço, com as mesma escrita em coordenadas. Começamos então por lembrar que dados dois pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, podemos considerar o vetor determinado por estes dois pontos AB de coordenadas $AB = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Equação da reta

Dado um ponto $A = (a_1, a_2)$ e um vetor $v = (v_1, v_2)$, para descrever a reta r que passa por este ponto e na direção deste vetor v, podemos usar a seguinte expressão

$$r \equiv \{(x, y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2), t \in \mathbb{R}\}$$

Neste caso t é chamado um parâmetro e designamos isto como a equação vetorial desta reta.
Outras formas equivalentes de descrever a mesma reta r

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

Quando esta reta é dada no espaço $\mathbb{R}^3$, teremos

$$r \equiv \{(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3), t \in \mathbb{R}\}$$

ou

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Equação do plano

Falemos agora da equação do plano em $\mathbb{R}^3$. Neste caso é importante referir que este plano pode ser determinado por um ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ e dois vetores $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ linearmente independentes, (isto significa que estes vetores não podem ser múltiplos um do outro), ou de forma equivalente por três pontos distintos.
Neste caso as chamadas equações paramétricas do plano vem dadas pela expressão

$$\{(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3), t, s \in \mathbb{R}\}$$

Outra forma de identificar este plano é a de calcular a sua equação cartesiana, que será dada pelo cálculo do determinante

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

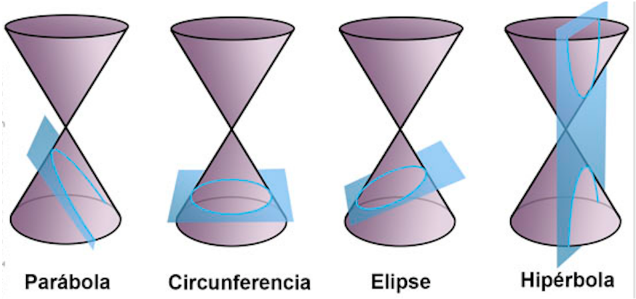
Uma outra abordagem para escrever a equação dum plano é considerar um ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ do plano e o chamado vetor normal ao plano $N = (n_1, n_2, n_3)$. Se usamos que para qualquer ponto $P = (x, y, z)$ do plano verifica-se que o vetor por AP é normal ao vetor N, teremos que o seu produto escalar é zero pelo que obtemos a equação

$$(x - a_1, y - a_2, z - a_3).(n_1, n_2, n_3) = 0$$

ou

$$(x - a_1)n_1 + (y - a_2)n_2 + (z - a_3)n_3 = 0.$$

Cónicas



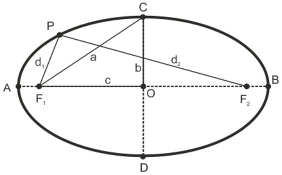
As cónicas são curvas do plano $\mathbb{R}^2$ dadas por uma equação de segundo grau. De forma particular esta equação de segundo grau pode ser reduzida aos seguintes tipos:

Equação reduzida da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou de forma equivalente, em equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} ,\theta \in [0, 2\pi[$$



A elipse é o conjunto dos pontos do plano tais que a soma das distâncias de dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante. Essa constante é igual ao comprimento do maior eixo da elipse.

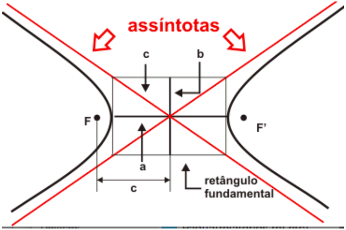
Equação reduzida da hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou de forma equivalente, em equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh\theta \\ y = b \sinh\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$$

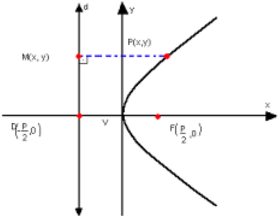
A hipérbole é o conjunto de todos os pontos tais que a diferença das distâncias a dois pontos fixos (chamados focos) é constante



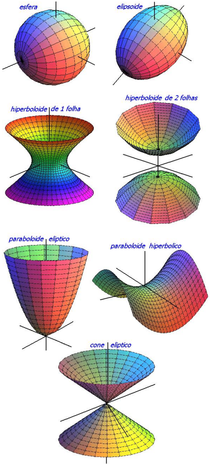
Equação reduzida da parábola:

$$y^2 = 2px$$

A parábola é o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto dado F(chamado de foco) e de uma reta dada d (chamada reta diretriz) Chamamos eixo de simetria da parábola à reta perpendicular a reta d e que passa pelo F. O eixo interseta a parábola num ponto O chamado vértice da parábola.

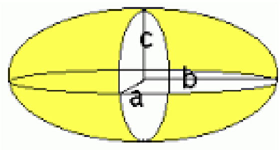


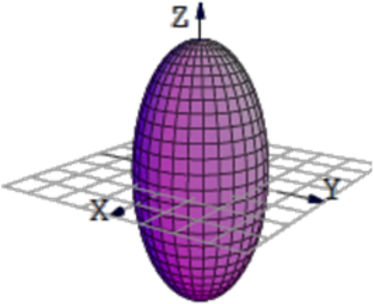
Quádricas


esfera
elipsoide
hiperboloide de 1 folha
hiperboloide de 2 folhas
paraboloide eliptico
paraboloide hiperbolico
cone eliptico

Equação reduzida do elipsoide

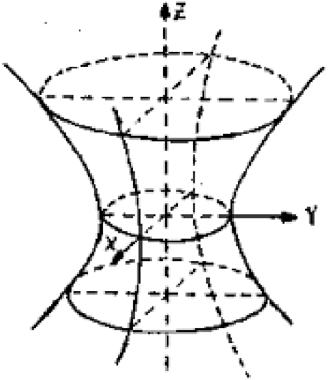
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

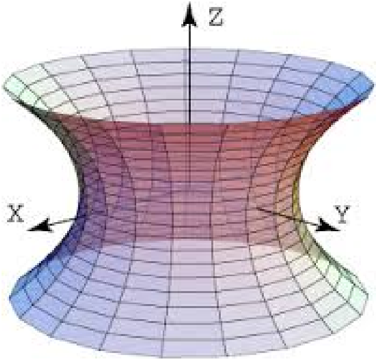




Equação reduzida do hiperboloide de uma folha

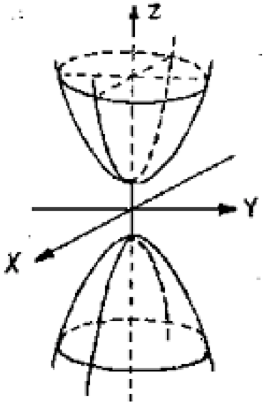
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

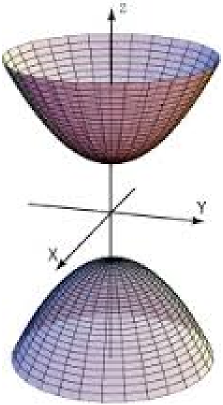




Equação reduzida do hiperboloide de duas folhas

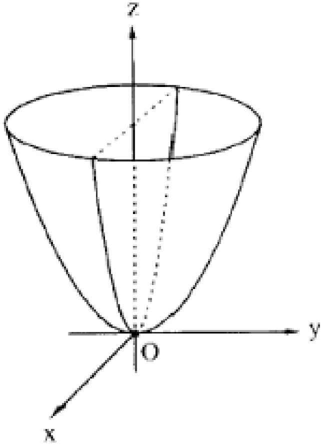
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

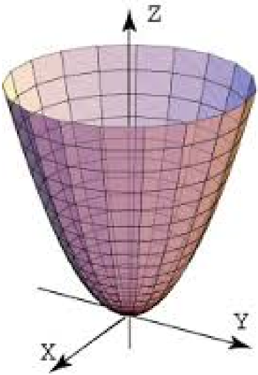




Equação reduzida do paraboloide elíptico

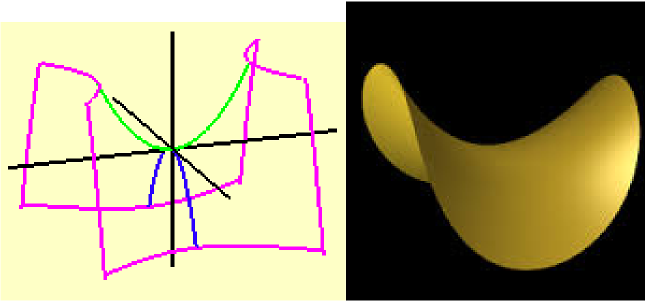
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$





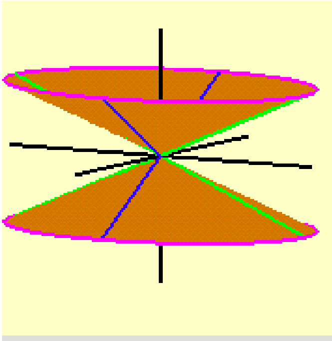
Equação reduzida do paraboloide hiperbólico

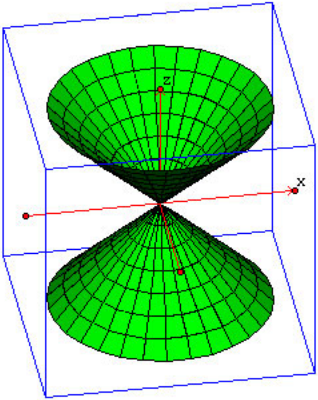
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$



Equação reduzida do cone

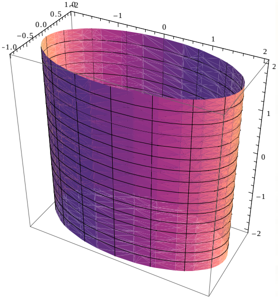
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

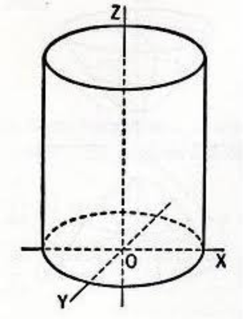




Equação reduzida do cilindro elíptico

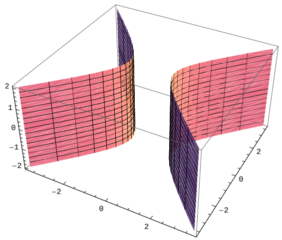
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$





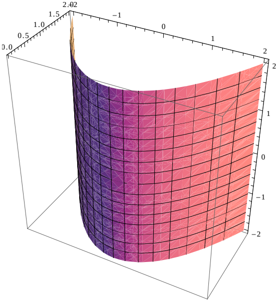
Equação reduzida do cilindro hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Equação reduzida do cilindro parabólico

$$x^2 = py$$



Exercício 1: Dado o plano de equação cartesiana $3x - y + 2z = 1$, determine as suas equações paramétricas.

Resolução:

Para encontrar as equações paramétricas deste plano é suficiente por em evidência uma das variáveis desta equação em função das outras, por exemplo escolhemos a variável y e obtemos

$$y = 3x + 2z - 1.$$

Reparamos que podemos escolher os valores de x e de z, pelo que para qualquer valor real t e s tomamos

$$x = s, \quad z = t$$

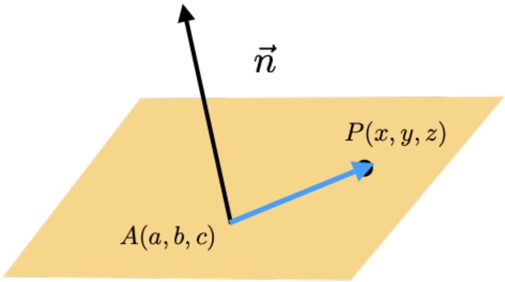
e obtemos $y = 3s + 2t - 1$. Deste modo qualquer ponto (x, y, z) deste plano é dado por

$$(x, y, z) = (s, 3s + 2t - 1, t) = (0, -1, 0) + (s, 3s, 0) + (0, 2t, t)$$

$$= (0, -1, 0) + s(1, 3, 0) + t(0, 2, 1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 2:

Determine a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $(1, -1, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n} = (2, 1, 3)$.



Resolução:

Para qualquer ponto $P(x, y, z)$ deste plano, consideramos o vetor $\vec{AP} = (x-1, y+1, z-2)$. Este vetor é perpendicular ao vetor normal ao plano pelo que

$$\vec{AP}.\vec{n} = 0$$

e obtemos

$$2(x-1) + (y+1) + 3(z-2) = 0$$

que será a equação cartesiana deste plano.

Exercício 3**:** Determine a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $(1,0,-1)$ e que é paralelo as retas

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x-y+z & = & 0 \end{array} \right. \qquad r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolução:

Vamos determinar um vetor diretor de cada uma destas retas. Se consideramos as equações que definem a reta r_1

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \end{cases}$$

tomaremos como variável livre a variável z pelo que re-escrevemos estas equações

$$\begin{cases} x+y &= -z \\ x-y &= -z \end{cases}$$

Se somamos estas equações obtemos

$$2x = -2z$$

pelo que $x = -z$. Se agora substraimos estas equações obtemos $y = 0$. Para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos que $z = t, x = -t, y = 0$ pelo que para qualquer ponto (x, y, z) desta reta r_1 temos que

$$(x, y, z) = (-t, 0, t) = t(-1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

De forma análoga podemos deduzir que para qualquer ponto (x, y, z) desta reta r_2 temos que

$$(x, y, z) = s(3, -2, 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

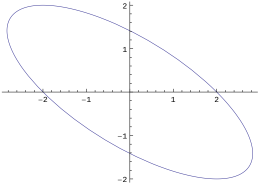
pelo que para construir a equação deste plano temos o ponto $(1, 0, -1)$ e os vetores $v_1 = (-1, 0, 1)$ e $v_2 = (3, -2, 1)$. A equação cartesiana deste plano pode ser calculada como

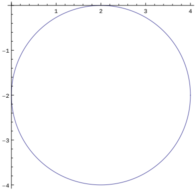
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

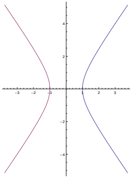
pelo que obtemos a equação $x + 2y + z = 0$.

Exercício 4: Reduza cada uma das seguintes cónicas a sua equação reduzida e estabeleça uma correspondência com o seguintes gráficos apresentados

$$a)\, x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2; \quad b)\, x^2 + 2xy + 2y^2 = 4; \quad c)\, x^2 - 2y^2 = 1.$$

$a)$


$b)$


; $c)$

.

Resolução:

$a)$ A equação $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2$ pode ser escrita como uma soma ou uma diferença de quadrados, pelo método de "completar quadrados"

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Neste caso

$$x^2 - 2x = 0$$

é equivalente a

$$x^2 - 2x + 1 = 1 \Longleftrightarrow (x - 1)^2 = 1.$$

Aplicamos o método a esta equação
$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2$
é equivalente à equação

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2+1+1 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

pelo que concluímos que esta cónica é uma circunferência de centro $(1, -1)$ e raio 2 e portanto corresponde à figura (b).

$b)$ Neste caso a equação $x^2 + 2xy + 2y^2 = 4$ é equivalente à equação

$$(x + y)^2 + y^2 = 4$$

pelo que concluímos que esta cónica é do tipo elipse porque é uma soma de dois quadrados. Se usamos a parametrização

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 2\cos t \\ y & = & 2\sin t, \end{array} \right. , \quad t \in [0, 2\pi]$$

e obtemos

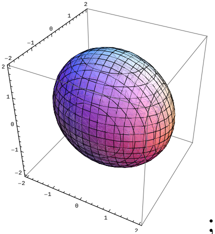
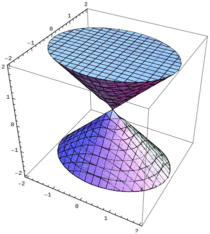
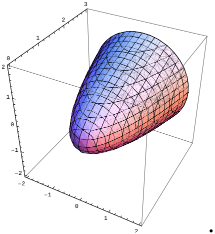
$$\left\{ \begin{array}{rcc} x & = & -2\sin t + 2\cos t \\ y & = & 2\sin t, \end{array} \right.$$

para $t \in [0, 2\pi]$. Se agora usamos um programa de cálculo simbólico, usando esta parametrização podemos gerar a figura (a).

Exercício 6**:** Esboçe cada uma das seguintes superfícies quádricas

$$a)\quad x^2+2y^2+z^2=2;\quad b)\quad x^2+2y^2=z^2;\quad c)\quad x^2+z^2=y.$$

Solução:

$a)$  ; $b)$  ; $c)$  .

Para definir a noção de limite precisamos de definir uma métrica ou distância. Neste caso se estamos a considerar $\mathbb{R}^n$, e consideramos dois pontos neste espaço $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n), y = (y_1, y_2 \ldots, y_n)$, podemos definir a chamada métrica euclideana

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2}$$

Em particular para $n = 2$ diremos que **uma sucessão de pontos** $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **de** $\mathbb{R}^2$ **converge para** $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, e denotaremos por:

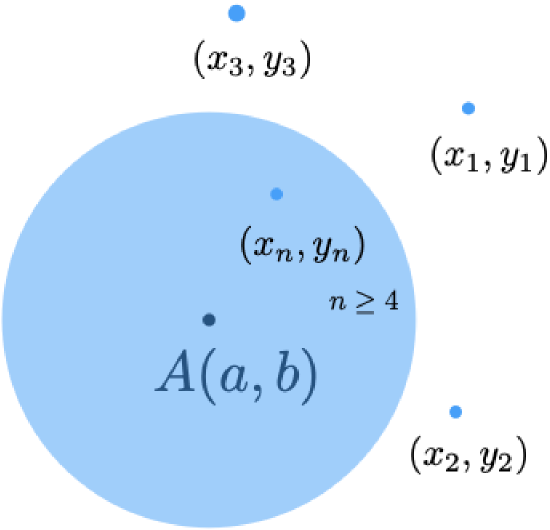
$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

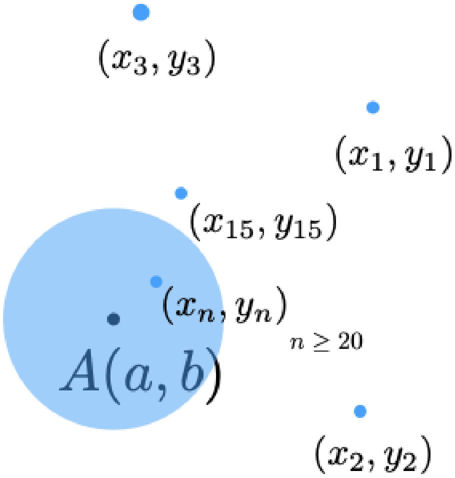
se e somente se

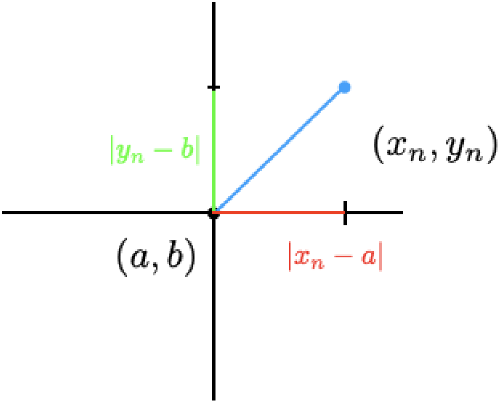
$$\lim_{n\to+\infty} d((x_n, y_n), (a, b)) = 0$$

ou

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = 0.$$


(x_3, y_3)
(x_1, y_1)
(x_n, y_n)
$n \geq 4$
$A(a, b)$
(x_2, y_2)


(x_3, y_3)
(x_1, y_1)
(x_{15}, y_{15})
(x_n, y_n)
$n \geq 20$
$A(a, b)$
(x_2, y_2)


$|y_n - b|$
(x_n, y_n)
(a, b)
$|x_n - a|$

Usando que

$$\begin{cases} |x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \\ |y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \end{cases}$$

ou

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

podemos afirmar:

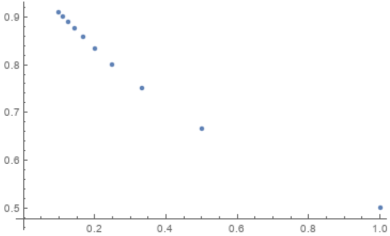
$$(x_n, y_n)_n \text{ converge para } (a, b) \Leftrightarrow$$

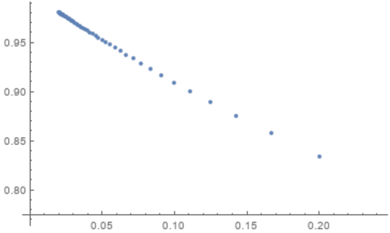
$$(x_n)_n \text{ converge para } a \text{ e } (y_n)_n \text{ converge para } b.$$

Este resultado também é válido em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

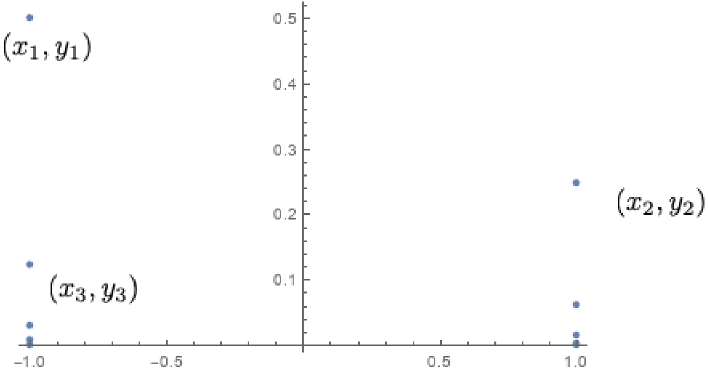
- A sucessão $\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o ponto $(0,1)$.





