

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



Relazioni Bilineari di Riemann

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Roberto Paoletti

Candidato:
Marta Balbo
Matricola: 838435

ANNO ACCADEMICO 2023/24

Sommario

Questo elaborato tratta le cosiddette relazioni bilineari di Riemann, che esprimono delle importanti condizioni tra la topologia e la struttura complessa di una superficie di Riemann compatta. Si ricorda che una superficie di Riemann è una varietà topologica 2-dimensionale orientata, sulla quale sia stata scelta una struttura di varietà complessa 1-dimensionale. La struttura topologica della superficie è rispecchiata nell'esistenza di una base canonica dell'omologia, mentre la struttura complessa si riflette nell'esistenza di una decomposizione del primo gruppo di coomologia di de Rham H^1 a coefficienti complessi nella somma diretta degli spazi delle 1-forme olomorfe e di quelle antiolomorfe. Le relazioni bilineari di Riemann esprimono il vincolo tra la struttura topologica e quella complessa attraverso le proprietà dell'accoppiamento di intersezione sulle classi di coomologia. L'accoppiamento di intersezione risulta infatti essere una forma bilineare simplettica su H^1 , rispetto alla quale gli spazi delle 1-forme olomorfe e anti-olomorfe sono sottospazi lagrangiani. Inoltre il prodotto hermitiano associato sulle forme di tipo $(1,0)$ dato da $h(\omega, \mu) = i \cdot (\omega, \bar{\mu})$ è definito positivo.

Nel primo capitolo verranno introdotte e classificate le superfici orientate e compatte. Tali superfici saranno inizialmente semplificate tramite un processo detto triangolazione, e successivamente si introdurranno i concetti di gruppo fondamentale e primo gruppo di omologia di una superficie, che forniscono nuovi strumenti per descrivere la loro forma. Si definirà inoltre l'accoppiamento di intersezione, che descrive la posizione reciproca di due classi di omologia.

Nel secondo capitolo si affronterà la coomologia delle superfici, e in particolare il rapporto che hanno tra loro i gruppi di coomologia di de Rham, enunciando il teorema di dualità di Poincaré e dimostrandolo nel caso del primo gruppo di coomologia. Si definiranno inoltre gli integrali semplici e doppi di forme differenziali, e si dimostreranno alcuni teoremi relativi alle loro proprietà.

Nel terzo capitolo verranno discusse le superfici di Riemann. Si definiranno le 1-forme olomorfe e antiolomorfe, e si analizzeranno le proprietà degli spazi che le contengono, tra cui la decomposizione di H^1 discussa sopra. Si dimostreranno le relazioni bilineari di Riemann, e da queste si dedurranno alcune proprietà della matrice dei periodi di una superficie di Riemann, ossia la matrice che descrive come gli integrali delle forme differenziali olomorfe si comportano lungo gli elementi dell'omologia. Infine, si discuterà il concetto di varietà jacobiana e di mappa di Jacobi di una superficie di Riemann, e il caso particolare di una superficie di genere 1.

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 0 | Introduzione | 3 |
| 1 | Topologia delle superfici | 4 |
| 1.1 | Richiami | 4 |
| 1.2 | Triangolazione | 6 |
| 1.3 | Classificazione di superfici compatte orientabili | 8 |
| 1.4 | Gruppo fondamentale di una superficie | 9 |
| 2 | Coomologia delle superfici | 12 |
| 2.1 | Gruppi di coomologia di de Rham | 12 |
| 2.2 | Dualità di Poincaré | 14 |
| 2.3 | Classi di Thom | 16 |
| 2.4 | Omologia e coomologia di 1-forme | 18 |
| 2.5 | Prodotto esterno e integrali doppi | 21 |
| 3 | Superfici di Riemann e curve algebriche | 24 |
| 3.1 | Superfici di Riemann e mappe analitiche | 24 |
| 3.2 | 1-forme olomorfe e antiolomorfe | 27 |
| 3.3 | Relazioni bilineari di Riemann | 29 |
| 3.4 | Curve ellittiche | 33 |

Capitolo 0

Introduzione

In matematica è comune affrontare uno stesso problema sotto diverse angolazioni, utilizzando concetti legati a diversi campi della matematica.

La geometria è una branca della matematica che studia alcune proprietà dello spazio, come la forma e la dimensione, o la posizione reciproca degli spazi in esame. In particolare, la topologia si occupa di studiare la forma di questi spazi, potendoli "deformare" a piacere, mantenendo però determinate caratteristiche come il numero di "buchi".

La geometria complessa, invece, è un campo che si occupa di studiare le proprietà geometriche di spazi definiti da equazioni complesse. Piuttosto di occuparsi della forma globale degli spazi, si concentra sul comportamento locale delle funzioni complesse su di essi.

Questi due approcci allo studio degli spazi possono essere combinati e sovrapposti, per ottenere informazioni più complete sulla struttura degli spazi in esame.

Per poter approfondire lo studio di oggetti geometrici è quindi necessario costruire delle solide fondamenta sia nel campo della topologia che nella geometria complessa.

Gli oggetti base di cui si occupa la geometria sono le varietà, un concetto che generalizza la nozione di curve e superfici nello spazio. In topologia, le varietà sono definite come spazi che sono localmente simili a uno spazio euclideo.

Una varietà, tuttavia, può essere dotata di una struttura complessa, per poter approfondire alcune sue proprietà attraverso lo studio delle funzioni derivabili in senso complesso. Per costruire tale struttura è sufficiente modificare il sistema di coordinate di una varietà. Una varietà topologica, infatti, viene dotata di un sistema di coordinate locali per semplificarne lo studio. È possibile scegliere tali coordinate in modo che le trasformazioni necessarie per spostarsi da un punto all'altro della superficie siano funzioni derivabili in senso complesso. Se il sistema di coordinate rispetta questa condizione, la varietà possiede allora una struttura complessa.

Nel proseguimento dell'elaborato, si approfondirà la classificazione delle superfici topologiche attraverso l'analisi della loro struttura complessa. In particolare, si tratteranno le superfici di Riemann, analizzandole sia come varietà topologiche 2-dimensionali, sia come varietà complesse 1-dimensionali.

Capitolo 1

Topologia delle superfici

In questo primo capitolo si discuterà il concetto di superficie, in particolare orientata e compatta, e la classificazione delle superfici tramite il processo di triangolazione. Si introdurrà inoltre il gruppo fondamentale, che descrive ulteriori caratteristiche della superficie, e si descriverà il legame tra il gruppo fondamentale e il primo gruppo di omologia.

1.1 Richiami

Si richiamano alcuni concetti relativi agli spazi topologici e alle superfici.

Definizione 1.1. Uno spazio topologico X è **connesso** se non è unione di due insiemi chiusi non vuoti e disgiunti.

Definizione 1.2. Uno spazio topologico X è di **Hausdorff** se

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \exists U_1, U_2 \subset X \text{ aperti disgiunti} \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$$

Dati questi elementi, è possibile definire una superficie.

Definizione 1.3. Una **superficie topologica** X è uno spazio topologico, connesso e di Hausdorff tale che

$$\forall x \in X \quad \exists U(x) \text{ intorno di } x \text{ tale che } U \cong D_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

dove \cong rappresenta la relazione di omeomorfia.

Siano definiti inoltre il concetto di compattezza e di orientazione di una superficie.

Definizione 1.4. Una superficie X è **compatta** se per ogni ricoprimento di aperti di X si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Per definire l'orientazione di una superficie, è necessario considerare il caso generale e richiamare le varietà parametrizzate.

Definizione 1.5. Una k -varietà parametrizzata in \mathbb{R}^d è (A, Φ, Z) tale che:

- $A \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto
- $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ sottoinsieme
- $\Phi : A \rightarrow Z$ diffeomorfismo

Z è detto **luogo geometrico** di (A, Φ, Z) .

Sia ora Z il luogo geometrico di (A, Φ, Z) . Si consideri Z connesso.