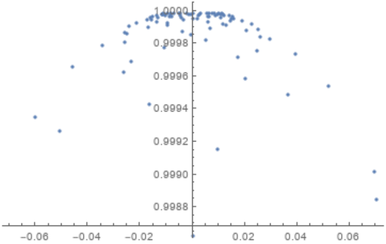
Exemplo

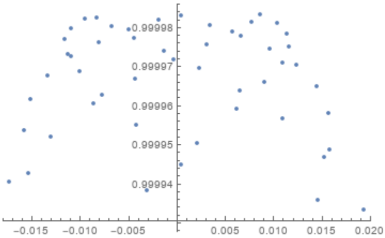
- A sucessão $((-1)^n, 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente porque a sucessão $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem limite, ainda que a sucessão $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para 0.



Exemplo

- A sucessão $(\frac{1}{n}\cos(n), n\sin(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o ponto $(0,1)$.





(desenho para $n =\leq 50$) (desenho para $50 < n \leq 100$) .

Exercício: Estude a convergência em $\mathbb{R}^2$ das seguintes sucessões:

1. $\left(\frac{2n^2+1}{n}\sin(\frac{1}{n}), (-1)^n\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\frac{1}{n}(2+(-1)^n)), e^{-n}+2\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\left(\frac{1}{\ln n}(\cos(n^2)), \ln(n)\sin(\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left(n^2\sin(\frac{2}{n^2+1}), \frac{3^n+2^n}{4^n+5^n}, \right)_{n\in\mathbb{N}}$;
5. $\left(\frac{\ln n}{n}\frac{n^2+1}{2n^2+2n+5}, e^{\frac{n}{1-2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Um exemplo para voltar a pensar

Consideremos a função

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Sabemos (por exemplo usando a regra de Cauchy) que

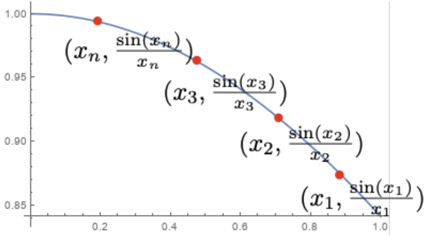
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Isto é equivalente a dizer que para qualquer sucessão de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

verifica-se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$



Neste gráfico os pontos x_n aproximam-se de $x = 0$ pela direita, (mas podemos escolher qualquer sucessão que no limite converge para $x = 0$.)

Aula 13: Limite de funções reais de várias variáveis

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e seja (a, b) ponto de acumulação de D. Diremos que f **tende para o valor** $L \in \mathbb{R}$ **quando** (x, y) **tende para** (a, b), e denotamos por

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se (CAUCHY) dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < d((x, y), (a, b)) < \delta \Longrightarrow |L - f(x, y)| < \epsilon$$

ou equivalentemente (HEINE) se para toda sucessão $(x_n, y_n)_n$ de pontos contida em D, $(x_n, y_n) \neq (a, b)$, verifica-se

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (a, b) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = L$$

Unicidade do limite

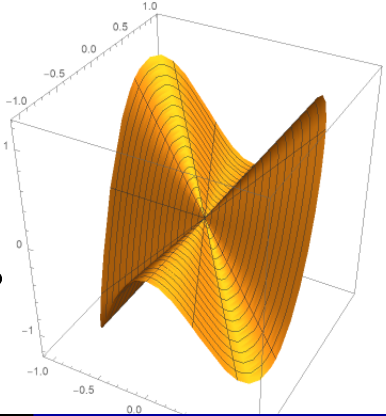
Quando existe o valor limite de uma função num ponto este valor é único. Esta observação permite obter critérios para a não existência de limite

Exemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Neste caso,

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

.



O domínio desta função é

$$D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$

e $(0,0)$ é ponto de acumulação deste domínio.

Vamos estudar a distância entre o valor $f(x, y)$ e o valor 0,

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

se temos em conta que $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ obtemos que

$$3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 3|y|$$

pelo que dado

$$|(x, y) - (0, 0)| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 3\delta$$

Para qualquer $\epsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ e obtemos que

$$|(x,y)-(0,0)| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon$$

Observação:

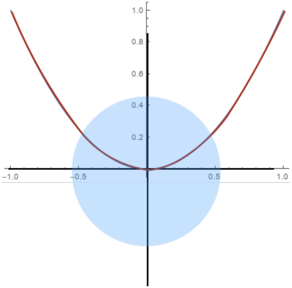
Os valores ϵ e δ calculados neste exemplo permitem escolher pontos (x, y) tão perto como δ do ponto $(0, 0)$ e tais que o valor da função nestes pontos dista ϵ do valor 0 pelo que podem usar a máquina de calcular para verificar estes valores em alguns pontos concretos!.

Exemplo: Não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2-y}$, $x^2 \neq y$.

Neste caso

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2-y}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \neq 0\}$$



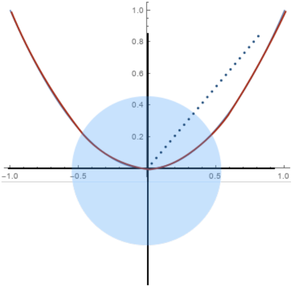
Cada ponto da parábola $y = x^2$ é um ponto de acumulação de D_f.

Consideremos a sucessão de pontos $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in D_f$ tais que

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0, 0),$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \to +\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n - n^2} = 0.$$



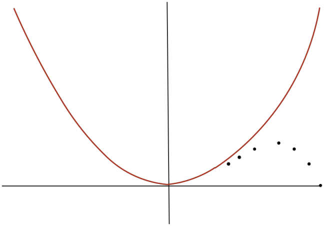
$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2-y}$$

Consideramos $(x_n,y_n)=(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})\in D_f$, tais que

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})=(0,0),$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{n}=1.$$



Concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2-y}$$

não existe limite, porque caso isto fosse verdadeiro, em ambos limites calculados anteriormente teríamos obtido o mesmo resultado.

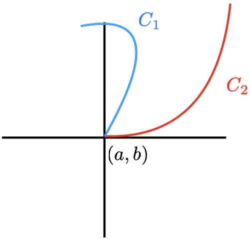
Cálculo do limite em curvas ou caminhos

Para nos aproximar de um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ podemos usar distintas curvas ou caminhos. Sejam C_1, e C_2 duas curvas distintas conti-
das no domínio da nossa função e suponhamos que podemos calcular

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) = L_1$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y) = L_2$$



Se $L_1 \neq L_2$ podemos afirmar que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

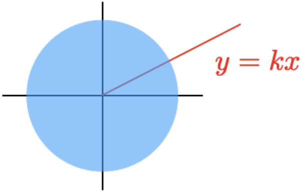
Exemplo: Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

Vamos considerar neste caso uma família de retas, C_k,

$$C_k = \{(x,y) : y = kx, x > 0\}$$

Calculamos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_k}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(kx)^2}{x^2+(kx)^2}$$



$$= \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

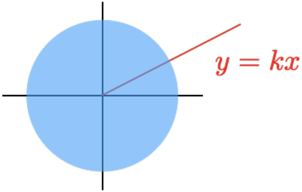
O valor deste limite depende de k pelo que podemos afirmar que este limite não existe.

Exemplo: Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe.

Neste caso se voltamos a usar a retas $C_k = \{(x,y) : y = kx, x > 0\}$ e calculamos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_k}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x(kx)^2}{x^2+(kx)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xk^2}{1+k^4x^2} = 0$$

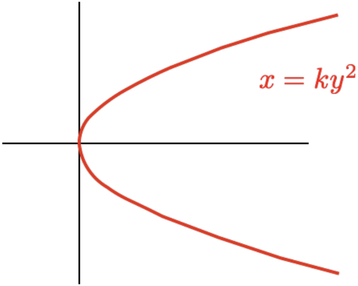


O valor obtido deste limite é sempre 0 e nada podemos concluir.

Se usamos agora uma outra família de curvas (parábolas) $\Gamma_k = \left\{(x,y) : ky^2 = x, y > 0\right\}$ obtemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_k}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

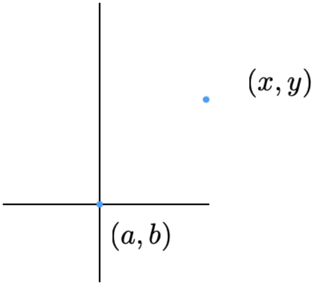
$$= \lim_{y\to 0} \frac{(ky^2)y^2}{(ky^2)^2+y^4} = \frac{k}{k^2+1}$$



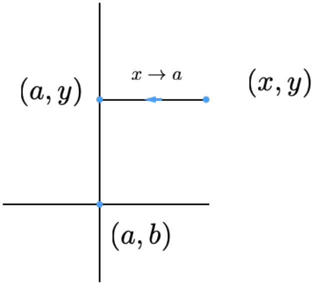
O valor deste limite depende de k pelo que podemos afirmar que este limite não existe.

Limites iterados: $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)$ ou $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$.

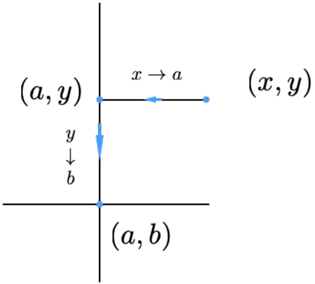
Quando calculamos estes limites nos estamos a aproximar do ponto (a,b) usando curvas paralelas aos eixos coordenados. Caso algum destes limites não exista ou sejam distintos podemos afirmar que o limite não existe.


(x,y)
(a,b)

$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$.



$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$.



Exemplo: Mostre usando limites iterados que não existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x+y}{x-y}$.

Neste caso calculamos

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1;$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-y} = -1;$$

Os valores obtidos são distintos pelo que podemos afirmar que não existe este limite.

Aula 14: Critérios para a existência de limite ou cálculo do limite

Uma função limitada por uma função função que tende para zero

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y)$$

onde supomos que:
$i)$ f é uma função limitada numa vizinhança do ponto (a,b), (ou seja existe um $\delta > 0$ tal que para os pontos (x,y) que verificam $0 < d((x,y),(a,b)) < \delta$, existe um $M > 0$ tal que $|f(x,y)| < M$),
$ii)\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0$,
então podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

Exemplo

Podemos justificar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

uma vez que a $\frac{x^3}{x^2+y^2} = x\frac{x^2}{x^2+y^2}$, e a função $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada, verifica

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

e a função $g(x,y) = x$ tende para zero quando (x,y) tende para o ponto $(0,0)$.
(Note-se que neste caso a função f não somente é limitada numa vizinhançã do ponto $(0,0)$ mas em todo $\mathbb{R}^2$.)

Mudança de variável para o cálculo de limites

Vamos ilustrar com o seguinte exemplo como podemos usar uma mudança de variável para o cálculo de limite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Neste caso realizamos a mudança de variável $x^2+y^2=t$, quando $(x,y)\to(0,0)$ temos que $t\to 0$ (até podíamos indicar que é 0^+), pelo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} =_{\text{Regra de Cauchy}} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1} = 1$$

Qual é a analogia com os limites laterais em $\mathbb{R}$?

Em $\mathbb{R}$ quando falamos da noção de limite para uma função real de variável real, falamos da possibilidade de calcular os limites laterais, a esquerda e a direita. Caso existam e sejam iguais afirmamos que o limite existe.
No caso de funções reais de várias variáveis podemos construir **uma partição finita do domínio D a volta do ponto (a, b) onde estamos a considerar o cálculo do limite, e caso o limite exista em cada um dos conjuntos desta partição e estes limites sejam iguais poderemos afirmar que o limite existe**.
Reparem que num dos exemplos estudados anteriormente tinhamos considerado uma partição do dominio num conjunto infinito de retas, e ainda que o limite existia e era de valor igual a 0 em cada uma destas retas, chegamos à conclusão que o limite não existia (nesse exemplo existiam curvas do tipo parábolas onde o limite calculado não era 0.)

Exemplo de partição do domínio para o cálculo de limite

Consideremos

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

neste caso o domínio desta função é $\mathbb{R}^2$. Vamos calcular o limite desta função no ponto $(0,0)$. Neste caso consideramos os conjuntos $A = \{(x,y) : x \neq 0\}$ e $B = \{(x,y) : x = 0\}$ que constituem uma partição finita do domínio a volta do ponto $(0,0)$. Calculamos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = 0 \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = 0$$

pelo que podemos afirmar que este limite existe e o seu valor é 0.

Propriedades algébricas dos limites

Sejam f, g funções reais definidas num certo conjunto D de $\mathbb{R}^2$. Seja $A(a, b)$ um ponto de acumulação de D. Suponhamos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L_1$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = L_2$$

então verifica-se

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) + g(x, y) = L_1 + L_2$;
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \lambda f(x, y) = \lambda L_1$;
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)g(x, y) = L_1 L_2$;
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}$, no caso que $L_2 \neq 0$;

Continuidade de funções reais de várias variáveis

Diremos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **é contínua num ponto** $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ se,

$$\textbf{existe} \lim_{x \to a} f(x)\,, \ \textbf{e} \ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Álgebra das funções contínuas A soma, produto, quociente (desde que não seja zero o denominador) e composição de funções contínuas é uma função contínua.

A função f projeção (em $\mathbb{R}^2$), definida por $f(x, y) = x$, é uma função contínua (análogamente para a função projeção $g(x, y) = y$), pelo que exemplos de funções contínuas, no seu domínio de definição são

$$f(x, y) = x^2 + y^2\,, g(x, y, z) = \frac{x + y}{x^3 - y^3}, \ h(x, y) = \cos\sqrt{x^3 + y}$$

Teorema de Weierstrass

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num conjunto compacto (fechado e limitado), então f atinge em D o seu valor máximo e o seu valor mínimo.

Exercício 1**:** Considere as seguintes funções

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + y^3}{2x^3 + 3x^2y}, \quad g(x,y) = \frac{x^6 + x^3y}{x^6 + y^2}, \quad h(x,y) = \frac{y^4 + y^2x}{y^4 + x^2}.$$

Discuta a existência de limite para cada uma das funções f, g e h no ponto $(0,0)$.

Exercício 2: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$f(x,y) = \frac{\sin(x+2y)}{x+2y}, \quad g(x,y) = \frac{y^6 x}{y^4 + x^2}$$

i) Indique o domínio para cada uma destas funções e indique os pontos interiores e de acumulação deste domínio.

ii) Discuta se estes domínios são conjuntos limitados e fechados.

iii) Discuta a existência de limite para cada uma das funções f e g no ponto $(0,0)$.

Exercício 3**:** Considere as seguintes funções

$$f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2},\quad g(x,y)=\frac{xy^3}{x^2y^2+x^3y}$$

a) Indique o domínio D de para cada uma destas funções e indique os pontos interiores e de acumulação deste domínio.

b) Discuta se estes domínios são conjuntos limitados e fechados.

c) Discuta a existência de limite da função f e g no ponto $(0,0)$.

d) Justifique se a função f atinge num ponto o seu valor máximo. Que podemos dizer da função g?

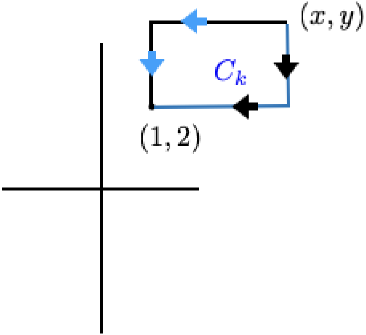
Aula 15: Resolução de exercícios

Exercício 1 Para determinar a existência do seguinte limite,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2}{x^2+y^2-5}$$

experimente a seguinte estratégia

- Calcule os limites iterados.
  Pode já concluir a existência ou não deste limite?



Resolução:

$$\lim_{y\to 2}\lim_{x\to 1}\frac{xy-2}{x^2+y^2-5}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^2-4}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{(y-2)(y+2)}$$
$$=\lim_{y\to 2}\frac{1}{y+2}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 2}\frac{xy-2}{x^2+y^2-5}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x+1}=1.$$

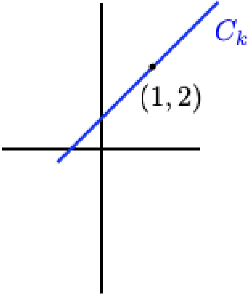
Concluímos que o limite não existe porque os limites iterados obtidos não são iguais. (Caso fossem iguais nada podíamos concluir!)

Exercício 1 Para determinar a existência do seguinte limite,

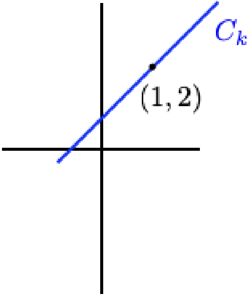
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y-3}{x-3y+5}$$

experimente a seguinte estratégia

- Usando limites segundo as retas que passam pelo ponto $(1,2)$ e de declive k. Pode já concluir a existência ou não deste limite?



$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-2 = k(x-1)\}$$



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,2)\\(x,y)\in C_k}} \frac{x+y-3}{x-3y+5} = \lim_{x\to 1} \frac{x+(2+k(x-1))-3}{x-3(2+k(x-1))+5}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1+k)x-1-k}{(1-3k)x-1+3k} =_{\text{Regra de Cauchy}} = \lim_{x\to 1} \frac{1+k}{1-3k} = \frac{1+k}{1-3k}$$

Podemos sempre alterar o ponto para o cálculo do limite!

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+a, y+b)$$

Exemplo

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{\sin(x^2-1)}{xy+1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin((x-1)^2-1)}{(x-1)(y+1)+1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-2x)}{xy+x-y}$$

Este limite não existe (pode usar qualquer das duas estratégias apresentadas anteriormente).

Exercício 3 Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$$

Estratégia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

Sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

e que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

não existe, pelo que o limite do produto neste caso não existe.

Exercício 4 Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^4}{2x^2 + 4y^2}$$

Estratégia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^4}{2x^2 + 3y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{2x^2 + 4y^2} - 4\frac{y^4}{2x^2 + 4y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \frac{x^2}{2x^2 + 4y^2} - 4y^2 \frac{y^2}{2x^2 + 4y^2}$$

Temos agora em conta que

$$0 \leq \frac{x^2}{2x^2+4y^2} = \frac{1}{2}\frac{2x^2}{2x^2+4y^2} \leq \frac{1}{2}$$

pelo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \frac{x^2}{2x^2+4y^2} = 0$$

porque trata-se do produto de uma função limitada por uma função de limite 0.

Usando o mesmo raciocínio concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -4y^2\frac{y^2}{2x^2+4y^2} = 0$$

e finalmente obtemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\frac{x^2}{2x^2+4y^2} - 4y^2\frac{y^2}{2x^2+4y^2} = 0+0 = 0.$$

Uma função real de várias variáveis pode ser olhada como uma função de uma só variável. Basta para tal fazer constantes as demais variáveis, excepto a que seleccionámos. Desta forma podemos usar a noção de derivada (em cada uma das coordenadas), mesmo sabendo que isto dános- somente uma ideia parcial da variação da função original.

Exemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

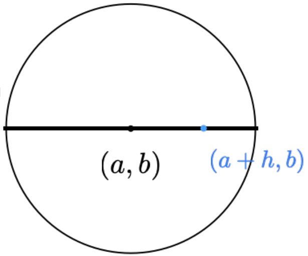
$$g(x) = f(x, 1) = x^2 + 1$$

Derivada parcial em ordem a x

Seja $f(x,y)$ uma função real definida em $D \subset \mathbb{R}^2$. Definimos derivada parcial de f em (a,b) relativamente em ordem a x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

à derivada da função $g(x) = f(x,b)$ (agora função somente da variável x) em a.



$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

Quando estamos a calcular a derivada parcial em ordem a x estamos a movimentar-nos no plano (x,y) na direção do vetor $(1,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b)+h(1,0))-f(a,b)}{h}.$$

Cálculo da derivada parcial em ordem a x

Para efetuar a derivada parcial em ordem a x, consideramos que a variável y é uma constante e usamos as regras de derivação. No final substituímos o resultado obtido no ponto.

Exemplo:

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2.$$

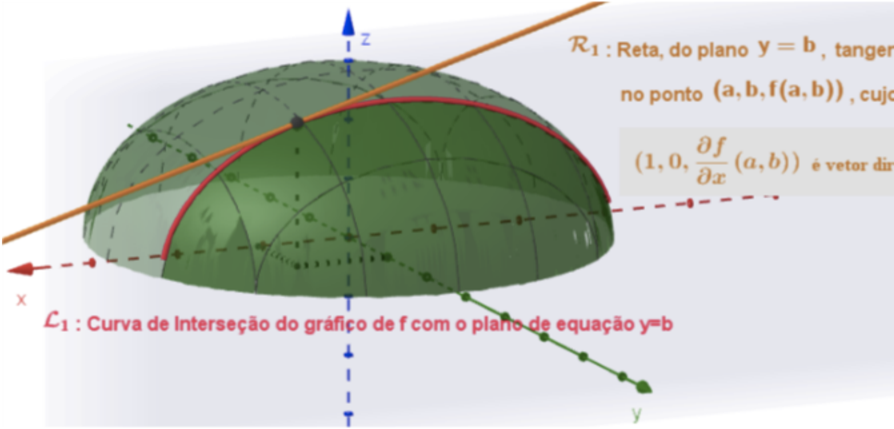
Exemplo:

$$f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 1 + 1 = 2.$$

Interpretação geométrica da derivada parcial em ordem a x

A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a,b) é o declive da reta tangente à curva intersecção do gráfico de f com o plano $y=b$ no ponto $(a,b,f(a,b))$



applet

A equação cartesiana desta reta r é dada por

$$r \equiv \begin{cases} y = b \\ z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in r \Leftrightarrow (x,y,z) = (x, b, f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a))$$

$$= (0, b, f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)a) + x(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b))$$

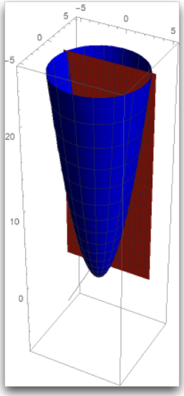
O vetor $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b))$ é o vetor diretor desta reta.

Exemplo

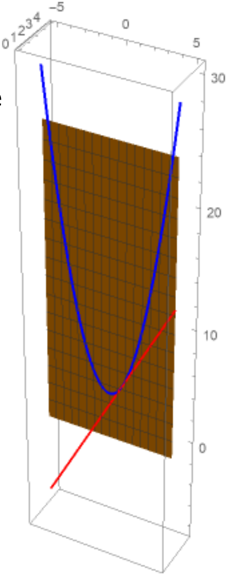
Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. O gráfico

$$G_f = \{(x, y, z), z = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

é a superfície chamada paraboloide elíptico. Consideremos o ponto $(1, 2)$ e fixamos $y = 2$ pelo que obtemos $g(x) = f(x, 2) = x^2 + 4$. Consideramos a curva $(x, 2, z)$, onde $z = x^2 + 4$, que é a intersecção do paraboloide elíptico com o plano $y = 2$, ou seja uma parábola no plano $y = 2$.



$g'(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$ é o declive da reta r tangente à curva $(x, 2, x^2+4), x \in \mathbb{R}$ no ponto $(1,2,5)$.



$$r \equiv \begin{cases} y = 2 \\ z = 5 + 2(x-1) \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in r \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) = (x, 2, 5+2(x-1)) = (0, 2, 3) + x(1, 0, 2)$$

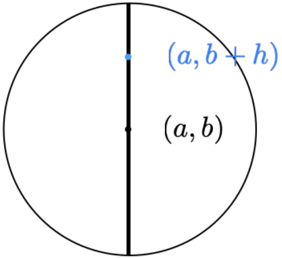
para $x \in \mathbb{R}$.

O vetor $(1, 0, 2)$ é o vetor diretor desta reta.

Derivada parcial em ordem a y

Seja $f(x, y)$ uma função real definida em $D \subset \mathbb{R}^2$. Definimos derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b), $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, como a derivada em b da função $f(a, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$



Cálculo da derivada parcial em ordem a y

Para efetuar a derivada parcial em ordem a y, consideramos que a variável x é uma constante e usamos as regras de derivação. No final substituímos o resultado obtido no ponto.

Exemplo:

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

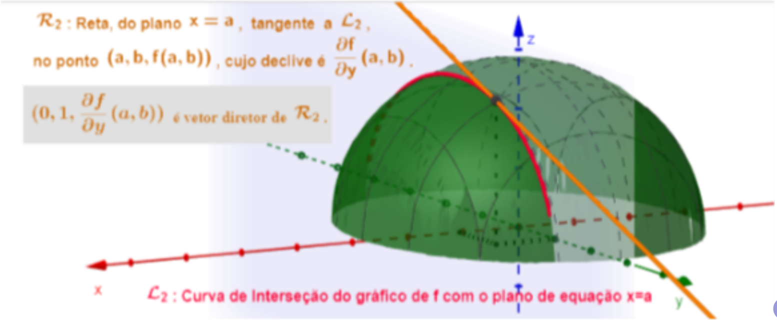
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0.$$

Exemplo:

$$f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 1 + 1 = 2.$$

A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o declive da reta tangente à curva intersecção do gráfico de f com o plano $x = a$ no ponto $(a, b, f(a, b))$



Interpretação geométrica da derivada parcial em ordem a y

A equação cartesiana desta reta r é dada por

$$r \equiv \begin{cases} x = a \\ z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in r \Leftrightarrow (x,y,z) = (a, y, f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b))$$

$$= (a, 0, f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)b) + y(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$$

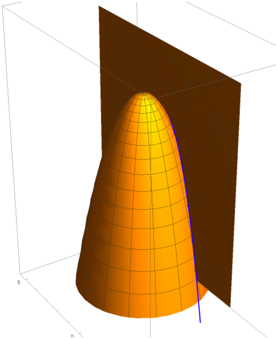
O vetor $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$ é o vetor diretor desta reta.

Exemplo

Seja $f(x,y) = 3 - (x^2 + y^2)$. O gráfico

$$G_f = \{(x,y,z), z = 3 - (x^2+y^2), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

é a superfície chamada paraboloide elíptico. Consideremos o ponto $(1,2)$ e fixamos $x = 1$ pelo que obtemos $g(y) = f(1,y) = 3 - (1+y^2) = 2 - y^2$. Consideramos a curva $(1,y,z)$, onde $z = 2 - y^2$, que é a intersecção do paraboloide elíptico com o plano $x = 1$, ou seja uma parábola no plano $x = 1$.



$g'(2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2y|_{(1,2)} = -4$ é o declive da reta r tangente à curva $(1, y, 2-y^2), y \in \mathbb{R}$ no ponto $(1, 2, -2)$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = -2 - 4(y-2) \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in r \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) = (1, y, -2 - 4(y-2))$$

$$= (1, 0, 6) + y(0, 1, -4)$$

para $x \in \mathbb{R}$.

O vetor $(0, 1, -4)$ é o vetor diretor desta reta.

Exercício: Determine as derivadas parciais de $f(x, y, z) = x^2 + ye^{yz}$.

Exercício: Determine as derivadas parciais de $f(x, y, z) = x^2 + ye^{yz}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = e^{yz} + yze^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}f(x, y, z) = y^2e^{yz}$$

Quando a função exibe certo tipo de singularidade, como no seguinte exemplo, vemo-nos obrigados a aplicar a definição de derivada.

Calcule as funções derivadas parciais de

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se $(x,y) \neq (0,0)$, aplicando as regras de derivação obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calcular as funções derivadas parciais de

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Se $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Note-se que, neste exemplo, f não é contínua na origem e no entanto existem as duas funções derivadas parciais neste ponto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ não existe}$$

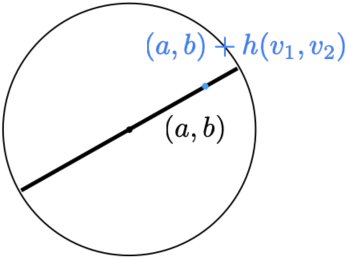
Observação. Quando estamos a calcular a derivada parcial em ordem a x estamos a calcular a taxa de variação da função em pontos da forma $(a,b)+h(1,0)$. Estamos a restringir a nossa função aos valores que toma na reta horizontal $y=b$.
O mesmo acontece no caso da derivada parcial em ordem a y, onde neste caso estamos a calcular a taxa de variação da função em pontos da forma $(a,b)+h(0,1)$, ou seja estamos a restringir a nossa função aos valores que toma na reta vertical $x=a$.

Em geral podemos restringir a função a uma recta qualquer, cujo parâmetro se toma como a única variável. Isto leva-nos à definição de derivada direccional.

Dado (v_1, v_2) um vector unitário, definimos derivada direccional de $f(x, y)$ no ponto (a, b) segundo a direcção (v_1, v_2)

$$D_{(v_1,v_2)}f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b) + h(v_1,v_2)) - f(a,b)}{h}.$$

Observação. Quando exigimos que (v_1, v_2) seja um vector unitário, ou seja que a sua norma seja igual a 1 vamos ter uma interpretação geométrica desta derivada direccional



Exemplo. Calcule a derivada direccional da função $f(x, y) = y + \sin x$ no ponto $(\pi, 1)$ segundo a direção do vetor $v = (1 - 1)$.

Resolução.

Calculamos o vetor unitário $u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, e calculamos a derivada direccional

$$D_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(\pi, 1) = \lim_{h \to 0} \frac{f((\pi, 1) + h\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)) - f(\pi, 1)}{h}$$

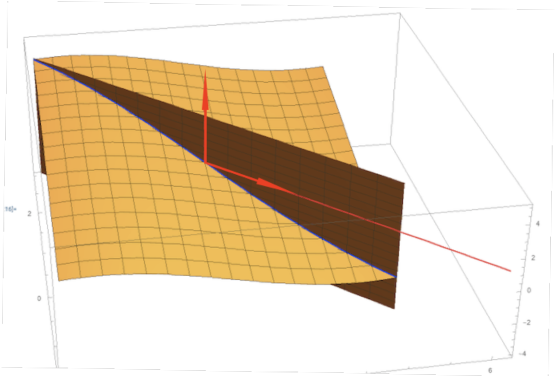
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}h + \sin(\pi + \frac{1}{\sqrt{2}}h) - 1}{h}$$

$$=_{\text{Regra de Cauchy}} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(\pi + \frac{1}{\sqrt{2}}h)\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}$$

$$= -2\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

$$D_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)}f(\pi,1) = -\sqrt{2}.$$

corresponde ao declive da reta tangente à curva obtida pela interseção do gráfico $z = y + \sin x$ com o plano $x + y = \pi + 1$, no ponto $(\pi, 1, 1)$, quando estamos a considerar como eixos deste plano os vetores $(0, 0, 1)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.



Exercício: Discutir a existência das derivadas parciais e direccionais na origem da função

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Resolução:

Queremos calcular $\lim_{h\to 0} \dfrac{f((0,0)+t(v_1,v_2))-f(0,0)}{t}$, onde $\sqrt{v_1^2+v_2^2}=1$.

$$f((0,0)+t(v_1,v_2)) = \frac{(tv_1)(tv_2)}{\sqrt{(tv_1)^2+(tv_2)^2}} = \frac{|t|v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = |t|v_1v_2.$$

e $f(0,0)=0$. Por tanto vamos calcular

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(v_1,v_2))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|v_1v_2}{t}$$

se $v_1=0$ ou $v_2=0$, o valor deste limite é 0 e as funções derivadas parciais na origem são 0. Por outro lado, se $v_1v_2\neq 0$ este limite não existe. logo as derivadas direccionais só existem para as direcções vertical e horizontal.

Derivadas parciais de ordem superior

Definições e notação:

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais em ordem a x e a y, em algum conjunto de pontos no interior de $\mathcal{D}$. As funções

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}$$

com domínio nos conjuntos de pontos onde cada uma existe, terão, ou não, derivadas em ordem a x e a y nesse conjunto. As derivadas parciais de ordem 2 de f são as funções (definidas nos pontos onde existem):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Teorema de Schwarz

Exemplo:

Seja f a função real de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^3y + 5xy + \sin(y^2)$. Verifique que, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 5y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 5x + 2y\cos(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\cos(y^2) - 4y^2\sin(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 + 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + 5$$

Teorema de Schwarz: Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$.

Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em P, então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$.

Função de classe C^k; Corolário do Teorema de Schwarz

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, com $\mathcal{D}$ aberto, e $k \in \mathbb{N}_0$. Dizemos que f é de classe C^k em $\mathcal{D}$ se f possuir todas derivadas parciais até à ordem k contínuas em todo o ponto de $\mathcal{D}$.
Notação: $f \in C^k(\mathcal{D})$.

Corolário do Teorema de Schwarz:

Se $f \in C^2(\mathcal{D})$, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)$, para todo o $P \in \mathcal{D}$, com $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Aula 17:

- Definição de diferencial de uma função num ponto
- Condição necessária para a existência de diferencial.
- Condição suficiente para a existência de diferencial

Derivada usual

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e a ponto interior de D, definimos como derivada de f no ponto a, como o valor do limite, caso este limite exista:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se denotamos por

$$\epsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h,$$

obtemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\epsilon(h)}{h} = 0$$

Podemos escrever

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \epsilon(h)$$

e diremos que $\epsilon(h)$ representa o erro que estamos a cometer ao aproximar $f(a+h)$ pelo valor $f(a) + f'(a)h$ (chamado aproximação linear) e este erro $\epsilon(h)$ diremos de ordem quadrático.

Diferencial

Diremos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é diferenciável no ponto (a, b), ponto interior de D, se

$$f(a + h_1, b + h_2) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h_2$$

$$+h_1\epsilon_1(h_1, h_2) + h_2\epsilon_2(h_1, h_2)$$

e tal que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon_1(h_1, h_2) = 0.$$

e

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon_2(h_1, h_2) = 0.$$

Diferencial

Diremos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é diferenciável no ponto (a, b), ponto interior de D, se

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

$$+(x - a)\epsilon_1(x, y) + (y - b)\epsilon_2(x, y)$$

e tal que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \epsilon_1(x, y) = 0.$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \epsilon_2(x, y) = 0.$$

Exemplo: $f(x,y) = xy + 2x$ é diferenciável no ponto $(1,1)$.

Vamos começar por "descobrir a parte lineal" desta função

$$f(x,y) = xy + 2x = (x-1+1)(y-1+1) + 2(x-1+1)$$
$$= (x-1)(y-1) + (x-1) + (y-1) + 1 + 2(x-1) + 2$$
$$= 3 + 3(x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$$

O termo $(x-1)(y-1)$ corresponde ao "erro quadrático". A função f é diferenciável no ponto $(1,1)$ Reparamos que

$$f(1,1) = 1 + 2 = 3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = y + 2 \mid_{(1,1)} = 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = x \mid_{(1,1)} = 1 \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) + \text{erro quadrático}.$$

Função diferencial

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é diferenciável no ponto (a, b), ponto interior de D, se

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \text{erro quadrático}$$

$$f(x,y) = f(a,b) + df(a,b)(x-a, y-b) + \text{erro quadrático}$$

A função diferencial de f no ponto (a, b)

$$df(a,b)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2.$$

$\nabla f(a,b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$ vetor gradiente de f no ponto (a, b)

$$df(a,b)(h_1,h_2) = \nabla f(a,b).(h_1,h_2)$$

Consequências da definição de diferencial

1. Se f é diferenciável no ponto (a, b) então f é contínua no ponto (a, b).

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f(a+h_1, b+h_2) =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left(f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2 + \text{erro quadrático} \right)$$

$$= f(a,b).$$

e obtemos a continuidade da função f no ponto (a_1, a_2).

Consequências da definição de diferencial

2. Caso f seja diferenciável no ponto (a,b) teremos que

$$D_{(v_1,v_2)}f(a,b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)).(v_1,v_2)$$

$$D_{(v_1,v_2)}f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv_1, a_2+hv_2) - f(a_1,a_2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)hv_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)hv_2 + \text{erro quadrático}}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v_2$$

$$(\text{erro quadrático} = hv_1\epsilon_1(hv_1,hv_2) + hv_2\epsilon_2(hv_1,hv_2))$$

Exemplo: Considere a função $f(x,y) = xy + 2x$ e calcule $D_{(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})}f(1,1)$.

Neste caso tínhamos provado que f era diferenciável no ponto $(1,1)$, e tínhamos calculado $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3, \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$ pelo que

$$D_{(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})}f(1,1) = (3,1).(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}(-3+2) = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Podemos calcular esta derivada direccional pela definição e obtemos

$$D_{(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})}f(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f((1,1)+h(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})) - f(1,1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-h\frac{1}{\sqrt{5}})(1+h\frac{2}{\sqrt{5}}) + 2(1-h\frac{1}{\sqrt{5}}) - 3}{h} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Direção de variação máxima e taxa de variação máxima

No caso que f seja diferenciável no ponto (a, b) temos obtido que para qualquer vetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$D_{(v_1,v_2)}f(a, b) = \nabla f(a, b).(v_1, v_2)$$

Se o vetor v é unitário, $\|v\| = 1$, obtemos que

$$D_{(v_1,v_2)}f(a, b) = \|\nabla f(a, b)\| \cos \alpha$$

onde α é o ângulo formado por estes dois vetores. Para esta derivada direcional dar um valor máximo o vetor v deverá estar na direção e sentido do vetor $\nabla f(a, b)$, pelo que $v = \frac{\nabla f(a,b)}{\|\nabla f(a,b)\|}$. O valor da derivada direcional será dado por

$$D_{\frac{\nabla f(a,b)}{\|\nabla f(a,b)\|}} f(a, b) = \|\nabla f(a, b)\|$$

Exemplo:

Considere a função $f(x,y) = xe^y$:

a) determine a taxa de variação de f no ponto $P(2,0)$, na direção de P ao ponto $Q(\frac{1}{2},2)$.

b) em que direção f terá a máxima taxa de variação? Qual é este valor máximo?

Para responder a alinha $a)$ determinamos o vetor $PQ = (-\dfrac{3}{2},2)$ e normalizamos $v = \frac{PQ}{\|PQ\|} = (-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, e calculamos

$$\nabla f(2,0) = (e^y, xe^y)|_{(2,0)} = (1,2),$$

pelo que obtemos

$$D_{(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})}f(2,0) = (1,2).(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}) = 1.$$

Condição necessária para a existência da diferencial de f num ponto

Podemos enunciar como condições necessárias para que f seja diferenciável num ponto (a, b):

- As derivadas parciais em relação a cada uma das variáveis da função devem existir no ponto.
- Deve existir a derivada da função f segundo a direção de qualquer vetor no ponto.
- A função deve ser contínua no ponto.

Se qualquer uma destas condições não é verificada podemos afirmar que a função f não é diferenciável no ponto.

Exemplo de não diferenciabilidade por a função não ser contínua no ponto

Exemplo: Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

esta função não é contínua no ponto $(0,0)$ (não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$) pelo que podemos afirmar que esta função não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Exemplo de não diferenciabilidade no ponto por não existência de alguma das derivadas parciais da função no ponto

Exemplo: Considere a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e estude a sua diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.
Resolução: Claramente esta função é contínua no ponto $(0,0)$. Vamos tentar calcular a sua derivada parcial em ordem a x, de fato:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h}$$

Se $h > 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = 1$, e se $h < 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = -1$, pelo que não existe limite e portanto não existe a derivada parcial de f em ordem a x no ponto $(0,0)$ pelo que a função f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exemplo de não diferenciabilidade por não existência da derivada da função segundo a direção de um vetor no ponto

Exemplo: Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y},\ y \neq 0 \\ 0,\ y = 0 \end{cases}$$

e seja (v_1, v_2) tal que $v1.v_2 \neq 0$ e vamos calcular a derivada de f segundo este vetor no ponto $(0,0)$:

$$D_{(v_1,v_2)}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv_1, 0+hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{hv_1}{hv_2} - 0}{h} = \pm\infty$$

pelo que este limite não existe e podemos afirmar que esta função não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Condição suficiente para a existência da diferencial de f num ponto

Teorema Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a = (a_1, \ldots, a_n)$ um ponto interior de D. Suponhamos que existem as derivadas parciais relativas a cada uma das variáveis numa bola aberta centrada no ponto a para um raio $r > 0$, e estas funções são contínuas no ponto a, então verifica-se que a função f é diferenciável no ponto a.

Corolário Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Se existem as derivadas parciais relativas a cada uma das variáveis em cada um dos pontos de D e são contínuas em cada um desses pontos então f é diferenciável em cada ponto de D.

Demonstração do Teorema: (Esta demonstração não é exigida)

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)$$
$$=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)$$

Se aplicamos o teorema do valor medio, para funções reais de variável real

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2++\theta_2 h_2),\theta_1,\theta_2\in]0,1[$$

(o ponto $a_1+\theta_1 h_1$ é um ponto intermédio entre o ponto a_1 e a_1+h_1, análogo para o ponto $a_2+\theta_2 h_2$.)

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)h_2+(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2))h_1$$
$$+(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2 h_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2))h_2$$

onde temos usado que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = 0$$

usando a continuidade da derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a_1,a_2) e

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} (\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)) = 0$$

usando a continuidade da derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a_1,a_2).

Diremos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D um aberto é de classe C^k se existem as derivadas parciais de ordem k e são contínuas em D. Em particular uma função é de classe $C^0(D)$ se é contínua em D e é de classe $C^\infty(D)$ se tem derivadas parciais contínuas de qualquer ordem.
Pelo teorema anteriormente enunciado podemos concluir que existem as derivadas parciais até a ordem k e as de ordem k são contínuas em D então qualquer derivada parcial de uma ordem inferior também é contínua em D.

Exemplo:

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determine o seu domínio de continuidade.

b) Determine o conjunto dos pontos onde esta função é diferenciável.

Resolução:

a) Começamos por estudar o domínio de continuidade de esta função. Para todo $(x,y) \neq (0,0)$ esta função está definida como soma, produto e composição de funções contínuas pelo que é uma função contínua. Vamos estudar a continuidade da função no ponto $(0,0)$, neste caso

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

(temos o produto de uma função limitada $|\sin\frac{1}{x^2+y^2}| \leq 1$ e um infinitésimo x^2+y^2.)

pelo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = f(0,0)$ e podemos afirmar que esta função é contínua no ponto $(0,0)$.

Resolução:

b) Vamos estudar os pontos onde esta função é diferenciável. Começamos por calcular as derivadas parciais, para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{-2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{-2y}{x^2 + y^2},$$

pelo que para pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ estas derivadas parciais existem e são contínuas. Pela condição necessária podemos afirmar que a função dada é diferenciável em todo ponto $(x, y) \neq (0, 0)$.

Estudemos agora o ponto $(0,0)$. Calculamos as derivadas parciais neste ponto pela definição e obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = 0$$

de forma análoga provamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Escrevemos:

$$f(0+h_1, 0+h_2) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2$$

$$+(h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{(h_1^2 + h_2^2)}$$

temos que $(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{(h_1^2+h_2^2)}$ é um erro é quadrático.
Calculamos

$$(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{(h_1^2+h_2^2)} = h_1^2\sin\frac{1}{(h_1^2+h_2^2)} + h_2^2\sin\frac{1}{(h_1^2+h_2^2)}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} h_1\sin\frac{1}{(h_1^2+h_2^2)} = 0$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} h_2\sin\frac{1}{(h_1^2+h_2^2)} = 0$$

pelo que concluímos que f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Exercício

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2 < 4 \\ 2 & , \quad x^2+y^2 \geq 4 \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico desta função e estude o seu domínio de continuidade.

b) Determine o conjunto dos pontos onde esta função é diferenciável.