Definizione 1.6. Date (A, Φ, Z) e (B, Ψ, Z) due k -varietà parametrizzate in \mathbb{R}^d con lo stesso luogo geometrico Z , si considerino gli aperti A e B in \mathbb{R}^d e i diffeomorfismi $\Phi : A \rightarrow Z$ e $\Psi : B \rightarrow Z$. $\Psi^{-1} \circ \Phi : A \rightarrow B$ è un diffeomorfismo, ed è detto **orientato** se

$$\det J_a(\Psi^{-1} \circ \Phi) > 0 \quad \forall a \in A$$

mentre è detto **antiorientato** se

$$\det J_a(\Psi^{-1} \circ \Phi) < 0 \quad \forall a \in A$$

Sia \sim la relazione di coerente orientazione, definita nel modo seguente:

Definizione 1.7. Siano (A, Φ, Z) , (B, Ψ, Z) due k -varietà parametrizzate in \mathbb{R}^d , con $k \leq d$.

$$(A, \Phi, Z) \sim (B, \Psi, Z)$$

se e solo se $\Psi^{-1} \circ \Phi : A \rightarrow B$ è un omeomorfismo orientato.

Dato che Z è connesso, si nota che \sim ha due classi di equivalenza.

Definizione 1.8. L'**orientazione** di Z è la scelta di una classe di equivalenza $[Z]$.

Si ricordano alcuni concetti relativi alle k -varietà, necessari per definire l'orientazione di una superficie.

Definizione 1.9. Una k -varietà parametrizzata in \mathbb{R}^d è una **ipersuperficie parametrizzata** in \mathbb{R}^d se vale $k = d - 1$.

Definizione 1.10. Un insieme $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ è una **ipersuperficie liscia** se, per ogni punto $p \in Z$, è possibile trovare un intorno aperto $Z' \subseteq Z$ che sia il luogo geometrico di una ipersuperficie parametrizzata (A, Φ, Z') .

Definizione 1.11. Sia $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ una ipersuperficie liscia e (A, Φ, Z') una k -varietà parametrizzata in \mathbb{R}^d , con $Z' \subseteq Z$ aperto. Allora (A, Φ, Z') è detta **carta locale** C^∞ per Z .

Una carta locale è **orientata** se è definita un'orientazione su Z' .

Definizione 1.12. Sia $U = \{(A_j, \Phi_j, Z_j)\}_{j \in J}$ una collezione di carte locali orientate C^∞ per Z , tali che $\{Z_j\}_{j \in J}$ sia un ricoprimento aperto di Z essendo J un insieme arbitrario di indici. Allora U è un **atlante orientato** C^∞ di Z .

Una k -varietà è orientata se ammette un atlante orientato. Essendo una superficie un caso particolare di una k -varietà parametrizzata, è possibile definire l'orientazione di una superficie.

Definizione 1.13. Una superficie X è **orientabile** se ammette un atlante orientato.

1.2 Triangolazione

È stato definito il concetto di superficie compatta orientabile. Lo scopo di questa sezione sarà di costruire un sistema di classificazione di questo sottoinsieme di superfici.

Per costruire questa classificazione, è utile semplificare le superfici in modo tale da ricondurle a poligoni con lati orientati, e successivamente rappresentare tali poligoni attraverso un apposito codice.

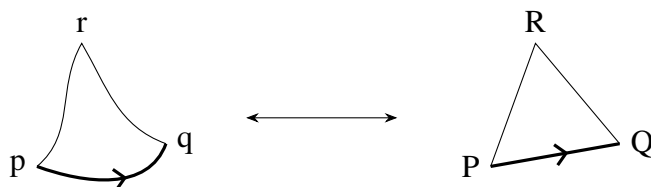
Per ricondurre le superfici a poligoni si segue il seguente processo:

Definizione 1.14. La **triangolazione** di una superficie compatta orientabile X è una famiglia finita di sottoinsiemi di X , dette **facce**, ognuna delle quali omeomorfa a un triangolo chiuso in \mathbb{R}^2 , con tre **bordi** omeomorfi a un segmento di \mathbb{R} e tre **vertici** che sono punti. Inoltre devono valere le seguenti condizioni:

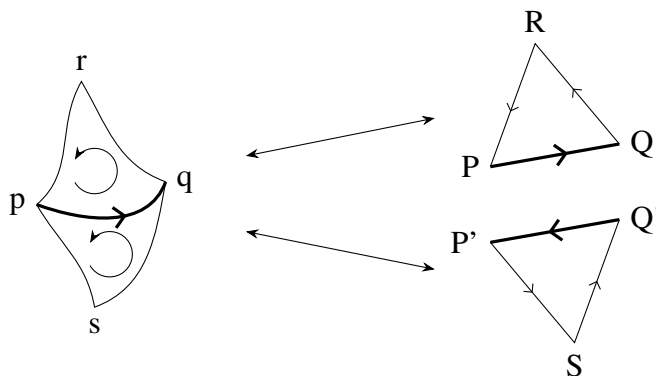
- due bordi possono incontrarsi solo in un vertice
- due facce possono incontrarsi solo in un vertice o lungo un bordo

Se due facce si incontrano lungo un bordo sono dette **adiacenti**.

Per trasformare una faccia di X in un triangolo, si considera l'omomorfismo orientato tra un bordo di X e un lato del triangolo.

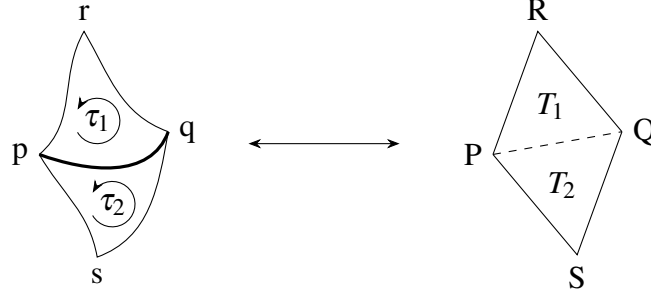


L'orientazione di X determina un'orientazione (per convenzione antioraria) sul bordo di ogni triangolo. Si nota che l'orientazione di due triangoli adiacenti determina due direzioni opposte sul loro bordo in comune.

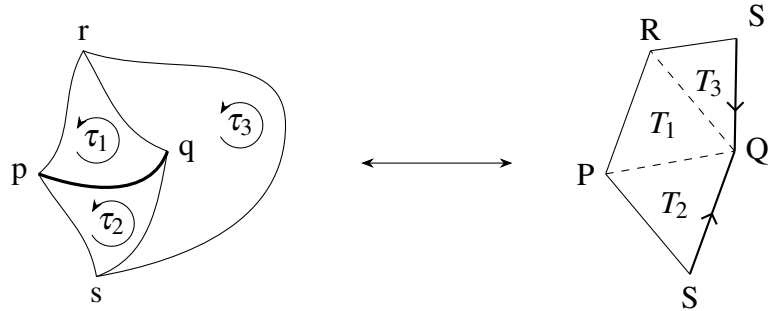


Sia una superficie X divisa in n facce τ_i , portata da un omeomorfismo in un poligono Π_n diviso a sua volta in n triangoli T_i corrispondenti alle facce di X . Si

assume che Π_n sia un poligono convesso, che viene costruito con il procedimento che segue. Si scelga una faccia τ_1 della triangolazione, e un omeomorfismo che porta τ_1 nel triangolo T_1 sul piano. Si consideri l'orientazione di τ_1 antioraria. Si scelga ora una faccia τ_2 adiacente a τ_1 , e si estenda l'omeomorfismo lungo il loro lato in comune, in modo che porti τ_2 nel triangolo T_2 adiacente a T_1 .



Si noti che T_2 deve essere scelto in modo che $\Pi_2 = T_1 \cup T_2$ sia un poligono convesso. L'omeomorfismo esteso porta allora $\tau_1 \cup \tau_2$ in Π_2 . Si scelga ora una faccia τ_3 adiacente a τ_1 o τ_2 , e si estenda l'omeomorfismo lungo il lato in comune tra τ_3 e la faccia adiacente (se è adiacente sia a τ_1 che a τ_2 , si scelga una di queste due facce). Si ottiene così un'omeomorfismo tra una τ_3 e un triangolo T_3 adiacente al lato corrispondente di Π_2 . Si è ottenuto quindi un poligono Π_3 con cinque lati, che si assume essere convesso.



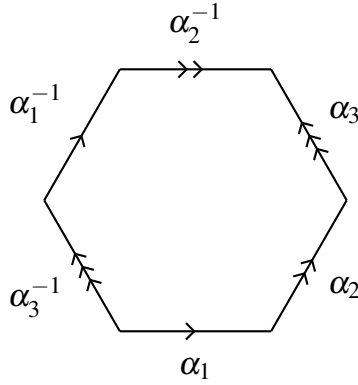
Si osservi che nella figura le frecce sui lati di Π_3 rappresentano l'identificazione operata dall'omeomorfismo. Continuando in questo modo ed esaurendo tutte le facce, si ottiene un poligono Π_n convesso con $n + 2$ lati.