Exercício

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} & , \quad x^2+y^2 \leq 2 \\ \sqrt{x^2+y^2-1} & , \quad x^2+y^2 > 2 \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico desta função e estude o seu domínio de continuidade.

b) Determine o conjunto dos pontos onde esta função é diferenciável.

Exercício:

Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

e mostre que existem as derivadas parciais em $(0,0)$ e que existe a derivada segundo qualquer vetor em $(0,0)$ e que esta função não é contínua em $(0,0)$.

Exemplo:

Considere a função $f(x,y) = xe^y$:

a) determine a taxa de variação de f no ponto $P(2,0)$, na direção de P ao ponto $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

b) em que direção f terá a máxima taxa de variação? Qual é este valor máximo?

Para responder a alinha $b)$, calculamos $u = \frac{\nabla f(2,0)}{\|\nabla f(2,0)\|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, e obtemos

$$D_{\frac{\nabla f(2,0)}{\|\nabla f(2,0)\|}} f(2,0) = \nabla f(2,0).\frac{\nabla f(2,0)}{\|\nabla f(2,0)\|} = \|\nabla f(2,0)\| = \sqrt{5}.$$

É de referir que as derivadas parciais desta função são contínuas em $\mathbb{R}^2$, condição suficiente para afirmar que isto f é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^2$ pelo que podemos aplicar a fórmula $D_v f(a,b) = \nabla f(a,b).v$.

Diferencial total

Podemos usar a notação introduzida anteriormente e chamar diferencial total de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e denotamos por df

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

à aplicação linear que aproxima o valor da variação da função num ponto.

Exemplo:

Foram feitas medidas do raio da base a da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm respetivamente, com possível erro nessas medidas de no máximo 0.1 cm.
Utilize o diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume de um cone.
Resolução: Podemos expressar a função volume do cone como $V(h, r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, e calculamos o diferencial desta função

$$dV = \frac{\partial V}{\partial h}dh + \frac{\partial V}{\partial r}dr = \frac{2}{3}\pi rhdr + \frac{1}{3}\pi r^2 dh$$

Neste caso, $(h, r) = (25, 10)$ e $(dh, dr) = (0.1, 0.1)$ pelo que

$$dV = \frac{2}{3}\pi 250 \times 0.1 + \frac{1}{3}\pi 100 \times 0.1 = 20\pi.$$

O erro máximo cometido é de 20π cm^3.

Exemplo:

As dimensões de uma caixa retangular foram medidas como $(x, y, z) = (75, 60, 40)$ cm com precisão de 0.2 cm.
Utilize o diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume desta caixa.
Resolução: Podemos expressar a função volume como $V(x, y, z) = xyz$, e calculamos o diferencial desta função

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

Neste caso, $(x, y, z) = (75, 60, 40)$ e $(dx, dy, dz) = (0.2, 0.2, 0.2)$ pelo que

$$dV = 60 \times 40 \times 0.2 + 75 \times 40 \times 0.2 + 75 \times 60 \times 0.2 = 1980.$$

O erro máximo cometido é de 1980 cm^3.

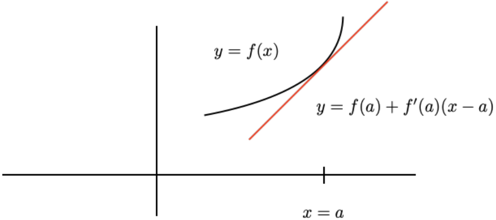
Reta tangente ao gráfico de uma função real de variável real

Quando consideramos $f(x)$ uma função real de uma variável, e consideramos um ponto a do seu domínio tal que existe a derivada da função nesse ponto, podemos construir a $L(x)$, a linearização da função f no ponto a (polinómio de Taylor de grau 1 no ponto a):

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Reta tangente ao gráfico de uma função real de variável real

Se agora representamos o gráfico da função $f(x)$, e representamos o gráfico de $L(x)$, e portanto os pontos (x, y), onde $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, este gráfico corresponde à reta tangente à função $f(x)$ no ponto a. Esta reta tangente é o gráfico da aproximação linear à função $f(x)$.



Plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto (a, b)

Quando consideramos uma função real de duas variáveis, $f(x, y)$, se esta função for diferenciável num ponto (a, b) do seu domínio, podemos calcular $L(x, y)$, a linearização de f no ponto (a, b) (polinómio de Taylor de grau 1 no ponto (a, b))

$$L(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

A equação

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

corresponde à equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y)$ no ponto (a, b).

$\vec{N} = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1)$ é um vetor ortogonal ao plano tangente de f no ponto $(a,b,f(a,b))$

Os vetores

$$(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)) \text{ e } (0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$$

são colineares a este plano tangente. Equações vetoriais deste plano tangente

$$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + s(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)) + t(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)) s,t, \in \mathbb{R}.$$

Equação da reta normal ao plano tangente de f no ponto $(a,b,f(a,b))$

$$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1), t, \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Considere a função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

a) Justifique que f é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule $L(x, y)$, a linearização de f no ponto $(1, 1)$.

c) Desenhe os gráficos correspondentes a cada uma destas funções numa vizinhança deste ponto $(1, 1)$.

d) Obtenha um valor aproximado de $f(1.1, 0.8)$.

Resolução:

O domínio da função $f(x,y)$ é $\mathbb{R}^2$. Se calculamos as derivadas parciais de $f(x,y)$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y \end{cases}$$

Estas funções estão definidas em $\mathbb{R}^2$ e são contínuas pelo que podemos afirmar que a função $f(x,y)$ é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^2$.

Calculamos $L(x,y)$, a linearização de $f(x,y)$ no ponto $(1,1)$.

$$L(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

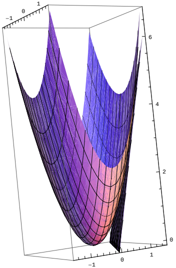
$$= 3 + 2(x-1) + 4(y-1) = -3 + 2x + 4y$$

pelo que uma valor aproximado de $f(1.1, 0.8)$ é dado por $L(1.1, 0.8) = 2.4$.

Plano tangente

Usamos o programa *Mathematica* e os comandos

$a :=$ ParametricPlot3D$[\{x, y, x^2 + 2y^2\}, \{x, -1.5, 1.5\}, \{y, -1.5, 1.5\}]$
$b :=$ ParametricPlot3D$[\{x, y, -3 + 2x + 4y\}, \{x, -1.5, 1.5\}, \{y, -1.5, 1.5$
Show$[a, b]$



A equação $z = -3 + 2x + 4y$ corresponde à equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y)$ no ponto $(1, 1)$.

Exemplo. Consideremos a superfície $z = 2x^2 - y$. Calcule o plano tangente a esta superfície no ponto $(1, -1, 3)$.

Resolução

Neste caso denotamos por $f(x, y) = 2x^2 - y$, pelo que a equação do plano tangente no ponto $(a, bf(a, b))$ será dado por

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

ou

$$z - 3 = 4(x - 1) - 1(y + 1).$$

Exemplo: Consideremos a superfície $x = 5 - 2y - z^2$. Calcule o plano tangente a esta superfície no ponto $(-1, 1, 2)$.

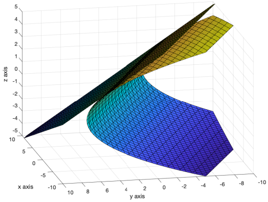
Resolução:

Denotamos $f(y, z) = 5 - 2y - z^2$, pelo que a equação do plano tangente no ponto $(y_0, z_0, f(y_0, z_0))$ será dado por

$$x - f(y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0)(z - z_0)$$

ou

$$x + 1 = -2(y - 1) - 4(z - 2).$$



Exercício proposto 1: Seja $f(x, y) = 3 - 2x^2 - y^2$

i) Indique D, o domínio desta função descreva o conjunto dos pontos interiores deste domínio.

ii) Calcule as derivadas parciais em ordem a x e a y nos pontos onde elas existam.

iii) Conclua usando a informação da alínea anterior em quais pontos podemos garantir que esta função f é diferenciável

iv) Calcule as curvas de nível desta função e faça um esboço do gráfico de f.

v) Calcule o plano tangente a esta função no ponto $(-1, 2)$ e faça um esboço deste plano juntamente com o esboço do gráfico da função f.

vi) Considere os pontos (x, y) da reta que passa pelo ponto $(-1, 2)$ e na direção do vetor $(3, 1)$. Qual é o declive da curva imagem desta reta pela função f? Faça um esboço desta curva.

vii) Indique um outro vetor na alínea anterior para que o declive calculado tome o máximo valor

Exercício proposto 2: Seja $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

i) Indique D, o domínio desta função descreva o conjunto dos pontos interiores deste domínio.

ii) Calcule as derivadas parciais em ordem a x e a y nos pontos onde elas existam.

iii) Conclua usando a informação da alínea anterior em quais pontos podemos garantir que esta função f é diferenciável

iv) Calcule as curvas de nível desta função e faça um esboço do gráfico de f.

v) Calcule o plano tangente a esta função no ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e faça um esboço deste plano juntamente com o esboço do gráfico da função f.

vi) Considere os pontos (x, y) da reta que passa pelo ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e na direção do vetor $(-1, 1)$. Qual é o declive da curva imagem desta reta pela função f? Faça um esboço desta curva.

vii) Indique um outro vetor na alínea anterior para que o declive calculado tome o máximo valor

Aula 18: Interpretação geométrica do vetor gradiente

Se consideramos $f(x,y)$ uma função real de duas variáveis, e consideramos (a,b) um ponto interior do domínio de f, tal que f seja diferenciável neste ponto, podemos considerar

$$\nabla f(a,b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)) \text{ vetor gradiente de } f \text{ no ponto } (a,b)$$

Este vetor, que por hipóteses é diferente do vetor nulo, fornece a direção e sentido na qual f, em redor do ponto (a,b) onde f apresenta maior crescimento.
Geométricamente o vetor gradiente verifica que é ortogonal as curvas de nível de f que passam em (a,b).

applet

Exemplo

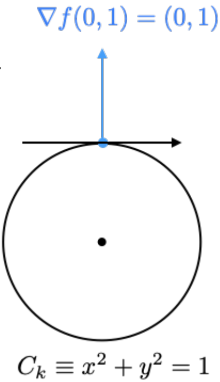
Consideramos a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ e consideramos o ponto $(0,1)$. Verificamos que $f(0,1) = 1$ A curvas de nível que passa em $(0,1)$ é dada por

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

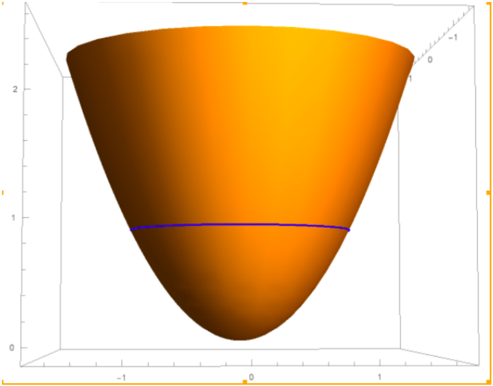
O vetor gradiente no ponto $(0,1)$ é dado por

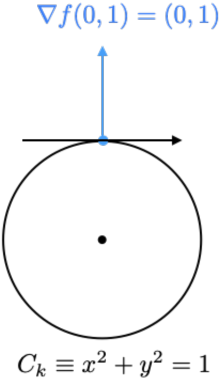
$$\nabla f(0,1) = (\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1))$$

$$= (2x, 2y)|_{(0,1)} = (0,1).$$



Exemplo





Interpretação geométrica do vetor gradiente $n = 3$

Se consideramos $f(x, y, z)$ uma função real de três variáveis, e consideramos (a, b, c) um ponto interior do domínio de f, tal que f seja diferenciável neste ponto, podemos considerar o vetor gradiente de f no ponto (a, b, c)

$$\nabla f(a,b,c) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c))$$

Geométricamente o vetor gradiente verifica que é ortogonal à superfície de nível de f que passa em (a, b, c).
O plano tangente a S_k no ponto (a, b, c) é dado pelas equações

$$\nabla f(a,b,c).(a,b,c) = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0$$

Exemplo

Consideramos a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e consideramos o ponto $(0, 1, 1)$. A superfície de nível que passa em $(0, 1, 1)$ é dada por

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\},\ k \in \mathbb{R}.$$

O vetor gradiente no ponto $(0, 1, 1)$ é dado por

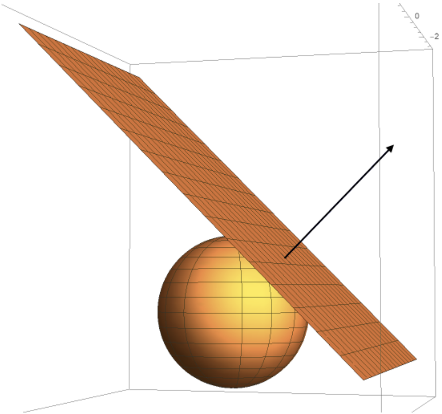
$$\nabla f(0,1,1) = (\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1), \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1))$$

$$= (2x, 2y, 2z)|_{(0,2,2)} = (0, 2, 2).$$

A equação do plano tangente a S_2 no ponto $(0, 1, 1)$ é dado por

$$(0, 2, 2).(x, y - 1, z - 1) = 0 \Leftrightarrow y - 1 + z - 1 = 0.$$

Exemplo



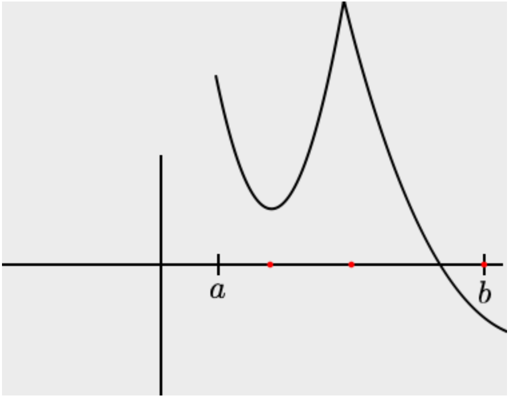

```
a:=ParametricPlot3D[{ Sqrt[2] Cos[t] Sin[s], Sqrt[2] Sin[t] Sin[s],Sqrt[2] Cos [s]},{t,0,2
Pi},{s,0, Pi}]
b:=ParametricPlot3D[{ 0,1+2 t,1+2 t},{t,0,1}, PlotStyle→{Blue, Thick}]
c:=Plot3D[2-y,{x,-3,3},{y,-3,3}]
Show[a,b,c, PlotRange → All]
```

Aula 19: Extremos de uma função real de várias variáveis

Extremos locais e extremos globais Nas próximas aulas vamos falar da existência e determinação de pontos de onde a função atinge o seu valor máximo e mínimo, tal e como fazíamos para funções reais de uma variável real.

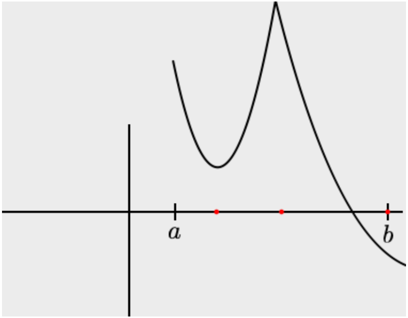
Para determinar a existência de pontos de máximo ou de mínimo em todo o intervalo de definição usávamos um teorema de existência, o chamado **Teorema de Weierstrass**, que afirma que toda função real de variável real $y = f(x)$, contínua, definida num conjunto fechado e limitado (compacto) atinge neste intervalo o seu valor máximo e o seu valor mínimo. O Teorema não garante a unicidade, ou seja podem existir mais do que um ponto onde a função atinge o seu valor máximo ou o seu valor mínimo.

Neste gráfico, quando consideramos o intervalo $[a, b]$, observamos os pontos onde a função f e atinge um valor máximo e mínimo . Um deles está no "bordo" do intervalo e o outro é um ponto interior do intervalo. Observamos um outro ponto no intervalo onde a função f não tem derivada.



Para determinar estes pontos de máximo ou de mínimo, ou também chamados pontos de máximo ou de mínimo global, quando estos se encontram no interior do intervalo, usamos o conceito de **ponto crítico**, ou seja **pontos onde a derivada da função era nula ou não existia**.

Os **pontos críticos** podem ser pontos de máximo ou de mínimo local. Estes pontos de máximo ou de mínimo local são candidatos a pontos de máximo ou de mínimo global. Neste gráfico temos um ponto de mínimo local que não é ponto de mínimo global.



Nos pontos críticos onde existe a derivada de ordem 2, contínua num intervalo a volta do ponto, podemos substituir a nossa função pelo seu polinómio de Taylor de grau 2, mais concretamente, se consideramos a função $y = f(x)$, definida no intervalo $[a, b]$ e consideramos que no ponto c verifica-se que $f'(c) = 0$, então o polinómio de Taylor de segundo grau, desta função calculado neste ponto é dado por

$$T_2(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2 = f(c) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2$$

Se substituímos $f(x)$ por $T_2(x)$ para pontos x muito perto do ponto crítico c, obtemos que

$$f(x) = f(c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2$$

pelo que a diferença, nesse intervalo a volta do ponto c

$$f(x) - f(c) = \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2$$

Quando $f''(c) > 0$, obtemos que $f(x) - f(c) > 0$ ou seja $f(x) > f(c)$, ou que nos diz que no ponto c teremos um ponto de mínimo local, e se $f''(c) < 0$, teremos que $f(x) - f(c) < 0$ ou seja $f(x) < f(c)$ e teremos um ponto de máximo local.

Portanto obtemos, através do sinal de $f''(c)$, a resposta se esta função tem ou não tem um ponto de máximo ou de mínimo num intervalo de pontos a volta do ponto c. No caso que $f''(c) = 0$ devemos recorrer a derivadas de um ordem superior.

Estas mesmas ideias são usadas para o cálculo de extremos em funções reais de várias variáveis.

- Extremante global e extremante local;
- Teorema de Weierstrass,
- Condição necessária para a existência de um extremante local;
- Condição suficiente para a existência de um extremante local; Matriz Hessiana;
- Extremos condicionados ("para a determinação de extremos no bordo do domínio");
- Condição necessária para a existência de extremante condicionado; Método dos multiplicadores de Lagrange.

Extremos locais e extremos globais

Consideremos uma função real de várias variáveis, definida num conjunto D e p um ponto interior de D. Se existe uma vizinhança deste ponto, U_p contida em D tal que para todo x em U_p verifica-se que $f(x) \leq f(p)$ diremos que o ponto p é um extremo local e $f(p)$ será uma extremo da função, mais concretamente diremos que p é um maximizante o ponto de máximo local. $f(p)$ é chamado máximo local no ponto P. De forma análoga definimos minimizante local e mínimo local.

$f(x) \leq f(p),\ x \in U_p \Rightarrow p$ é maximizante local, $\ f(p)$ é máximo local

$f(x) \geq f(p),\ \ x \in U_p \Rightarrow$ p é minimizante local, $\ f(p)$ é mínimo local no p

Se as desigualdades anteriores são verificadas em todo o domínio D então falaremos de maximizante global em D e máximo em D e minimizante global em D ou mínimo em D.

Teorema de Weierstrass

Seja f uma função real de várias variáveis reais. Se f é contínua e definida em D, conjunto fechado e limitado (compacto) podemos afirmar que f atinge o seu valor máximo e o seu valor mínimo neste domínio D.

Observação: Quando estamos a falar de funções reais de duas variáveis, lembramos que um conjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}^2$ será de forma intuitiva um conjunto que contenha o seu bordo e que represente uma mancha finita no plano. Uma outra aclaração na que devemos insistir deve ser em voltar a lembrar que podem existir mais do que um ponto onde a função atinge o seu valor máximo, respectivamente o seu valor mínimo.

Observação

Se f tem no ponto p um máximo ou mínimo local então a função $g(t) = f(p + tv)$, para qualquer vetor v terá em $t = 0$ um máximo ou mínimo local.
A afirmação contrária não é verdadeira. Podemos considerar a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 & , \quad y \neq x^2 \\ -x^4 & , \quad y = x^2 \end{cases}$$

Condição necessária de existência de extremo

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto p, p ponto interior de D. Se a a função f tem no ponto p um extremo local então $\nabla f(p) = \vec{0}$.

Demonstração: $n = 2$ Consideramos a função $f(x, y)$, tal que no ponto (a, b) é diferenciável, e suponhamos que neste ponto (a, b) a função f tem um extremo local. Se consideramos a função $g(x) = f(x, b)$, esta função tem derivada no ponto a. A função g tem um extremo local no ponto $x = a$, pelo que

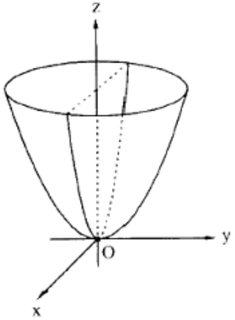
$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} f(a, b) = 0$$

Um raciocínio análogo nos levaria a concluir que $\frac{\partial f}{\partial y} f(a, b) = 0$ e chegamos a que $\nabla f(a, b) = 0$ ou em notação de diferenciais

$$df(a, b)(h_1, h_2) = 0, \quad (h_1, h_2) \in \mathbb{R}.$$

Vamos a exemplificar o que acabamos de demonstrar

No seguinte gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$, observamos a curva imagem dos pontos da forma $(x,0)$, por tanto estamos a observar os pontos da forma $(x,0,f(x,0))$, (que formam uma parábola). Definimos a função $g(x) = f(x,0)$ e no ponto $x = 0$ temos que o declive desta curva é 0, ou seja $g'(0) = 0$ e este declive corresponde a $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ pelo que obtemos $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.



Ponto crítico ou ponto estacionário.

Chamamos **ponto crítico ou ponto estacionário** ao ponto onde f é diferenciável e $\nabla f(p) = \vec{0}$, e também ao ponto onde a função não seja diferenciável.
Com esta definição queremos destacar os pontos candidatos a pontos extremo, que pela condição necessária são, caso a função seja diferenciável nesses pontos, os pontos onde a diferencial é nula. Estudamos também os pontos onde não existe a diferencial porque nesses pontos nada sabemos.

Nos seguintes exemplos verificamos que num ponto crítico pode existir extremo local mas também pode não existir, pelo que ser ponto crítico não é uma condição suficiente para a existência de extremo local.

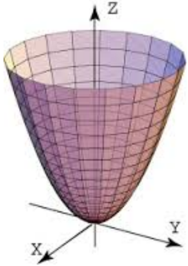
Exemplo

1. Consideremos a função $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ cujo gráfico é um paraboloide elíptico.

No ponto $(0,0)$ esta função tem um mínimo local (e também global). Calculamos

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

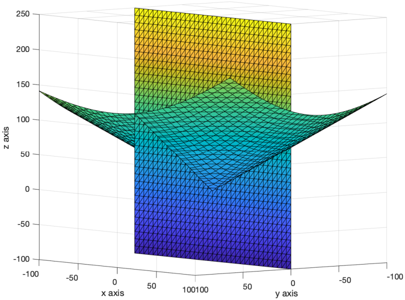
e verificamos que $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e somente se $(x,y) = (0,0)$, pelo que $(0,0)$ é o único ponto crítico desta função.



Exemplo

2. Consideramos a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ cujo gráfico é um cone, No ponto $(0,0)$ esta função tem um mínimo local (e também global). Esta função não é diferenciável no ponto $(0,0)$, pelo que $(0,0)$ é um ponto crítico.

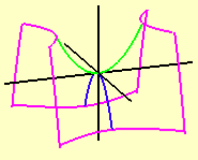
Para observar que esta função não é diferenciável no ponto $(0,0)$, podemos considerar $g(x) = f(x,0)$, pelo que $g(x) = |x|$. Esta função não tem derivada no ponto $x = 0$ pelo que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe e f não pode ser diferenciável. Na figura temos desenhado o plano $y = 0$, pelo que o gráfico da função g é a curva interseção deste plano com o cone

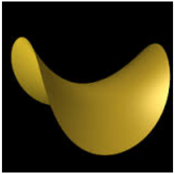


Exemplo: $f(x,y) = x^2 - y^2$, gráfico é o paraboloide hiperbólico.

Calculamos

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) \Leftrightarrow f(x,y) = (0,0)$$





$(0,0)$ é o único ponto crítico desta função. No $(0,0)$ esta função não tem um extremo local. Nos pontos da forma $(x,0)$, $f(x,0) = x^2 > 0$ e nos pontos da forma $(0,y)$, $f(0,y) = -y^2 < 0$ pelo que suficientemente perto do ponto $(0,0)$ a nossa função toma valores positivos e negativos. f não pode tomar um valor mínimo local nem um valor máximo local no ponto $(0,0)$.

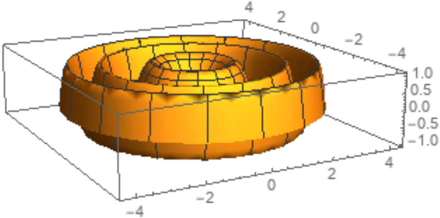
Se num ponto crítico não existe ponto extremo diremos que este ponto é um **ponto de sela**.

Exercício 1. Considere a função $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ definida no domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 16\}$.

i) Calcule os pontos críticos desta função.

ii) Observamos no gráfico desta função que no ponto $(0,0)$ a função tem um ponto de mínimo local.

iii) Ao observar este gráfico, que pode concluir sobre a natureza dos outros pontos críticos, ou seja se são extremantes locais ou não.



Aula 20: Extremos de uma função real de várias variáveis

Vamos nesta aula trabalhar alguns exemplos relativos a extremos locais e extremos globais

Exemplo 1: Considere $f(x,y) = x^2 + y^2$ no domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 2(y+1)^2 \leq 1\}$.

1. Esboce graficamente D.
2. Discuta se D é fechado e limitado (compacto)
3. Aplique o Teorema de Weierstrass para concluir a existência de extremos absolutos de f e determine-os.
4. Que teria acontecido se tivéssemos considerado o conjunto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 2(y+1)^2 < 1\}$?, estamos nas condições do Teorema de Weirestrass, a função alcança o seu valor máximo e mínimo (absoluto)?

Exemplo 2: Considere a função $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ no domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -2, \le y \le 2\} \backslash \{(0,0)\}$.

1. Esboce graficamente o domínio D.
2. Indique se este conjunto é um conjunto fechado e limitado (compacto)
3. Pode aplicar o Teorema de Teorema de Weierstrass a este conjunto para garantir a existência de extremos absolutos de f?
4. Mostre que esta função não alcança máximo absoluto mas alcança mínimo absoluto.

Exemplo 3:

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}, & 0 < x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Pode aplicar o Teorema de Teorema de Weierstrass para garantir a existência de extremos absolutos de f?
2. Mostre que esta função não alcança máximo absoluto mas alcança mínimo absoluto.

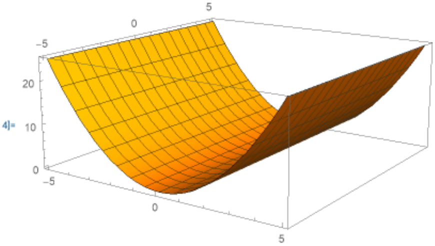
Exemplo 4: Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = x^2$.

Determine os pontos críticos desta função e discuta se são pontos de máximo ou de mínimo local.

Resolução:

$$\nabla f(x,y) = (2x,0) = (0,0) \Leftrightarrow x = 0$$

Os pontos da forma $(0,y)$ são pontos críticos. En cada um destes pontos a função atinge uma máximo local, que neste caso também é um mínimo global.



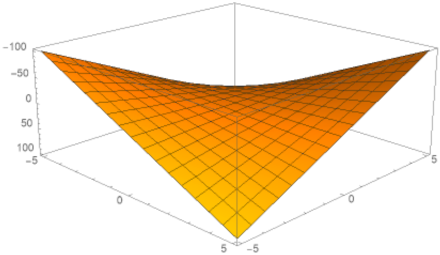
Exemplo 5: Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = (x-y)^2 - (x+y)^2$.

Determine os pontos críticos desta função e discuta se são pontos de máximo ou de mínimo local.

Resolução:

$$\nabla f(x,y) = (2(x-y) - 2(x+y), -2(x-y) - 2(x+y)) = (0,0)$$

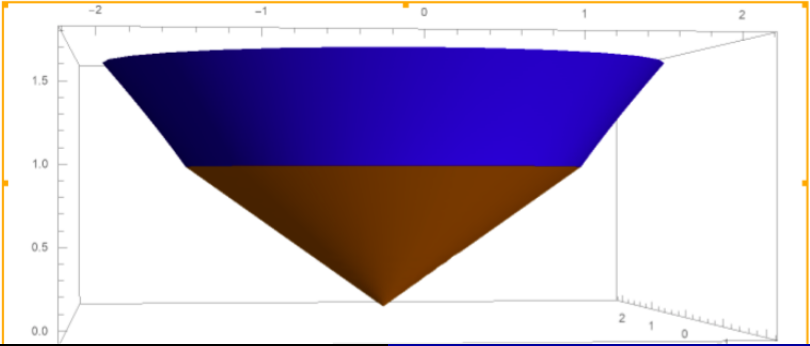
Resolvemos este sistema e temos como solução o ponto $(0,0)$, ponto crítico. Neste ponto a função atinge não uma máximo local nem um mínimo global, pelo que diremos que o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela.



Exercício 2 ficha 1

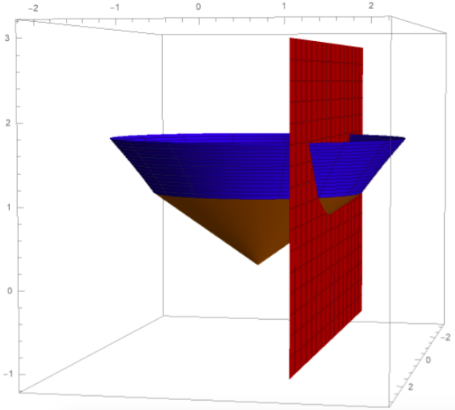
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, & x^2+y^2 \le 2 \\ \sqrt{x^2+y^2-1}, & x^2+y^2 > 2 \end{cases}$$

```
a := ParametricPlot3D[{r Cos[t], r Sin[t], r / Sqrt[2]}, {r, 0, Sqrt[2]}, {t, 0, 2 Pi}, Mesh → None]
b := ParametricPlot3D[{r Cos[t], r Sin[t], Sqrt[r ^ 2 - 1]}, {t, 0, 2 Pi}, {r, Sqrt[2], 2}, PlotStyle →
   Mesh → None]
Show[a, b, PlotRange → All]
```



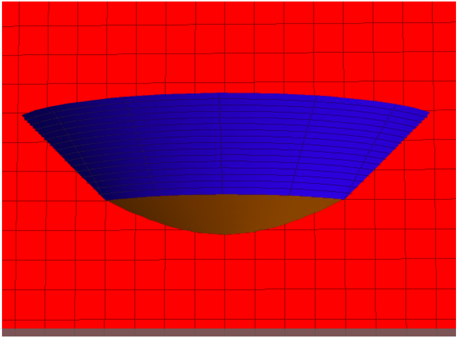
A derivada parcial em ordem a x no ponto $(1, 1)$ e o declive da reta tangente à curva interseção do gráfico pelo plano $y = 1$

```
a := ParametricPlot3D[{r Cos[t], r Sin[t], r / Sqrt[2]}, {r, 0, Sqrt[2]}, {t, 0, 2 Pi}, Mesh → None]
b := ParametricPlot3D[{r Cos[t], r Sin[t], Sqrt[r^2 - 1]}, {t, 0, 2 Pi}, {r, Sqrt[2], 2}, PlotStyle → Blue]
c := ParametricPlot3D[{x, 1, z}, {x, -3, 3}, {z, -1, 3}, PlotStyle → Red]
Show[a, b, c, PlotRange → All]
```

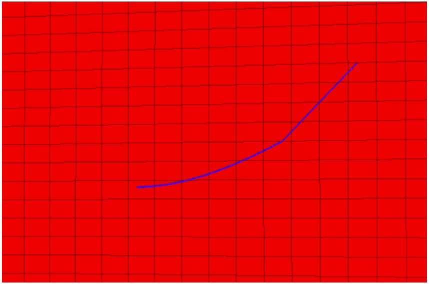


Exercício 2 ficha 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, & x^2+y^2 \leq 2 \\ \sqrt{x^2+y^2-1}, & x^2+y^2 > 2 \end{cases}$$



$$g(x) = f(x,1) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+1}{2}}, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$



Aula 21: Condição suficiente para a existência de extremante local: Matriz Hessiana

- Polinómio de Taylor de ordem 2 e Teorema de Taylor
- Matriz Hessiana
- Condição Necessária para a existência de extremo
- Método dos determinantes

Condição suficiente para a existência de extremo local

Seja $f(x)$, definida no intervalo $[a, b]$, $f \in C^2[a, b]$. Suponhamos que $f'(c) = 0$, c é um ponto crítico. Calculamos

$$f''(c) > 0$$

e podemos afirmar que f atinge em c um mínimo local. Se

$$f''(c) < 0$$

f atinge em c um máximo local.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \text{erro cúbico}$$

c é um ponto crítico $f'(c) = 0$

$$f(x) = f(c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \text{erro cúbico}$$

pelo que a diferença, nesse intervalo a volta do ponto c

$$f(x) - f(c) = \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \text{erro cúbico}$$

Portanto obtemos, através do sinal de $f''(c)$, a resposta se esta função tem ou não tem um ponto de máximo ou de mínimo num intervalo de pontos a volta do ponto c. No caso que $f''(c) = 0$ devemos recorrer a derivadas de um ordem superior.

Polinómio de Taylor de ordem 2 ($f \in C^2(D)$, (a,b) ponto interior de D)

$$T_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right).$$

Teorema (Condição suficiente para a existência de extremo local):

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, D conjunto aberto, $(a,b) \in D$, ponto crítico da função f, $(x,y) \neq (a,b)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 > 0$$

então no ponto (a,b) a função f atinge um **mínimo local**.

Teorema (Condição suficiente para a existência de extremo local):

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, D conjunto aberto, $(a, b) \in D$, ponto crítico da função f, $(x, y) \neq (a, b)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 < 0$$

então no ponto (a, b) a função f atinge um **máximo local**.

Teorema (Condição suficiente para a existência de extremo local):

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, D conjunto aberto, $(a,b) \in D$, ponto crítico da função f, $(x,y) \neq (a,b)$ Se existem pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

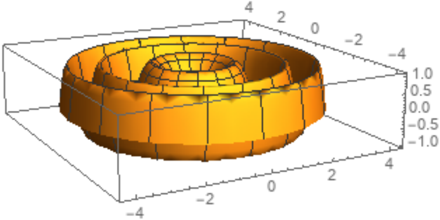
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 > 0$$

e existem pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 < 0$$

então no ponto (a,b) a função f não atinge um máximo nem um mínimo local. Diremos neste caso que (a,b) é um **ponto de sela**.

Exemplo: Seja $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$



Calculamos

$$\nabla f(a, b) = (0, 0)$$

pelo que

$$(2x\cos(x^2 + y^2), 2y\cos(x^2 + y^2))\big|_(0, 0) = (0, 0)$$

e verificamos que o ponto $(0, 0)$ é um ponto crítico.

Calculamos a derivadas de segunda ordem da função f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

pelo que

$$2x^2 + 2y^2 > 0$$

pelo que podemos afirmar, usando o Teorema da condição suficiente para a existência de extremo local, que no ponto $(0,0)$ a função $f(x,y)$ atinge um mínimo local.

Matriz Hessiana de f no ponto (a, b)

$$H_f(a,b) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{array} \right)$$

Definimos por $d^2 f(a,b)$, à forma quadrática associada a esta matriz,

$$df^2(a,b)(x,y) = (x,y)H_f(a,b) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$$

De forma análoga podemos definir a matriz Hessiana para mais do que duas variáveis. Em particular definimos como matriz Hessiana de f no ponto (a,b,c), $H_f(a,b,c)$

$$H_f(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a,b,c) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a,b,c) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c) \end{pmatrix}$$

Definimos por $d^2f(a,b,c)$, a forma quadrática associada a esta matriz,

$$df^2(a,b,c)(x,y,z) = (x,y,z)H_f(a,b,c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se f é uma função de classe C^2 num conjunto aberto D, usando o lema de Schwarz obtemos que a matriz Hessiana é uma matriz simétrica.
Vamos agora, usando o Teorema de Taylor provar uma condição suficiente para a existência de extremo local.

Teorema (Condição suficiente para a existência de extremo local):

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, D conjunto aberto, $(a, b) \in D$, ponto crítico da função f,
Se a forma quadrática $df^2(a, b)$ é definida positiva, (a, b) é um ponto de mínimo local,
Se a forma quadrática $df^2(a, b)$ é definida negativa, (a, b) é um ponto de máximo local
Se a forma quadrática $df^2(a, b)$ é não definida positiva, (a, b) é um ponto de sela.
Este teorema pode ser enunciado de forma equivalente como:

Teorema (Condição suficiente para a existência de extremo local): Matriz Hessiana)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, D conjunto aberto, $(a, b) \in D$, ponto crítico da função f,
Se $H_f(a, b)$ é definida positiva, (a, b) é um ponto de mínimo local,
Se $H_f(a, b)$ é definida negativa, (a, b) é um ponto de máximo local,
Se $H_f(a, b)$ é não definida (a, b) é um ponto de sela.

Observação:

Lembramos que uma matriz é definida positiva quando todos os seus valores próprios são positivos, é definida negativa quando todos os seus valores próprios são negativos e é não definida quando existe pelo menos um valor próprio positivo e um valor próprio negativo.

Exemplo: Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 - y^2 + x^2y^3$.

Resolução: Calculamos os pontos críticos desta função

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x + 2xy^3, -2y + 3x^2y^2) = (0,0)$$

Obtemos única solução o ponto $(0,0)$. Calculamos

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+3y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & -2+6x^2y \end{pmatrix}$$

pelo que

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz é não definida. Esta matriz é uma matriz diagonal pelo que os seus valores próprios são os elementos da diagonal, 2 e -2, pelo que no ponto $(0,0)$ não existe extremo local. O ponto $(0,0)$ é um ponto de sela.

Observação:

Se a matriz Hessiana num ponto crítico é semi-definida positiva (existem valores próprios nulos e os não nulos são valores próprios positivos) ou semi-definida negativa (existem valores próprios nulos e os não nulos são valores próprios negativos) então nada podemos afirmar da natureza deste ponto crítico

Exemplo: Consideremos a função $f(x,y) = x^2 + ky^4$.

$(0,0)$ é o único pontos crítico desta função. Calculamos

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios desta matriz são 0 e 2 pelo que esta matriz é semi-definida positiva.

- Se $k \geq 0$, f tem um mínimo local no ponto $(0,0)$,
- Se $k < 0$, verificamos que $\left\{ \begin{array}{c} f(0,y) = ky^4 < 0 = f(0,0) \\ f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0) \end{array} \right.$ pelo que para valores x perto de 0 observamos que a função toma maiores e menores que $f(0,0) = 0$ pelo que $(0,0)$ é um ponto de sela.

Este exemplo pretende mostrar que num ponto crítico onde a matriz Hessiana seja semi-definida, pode acontecer que exista extremo e pode acontecer que não exista extremo. Nestes diz-se que o estudo da natureza do ponto crítico pelo critério da matriz Hessiana não é conclusivo. Neste caso devemos concluir a natureza do ponto crítico por outro método.

Menores principais líderes de uma matriz

Dada uma matriz real A, de n filas e n colunas podemos considerar A_k, a matriz obtida quando consideramos as primeiras k filas e k colunas da matriz A, e chamaremos menor principal de ordem k, denotado por por Δ_k ao determinante de A_k.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{1,1}\, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Critério de Sylvester ou dos determinantes principais líderes

Suponhamos que a matriz A é invertível ($\det A \neq 0$).
• $\Delta_k > 0$ para $k = 1, \ldots, n$, então A é uma matriz definida positiva.
• $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $k = 1, \ldots, n$, então A é uma matriz definida negativa.
Em qualquer outro caso A é uma matriz não definida, e isto também pode ser dado por:
• Se existir um índice k par tal que $\Delta_k < 0$ ou se existirem dois índices k ímpares de distinto sinal então a matriz A é não definida.

Exemplo: Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x - y$.

Resolução: Calculamos os pontos críticos desta função

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x+2, 4y-1) = (0,0)$$

e obtemos o ponto $(-1, \frac{1}{4})$. Calculamos a matriz Hessiana, e obtemos

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

pelo que

$$H_f(-1, \frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Neste caso $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$, pelo que pelo critério de Sylvester concluímos que no ponto $(-1, \frac{1}{4})$ existe um ponto de mínimo.

Exemplo: Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$.

Resolução: Calculamos os pontos críticos desta função

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x - y, -x + 3y^2) = (0,0)$$

e obtemos os pontos $(0,0), (\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$. Calculamos

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}$$

pelo que

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, pelo que pelo critério de Sylvester concluímos que no ponto $(0,0)$ existe um ponto de sela.

Calculamos

$$H_f(\frac{1}{12},\frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, pelo que pelo critério de Sylvester concluímos que no ponto $(\frac{1}{12},\frac{1}{6})$ existe um ponto de mínimo.

Exemplo: Consideremos a função $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 2x - 3y$.

Calculamos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + y - 2, 4y + x - 3, 6z).$$

Calculamos os pontos críticos, igualando o vetor gradiente ao vetor nulo:

$$2x + y - 2 = 0,\ 4y + x - 3 = 0,\ 6z = 0.$$

e obtemos o ponto $(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, 0)$.

Calculamos a matriz Hessiana de f, e obtemos

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$Hf(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 7, \Delta_3 = 42$, pelo que concluímos pelo critério de Sylvester que no ponto $(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, 0)$ a função f tem um ponto de mínimo.

Exemplo: Consideremos a função $f(x, y, z) = xy + yz + xz + z^3$.

Calculamos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = (y + z, x + z, y + x + 3z^2).$$

Calculamos os pontos críticos, igualando o vetor gradiente ao vetor nulo:

$$y + z = 0,\ x + z = 0,\ y + x + 3z^2 = 0.$$

e obtemos os pontos $(0, 0, 0), (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 6z \end{bmatrix}$$

Para analizar o ponto $(0,0,0)$ consideramos

$$Hf(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e calculamos $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$ Uma vez que $\Delta_3 \neq 0$, e que $\Delta_2 < 0$ não podemos estar num caso definido positivo, ou definido negativo, pelo que estamos num caso não definido o que significa que no ponto $(0,0,0)$ temos um ponto de sela, ou seja não existe um extremo local.

Consideremos agora o ponto $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Neste caso

$$Hf(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1 < 0$, $\Delta_3 = -2$, pelo que estamos num caso não definido pelo que no ponto $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é um ponto de sela.

Exemplo: Consideremos a função $f(x, y, z) = xz + z^3$.

Calculamos o vetor gradiente desta função

$$\nabla f(x, y, z) = (z, 0, x + 3z^2).$$

Calculamos os pontos críticos, igualando esta vetor gradiente ao vetor nulo e e obtemos os pontos $(0, y, 0)$, para $y \in \mathbb{R}$.