Si noti che ogni lato di Π_n corrisponde a un bordo comune di due facce di X , ed ognuno di questi bordi corrisponde a due lati di Π_n . Quindi i lati di Π_n sono associati a due a due.

Una superficie X con n facce corrisponde a un poligono convesso con $n + 2$ lati. Questa corrispondenza può essere rappresentata da un codice, formato dalla successione di $2m$ simboli presi dall'insieme $\{\alpha_i, \alpha_i^{-1} \mid \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$ di cardinalità $m = \frac{1}{2}(n + 2)$.

Si osservi che il codice è unico a meno di permutazioni cicliche.

Esempio 1.15 (Toro). Il codice $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_3^{-1}$, corrispondente al seguente poligono, rappresenta un toro.



1.3 Classificazione di superfici compatte orientabili

Per semplificare la rappresentazioni delle superfici compatte orientabili tramite il codice si stabiliscono alcune regole:

1. se α e α^{-1} si succedono nel codice, vengono omessi.
2. si assume che tutti i vertici del poligono siano mandati nello stesso punto di X .
3. poiché per la prima regola devo assumere che tra due lati corrispondenti deve essere per forza presente un terzo lato, si assume che il codice abbia il seguente aspetto:

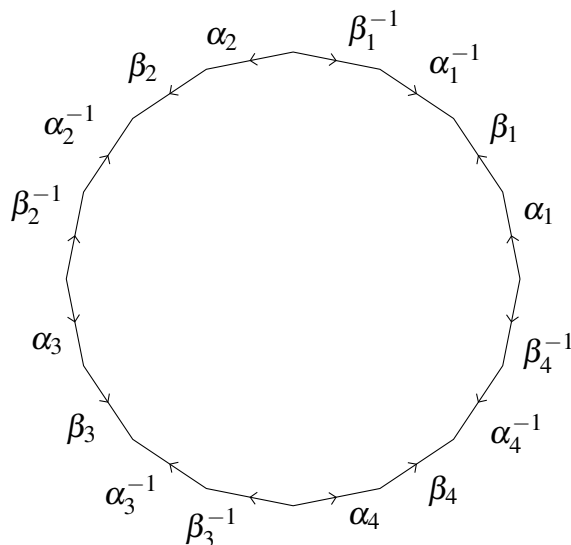
$$\dots \alpha \dots \beta \dots \alpha^{-1} \dots \beta^{-1} \dots$$

Dopo le semplificazioni, il codice che descrive X avrà assunto un aspetto preciso, descritto nel seguente teorema:

Teorema 1.16. *Una superficie compatta orientabile X è rappresentata dal codice*

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_m \beta_m \alpha_m^{-1} \beta_m^{-1}$$

*Quando ha questo aspetto, il codice viene detto essere in **forma normale**.*



Data la forma normale scritta come sopra, e unendo i lati corrispondenti, si ottiene una figura particolare, detta sfera con n maniglie. In generale, vale il seguente teorema:

Teorema 1.17. *Sia X una superficie compatta, orientabile e triangolabile. Allora X è omeomorfa a una sfera con n maniglie, per un certo intero positivo non nullo n .*

È stata fornita quindi la caratterizzazione di una superficie compatta, orientabile e triangolabile.

1.4 Gruppo fondamentale di una superficie

La forma normale di una superficie è utilizzata per calcolare il gruppo fondamentale di una superficie X di genere g rappresentata da un poligono Π con $4g$ lati.

Definizione 1.18. Il **gruppo fondamentale** $\pi_1(X, x)$ di una superficie X è il gruppo delle classi di omotopia di cammini chiusi su X con un punto base x .

Sia X una superficie compatta orientabile, rappresentata in forma normale dal poligono Π , e sia x il punto di X immagine di tutti i vertici del poligono Π . Siano α_i, β_i i cammini in X che sono immagini dei corrispondenti lati in Π .

Si consideri ora il gruppo libero F_{2g} , con i $2g$ generatori $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$.

La definizione di gruppo libero è la seguente:

Definizione 1.19. Un gruppo G è **libero** se esiste un sottoinsieme $S \subseteq G$ tale che ogni elemento di G può essere scritto in modo unico come prodotto di un numero finito di elementi di S e loro inversi.

Si vuole provare ora che esiste un omomorfismo di gruppi tra F_{2g} e il gruppo fondamentale, che porti i generatori a_i e b_i nei cammini α_i e β_i rispettivamente, con

i che varia tra 1 e g .

Sia

$$c_g = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

l'elemento di F_{2g} che, tramite l'omomorfismo, corrisponde all'identità di $\pi_1(X, x)$. Infatti, il cammino

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$$

è omotopo al cammino costante su x , poiché il cammino corrispondente sul poligono Π è omotopo a un cammino costante (poiché inizia da x e finisce in x). Comporre questa omotopia con la mappa continua che porta X e Π dà luogo a un'omotopia su X .

Sia ora N_g il più piccolo sottogruppo normale di F_{2g} contenente c_g , cioè il sottogruppo di F_{2g} generato da tutti gli elementi di forma $u \cdot c_g \cdot u^{-1}$, con $u \in F_{2g}$. Si nota che questi elementi corrispondono all'elemento nullo dell'omomorfismo tra F_{2g} e $\pi_1(X, x)$, rendendone N_g il nucleo.

Si ha quindi l'omomorfismo

$$F_{2g}/N_g \rightarrow \pi_1(X, x)$$

da cui segue il teorema

Teorema 1.20. *L'omomorfismo $F_{2g}/N_g \rightarrow \pi_1(X, x)$ è un isomorfismo di gruppi.*

Da questo, si osserva che è possibile collegare il concetto di gruppi di omologia al gruppo fondamentale. Si ricordi che il primo gruppo di omologia $H_1 X$ è definito come gruppo quoziente del gruppo di 1-catene rispetto al gruppo di 1-bordi.

Definizione 1.21. Una **1-catena** in X è una curva

$$\gamma = n_1 \gamma_1 + \dots + n_r \gamma_r$$

dove γ_i sono cammini continui su X , e n_i sono numeri interi. L'insieme $Z_1(X)$ è il gruppo delle 1-catene chiuse in X .

Definizione 1.22. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un cammino e $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione continua. Un **1-bordo** in X ha la forma seguente:

- $\gamma - \gamma \circ \psi$ se $\psi(0) = 0$ e $\psi(1) = 1$
- $\gamma + \gamma \circ \psi$ se $\psi(0) = 1$ e $\psi(1) = 0$

L'insieme $B_1(X) \subseteq Z_1(X)$ è il gruppo dei 1-bordi in X .

Si definisce ora il primo gruppo di omologia:

Definizione 1.23. Il **primo gruppo di omologia** è il gruppo quoziente $H_1 X = Z_1(X)/B_1(X)$.

Vale quindi il teorema:

Teorema 1.24. *Il primo gruppo di omologia $H_1 X$ è un gruppo abeliano libero di rango $2g$ con base l'immagine dei cammini $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$.*

Poiché il rango di un gruppo abeliano libero dipende solo dalla topologia di X , anche g dipende solo da essa. Il numero g è detto **genere** della superficie X . Intuitivamente, il genere di una superficie indica il numero più grande di curve chiuse disgiunte che è possibile disegnare sulla superficie, senza che essa venga separata in due componenti connesse distinte.

Inoltre si osserva che, per ogni X superficie triangolabile, vale l'uguaglianza

$$v - l + f = 2 - 2g$$

con v il numero di vertici, l il numero di lati e f il numero di facce di una qualsiasi triangolazione della superficie.

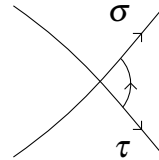
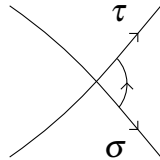
Sul primo gruppo di omologia è possibile definire la seguente operazione:

Definizione 1.25. Sia X una superficie compatta orientata. Si definisce **accoppiamento di intersezione** la mappa

$$H_1 X \times H_1 X \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\sigma, \tau) \mapsto \langle \sigma, \tau \rangle$$

che associa un numero intero a due classi di omologia. Le due classi sono rappresentate da due cammini chiusi orientati, che si intersecano trasversalmente un numero finito di volte. Il numero $\langle \sigma, \tau \rangle$ è uguale alla somma di $+1$ e -1 che vengono assegnati a ogni punto di intersezione, rispettivamente se la direzione da σ a τ è in senso orario o antiorario.