Calculamos a matriz Hessiana:

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6z \end{bmatrix}$$

pelo que nos pontos críticos $(0, y, 0)$ é dada por

$$Hf(0,y,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ e $\Delta_3 = 0$ pelo que neste caso o critério de Sylvester não consegue dar uma resposta.

Calculamos diretamente a forma quadrática associada a esta matriz Hessiana

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2xz$$

e podemos constatar que esta forma quadrática toma valores positivos, por exemplo quando $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ toma o valor 2, e toma valores negativos, por exemplo podemos escolher $(x, y, z) = (-1, 1, 1)$ e toma o valor -2 pelo que a matriz A é não definida pelo que em cada um dos pontos críticos $(0, y, 0)$ podemos afirmar que a função tem um ponto de sela.

Aula 22: Existência e determinação do extremo absoluto num compacto

- Estratégia para procurar os pontos de máximo e de mínimo.

- Extremos condicionados. Método de Lagrange

Existência dos pontos de máximo e de mínimo absoluto num compacto

Seja f uma função real de várias variáveis. Se a função f é contínua e definida em D, conjunto fechado e limitado (compacto), o teorema de Weierstrass nos garante a existência de pontos de máximo e de mínimo absoluto.

Qual será então a estratégia para os procurar?

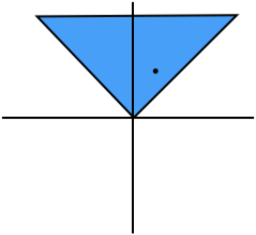
- Procuramos no interior de D (o seja consideramos os pontos do domínio que não estejam no bordo), os pontos críticos.
- Procuramos no bordo de D, bordo este definido por uma ou várias equações.
- Comparamos o valor que toma a função em cada um dos pontos obtidos nas alíneas anteriores e decidimos que pontos são os pontos onde f atinge o seu valor máximo e que pontos são os pontos onde f atinge o seu valor mínimo.

Exemplo: Procure os pontos de máximo e de mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 - xy + y$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 4\}$

Resolução Procuramos os pontos críticos desta função

$$\nabla f(x,y) = (2x - y, -x + 1) = (0,0)$$

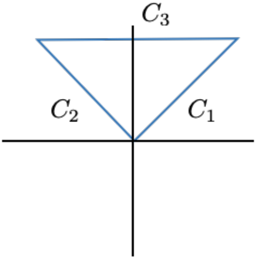
e obtemos a solução $(1,2)$, único ponto crítico desta função e portanto único candidato a extremo local. Este ponto pertence ao interior do domínio D



Resolução Consideramos agora o bordo ou fronteira de D,

$$\text{fr}\, D = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, 0 \leq x \leq 4\};$$
$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x, -4 \leq x \leq 0\};$$
$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2, -4 \leq x \leq 4\};$$



Estudamos f restringida a este bordo de D

$$
\begin{array}{ll}
g_1(x) = f(x,x) = x & , x \in [0,4]; \\
g_2(x) = f(x,-x) = 2x^2 - x & , x \in [-4,0]; \\
g_3(x) = f(x,4) = x^2 - 4x + 4, & , x \in [-4,4];
\end{array}
$$

Em cada função consideramos como extremantes os x que correspondem aos extremos dos intervalos e os x que correspondem a pontos críticos. Pontos candidatos a pontos de valor máximo e mínimo (no bordo)

$$\{(0,0),(4,4),(-4,4),(2,4)\}$$

O ponto $(2,4)$ corresponde a $x=2$, ponto crítico de $g_3(x)$. O ponto crítico de $g_2(x)$ é atingido em $x=\frac{1}{4}$, e não é considerado porque o domínio de g_2 é o intervalo $[-4,0]$.
Pontos candidatos a pontos de máximo ou de mínimo absoluto

$$\{(1,2),(0,0),(4,4),(-4,4),(2,4)\}$$

Calculamos $f(1,2)=1$, $f(0,0)=0$, $f(4,4)=4$, $f(-4,4)=28$, $f(2,4)=0$. pelo que esta função alcança o seu valor mínimo em $(2,4)$ e $(0,0)$ e o seu valor máximo em $(-4,4)$.

Exercício

Determine os pontos de máximo de de mínimo absoluto da função $f(x,y) = xy$ em $D_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Indicação: Os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ podem ser descritos como

$$(x,y) = (2\cos\theta, 2\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi].$$

Consideremos o problema de encontrar os extremos da função $f(x,y)=4xy$, onde (x,y) são pontos da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Este problema diz-se **problema de extremos condicionado**, neste caso pela condição
"Os pontos (x,y) devem pertencer à elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$".
Este problema é um problema bem enunciado, no sentido que existe solução a este problema. O teorema de Weierstrass garante que a função contínua $f(x,y)=4xy$ definida no conjunto compacto, ou seja um conjunto limitado e fechado, $D=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$, atinge o seu valor máximo e o seu valor mínimo.

Método dos multiplicadores de Lagrange

Consideremos f e g funções de classe C^1 num conjunto aberto U. Se a função $f(x,y)$ tem no ponto $(x_0,y_0) \in U$ um extremo relativo, sujeito à condição $g(x,y)=0$, onde $\nabla g(x_0,y_0)$ não é o vetor nulo, então existe um $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0).$$

λ_0 é chamado "multiplicador de Lagrange".

Para procurar os pontos de extremo local da função f condicionada pela função g resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\[2ex] g(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

Exemplo: Consideremos o problema de encontrar os extremos da função $f(x,y)=4xy$, onde (x,y) são pontos da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Resolução: Definimos como $g(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$.
Procuramos os pontos (x,y,λ)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \Leftrightarrow \quad 4y-\lambda\frac{2x}{a^2}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) & \Leftrightarrow \quad 4x-\lambda\frac{2y}{b^2}=0 \\[2ex] g(x,y)=0 & \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, reparamos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, pelo que da primeira equação obtemos $\lambda = \frac{2y}{x}a^2$, da segunda equação obtemos $\lambda = \frac{2x}{y}b^2$, e igualamos estes dois resultados e obtemos $a^2y^2 = b^2x^2$, ou $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$.
Substituímos esta igualdade na última equação e obtemos $\frac{2x^2}{a^2} = 1$ pelo que obtemos $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$, e $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}b$.

Temos obtido os pontos solução

$$P_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b) \qquad P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}b)$$
$$P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b) \quad P_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}b)$$

Calculamos o valor da função f em cada um destes pontos e obtemos

$$f(P_1) = 2ab, f(P_2) = -2ab, f(P_3) = -2ab, f(P_4) = 2ab$$

pelo que nos pontos P_1 e P_4 obtemos pontos de máximo e nos pontos P_2 e P_3 obtemos pontos de mínimo.

Exemplo: Determine o valor máximo e mínimo da função $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Resolução A função f é uma função contínua, definida num conjunto D, limitado e fechado pelo que o teorema de Weierstrass nos garante que a função f atinge neste domínio o seu valor máximo e o seu valor mínimo. Vamos determinar em que pontos isto acontece e qual é o valor que a função toma nestes pontos.

Exemplo: Determine o valor máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

No interior deste domínio, se existir este ponto de extremo global, também será um ponto de extremo local, e como a função é diferenciável em todo ponto, estes pontos de extremos verificam a condição necessária

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x + y, x + 2y) = (0, 0)$$

pelo que o único ponto crítico é o ponto $P_0 = (0, 0)$.

Exemplo: Determine o valor máximo e mínimo da função $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Na fronteira deste domínio. Neste caso estamos a procura dos pontos extremos de f sujeitos à condição $g(x,y) = 0$, onde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Procuramos os pontos (x,y) e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \Leftrightarrow \quad 2x + y = \lambda 2x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) & \Leftrightarrow \quad x + 2y = \lambda 2y \\[2ex] g(x,y) = 0 & \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Na primeira equação se $x = 0$ obtemos que $y = 0$ o que é incompatível com a terceira equação. Da mesma forma se $y = 0$, da segunda equação obtemos que $x = 0$, pelo que podemos assumir que $x \neq 0, y \neq 0$.

Na primeira e na segunda equação pomos em evidência 2λ, e obtemos

$$\begin{cases} 2\lambda = \dfrac{2x+y}{x} \\[2ex] 2\lambda = \dfrac{x+2y}{y} \\[2ex] x^2+y^2-1=0 \end{cases}.$$

Igualamos as duas primeiras equações e obtemos

$$\frac{2x+y}{x} = \frac{x+2y}{y} \Leftrightarrow y^2 = x^2.$$

Se agora usamos a terceira equação obtemos que

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Obtemos como candidatos a extremos os pontos

$$P_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), \qquad P_2 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$
$$P_3 = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), \quad P_4 = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

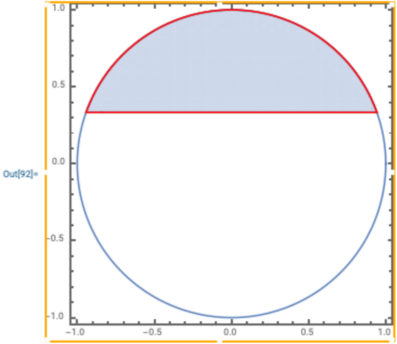
Comparamos o valor da função f em cada um dos pontos $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ e obtemos

$$f(P_0) = f(0,0) = 0 \qquad f(P_1) = f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{3}{2}$$
$$f(P_2) = f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{2}, \qquad f(P_3) = f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{2}, \ ,$$
$$f(P_4) = f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{3}{2}$$

pelo que o valor mínimo da função no domínio D é 0, e é atingido no ponto P_0 e o valor máximo é $\frac{3}{2}$ e é atingido nos pontos P_1 e P_4.

Exemplo. Calcule os extremos globais de $f(x,y) = xy$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{3}\}$.

Resolução: A função f é contínua, definida num domínio limitado e fechado pelo que o Teorema de Weierstrass nos garante que esta função neste domínio atinge o seu valor máximo e o seu valor mínimo.



Exemplo. Calcule os extremos globais de $f(x,y) = xy$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{3}\}$.

Procuramos os candidatos a pontos extremo (globais):
No interior do domínio, uma vez que f é diferenciável nestes pontos, procuramos os pontos críticos da função pela condição

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (y,x) = (0,0)$$

O ponto $(0,0)$ não pertence ao domínio pelo que não é considerado neste caso.

Exemplo. Calcule os extremos globais de $f(x,y) = xy$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{3}\}$.

• No "bordo" do domínio, definido pela equação $g(x) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Calculamos os pontos que verificam a condição

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

ou seja

$$\begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

e obtemos como solução os pontos $P_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, como candidatos a pontos extremos.

• No "*bordo*" do domínio, definido pela equação $g(x,y) = y - \frac{1}{3} = 0$.
Calculamos os pontos que verificam a condição

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

ou seja

$$\begin{cases} y = 0 \\ \\ x = \lambda \\ \\ y - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

e não encontramos qualquer ponto solução deste sistema.

• Nos pontos de interseção das curvas $x^2 + y^2 = 1$ e $y = \frac{1}{3}$, pelo que obtemos os pontos $P_3 = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ e $P_4 = (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$.
Comparamos o valor da função em cada um destes pontos

$$f(P_1) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}, f(P_2) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2},$$

$$f(P_3) = f(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2\sqrt{2}}{9}, f(P_4) = f(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

pelo que o valor mínimo é $-\frac{1}{2}$, que se atinge no ponto P_2 e o valor máximo é $\frac{1}{2}$ que se atinge no ponto P_1.

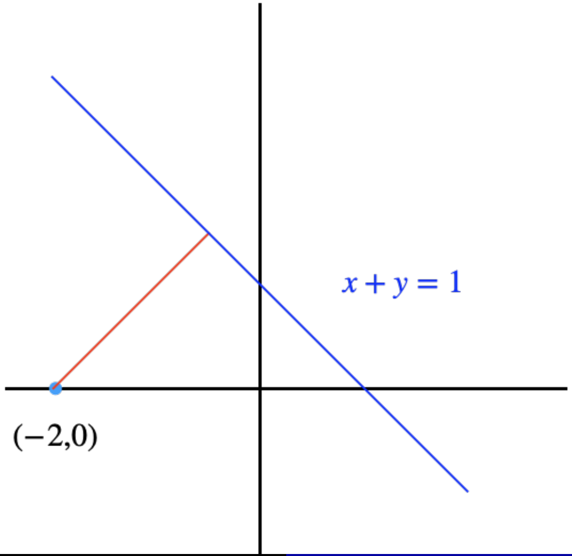
Aula 23: Resolução de exercícios "Método dos multiplicadores de Lagrange"

Teorema Consideremos f e g funções de classe C^1 num conjunto aberto U. Se a função $f(x,y)$ tem no ponto $(x_0,y_0)\in U$ um extremo relativo, sujeito à condição $g(x,y)=0$, onde $\nabla g(x_0,y_0)$ não é o vetor nulo, então existe um $\lambda_0\in\mathbb{R}$, tal que

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda_0\nabla g(x_0,y_0).$$

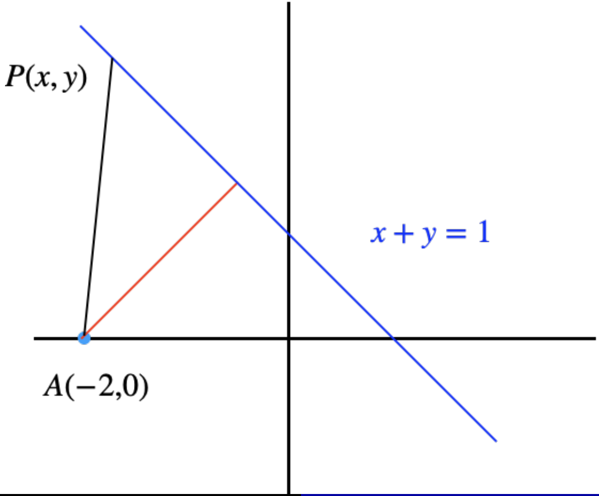
λ_0 é chamado "multiplicador de Lagrange".

Exercício: Determine o ponto na reta $x + y = 1$ que se encontra mais próximo do ponto $(-2, 0)$.



Resolução:

$$d(A, P) = \|AP\| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$



Neste caso estamos a querer minimizar a função distância

$$d(x, y) = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

sujeita à condição, $g(x, y) = x + y - 1 = 0$.
Podemos reformular este problema, usando o quadrado da função distância,

$$\left\{ \begin{array}{cc} \min & f(x, y) = (x+2)^2 + y^2 \\ \text{suj. à cond.} & g(x, y) = x + y - 1 = 0 \end{array} \right.$$

e diremos que este problema é equivalente, ou seja, obtemos a mesma solução.

As funções f e g são $C^1(\mathbb{R}^2)$. Aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange e procuramos (a, b), ponto de mínimo pela condição necessária, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a, b) = \lambda g(a, b)$

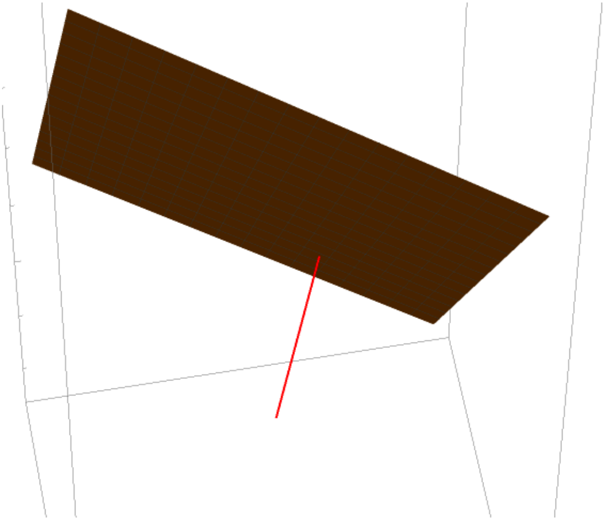
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \Leftrightarrow \quad 2(x+2) - \lambda = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) & \Leftrightarrow \quad 2y - \lambda = 0 \\ \\ g(x, y) = 0 & \Leftrightarrow \quad x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $\lambda = 2(x+2)$, da segunda equação obtemos $\lambda = 2y$, pelo que obtemos a condição $2(x+2) = 2y$, equivalente à $x+2=y$. Consideramos então o sistema

$$\begin{cases} x+2=y \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

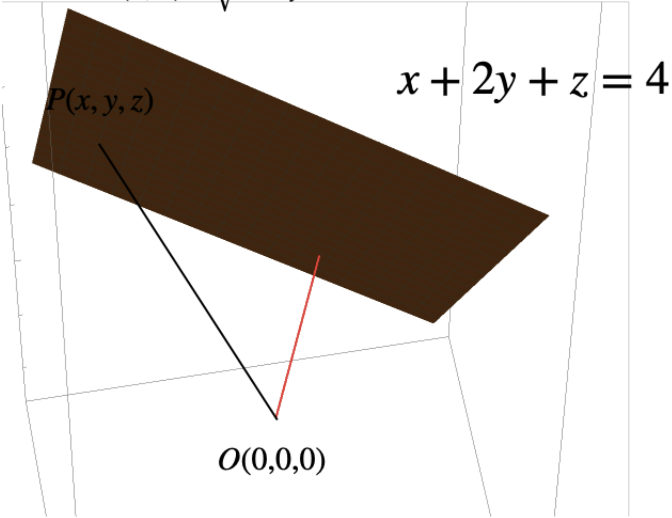
cuja solução é o ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Este ponto é o ponto da reta de distância mínima ao ponto $(-2,0)$.

Exercício: Determine o ponto do plano $x + 2y + z = 4$ que se encontra mais próximo do ponto $(0, 0, 0)$.



Resolução:

$$d(P,O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Neste caso estamos a querer minimizar a função distância

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sujeita à condição, $g(x,y,z) = x + 2y + z - 4 = 0$.
Podemos reformular este problema, usando o quadrado da função distância,

$$\begin{cases} \quad \min & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{suj. à cond.} & g(x,y,z) = x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

e diremos que este problema é equivalente, ou seja, obtemos a mesma solução.

As funções f e g são $C^1(\mathbb{R}^3)$. Aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange e procuramos (a, b, c), ponto de mínimo pela condição necessária, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a, b, c) = \lambda g(a, b, c)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \Leftrightarrow \quad 2x = \lambda \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \Leftrightarrow \quad 2y = \lambda 2 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) & \Leftrightarrow \quad 2z = \lambda \\ \\ g(x,y,z) = 0 & \Leftrightarrow \quad x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = \lambda \\ z = \frac{\lambda}{2} \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Substituímos x, y, z na equação do plano e obtemos

$$\frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{\lambda}{2} - 4 = 0$$

cuja solução é $\lambda = \frac{4}{3}$ o ponto $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. Este ponto é o ponto do plano de distância mínima ao ponto $(0, 0, 0)$.

Exercícios propostos

1. Determine o ponto do plano $x - y + 3z = 4$ que se encontra mais próximo do ponto $(1, 1, -1)$.
2. Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(3, 1, -1)$.
3. Considere a função temperatura $T(x, y) = xy$. Determine os pontos de maior e menor temperatura no domínio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x^2, y \geq -x - 1\}$$

4. Seja f a função definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$ por $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$. Determine os extremos globais da função f em D.

Aula 24: Equações diferenciais ordinárias (EDO)

As equações diferencias tem inúmeras aplicações, no sentido que elas representam modelos para descrever situações relacionadas com aplicações físicas, das áreas da engenharias, economia e outras. Nas próximas aulas tentaremos estudar os métodos mais conhecidos de resolução destas equações diferenciais ordinárias.

Chamaremos equação diferencial ordinária, a uma expressão

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

onde x representará a variável independente e y representará uma função real de variável real $y = y(x)$. Quando o maior ordem da derivada que aparece na equação é n diremos que a equação diferencial ordinária é de ordem n.

Diremos que a equação diferencial está na sua forma normal quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = G(x, y, \dots, y^{(n-1)})).$$

Exemplo:

Podemos considerar a seguinte equação diferencial de ordem 2

$$2x + y' + (x^2 + 1)y'' = 0$$

que reescrevemos na sua forma normal

$$y'' = \frac{-2x - y'}{x^2 + 1}.$$

Solução de uma EDO

Diremos que y é solução da equação diferencial

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$$

num intervalo I a toda função $y = f(x)$, definida no intervalo I, com derivadas finitas até a ordem n tal que

$$F(x, f(x), f'(x) \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

Exemplo A função $y = \sin x$ é solução da equação diferencial $y'' + y = 0$. Calculamos $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, pelo que se verifica

$$(\sin x)'' + \sin x = 0.$$

Terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida em geral usando n constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa familia de soluções é usualmente designado por integração (ou resolução da EDO);

Integral Particular (ou solução particular) Integral que faz parte do integral geral;

Integral Singular Solução que não se obtém a partir do integral geral.

Problema de valores iniciais

Chama-se problema de valores iniciais (PVI) ou problema de Cauchy a todo problema que consiste em encontrar a solução (que pode ou não existir e pode ou não ser única)

$$\begin{cases} F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Exemplo

Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' + x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Resolução: Integramos a equação diferencial

$$y' = -x \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Estamos a obter uma família de soluções. Agora impomos a condição $y(0) = 1$, pelo que obtemos

$$y(0) = 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

A solução obtida é $y = -\frac{x^2}{2} + 1$.

Problema que consiste em encontrar a solução de uma dada equação diferencial (que pode ou não existir e pode ou não ser única) satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo

$$\begin{cases} y'' - 2x = 0 \\ y(0) + y'(1) = 3 \\ y(1) + y'(0) = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Resolução: Integramos a equação diferencial, e obtemos $y' = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Voltamos a integrar e obtemos $y = \frac{1}{3}x^3 + Cx + D$, $C, D \in \mathbb{R}$. Impomos as condições de fronteira

$$\begin{cases} y(0) + y'(1) = 3 \\ y(1) + y'(0) = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D + 1 + C = 3 \\ \frac{1}{3} + C + D + C = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 2 \end{cases}$$

Obtemos como solução $y = \frac{1}{3}x^3 + 2$.

Equação diferencial de variáveis separáveis

Diremos que uma *equação diferencial de primeira ordem* é de *variáveis separáveis* se

$$y' = g(x)h(y)$$

Podemos reescrever a equação na forma

$$\frac{1}{h(y)}y' = g(x)$$

e denotando $p(y) = \frac{1}{h(y)}$, a equação toma a forma

$$p(y)y' = g(x)$$

Exemplos de equações de variáveis separáveis

- A equação $y' = x^2y^2$ é de variáveis separáveis, pode ser re-escrita como
$$\frac{y'}{y^2} = x^2$$
- A equação $y' = \dfrac{x}{y}$ é de variáveis separáveis, pode ser re-escrita como
$$yy' = x$$

Como integrar uma equação $p(y)y' = g(x)$?

Suponhamos que $y = \phi(x)$ é uma solução desta equação diferencial num certo intervalo. Verifica-se

$$p(\phi(x))\phi'(x) = g(x)\,.$$

Integrando membro a membro esta equação

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)dx = \int g(x)dx\,;$$

e denotando as primitivas de p e g por P, G, respectivamente, obtemos

$$P(\phi(x)) = G(x) + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

ou ainda,

$$G(y) = H(x) + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

equação integral da equação diferencial dada. Esta equação integral define de forma implícita, num certo intervalo, y como função de x. A solução y chama-se Solução Integral

Exemplo: $\cos(y)y' = x$

Suponhamos que $y = \phi(x)$ é uma solução desta equação diferencial num certo intervalo. Verifica-se

$$\cos(\phi(x))\phi'(x) = x\,.$$

Integrando membro a membro esta equação

$$\sin(\phi(x)) = \frac{1}{2}x^2 + C\,;$$

e finalmente chegamos à

$$\sin(y) = \frac{1}{2}x^2 + C\,,$$

equação integral da equação diferencial dada. Esta equação integral define de forma implícita, num certo intervalo, y como função de x. A solução y chama-se Solução Integral

Exemplo: $(1+x)y' = y\,.$

Reescrevemos, para $y \neq 0$, esta equação na forma

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{1+x}\,.$$

Integrando membro a membro obtemos

$$\ln|y| = \ln|x+1| + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

ou, se tomamos exponencial em ambos membros

$$|y| = e^{\ln|x+1|+C} = |x+1|e^{C}$$

Neste caso podemos explicitar y como função de x, i.e.

$$y(x) = D(x+1)\,,\ D \in \mathbb{R}\,.$$

onde temos incluído, para $D = 0$ a solução singular $y = 0$.

Observação

Na resolução desta equação pelo método da separação das variáveis, podemos usar a notação $y' = \dfrac{dy}{dx}$, pelo que reescrevemos de forma equivalente,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}$$

ou

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x}dx\,;$$

agora, integrando membro a membro,

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{1+x}dx$$

e obtemos a equação integral

$$\ln|y| = \ln|x+1| + C\,,\;\; C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo: $\quad y' = y^2 - 4$

Considerando $y^2 - 4 \neq 0$, a equação reescreve-se,

$$\frac{1}{y^2 - 4} y' = 1 \, ,$$

e tendo em conta que

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{4} \frac{1}{y - 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{y + 2}$$

integramos a equação,

$$\int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{y - 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{y + 2} \right) dy = \int 1 dx$$

obtendo

$$\frac{1}{4} \ln |y - 2| - \frac{1}{4} \ln |y + 2| = x + C \, ,$$

ou ainda

$$\ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right|^{\frac{1}{4}} = x + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \, ;$$

pelo que

$$\left|\frac{y-2}{y+2}\right|^{\frac{1}{4}} = e^{x+C_1} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{4x+4C_1}$$

Considere-se que $C_2 = 4C_1$,

$$\frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+C_2}$$

e tomando $C_3 = \pm e^{C_2}$, obtemos finalmente

$$\frac{y-2}{y+2} = C_3 e^{4x} \quad \text{ou ainda} \quad y = 2\frac{1+C_3e^{4x}}{1-C_3e^{4x}}\,,$$

onde $C_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Esta solução obtida é a solução integral.

Relembramos que para aplicar este método de separação de variáveis impusemos a restrição $y^2 - 4 \neq 0$. Verificamos que a condição $y^2 - 4 \neq 0$, nos dá as soluções $y = 2$ e $y = -2$. De facto, tomando na solução integral obtida $C_3 = 0$, obtemos que $y = 2$ é solução; já a solução $y = -2$, não é dada pela solução integral pelo que será designada por **solução singular**.
Diremos que a **solução geral** da equação diferencial $y' = y^2 - 4$ é $y = 2\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}$, onde $C \in \mathbb{R}$ ou $y = -2$.

Exemplo: $e^x y y' = e^{-y} + e^{-2x-y}$

Escrevemos na sua forma normal

$$y' = \frac{e^{-y} + e^{-2x-y}}{e^x y} \text{ ou } y' = \frac{e^{-y}}{y}(e^{-x} + e^{-3x})$$

Separamos as variáveis e usamos a notação $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$y e^y dy = (e^{-x} + e^{-3x}) dx$$

integrando esta equação

$$\int y e^y dy = \int (e^{-x} + e^{-3x}) dx$$

ou

$$y e^y - e^y = -e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,;$$

A solução y desta equação diferencial está dada na forma implícita.

Exemplo: $y' = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$.

Usando a notação $y' = \dfrac{dy}{dx}$ e a restrição $2y+3 \neq 0$, reescrevemos esta equação na forma

$$\frac{1}{(2y+3)^2}dy = \frac{1}{(4x+5)^2}dx\,;$$

integrando ambos membros desta equação obtemos

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{2y+3} = -\frac{1}{4}\frac{1}{4x+5} + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

ou

$$y = \frac{(4x+5)(2-6C)-3}{2+4(4x+5)C}\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Esta solução é a chamada solução integral. Temos de acrescentar a solução singular $y = -\dfrac{3}{2}$.

Exercícios propostos (folha 4)

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em $\mathbb{R}$) das equações diferenciais dadas:

a) $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$,$y' + y\ \cos x = \dfrac{1}{2}\ \sin(2x)$;

b) $z = \cos x$, $z'' + z = 0$;

c) $y = \cos^2 x$, $y'' + y = 0$;

d) $y = Cx - C^2 \quad (C \in \mathbb{R})$,$(y')^2 - xy' + y = 0$.

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);

b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);

c) $y = e^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}$.

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A\,\sin(x + B) \qquad \text{com} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. Considere a equação diferencial $y'' - \sin x = 0$.

a) Determine a sua solução geral.

b) Encontre a solução que verifica as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

a) $y' - \dfrac{1}{(1+x^2)\ \arctan x} = 0$;

b) $y' - \sqrt{1-x^2} = 0$;

c) $y' - \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0$.

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

a) $x + yy' = 0$;

b) $xy' - y = 0$;

c) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$;

d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$.

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

7.1 $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2$;

7.2 $xy + x + y'\sqrt{4 + x^2} = 0, \quad y(0) = 1$;

7.3 $(1 + x^3)y' = x^2 y, \quad y(1) = 2$.

Aula 25: Equação diferencial homogénea

Diremos que $y' = f(x,y)$ é uma *equação diferencial* é *homogénea* se

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$$

Neste caso pode reescrever a equação da forma

$$y' = g(\frac{y}{x}).$$

Exemplo: $y' = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$,

Esta equação diferencial é homogênea, se denotamos

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

verificamos que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{\lambda^2(x^2-y^2)} = f(x,y).$$

Reescrevemos

$$y' = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{1+(\frac{y}{x})^2}{1-(\frac{y}{x})^2}$$

Exemplo: $y' = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^3 - y^3}$.

Esta equação diferencial é homogênea, se denotamos

$$f(x,y) = \frac{x^2y + xy^2}{x^3 - y^3}$$

verificamos que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2\lambda y + \lambda x(\lambda y)^2}{(\lambda x)^3 - (\lambda y)^3} = \frac{\lambda^3(x^2y + xy^2)}{\lambda^3(x^3 - y^3)} = f(x,y).$$

Reescrevemos

$$y' = \frac{x^2y + xy^2}{x^3 - y^3} = \frac{\frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2}{1 - (\frac{y}{x})^3}$$

Resolução da equação diferencial homogénea por mudança de variável $\frac{y}{x} = z$

Definimos

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz.$$

Derivamos ambos membros desta identidade em relação a variável x obtendo

$$y' = z + xz'.$$

Substituímos na equação $y' = g(\frac{y}{x})$, i.e.

$$g(z) = z + xz' \Leftrightarrow z' = \frac{g(z) - z}{x}$$

esta equação resultante é uma equação em variáveis separáveis.

Exemplo: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y\,,\;\; x > 0\,.$

Verificamos que se trata de uma equação diferencial homogénea,

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

verificamos que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} + \lambda y}{\lambda x} = f(x, y)$$

pelo que pode ser escrita da forma

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x} = \sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x}$$

Definimos $z = \dfrac{y}{x}$, i.e. $y = xz$ e derivando ambos membros desta identidade em relação a variável x obtemos $y' = z + xz'$. Substituindo na equação

$$z + xz' = \sqrt{1-z^2} + z\,, \quad \text{i.e.} \quad xz' = \sqrt{1-z^2}\,;$$

tomando $z' = \dfrac{dz}{dx}$, obtemos, considerando $1 - z^2 \neq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = \frac{1}{x}dx\,.$$

Integramos membro a membro obtemos a solução integral

$$\arcsin z = \ln x + C\,,\ C \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad z = \sin(\ln x + C)\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Se agora consideramos $1 - z^2 = 0$, obtemos as soluções singulares

$$z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -1\,.$$

Se agora substituímos $z = \dfrac{y}{x}$, obtemos como solução geral

$$y = x\sin(\ln x + C)\,,\ C \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad y = x \quad \text{ou} \quad y = -x\,.$$

Exemplo: $y' = \dfrac{2xy - y^2}{x^2}$.

Trata-se de uma equação diferencial homogénea, denotamos $f(x,y) = \dfrac{2xy - y^2}{x^2}$, e verificamos que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2} = \frac{2xy - y^2}{x^2} = f(x,y)$$

pelo que pode ser reescrita na forma

$$y' = 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Continuação: $y' = 2\dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$.

Definimos $z = \dfrac{y}{x}$, i.e. $y = xz$ e derivando ambos membros desta identidade em relação a variável x obtemos $y' = z + xz'$.
Substituindo na equação obtemos

$$z + xz' = 2z - z^2 \quad \text{ou equivalentemente} \quad \frac{z'}{z - z^2} = \frac{1}{x}$$

Temos de impor a condição $z - z^2 \neq 0$, pelo que aparecem como possíveis soluções singulares $z = 0$ e $z = 1$. Fazendo a substituição $z' = \dfrac{dz}{dx}$ obtemos

$$\frac{dz}{z - z^2} = \frac{dx}{x}$$

Continuação: $\dfrac{dz}{z-z^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Integrando membro a membro e tendo em atenção que

$$\frac{1}{z-z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\,,$$

obtemos

$$\ln|z| - \ln|1-z| = \ln|x| + C\,,\;\; C \in \mathbb{R}\,,$$

que podemos escrever de forma equivalente como

$$\frac{z}{1-z} = \frac{x}{D}\,,\;\; D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Substituímos $z = \dfrac{y}{x}$, pelo que obtemos como solução integral

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x}{D}, D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,. \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{x+D}, D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Ainda temos obtido como solução singulares $y = 0, y = x$ (de $z = 0, z = 1$). (y=x corresponde a $D = 0$ na solução integral).

Exemplo: $y' = \dfrac{x^3 - x^2 y + y^3}{x^2 y}$ ..

Trata-se de uma equação diferencial homogénea (verificar!) e pode ser escrita da forma

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^3}{\frac{y}{x}}.$$

Definindo $z = \dfrac{y}{x}$, i.e. $y = xz$ e derivando membro a membro em relação a variável x, obtemos $y' = z + xz'$. Substituindo na equação diferencial dada e obtemos

$$z + xz' = \frac{1 - z + z^3}{z}\,,$$

ou

$$xz' = \frac{1 - z + z^3}{z} - z\,, \quad \text{ou} \quad xz' = \frac{1 - z - z^2 + z^3}{z}\,.$$

Continuação: $xz' = \frac{1-z-z^2+z^3}{z}$.

Temos de impor a condição $1 - z - z^2 + z^3 \neq 0$, pelo que aparecem como possíveis soluções singulares $z = 1$ e $z = -1$.

Fazendo a substituição $z' = \dfrac{dz}{dx}$ obtemos

$$\frac{zdz}{1 - z - z^2 + z^3} = \frac{dx}{x} \,.$$

Integrando membro a membro e tendo em atenção que

$$\frac{z}{1 - z - z^2 + z^3} = \frac{z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{-1}{4}\frac{1}{z+1}$$

obtemos

$$\frac{1}{4}\ln|z-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)} + \frac{-1}{4}\ln|z+1| = \ln|x| + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

Agora, tendo em conta que $z = \dfrac{y}{x}$, obtemos como possíveis soluções singulares $y = x$, $y = -x$, e a solução integral

$$\frac{1}{4}\ln|\frac{y}{x} - 1| - \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{y}{x} - 1)} + \frac{-1}{4}\ln|\frac{y}{x} + 1| = \ln|x| + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

Diremos que solução geral é dada de forma implícita por esta equação.

Exercícios propostos

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

   (a) $xy' = (x^2+1)(y^2-1)$; (b) $(x^2+1)yy' = xe^y$;

   (c) $\dfrac{(y+1)}{2x}y' = (y^2-y)\sin x$.

2. Considere a equação diferencial

$$y' = \frac{x^2y - xy^2 + y^3}{x^3 + xy^2}$$

   i) Mostre que é uma equação diferencial homogénea
   ii) Resolva esta equação.

Aula 26: Equações diferenciais lineares

Designamos por *equação diferencial linear de primeira ordem* uma equação diferencial do tipo

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)\,.$$

Estas equações são lineares pela estrutura da sua solução, em particular no caso que $b(x) \equiv 0$, diremos que a equação linear é incompleta ou homogénea (esta designação está relacionada com os sistemas de equações homogéneos e não com as equações diferenciais homogéneas). No caso que as funções a_0, a_1 sejam constantes diremos que é uma equação diferencial linear de primeira ordem de coeficientes constantes. Estas equações podem ser resolvidas pelo *método do fator integrante* ou pelo *método da variação das constantes*.

Exemplos de equações diferenciais lineares de primeira ordem

Equação diferencial linear de primeira ordem completa

$$xy' + x^2 y = \sin x$$

Equação diferencial linear de primeira ordem associada homogénea

$$xy' + x^2 y = 0$$

Equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$2\,y' + 3\,y = x$$

Exemplo de resolução direta!

$$xy' + y = x, x > 0$$

Re-escrevemos esta equação:

$$\color{red}{(xy)'} = x$$

e integramos em ordem a x, para $x > 0$, e obtemos

$$xy = \frac{1}{2}x^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

Portanto a solução é

$$y = \frac{1}{2}x + C\frac{1}{x}\,,\ C \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Outro exemplo de integração direta

$$x^2y' + 2xy = 1, x < 0$$

Re-escrevemos esta equação:

$$\left(x^2y\right)' = 1, x < 0$$

e integramos em ordem a x, para $x < 0$, e obtemos

$$x^2y = x + C, C \in \mathbb{R}$$

Portanto a solução é

$$y = \frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2}\,,\ \ C \in \mathbb{R},\ x < 0.$$

Podemos multiplicar a equação linear de primeira ordem por um fator chamado fator integrante para poder realizar uma integração direta

O primer passo é normalizar a equação, ou seja dividir ambos membros da equação por $a_0(x)$,

$$y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y = \frac{b(x)}{a_0(x)} \, .$$

Multiplicamos ambos membros da equação por uma função $\mu(x)$, designada como fator integrante,

$$\mu(x) y' + \mu(x) \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y = \mu(x) \frac{b(x)}{a_0(x)}. \tag{1}$$

esta equação pode ser re-escrita como

$$(\mu(x)y)' - \mu'(x)y + \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \mu(x)\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

ou

$$(\mu(x)y)' + (-\mu'(x) + \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)})y = \mu(x)\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Procuramos o fator integrante $\mu(x)$ pela condição

$$-\mu'(x) + \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = 0$$

e obtemos a equação diferencial

$$\mu'(x) = \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

que pode ser integrada, se a reescrevermos como

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$$

e obtemos

$$\ln|\mu(x)| = \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx$$

pelo que

$$\mu(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

Continuação: $(\mu(x)y)' = \mu(x)\frac{b(x)}{a_0(x)}$.

Integramos esta equação em ordem a x e obtemos

$$\mu(x)y = \int \mu(x)\frac{b(x)}{a_0(x)}dx + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

e chegamos a solução

$$y = \int e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}\frac{b(x)}{a_0(x)}dx e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} + Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo: Resolva $xy' + 2y = x$, $x > 0$

Neste caso, normalizamos a equação, obtendo,

$$y' + \frac{2}{x} y = 1\,.$$

Calculamos o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln |x|} = (e^{\ln |x|})^2 = x^2\,.$$

Multiplicamos a equação normalizada pelo fator integrante

$$x^2 y' + x^2 \frac{2}{x} y = x^2,$$

e chegamos a equação

$$x^2 y' + 2xy = x^2$$

Continuação: $x^2y' + 2xy = x^2$

Esta equação pode ser re-escrita como

$$(x^2y)' = x^2$$

Integramos em ordem a x e obtemos

$$x^2y = \frac{1}{3}x^3 + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

e chegamos finalmente à solução

$$y = \frac{1}{3}x + C\frac{1}{x^2},\; C \in \mathbb{R}.$$

Método do fator integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$

Exemplo: Resolva $y' - y = x$.
Neste caso, a equação já está normalizada, ,
Calculamos o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int (-1) dx} = e^{-x} .$$

Multiplicamos a equação normalizada pelo fator integrante

$$e^{-x} y' + e^{-x}(-1) y = e^{-x} x,$$

e chegamos a equação

$$(e^{-x} y)' = e^{-x} x.$$

Continuação:$(e^{-x}y)' = e^{-x}x.$

Integramos em ordem a x (o segundo membro por partes) e obtemos

$$e^{-x}y = -xe^{-x} - e^{-x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

e chegamos finalmente à solução

$$y = -x - 1 + Ce^{x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: $y' - \tan(x)y = \dfrac{1}{\cos x} - \cos x\,,\ \ x \in \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[.$

Calculamos o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int -\tan x dx} = e^{\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x\,,$$

(neste enunciado $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$), pelo que $\cos x > 0$)

Multiplicamos ambos membros desta equação diferencial pelo fator integrante e obtemos

$$\cos(x)y' - \sin(x)y = \sin^2 x$$

$\cos(x)y' - \sin(x)y = \sin^2 x$

Re-escrevemos esta equação:

$$(\cos(x)y)' = \sin^2 x$$

pelo que

$$\cos(x)y = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x \cos x) + C\,,\ \ C \in \mathbb{R}\,.$$

A solução no intervalo $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é dada por

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos x} - \sin x\right) + C\frac{1}{\cos x}\,,\ \ C \in \mathbb{R}$$

PVI associado a EDO Linear de Primeira Ordem

Teorema (existência e unicidade de solução):
Se p e q são funções contínuas num intervalo I, $x_0 \in I$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Resolva o PVI

$$\begin{cases} y' - y & = & -e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Resolvemos esta equação pelo método do fator integrante e obtemos

$$y = -xe^x + Ce^x, C \in \mathbb{R}$$

Procuramos a solução que verifica $y(0) = 1$. Calculamos

$$y(0) = 0 + Ce^0 = C$$

pelo que $y(0) = 1$ se e somente se $C = 1$. A solução que verifica este PVI é $y = -xe^x + e^x$.

Exercícios propostos: Resolva as seguintes equações diferenciais lineares pelo método do fator integrante

1. Resolva as seguintdiferenciais lineares pelo método do fator integrante
$$(x+1)y' + 3y' = 1;$$
2. Idem
$$x(x+1)y' - y = x^2 e^x.$$
3. Resolva o PVI
$$\begin{cases} y' - 2y & = & e^{2x} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Chamamos *equação diferencial de Bernoulli*, à equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)y^{\alpha}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

No caso $\alpha = 0$ ou 1, estamos perante uma equação diferencial linear. No caso $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, fazendo a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$, esta equação reduz-se a uma equação diferencial linear na nova variável z:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)y^{\alpha}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo: $x^2y' - 2xy = 3y^4, x > 0$

Esta equação é de Bernoulli para $\alpha = 4$. Dividimos ambos membros da equação diferencial por y^4,

$$x^2 \frac{1}{y^4} y' - 2x \frac{y}{y^4} = 3\,,$$

ou

$$x^2 \frac{1}{y^4} y' - 2x \frac{1}{y^3} = 3\,,$$

Reparamos que

$$\left(\frac{1}{y^3}\right)' = \frac{-3}{y^4} y'$$

pelo que multiplicamos cada membro da equação diferencial por -3

$$x^2 \frac{-3}{y^4} y' + 6x \frac{1}{y^3} = -9\,,$$

Efetuamos a mudança de variável

$$z = \frac{1}{y^3}$$

(note-se que $z = y^{1-\alpha}$), pelo que

$$z' = \frac{-3}{y^4}y'.$$

Reescrevemos em z, i.e.

$$x^2 z' + 6xz = -9\,.$$

Esta equação diferencial em z é uma equação linear.