Si osserva che questa definizione si può applicare solo nel caso in cui X è una superficie orientata.

Capitolo 2

Coomologia delle superfici

In questo capitolo si introdurranno i gruppi di coomologia di de Rham, in particolare quelli a supporto compatto, e le relative operazioni di tirato indietro sulla coomologia. Sul primo gruppo di coomologia si dimostrerà la dualità di Poincaré, e si definirà una particolare classe di coomologia, detta classe di Thom. Inoltre, verranno enunciati alcuni teoremi sugli integrali di 1-forme e 2-forme su cammini chiusi.

2.1 Gruppi di coomologia di de Rham

Si introducano ora i gruppi di coomologia, e si studino alcune operazioni che è possibile definire su di essi.

Sia ω una k -forma differenziale su una superficie $X \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\Omega^k(X)$ l'insieme di queste k -forme.

Definizione 2.1. Una k -forma ω è **chiusa** se

$$d\omega = 0$$

L'insieme delle k -forme differenziali chiuse è indicato con $Z^k(X)$.

Definizione 2.2. Una k -forma ω è **esatta** se

$$\exists \mu \in \Omega^{k-1}(X) \quad \text{tale che} \quad \omega = d\mu$$

L'insieme delle k -forme differenziali esatte è indicato con $B^k(X)$.

Poiché vale $B^k(X) \subseteq Z^k(X)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, è possibile introdurre i gruppi di coomologia.

Definizione 2.3. Data X una superficie, si definisce **k -esimo gruppo di coomologia di de Rham** il gruppo quoziente

$$H^k(X) = Z^k(X)/B^k(X)$$

Data $\omega \in Z^k(X)$, sia $[\omega]$ l'immagine di ω nello spazio quoziente $H^k(X)$. $[\omega]$ viene detta **classe di coomologia** di ω .

Inoltre si nota che, nel caso di una superficie compatta, il k -esimo gruppo di coomologia di de Rham è isomorfo al k -esimo gruppo a supporto compatto. Si richiama la definizione di supporto di una forma:

Definizione 2.4. Si definisce **supporto** di una k -forma $\omega \in \Omega(X)^k$ definita su $X \subseteq \mathbb{R}^d$ l'insieme

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid \omega(x) \neq 0\}}$$

Una k -forma è **a supporto compatto** se il suo supporto è compatto.

Definizione 2.5. Data X una superficie, si definisce **k -esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporto compatto** il gruppo quoziente

$$H_c^k(X) = Z_c^k(X) / B_c^k(X)$$

dove gli insiemi $Z_c^k(X)$ e $B_c^k(X)$ sono così definiti:

$$Z_c^k(X) = \{\omega \in \Omega_c^k(X) \mid d\omega = 0\}$$

$$B_c^k(X) = d(\omega \in \Omega_c^{k-1}(X)) \subseteq \Omega_c^k(X)$$

Si osservi che la definizione di classe di coomologia $[\omega]$ è equivalente su $H_c^k(X)$.

Si definisca ora l'operazione di tirato indietro sulla coomologia. Siano X e Y varietà e sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa C^∞ . Sia f^* l'operazione di tirato indietro sulle forme. Presa $\omega \in \Omega^k(Y)$, vale $df^*\omega = f^*d\omega$. Quindi se ω è chiusa, anche $f^*\omega$ lo è. Sia inoltre $\omega = d\mu$. Vale $f^*\omega = df^*\mu$, quindi se ω è esatta, allora anche $f^*\omega$ lo è. Di conseguenza, è possibile scrivere le mappe

$$f^* : Z^k(Y) \rightarrow Z^k(X)$$

$$f^* : B^k(Y) \rightarrow B^k(X)$$

Data la proiezione

$$\pi : Z^k(X) \rightarrow Z^k(X) / B^k(X)$$

e considerando la sua composizione con $f^* : Z^k(Y) \rightarrow Z^k(X)$, si ottiene una mappa lineare tra $Z^k(Y)$ e $H^k(X)$. Si nota che $B^k(Y)$ è nel nucleo di questa mappa, ed è possibile applicare il seguente teorema

Teorema 2.6. Sia $A : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Dato $W \subset \ker(A)$ esiste ed è unica una mappa $B : V/W \rightarrow U$ per cui vale $A = B \circ \pi$, con $\pi : V \rightarrow V/W$ mappa quoziente.

Si ottiene quindi la mappa

$$f^\# : H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$$

tale che $f^\# \circ \pi = f^*$. Si è così ottenuto un'operazione di tirato indietro sulla coomologia.

Un modo equivalente di definire questa operazione è definire $f^\#$ che abbia la proprietà

$$f^\#[\omega] = [f^* \omega]$$

Si osservi che questa costruzione è identica per i gruppi di coomologia a supporto compatto. Si ottiene infatti la mappa

$$f^\# : H_c^k(Y) \rightarrow H_c^k(X)$$

definita come sopra.

2.2 Dualità di Poincaré

In questa sezione sarà approfondito il rapporto tra i gruppi di coomologia $H^k(X)$ e i gruppi di coomologia a supporto compatto $H_c^k(X)$. Nelle seguenti due sezioni X sarà una k -varietà connessa e orientata.

Dati V e W due spazi vettoriali finiti, si inizia introducendo l'accoppiamento bilineare su V e W

$$B : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

Questa mappa è lineare su ogni suo componente, quindi la mappa, dato $\omega \in W$ fissato

$$\ell_\omega : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto B(v, \omega)$$

è lineare.

Da qui si ottiene la mappa

$$L_B : W \rightarrow V^*, \omega \mapsto \ell_\omega$$

con V^* spazio duale dello spazio vettoriale V . È facile dimostrare che L_B è lineare. Infatti, vale $L_B(\omega_1 + \omega_2)(v) = \ell_{\omega_1 + \omega_2}(v) = B(v, \omega_1 + \omega_2) = B(v, \omega_1) + B(v, \omega_2) = \ell_{\omega_1}(v) + \ell_{\omega_2}(v) = L_B(\omega_1)(v) + L_B(\omega_2)(v)$.

Definizione 2.7. La mappa bilineare B è **non singolare** se $L_B : W \rightarrow V^*$ è biiettiva.

Si osserva che, nella definizione, è possibile invertire i ruoli degli spazi V e W . Si osservi inoltre che, definita $B^\#(\omega, v) = B(v, \omega)$, si ottiene una mappa analoga a quella precedente, ma con i ruoli di V e W invertiti. Fissato $v \in V$

$$\ell_v : W \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto B(v, \omega) = B^\#(\omega, v)$$

è lineare. Si ottiene quindi

$$L_{B^\#} : V \rightarrow W^*, v \mapsto \ell_v$$

Osservo che vale

$$(L_{B^\#}(v))(\omega) = \ell_v(\omega) = B(v, \omega) = \ell_\omega(v) = (L_B(\omega))(v)$$

Per scrivere questa uguaglianza in un'altra forma, è necessaria la mappa canonica tra V e $(V^*)^*$

$$\mu : V \rightarrow (V^*)^*$$

definita da

$$\mu(v)(\ell) = \ell(v)$$

con $v \in V$ e $\ell \in V^*$. Quindi, l'uguaglianza può essere riscritta

$$L_{B^\#} = L_B^* \mu$$

Si osservi che L_B è biettiva se e solo se lo è anche $L_{B^\#}$. É ora possibile applicare queste nozioni alla teoria di de Rham. Si consideri X una n -varietà connessa e orientata, dotata di una topologia finita.

Definizione 2.8. Una superficie X ha **topologia finita** se ammette un ricoprimento formato dagli aperti U_1, \dots, U_n , con $n \in \mathbb{N}$, tale che l'intersezione di un numero qualsiasi di aperti è vuota oppure diffeomorfa a un sottoinsieme convesso aperto di \mathbb{R}^n .

Poiché la topologia su X è finita, i gruppi di coomologia di de Rham su X sono finito-dimensionali. Si considerano ora i gruppi $H^k(X)$ e $H_c^{n-k}(X)$, e si dimostra che esiste una mappa bilineare tra di essi, e quindi che esiste anche una mappa lineare tra $H^k(X)$ e lo spazio duale di $H_c^{n-k}(X)$.

Per costruire la mappa, siano $c_1 \in H_c^{n-k}(X)$ e $c_2 \in H^k(X)$, e si definisca la mappa bilineare B nel modo seguente:

$$B(c_1, c_2) = \int_X \omega_1 \wedge \omega_2$$

dove $\omega_1 \in \Omega_c^{n-k}(X)$ e $\omega_2 \in \Omega^k(X)$ sono le forme chiuse che rappresentano rispettivamente le classi di coomologia c_1 e c_2 .

É possibile ora verificare che la mappa B è non singolare, almeno in un particolare caso.

Proposizione 2.9. *Se X è diffeomorfa a \mathbb{R}^n , la mappa B definita come sopra è non singolare.*

Dimostrazione. Per ipotesi X è diffeomorfo a \mathbb{R}^n , quindi si considerano gli spazi $H^k(\mathbb{R}^n)$ e $H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. Poiché questi spazi contengono solo lo zero se $k \neq 0$, rimane solo da provare che la mappa

$$H_c^n(X) \times H^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

è non singolare. Ogni n -forma in $H_c^n(X)$ è chiusa, e le 0-forme chiuse sono costanti, quindi la mappa B in questo caso è

$$Z^n(X) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, c) \mapsto c \int_X \omega$$

Questa mappa ha immagine nulla solo se $c = 0$, oppure se $\omega \in dZ_c^{n-1}(X)$. Quindi la mappa è non singolare. \square

É possibile generalizzare questa proposizione nel seguente teorema:

Teorema 2.10. (*Dualità di Poincaré*) Sia X una n -varietà connessa e orientata, dotata di topologia finita. Sia B la mappa

$$B(c_1, c_2) = \int_X \omega_1 \wedge \omega_2$$

con $c_1 \in H_c^{n-k}(X)$ e $c_2 \in H^k(X)$, e con $\omega_1 \in \Omega_c^{n-k}(X)$ e $\omega_2 \in \Omega^k(X)$ forme chiuse rappresentanti rispettivamente delle classi di coomologia c_1 e c_2 . Allora B è non singolare.

Equivalentemente, vale

$$H^k(X) \cong H_c^{n-k}(X)^*$$

dove $H_c^{n-k}(X)^*$ è il duale di $H_c^{n-k}(X)$.

2.3 Classi di Thom

La mappa B , definita come nella sezione precedente, è non singolare per la dualità di Poincaré. Quindi è possibile costruire le seguenti mappe lineari e biietive

$$L_B : H_c^{n-k}(X) \rightarrow H^k(X)^*$$

$$L_B^* : H^{n-k}(X) \rightarrow H_c^k(X)^*$$

Si scelga una funzione lineare $\ell : H^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$. poiché vale $\ell \in H^k(X)^*$, è possibile considerare la classe di coomologia

$$L_B^{-1}(\ell) \in H_c^{n-k}(X)$$

Analogamente, sia $\ell_c : H_c^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare. Come sopra, è possibile considerare la classe di coomologia

$$L_B^{*-1}(\ell_c) \in H^{n-k}(X)$$

Si consideri ora una particolare funzione ℓ , detta ℓ_Y , definita attraverso il seguente processo. Presa X la n -varietà orientata considerata all'inizio, sia Y una k -sottovarietà di X orientata e chiusa. É definita l'operazione di integrazione su $H_c^k(X)$, poiché Y è orientata:

$$I_Y = \int_Y : H_c^k(Y) \rightarrow \mathbb{R}$$

Inoltre, poiché Y è chiusa l'operazione di inclusione in X è propria, e si ottiene con un'operazione di tirato indietro sulla coomologia

$$\iota_Y^\# : H_c^k(X) \rightarrow H_c^k(Y)$$

Componendo queste due funzioni ottengo una mappa lineare tra $H_c^k(X)$ e \mathbb{R} :

$$\ell_Y = I_Y \circ \iota_Y^\# : H_c^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

É possibile definire ora la classe di Thom di una varietà.

Definizione 2.11. La classe di coomologia

$$T_Y = L_B^{-1}(\ell_Y) \in H_c^{k-n}(X)$$

associata a ℓ_Y è detta **classe di Thom** della varietà Y .

Si osservi che T_Y ha la proprietà

$$B(T_Y, c) = I_Y(\iota_Y^\# c)$$

con $c \in H_c^k(X)$.

Questa proprietà può essere riscritta in termini di forme. Sia infatti $\tau_Y \in \Omega_c^{n-k}(X)$ la forma chiusa che rappresenta T_Y . Se si considera $c = [\omega]$ allora la formula precedente può essere riscritta nel modo seguente:

$$\int_X \tau_Y \wedge \omega = \int_Y \iota_Y^* \omega$$

Definizione 2.12. Una forma chiusa τ_Y dotata della proprietà appena definita è detta **forma di Thom** di Y .

Questo ragionamento può essere fatto anche per i gruppi di coomologia a supporto compatto. Infatti, supponendo Y compatto, dall'inclusione si ottiene la mappa

$$\iota_Y^\# : H^k(X) \rightarrow H^k(Y)$$

mentre l'integrazione è definita perché Y è compatto

$$I_Y = \int_Y : H^k(Y) \rightarrow \mathbb{R}$$

La composizione di queste due operazioni è la mappa

$$\ell_Y : H^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

A questa mappa corrisponde la classe di coomologia

$$T_Y = L_B^{-1}(\ell_Y) \in H_c^{n-k}(X)$$

Inoltre, anche questa formula può essere riscritta in termini di forme. Se $\tau_Y \in \Omega_c^{n-k}(X)$ è una forma chiusa che rappresenta la classe di coomologia T_Y , allora vale

$$\int_X \tau_Y \wedge \omega = \int_Y \iota_Y^* \omega$$

con $\omega \in \Omega^{n-k}(X)$ forma chiusa. Si osservi che in questa formula la forma ω deve essere chiusa, mentre nel caso precedente deve essere chiusa e a supporto compatto. Si osservi inoltre che la scelta di τ_Y non è univoca. Infatti, scelta una forma esatta $\mu \in d\Omega^{n-k-1}(X)$, la forma $\tau_Y + \mu$ è un rappresentante della classe di coomologia T_Y . Perché sia vero anche nel caso dei gruppi di coomologia a supporto compatto è sufficiente scegliere μ in $d\Omega_c^{n-k-1}$. Da questo fatto segue il teorema

Teorema 2.13. *Dato un intorno U di Y in X , allora esiste una forma chiusa $\tau_Y \in \Omega_c^{n-k}(U)$ per cui vale la proprietà*

$$\int_U \tau_Y \wedge \omega = \int_Y \iota_Y^* \omega$$

per ogni forma chiusa $\omega \in \Omega^k(X)$.

Da questo risultato si deduce che una forma di Thom τ_Y può essere definita su un intorno arbitrariamente piccolo di Y .

2.4 Omologia e coomologia di 1-forme

Si consideri ora $\omega \in Z^1(X)$, dove X è una superficie compatta orientata.

Dato un cammino γ qualsiasi è possibile fornire una definizione di integrale su questo cammino:

Definizione 2.14. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ una curva continua e si considerino i punti $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$, scelti in modo che $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ sia contenuto in un certo insieme aperto U_i su cui vale $\omega = df_i$, essendo f_i una certa funzione C^∞ . L'integrale di ω su γ è

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t_i)) - f_i(\gamma(t_{i-1}))$$

Si osservi inoltre che questa scrittura è indipendente dalla scelta del cammino γ e dagli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$.

Si ricorda la funzione L_B definita nella sezione precedente, e la si considera nel caso del primo gruppo di coomologia:

$$L_B : H^1 X \rightarrow \text{Hom}(H_1 X, \mathbb{R})$$

$$[\omega] \mapsto \{ [\gamma] \mapsto \int_\gamma \omega \}$$

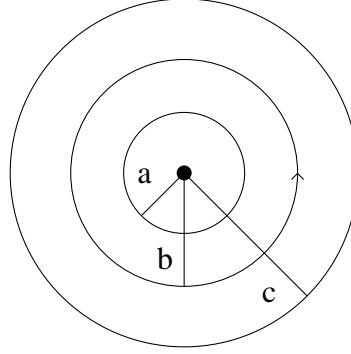
Si osservi che in questo caso si è scelta una particolare funzione $\ell : H^1 X \rightarrow \mathbb{R}$, definita come

$$[\gamma] \mapsto \int_\gamma \omega$$

e quindi la classe di Thom relativa a γ è la classe $[\omega]$.