Normalizamos esta equação

$$z' + \frac{6}{x} z = -\frac{9}{x^2}\,,$$

e calculamos o fator integrante
$\mu(x) = e^{\int \frac{6}{x}dx} = e^{6\ln|x|} = \left(e^{\ln|x|}\right)^6 = x^6$; multiplicamos agora ambos membros da equação normalizada, i.e.

$$x^6 z' + 6x^5 z = -9x^4\,,$$

ou equivalentemente,

$$\left(x^6 z\right)' = -9x^4\,.$$

Continuação $\quad (x^6 z)' = -9x^4\,.$

Integramos ambos membros desta equação em ordem a x

$$x^6 z = -\frac{9}{5}x^5 + C\,,\ C \in \mathbb{R}$$

ou equivalentemente,

$$z = -\frac{9}{5}\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^6}\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Voltamos a variável y, tendo em conta que $z = \frac{1}{y^3} = y^{-3}$, i.e. $y = z^{-\frac{1}{3}}$, e a solução da equação diferencial inicial é dada por

$$y = \left(-\frac{9}{5}\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^6}\right)^{-\frac{1}{3}}\,.$$

Exemplo : $\begin{cases} y' - \frac{1}{4}y + (1-2x)y^5 = 0 \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$

Dividimos ambos membros desta equação por y^5 e obtemos

$$\frac{1}{y^5}y' - \frac{1}{4}\frac{1}{y^4} + (1-2x) = 0\,.$$

Usamos que

$$\left(\frac{1}{y^4}\right)' = \frac{-4}{y^5}y'$$

pelo que multiplicamos a equação por (-4)
e obtemos

$$\frac{-4}{y^5}y' + \frac{1}{y^4} - 4(1-2x) = 0\,.$$

Fazemos a mudança de variável $z = \dfrac{1}{y^4}$, e a equação diferencial dada fica reescrita como

$$z' + z - 4(2x-1) = 0\,.$$

Continuação: $\quad z' + z - 4(2x-1) = 0\,.$

Esta equação está normalizada pelo que podemos calcular o seu fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^{x}\,.$$

Multiplicamos ambos membros desta equação pelo fator integrante obtendo-se

$$e^{x}z' + e^{x}z = 4e^{x}(2x-1) \quad \text{ou} \quad (e^{x}z)' = 4e^{x}(2x-1)\,;$$

integrando membro a membro em ordem a x obtemos

$$e^{x}z = \int 4e^{x}(2x-1)dx = 4(2x-3)e^{x} + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

ou

$$z = 4(2x-3) + Ce^{-x}\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

A condição inicial

$$y(0) = -1$$

traduz-se na nova variável como $z(0) = \frac{1}{y^4(0)} = 1$, pelo que se substituímos $x = 0$ na solução obtida, temos

$$1 = 4(-3) + C\,, \quad \text{i.e.} \quad C = 13\,;$$

Reescrevemos a equação novamente na variável y, considerando que $z = \dfrac{1}{y^4}$ obtemos como solução da equação diferencial dada

$$y = -\left(4(2x-3) + 13e^{-x}\right)^{-\frac{1}{4}}\ .$$

(Note-se que $y = \pm z^{-\frac{1}{4}}$ e pela unicidade da solução da equação diferencial satisfazendo a condição inicial $y(0) = -1$, obtemos $y = -z^{-\frac{1}{4}}$.)

Exercícios propostos

1. Resolva a equação diferencial

$$-xy' + y = 2y^2,\ x > 0$$

2. Resolva a equação diferencial

$$-(x^2 - 1)y' + y = 2x^2y^3,\ x > 1$$

3. Resolva a equação diferencial

$$(x - 1)^2y' + y = 2xy^5,\ x > 1$$

Aula 28: Equação diferencial linear-Método da variação da constante

Consideremos a equação linear

$$a_0(x)y'(x) + a_1(x)y(x) = b(x)$$

e consideremos a equação homogénea associada

$$a_0(x)y'(x) + a_1(x)y(x) = 0$$

onde $x \in I$, $a_0(x) \neq 0, x \in I$. I intervalo aberto de $\mathbb{R}$.
Esta equação é de variáveis separáveis. Resolvemos esta equação e a solução obtida será denotada por y_h,

$$a_0(x)y_h'(x) + a_1(x)y_h(x) = 0$$

Procura da solução da equação linear completa

Consideramos que a solução y que procuramos é dada por $y(x) = D(x)y_h(x)$, e vamos determinar a função $D(x)$ pela imposição que y seja solução da equação diferencial linear considerada. Para isto pretendemos substituir y na equação diferencial e obter deste modo $D(x)$. Para começar temos em conta

$$y'(x) = D'(x)y_h(x) + D(x)y_h'(x)$$

substituímos na equação linear completa e obtemos

$$a_0(x)\left(D'(x)y_h(x) + D(x)y_h'(x)\right) + a_1(x)D(x)y_h(x) = b(x)$$

ou

$$a_0(x)D'(x)y_h(x) + D(x)\left(a_0(x)y_h'(x) + a_1(x)y_h(x)\right) = b(x)$$

$$a_0(x)D'(x)y_h(x) = b(x)$$

ou

$$D'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}y_h(x)\,.$$

Integrando obtemos

$$D(x) = \int \frac{b(x)}{a_0(x)}y_h(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

pelo que a solução $y(x) = D(x)y_h(x)$ estará completamente determinada.

Exemplo: $(1+x^2)y'+y=1$

Consideremos a equação homogénea associada

$$(1+x^2)y'+y={\color{red}0}$$

ou

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{1+x^2}$$

integramos membro a membro, em ordem a variável x, e obtemos

$$\ln|y|=-\arctan x+C, C\in\mathbb{R}$$

ou

$$y(x) = De^{-\arctan x}, D \in \mathbb{R}$$

Denotamos esta solução obtida como

$$y_h(x) = De^{-\arctan x}, D \in \mathbb{R}$$

Lembramos que y_h é solução da equação diferencial

$$(1 + x^2)y_h'(x) + y_h(x) = 0$$

Consideramos agora

$$y(x) = D(x)e^{-\arctan x}$$

$$y'(x) = D'(x)e^{-\arctan x} - D(x)\frac{1}{1+x^2}e^{-\arctan x}$$

pelo que obtemos

$$(1+x^2)\left(D'(x)e^{-\arctan x} - D(x)\frac{1}{1+x^2}e^{-\arctan x}\right)+D(x)e^{-\arctan x} = 1$$

ou

$$(1+x^2)D'(x)e^{-\arctan x} = 1$$

pelo que

$$D'(x) = \frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}$$

Integramos e obtemos

$$D(x) = e^{\arctan x} + C, C \in \mathbb{R}$$

e a solução y pretendida é

$$y = (e^{\arctan x} + C)e^{-\arctan x} = 1 + Ce^{-\arctan x}, C \in \mathbb{R}$$

Teorema(Existência e unicidade da solução do problema de Cauchy)

Se a_0, a_1 e b são funções contínuas num intervalo I, tal que $a_0(x) \neq 0$ para $x \in I$ e $x_0 \in I$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \, , \end{cases}$$

tem uma única solução.

Exemplo: $\begin{cases} xy' + 2y = e^x \\ y(0) = -1\,, \end{cases}$

As hipóteses do Teorema de existência e unicidade de solução não são verificadas. Não existe qualquer intervalo I que contenha o ponto 0 tal que a função $a_0(x) = x$ seja distinta de 0 nesse intervalo.
Se substituímos $x = 0$ na equação obtemos $0 + 2y(0) = 1$ e esta condição é incompatível com a condição inicial imposta $y(0) = -1$, pelo que não existe uma solução para este problema chamado de valor inicial.

Exemplo: $\begin{cases} y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

As hipóteses do Teorema de existência e unicidade de solução são verificadas, pelo que existe uma única solução para este problema. Vamos a obter a solução desta equação diferencial linear pelo método da variação da constante.

Resolvemos a equação diferencial homogénea associada $y'(x) + 2xy(x) = 0$

Esta equação diferencial é de variáveis separáveis. Reescrevemos, para $y \neq 0$

$$\frac{y'}{y} = -2x$$

Integramos em ordem a x e obtemos

$$\ln|y| = -x^2 + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,;$$

ou

$$y = \pm e^{-x^2+C} = \pm e^{C} e^{-x^2}$$

A solução geral desta equação homogênea é dada por

$$y_h(x) = De^{-x^2}, D \in \mathbb{R}$$

Procuramos $y = D(x)e^{-x^2}$, solução da equação diferencial completa

Substituímos na equação diferencial $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ e obtemos

$$D'(x)e^{-x^2} + D(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xD(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}.$$

ou

$$D'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}.$$

Resolvemos $D'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$.

e obtemos

$$D'(x) = 2x \Rightarrow D(x) = x^2 + C.$$

e chegamos à solução

$$y = x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2}\,,\ C \in \mathbb{R}\,;$$

ao impormos a condição $y(0) = 1$ temos que $1 = C$, pelo que a solução pedida é $y(x) = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}$.

Temos verificado no exemplo anterior, que a solução da equação diferencial linear completa

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

é dada por

$$y = x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$$

A função $y_p = x^2 e^{-x^2}$ é chamada solução particular porque verifica a equação diferencial dada. O termo Ce^{-x^2} é a solução geral da equação diferencial homogénea associada. Verificamos então que

$$y = y_p + y_h$$

Exercícios propostos

1. Considere a equação diferencial $2xy' + y = \sqrt{x}\cos x, \quad x > 0.$
   i) Encontre a solução geral pelo método do fator integrante.
   ii) Procure a solução que verifica a condição inicial $y(\pi) = 0$.
2. Considere a equação diferencial $(x^2-1)y' + xy = x\sqrt{x^2-1}, \quad x > 1.$
   i) Encontre a solução geral pelo método do fator integrante.
   ii) Procure a solução que verifica a condição inicial $y(\sqrt{2}) = 1$.

3. Considere a equação diferencial $y' + xy = x$.

   i) Encontre a solução geral da equação homogênea associada.
   ii) Procure a solução pelo método da variação da constante.
   iii) Procure a solução que verifica a condição inicial $y(0) = -1$.

4. Considere a equação diferencial
   $(x - x^2)y' - y = x + 1, \quad 0 < x < 1.$

   i) Encontre a solução geral da equação homogênea associada.
   ii) Procure a solução pelo método da variação da constante.
   iii) Procure a solução que verifica a condição inicial $y(\frac{1}{2}) = 0$.

Aula 29: Equações diferenciais lineares de ordem n

Designamos por equação diferencial linear de ordem n uma equação diferencial do tipo

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = b(x)$$

Exemplo

$$(x^2+1)y'' + 2xy' + \cos(x)y = \sin x$$

é uma equação diferencial linear de ordem 2.

Teorema de existência e unicidade de solução

Existe uma única solução y, que verifica

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

onde $a_0, \ldots a_n$ e b são funções contínuas num intervalo I, tal que $a_0(x) \neq 0$ para $x \in I$ e $x_0 \in I$.

Exemplo

$$\begin{cases} (x^2-1)y'' + 2xy' + \cos(x)y = \sin x \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$$

Existe solução única desta equação diferencial definida em $I = (-1, 1)$. Neste intervalo podemos o coeficiente principal de esta equação é diferente de 0 e a condição inicial está dada em $x = 0$, ponto deste intervalo I.

Estrutura da solução da equação diferencial linear de ordem n completa

Consideremos y solução geral da equação diferencial linear de ordem n completa

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = b(x)$$

e seja y_p uma solução particular desta equação. Verifica-se então

$$a_0(x)y_p^{(n)} + a_1(x){y_p}^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y_p = b(x)$$

Subtraímos estas duas equações, e usamos a linearidade da derivada,

$$a_0(x)(y - y_p)^{(n)} + a_1(x)(y - y_p)^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)(y - y_p) = 0$$

Estrutura da solução da equação diferencial linear de ordem n completa

pelo que escrevemos que $y - y_p = y_h$, onde y_h representa a solução geral da equação homogénea associada à equação inicial. Então observamos que para encontrar a solução geral da equação diferencial linear de ordem n completa é suficiente conhecer uma solução particular desta equação e resolver a equação diferencial linear de ordem n homogénea associada.

$$y = y_p + y_h.$$

Princípio da sobreposição

Suponhamos que

$$a_0(x)y_{p_1}^{(n)} + a_1(x)y_{p_1}^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y_{p_1} = b_1(x)$$

$$a_0(x)y_{p_2}^{(n)} + a_1(x)y_{p_2}^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y_{p_2} = b_2(x)$$

Somando ambas equações, e usando a linearidade da derivada, obtemos

$$a_0(x)(y_{p_1} + y_{p_2})^{(n)} + a_1(x)(y_{p_1} + y_{p_2})^{(n-1)} + \cdots$$

$$+a_n(x)(y_{p_1} + y_{p_2}) = b_1(x) + b_2(x)$$

pelo que $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ será solução particular da equação diferencial dada de termo independente $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$.

Exemplo:

A função $y_{p_1} = x^2 - 4x + 6$ é solução particular da equação diferencial

$$y'' + 2y' + y = x^2$$

A função $y_{p_2} = e^x$ é solução particular da equação diferencial

$$y'' + 2y' + y = 4e^x$$

A função $y_p = x^2 + e^x$ é solução particular da equação diferencial

$$y'' + 2y' + y = x^2 + 4e^x$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, suponhamos que y_p verifica verificamos que sendo y_p

$$a_0(x){y_p}^{(n)} + a_1(x){y_p}^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y_p = b(x)$$

Multiplicando ambos membros da equação por α, e usando novamente a linearidade da derivada, obtemos

$$a_0(x)(\alpha y_p)^{(n)} + a_1(x)(\alpha y_p)^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)(\alpha y_p) = \alpha b(x)$$

pelo que αy_p será solução da equação

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = \alpha b(x)$$

Exemplo

A função $y_{p_1} = x^2 - 2$ é solução da equação

$$y'' + y = x^2,$$

e a função $y_{p_2} = x \sin x$ é solução de equação

$$y'' + y = 2\cos x,$$

pelo que a função $y_p = 5(x^2 - 2) - \frac{1}{2} x \sin x$ é solução da equação

$$y'' + y = 5x^2 - \cos x.$$

Solução da equação diferencial linear de ordem n homogénea: Wronskiano e Sistema Fundamental

Consideremos a equação

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tal que $a_0(x) \neq 0$ para $x \in I$. Devemos começar por referir que se $\phi_1, \ldots, \phi_k$ são soluções desta equação então $C_1\phi_1 + \cdots + C_k\phi_k$ é novamente uma solução (diremos que o conjunto solução tem estrutura de espaço vetorial). Portanto para caracterizar o conjunto de soluções basta identificar as soluções "distintas", isto é linearmente independentes.

Conjunto linearmente independente de soluções

Diremos que o conjunto de funções $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ é linearmente independente no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se as únicas constantes $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1\phi_1(x) + \cdots + C_n\phi_n(x) = 0\,,\ x \in I\,,$$

são $C_1 = \cdots = C_n = 0\,.$
Quando o conjunto de funções $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ não é linearmente independente no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, diremos que é linearmente dependente, ou seja se existirem constantes $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ não todas nulas, tais que

$$C_1\phi_1(x) + \cdots + C_n\phi_n(x) = 0\,,\ x \in I\,,$$

Exemplo

O conjunto $\{\sin x, \cos x\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}$. Consideremos

$$C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0\,,\;\; x \in \mathbb{R}\,,$$

para $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Derivamos ambos membros desta equação e obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1 \cos x + C_2 \sin x & = & 0 \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x & = & 0 \end{array}\right.$$

Para cada valor de $x \in \mathbb{R}$ temos um sistema de duas equações e duas incógnitas. O determinante da matriz deste sistema

$$\left| \begin{array}{cc} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{array} \right| = -1 \neq 0$$

pelo que a solução deste sistema será única, $C_1 = C_2 = 0$, e fica provada a independência linear.
Este exemplo motiva a seguinte definição:

Definição

Chamamos *wronskiano* de um conjunto de funções $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\}$, ao determinante

$$W_{\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_k\}}(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_k(x) \\ {\phi_1}'(x) & {\phi_2}'(x) & \cdots & {\phi_k}'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ {\phi_1}^{(k-1)}(x) & {\phi_2}^{(k-1)}(x) & \cdots & {\phi_k}^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Proposição (Critério para a independência linear)

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Se $W_{\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_k\}}(x_0) \neq 0$, para $x_0 \in I$, então $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ é linearmente independente em I. Para $n = 3$, escrevemos

$$W_{\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}}(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x) & \phi_3(x_0) \\ {\phi_1}'(x_0) & {\phi_2}'(x_0) & {\phi_3}'(x_0) \\ {\phi_1}''(x_0) & {\phi_2}''(x_0) & {\phi_k}''(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Demonstração ($n = 3$)

Consideremos $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + C_3\phi_3(x) = 0\,,\ x \in I\,.$$

Derivamos sucessivamente esta equação, obtemos para $x = x_0$

$$\begin{cases} C_1\phi_1(x_0) + C_2\phi_2(x_0) + C_3\phi_3(x_0) = 0, \\ C_1\phi_1{}'(x_0) + C_2\phi_2{}'(x_0) + C_3\phi_3{}'(x_0) = 0, \\ C_1\phi_1{}''(x_0) + C_2\phi_2{}''(x_0) + C_3\phi_3{}''(x_0) = 0, \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes deste sistema é igual ao wronskiano, $W_{\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_k\}}(x_0) \neq 0$, pelo que podemos afirmar que a única solução para este sistema é $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0$, logo a independência linear deste conjunto de funções fica provada.

Teorema (Solução da equação diferencial linear homogénea de ordem n)

Existe um conjunto $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ de soluções linearmente independentes da equação linear homogénea

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

onde $a_0, \dots, a_n$ e b são funções contínuas num intervalo I, tal que $a_0(x) \neq 0$ para $x \in I$ e $x_0 \in I$.
Além disso, quando consideramos $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ um conjunto de soluções linearmente independentes da equação linear homogénea, qualquer solução y desta equação é dada por

$$y = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \cdots + C_n\phi_n,$$

onde $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

Sistema Fundamental de Soluções

Dada uma equação diferencial linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

designamos por *sistema fundamental de soluções* a qualquer conjunto $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de soluções linearmente independentes desta equação.
O sistema fundamental de soluções constitui uma base do espaço vetorial de soluções da equação diferencial linear homogénea considerada.

Exemplo:

Se consideramos a equação diferencial homogénea de ordem 2

$$y'' + y = 0$$

O conjunto de funções $\{\sin x, \cos x\}$ constitui um sistema fundamental. Estas funções são linearmente independentes e sabemos que os sistemas fundamentais para as equações diferenciais de ordem 2 são formados por 2 funções. Qualquer solução y desta equação diferencial pode ser escrita como

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Critério para Sistema Fundamental

Consideremos

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

onde $a_0, \ldots a_n$ e b são funções contínuas num intervalo I, tal que $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$ e $x_0 \in I$.
O conjunto de soluções desta equação, $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, é linearmente independentes em $I \subset \mathbb{R}$, e portanto sistema fundamental se, e somente se, o wronskiano do conjunto destas funções é diferente de zero em $I \subset \mathbb{R}$.

Exemplo

O conjunto de soluções $\{e^{2x}, xe^{2x}, e^{3x}\}$, da equação diferencial

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$$

é linearmente independente em $\mathbb{R}$.

Para verificar a independência linear deste conjunto de soluções é suficiente calcular o wronkskiano destas funções

$$W_{\{e^{2x},xe^{2x},e^{3x}\}}(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{2x} & 4e^{2x}+4xe^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{7x} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 1+2x & 3 \\ 4 & 4+4x & 9 \end{vmatrix} = e^{7x} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = e^{7x}\,;$$

pelo que

$$W_{\{e^{2x},xe^{2x},e^{3x}\}}(x) \neq 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Qualquer sistema fundamental desta equação diferencial é constituído por três funções linearmente independentes pelo que podemos afirmar que o conjunto de soluções $\{e^{2x}, xe^{2x}, e^{3x}\}$, é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$$

A solução geral desta equação diferencial é dada por

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{3x}.$$

Exercícios propostos

1. Considere a equação diferencial

$$y'' - 2y' + 10y = 10x^2 - 4x + 12$$

   i) Verifique que $y_p = x^2 + 1$ é uma solução particular.
   ii) Justifique que o conjunto $\{\phi_1, \phi_2\} = \{e^x \cos 3x, e^x \sin 3x\}$ é um sistema fundamental de soluções.
   iii) Escreva a solução geral desta equação diferencial.

2. Considere a equação diferencial

$$y'' - y = x + 2$$

i) Encontre uma solução particular da forma $y_p = Ax + B$. (Determine A e B)
ii) Justifique que o conjunto $\{\phi_1, \phi_2\} = \{e^x, e^{-x}\}$é um sistema fundamental de soluções.
iii) Escreva a solução geral desta equação diferencial.

3. Considere a equação diferencial

$$y'' + y' - 2y = x^2 + e^{3x}$$

i) Encontre uma solução particular $y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C$, da equação diferencial $y'' + y' - 2y = x^2$.

ii) Encontre uma solução particular $y_{p_2} = Ae^{3x}$, da equação diferencial $y'' + y' - 2y = e^{3x}$.

iii) Justifique que o conjunto $\{\phi_1, \phi_2\} = \{e^x, e^{-2x}\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada.

iv) Escreva a solução geral da equação diferencial $y'' + y' - 2y = x^2 + e^{3x}$.