È possibile provare il lemma di Poincaré per il primo gruppo di coomologia, mostrando che la funzione L_B è un isomorfismo. Per farlo, è necessario costruire una base di $H^1 X$. Data la forma normale della superficie X , si consideri una base di $H_1 X$ formata dai cammini chiusi $a_1, b_1 \dots a_g, b_g$. Per ogni a_i si costruirà una 1-forma chiusa α_i , e per ogni b_i una 1-forma chiusa β_i e si mostrerà che queste 1-forme costituiscono una base per $H^1 X$, e inoltre che le classi $[\alpha_i]$ e $[\beta_i]$ dipendano solo dalle classi di omologia $[a_i]$ e $[b_i]$.

Per ogni curva chiusa a_i e b_i è possibile scegliere un insieme aperto V che la contiene, e che sia diffeomorfo a una corona circolare $U = \{(x, y) : a^2 < x^2 + y^2 < c^2\}$, in modo che la curva corrisponda a un cammino circolare di raggio b , per un certo $b \in (a, c)$.



Gli insiemi V così definiti siano disgiunti, eccetto gli insiemi che contengono a_i e b_i , la cui intersezione sarà diffeomorfa a un rettangolo aperto. Si consideri una curva chiusa, a_i o b_i , e sia

$$\phi : V \rightarrow U$$

un diffeomorfismo fissato. È possibile costruire ora una funzione C^∞ tale che:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 + y^2 \geq (c - \varepsilon)^2 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \leq (a + \varepsilon)^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

con ε compreso tra 0 e $\frac{c-a}{2}$.

La funzione $\psi \circ \phi$ è una funzione C^∞ su V che è costante su un intorno di ∂V , quindi l'1-forma $d(\psi \circ \phi)$ è nulla su tale intorno. Si definisce quindi una 1-forma C^∞ su tutto X che vale $d(\psi \circ \phi)$ su V , ed è nulla altrove. Questa è ovviamente una forma chiusa, ma non è esatta su X (mentre lo è la sua restrizione su V).

Queste 1-forme costituiscono la base di $H^1 X$ ricercata, e vengono denotate con α_i se il cammino considerato è a_i , e β_i se il cammino è b_i . Prima di dimostrare che

$$H^1 X \rightarrow \text{Hom}(H_1 X, \mathbb{R})$$

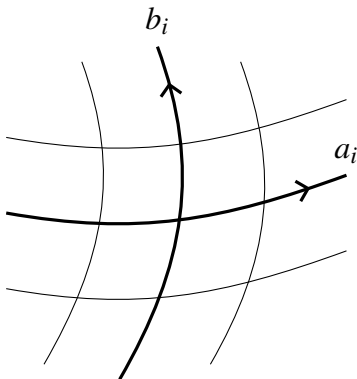
è un isomorfismo, si introduce il seguente lemma:

Lemma 2.16. *Le forme α_i e β_i definite come sopra hanno le seguenti proprietà:*

1. $\int_{b_j} \beta_i = 0$ per ogni $i \neq j$, e $\int_{a_j} \beta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$
2. $\int_{a_j} \alpha_i = 0$ per ogni $i \neq j$, e $\int_{b_j} \alpha_i = \begin{cases} -1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Dimostrazione. Le asserzioni che riguardano gli integrali nulli hanno una dimostrazione ovvia. Infatti, sono integrali di 1-forme su un cammino chiuso, e tali 1-forme sono esatte su un intorno di questi cammini.

Si consideri l'integrale $\int_{a_i} \beta_i$. Il cammino a_i viene diviso in due parti, una interna alla corona circolare U e una esterna.



Considerando la parte di a_i interna a U , β_i è il differenziale di una funzione che vale 0 nel punto iniziale del cammino e vale 1 nel punto finale. Quindi l'integrale di β_i sulla prima parte di a_i vale 1. Sulla seconda parte, invece, β_i è nulla, e quindi lo è anche il suo integrale. Ciò prova che

$$\int_{a_i} \beta_i = 1 + 0 = 1$$

La dimostrazione per $\int_{b_i} \alpha_i$ è analoga. In questo caso la funzione vale 1 nel punto iniziale del cammino e 0 nel punto finale, quindi l'integrale è

$$\int_{b_i} \alpha_i = -1 + 0 = -1$$

□

É possibile dimostrare ora il seguente teorema:

Teorema 2.17. 1. $H^1 X \rightarrow \text{Hom}(H_1 X, \mathbb{R})$ è un isomorfismo.

2. Le classi delle 1-forme $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ formano una base di $H^1 X$.

Dimostrazione. Si consideri una 1-forma chiusa ω e una curva chiusa γ . Allora vale $\int_{\gamma} \omega = 0$. Quindi è possibile definire una funzione f su X , fissando un punto P_0 e definendo

$$f(P) = \int_{\gamma} \omega$$

dove γ è il cammino da P_0 a P . É una funzione ben definita per costruzione, e si può calcolare che vale $d\omega = f$. Questo dimostra che la mappa $H^1 X \rightarrow \text{Hom}(H_1 X, \mathbb{R})$ è iniettiva. Per dimostrare che la mappa è suriettiva, è sufficiente osservare che un omomorfismo $h : H_1 X \rightarrow \mathbb{R}$ è determinato dai valori che assume su una base di $H_1 X$.

Siano quindi $h([a_j]) = r_j$ e $h([b_j]) = s_j$, con $r_j, s_j \in \mathbb{R}$, e $j \in \{1, \dots, g\}$. Si consideri ora la 1-forma chiusa

$$\omega = \sum_{i=1}^g (r_i \beta_i - s_i \alpha_i)$$

Per il lemma precedente, vale

$$\int_{a_j} \omega = r_j \quad \text{e} \quad \int_{b_j} \omega = s_j$$

Quindi la mappa manda ω in h , e perciò è suriettiva. \square

Si osservi in particolare che le classi $[\alpha_i]$ e $[\beta_i]$ che rappresentano le forme in $H^1 X$ sono indipendenti dalla loro costruzione, e dipendono unicamente dalla scelta della base $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ di $H_1 X$.

2.5 Prodotto esterno e integrali doppi

Si consideri la superficie compatta orientata X , e le 1-forme ω e μ su X .

Si ricordi la definizione di prodotto esterno di 1-forme:

Definizione 2.18. Sia $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$ un atlante di carte su X . Siano ω_α e μ_α collezioni di 1-forme su U_α , tali che le carte locali

$$\phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : U_{\beta\alpha} \rightarrow U_{\alpha\beta}$$

hanno la seguente proprietà:

$$\omega_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = (\phi_{\beta\alpha})^*(\omega_\beta|_{U_{\beta\alpha}})$$

Queste collezioni definiscono rispettivamente le 1-forme ω e μ su X . Si definiscono $\omega_\alpha = f dx + g dy$ e $\mu_\alpha = h dx + k dy$, con $f, g, h, k \in C^\infty(U_\alpha)$.

Allora il **prodotto esterno** $\omega \wedge \mu$ è la 2-forma su X definita tramite la collezione di 2-forme $\omega_\alpha \wedge \mu_\alpha$ su U_α , con

$$\omega_\alpha \wedge \mu_\alpha = (f dx + g dy) \wedge (h dx + k dy) = (fk - gh) dx dy$$

Si definisce quindi l'operazione

$$(\omega, \mu) = \iint_X \omega \wedge \mu$$

Dalla definizione di prodotto esterno, seguono alcune proprietà:

1. $(r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2, \mu) = r_1 (\omega_1, \mu) + r_2 (\omega_2, \mu)$ con ω_1, ω_2, μ 1-forme e $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$
2. $(\omega, \mu) = -(\mu, \omega)$ con ω, μ 1-forme
3. $(df, \mu) = 0$ con f funzione e μ 1-forma chiusa

Per le prime due proprietà l'operazione (ω, μ) è bilineare. Infatti, da (1) segue che è lineare sul primo fattore, mentre utilizzando (2) si prova che è lineare anche sul secondo. La condizione (2) prova che è antisimmetrica. Le condizioni (2) e (3) provano inoltre che vale $(\omega, \mu) = 0$ se una delle due 1-forme è esatta.

È quindi possibile definire una mappa

$$H^1 X \times H^1 X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[\omega] \times [\mu] \mapsto (\omega, \mu) = \iint_X \omega \wedge \mu$$

In particolare, è indipendente dalla scelta delle 1-forme nella classe di equivalenza, poiché l'integrale si annulla se una delle due 1-forme è esatta.

Si applichi ora questa operazione alle 1-forme α_i e β_i definite in precedenza.

Lemma 2.19. *Siano α_i e β_i come definite nella sezione precedente. Allora vale*

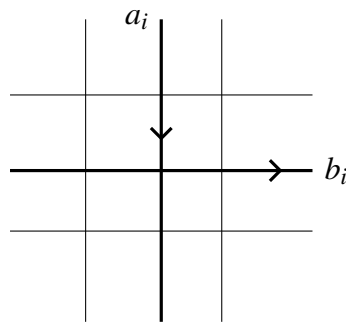
$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \quad e \quad (\beta_i, \beta_j) = 0 \quad \forall i, j$$

$$(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Dimostrazione. Le prime due affermazioni sono vere, poiché le 2-forme $\alpha_i \wedge \alpha_j$ e $\beta_i \wedge \beta_j$ sono nulle. Infatti, nel caso in cui $i \neq j$, in ogni punto di X almeno una delle due forme è nulla, e quindi anche il prodotto esterno è nullo. Se $i = j$, invece, il prodotto esterno di una forma per se stessa è sempre nullo.

Analogamente, vale $(\alpha_i, \beta_j) = 0$ se $i \neq j$, poiché almeno una delle due forme si annulla sempre.

Rimane solo da dimostrare $(\alpha_i, \beta_i) = 1$. Si osservi che $\alpha_i \wedge \beta_i$ si annulla nella regione di piano dove si intersecano le due corone circolari che contengono le due curve a_i e b_i . Questa regione è diffeomorfa a un rettangolo, diviso in quattro parti dall'intersezione delle due curve.



Su questo rettangolo, detto R , si scelgano le funzioni f_i e g_i , definite nel modo seguente: f_i valga 0 sulla parte destra del rettangolo e 1 sulla parte sinistra, e g_i valga 0 sulla parte superiore del rettangolo e 1 sulla parte inferiore. Allora vale

$$\iint_X \alpha_i \wedge \beta_i = \iint_R df_i \wedge dg_i = \iint_R d(f_i \cdot dg_i) = \int_{\partial R} f_i \cdot dg_i$$

Nell'ultimo passaggio si applica dal teorema di Green al rettangolo R . Si osservi ora che dg_i si annulla sul bordo superiore e inferiore di R , allora $f_i \circ dg_i$ si annulla su tutti i lati di R , tranne sul lato verticale sinistro, detto γ_4 , dove vale dg_i . Vale quindi

$$\int_{\partial R} f_i \cdot dg_i = - \int_{\gamma_4} dg_i = -(g_i(\gamma_4(1))) - g_i(\gamma_4(0)) = -0 - (-1) = 1$$

che dimostra la tesi. \square

Inoltre si provano i seguenti teoremi:

Teorema 2.20. *Per ogni mappa lineare $\phi : H^1 X \rightarrow \mathbb{R}$ esiste un unico $\omega \in H^1 X$ tale che $\phi(\mu) = (\omega, \mu)$ per ogni $\mu \in H^1 X$.*

Corollario 2.21. *Per ogni $\gamma \in H_1 X$ esiste un'unica classe $\omega_\gamma \in H^1 X$ tale che valga $\int_\gamma \mu = \iint_X \omega_\gamma \wedge \mu$ per ogni $\mu \in H^1 X$.*

Tramite il corollario è possibile definire l'accoppiamento di intersezione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito alla fine della prima sezione. Siano σ e τ due classi di omologia in $H_1 X$, e siano ω_σ e ω_τ le classi fornite dal corollario. Sia allora

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \iint_X \omega_\sigma \wedge \omega_\tau = \int_\sigma \omega_\tau = - \iint_X \omega_\tau \wedge \omega_\sigma = - \int_\tau \omega_\sigma$$

Vale allora la proposizione:

Teorema 2.22. *1. L'accoppiamento di intersezione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è una mappa bilineare antisimmetrica su $H_1 X$*

2. Data $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ base di $H_1 X$, vale

$$\langle a_i, a_j \rangle = \langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad \forall i, j$$

$$\langle a_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

3. Il numero $\langle \sigma, \tau \rangle$ è un intero.

4. Per ogni $\sigma \in H_1 X$ la mappa

$$H_1 X \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\tau \mapsto \langle \sigma, \tau \rangle$$

è un omomorfismo, ed ogni omomorfismo tra questi due spazi è dato da un unico $\sigma \in H_1 X$.

Capitolo 3

Superfici di Riemann e curve algebriche

In quest'ultimo capitolo verranno discusse un tipo particolare di superfici, le superfici di Riemann, e si considereranno le funzioni analitiche definite su di esse. Si enuncerà il teorema di Riemann-Hurwitz, che lega il genere di due superfici di Riemann tra le quali è definita una funzione analitica. Si definiranno inoltre una particolare categoria di 1-forme, dette 1-forme olomorfe e 1-forme antiolomorfe. Si dimostreranno le relazioni bilineari di Riemann, relative agli integrali sulle 1-forme olomorfe. A partire da un corollario di questo teorema, si definiranno la matrice dei periodi e lo Jacobiano di una superficie di Riemann e si discuteranno alcune loro proprietà. Si concluderà descrivendo le superfici di Riemann associate a curve ellittiche.

3.1 Superfici di Riemann e mappe analitiche

Definizione 3.1. Una superficie X è detta **superficie di Riemann** se è una superficie connessa dotata di un atlante di carte locali $\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{C} \rightarrow X$ tali che le mappe $\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \subset U_\alpha \rightarrow U_{\beta\alpha} \subset U_\beta$ sono analitiche.

Si ricorda la definizione di funzione analitica:

Definizione 3.2. Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, con U insieme aperto in \mathbb{C} , è **analitica** se

$$\forall z_0 \in U \quad \exists \text{ intorno aperto } U \text{ di } z_0 \text{ t.c. } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in U$$

Si osserva inoltre che ogni superficie di Riemann X possiede una orientazione naturale indotta dall'atlante.

Esempio 3.3. 1. L'insieme \mathbb{C} è una superficie di Riemann, con la carta locale $\psi_\alpha = id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

2. Ogni sottoinsieme aperto di una superficie di Riemann è una superficie di Riemann.

Si introduce ora la funzione analitica definita su una superficie di Riemann.

Definizione 3.4. Sia X una superficie di Riemann. La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è **analitica**, o **olomorfa**, se, per ogni $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$, la funzione composta $f \circ \psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica. Più in generale, siano X e Y superfici di Riemann. La funzione $f : X \rightarrow Y$ è **analitica**, o **olomorfa**, nel punto $P \in X$ se esistono le carte locali $\phi : U \rightarrow U(P) \subset X$ e $\psi : V \rightarrow U(f(P)) \subset Y$, in modo che valga $f(\phi(U)) \subset \psi(V)$, e che la funzione composta $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : U \rightarrow V$ sia una funzione analitica.

Si osservi che la definizione di funzione analitica sulle superfici di Riemann può essere ricondotta alla definizione precedente. Si scelgano U e V dischi centrati nell'origine, e ψ e ϕ che mandano l'origine in P e $f(P)$ rispettivamente. La funzione composta $h(z) = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ ha la forma $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, che è una serie di potenze convergente come nella definizione precedente.

Considerando la funzione $h(z)$, è possibile definire un concetto detto punto di ramificazione.

Definizione 3.5. L'**ordine di annullamento** della funzione $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è il più piccolo intero e tale che valga $a_e \neq 0$.

Si osserva che questo valore è indipendente dalla scelta delle coordinate, e quindi dalla scelta di ψ e ϕ per la costruzione di $h(z) = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$.

Definizione 3.6. L'ordine di annullamento di una funzione $h(z) = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ è detto **indice di ramificazione** di f nel punto P , e viene indicato con $e_f(P)$. Il punto P è detto **punto di ramificazione** di f se $e_f(P) > 1$.

Inoltre, si nota che data una superficie di Riemann Y e un rivestimento $p : X \rightarrow Y$, è possibile dotare X della struttura di superficie di Riemann in modo che p sia una funzione analitica. Si richiama la definizione di rivestimento:

Definizione 3.7. Si dice che un gruppo G agisce su uno spazio X se esiste una mappa

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

tale che valgano le seguenti proprietà:

1. $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x \quad \forall g, h \in G, \forall x \in X$
2. $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$, e e è l'identità in G
3. $x \mapsto g \cdot x$ è un omeomorfismo di $X \quad \forall g \in G$

Due elementi di X , x e x' , sono equivalenti se esiste un elemento di G che porta uno dei due nell'altro, quindi deve verificarsi che $x' = g \cdot x$. Si può quindi definire lo spazio quoziente $Y = X/G$. La mappa $p : X \rightarrow Y$, che associa un punto di X alla classe di equivalenza a cui appartiene, è **rivestimento topologico** di Y se ogni punto in X possiede un intorno V tale che $g \cdot V$ e $h \cdot V$ sono disgiunti, per qualsiasi g, h distinti in G .

Per mostrare che è possibile assegnare a X una struttura di superficie di Riemann in modo che p sia analitica, è sufficiente scegliere un atlante $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow Y$ su Y tale che ogni componente $V_{\alpha,i}$ di $p^{-1}(\phi_\alpha(U_\alpha))$ è mandato in $\phi_\alpha(U_\alpha)$ da p che agisce come uno omeomorfismo. Inoltre, la mappa composta $U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow V_{\alpha,i}$ fornisce una carta locale su X . Si può verificare che questi carte locali sono analitiche, e che quindi X ha la struttura di superficie di Riemann.

Inoltre si definisce il concetto di grado di un rivestimento, e si introduce un teorema che sarà utile per discutere più avanti una particolare categoria di superfici di Riemann, le superfici ellittiche.

Definizione 3.8. Dato un rivestimento $p : X \rightarrow Y$ è detto **di grado n** se, per ogni $x \in X$, la sua controimmagine $p^{-1}(x)$ ha cardinalità n , con n numero finito.

Teorema 3.9. (*Formula di Riemann-Hurwitz*) Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa analitica di grado n tra superfici di Riemann compatte. Se Y è triangolabile, allora anche X lo è, e vale la formula

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{P \in X} (e_f(P) - 1)$$

Si osserva che il teorema appena enunciato fornisce informazioni sulla topologia di X a partire dalla topologia di Y e dal comportamento di f nei punti di ramificazione. Questa formula viene usata per selezionare alcune particolari mappe tra superfici di Riemann. Per esempio, se si considera una mappa $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$, dove Λ e Λ' sono reticoli. Entrambe le superfici sono di genere 1, quindi $e_f(P) = 1$ per ogni P , per il teorema appena enunciato, rendendo f non ramificata. Si consideri ora una funzione analitica $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Lambda' \end{array}$$

Infatti, poiché \mathbb{C} è semplicemente connesso e le proiezioni p e p' sono isomorfismi locali, la funzione $\tilde{f} = p^{-1} \circ f \circ p$ è analitica. Inoltre, poiché f è non ramificata, anche \tilde{f} è non ramificata. Quindi la funzione \tilde{f} è olomorfa, non nulla e limitata.

Si deduce allora che, per qualche $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, con $\lambda \neq 0$, vale $\tilde{f}(z) = \lambda z + \mu$. In particolare, vale $\lambda \cdot \Lambda + \mu \subset \Lambda'$. Viceversa, due numeri complessi λ e μ scelti in questo modo determina una mappa analitica f . Si nota quindi che queste condizioni limitano molto la scelta delle possibili mappe f .

3.2 1-forme olomorfe e antiolomorfe

Data una superficie X , si possono considerare non solo 1-forme differenziali reali, ma anche 1-forme differenziali complesse.

Definizione 3.10. Si definisce una 1-forma differenziale complessa $\omega_1 + i\omega_2$, con ω_1 e ω_2 1-forme differenziali reali.

Si osserva che una forma complessa $\omega_1 + i\omega_2$ è esatta o chiusa se sia ω_1 che ω_2 sono esatte o chiuse.

Definizione 3.11. Siano $Z^1(X; \mathbb{C})$ il gruppo delle 1-forme complesse chiuse, e $B^1(X; \mathbb{C})$ il gruppo delle 1-forme complesse esatte. Si definisce $H^1(X; \mathbb{C})$ il loro gruppo quoziente.

Si osserva che vale $H^1(X; \mathbb{C}) \simeq H^1X \oplus iH^1X$. Inoltre se X è una superficie compatta di genere g_X , allora $H^1(X; \mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione $2g_X$.

Si consideri ora una superficie di Riemann X . È possibile definire una categoria particolare di 1-forme complesse chiuse.

Definizione 3.12. Dato una carta locale $\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{C} \rightarrow X$, una 1-forma **olomorfa** è una 1-forma complessa che ha la forma

$$f_\alpha dz = (u_\alpha + iv_\alpha)(dx + idy) = (u_\alpha dx - v_\alpha dy) + i(v_\alpha dx + u_\alpha dy)$$

con $f_\alpha(z) = f_\alpha(x + iy) = u_\alpha(x, y) + iv_\alpha(x, y)$ funzione analitica.

Si osservi che una 1-forma olomorfa è sempre chiusa. Infatti, la funzione $f_\alpha(z)$ definita come sopra, poiché è analitica, rispetta le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} = -\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}$$

Allora $f_\alpha dz$ è chiusa, poiché le derivate parziali in croce coincidono.

Definizione 3.13. L'insieme delle 1-forme olomorfe è uno spazio vettoriale complesso, detto $\Omega^{1,0}(X)$ o $\Omega^{1,0}$.

Una 1-forma olomorfa ω è esatta solo nel caso in cui esiste una funzione analitica g tale che $dg = \omega$. In particolare, se si considera X compatta, allora ogni funzione analitica su X è costante. Se ω è esatta, allora $\omega = 0$, e quindi la mappa di inclusione

$$i : \Omega^{1,0}(X) \rightarrow H^1(X; \mathbb{C})$$

è iniettiva. Quindi $\Omega^{1,0}(X)$ è un sottospazio complesso di $H^1(X; \mathbb{C})$. Si definisca ora un'altra categoria di 1-forme complesse.

Definizione 3.14. Dato una carta locale $\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{C} \rightarrow X$ e una funzione analitica $f_\alpha(z) = f_\alpha(x + iy) = u_\alpha(x, y) + iv_\alpha(x, y)$ come sopra, una 1-forma **antiolomorfa** è una 1-forma complessa che ha la forma

$$\overline{f_\alpha} d\bar{z} = (u_\alpha - iv_\alpha)(dx - idy) = (u_\alpha dx - v_\alpha dy) - i(v_\alpha dx - u_\alpha dy)$$

Come prima, anche le 1-forme antiolomorfe sono forme chiuse.

Definizione 3.15. L'insieme delle 1-forme antiolomorfe è uno spazio vettoriale complesso, detto $\Omega^{0,1}(X)$ o $\Omega^{0,1}$.

Inoltre, una 1-forma antiolomorfa ω è esatta se esiste una funzione analitica \bar{g} tale che $d\bar{g} = \omega$. Come prima, se X è compatta, $\Omega^{0,1}(X)$ è un sottospazio complesso di $H^1(X; \mathbb{C})$.

Dalle definizioni, si deduce che una 1-forma non nulla non possa essere contemporaneamente olomorfa e antiolomorfa. Quindi vale

$$\Omega^{1,0} \cap \Omega^{0,1} = \{0\}$$

Inoltre, $H^1(X; \mathbb{C})$ possiede un operatore di coniugio complesso:

$$\bar{\cdot} : \omega = \omega_1 + i\omega_2 \mapsto \bar{\omega} = \omega_1 - i\omega_2$$

Questo operatore è una mappa antilineare, cioè è additiva e vale, per qualsiasi $c \in \mathbb{C}$, $\overline{c\omega} = \bar{c} \cdot \bar{\omega}$. Si osserva che questa mappa porta $\Omega^{1,0}$ in $\Omega^{0,1}$, e $\Omega^{0,1}$ in $\Omega^{1,0}$. I due spazi si dicono quindi coniugati.

Definizione 3.16. Sia $H^{1,0}$ l'insieme delle classi di coomologia delle 1-forme olomorfe. Analogamente, $H^{0,1}$ è l'insieme delle classi di coomologia delle 1-forme antiolomorfe.

Si osserva inoltre che anche $H^{1,0}$ e $H^{0,1}$, come $\Omega^{1,0}$ e $\Omega^{0,1}$, sono spazi coniugati. Inoltre vale anche il seguente teorema.

Teorema 3.17. Data una superficie di Riemann X , compatta e di genere g , vale

$$H^1(X; \mathbb{C}) = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$$

In modo equivalente, $\dim(\Omega^{1,0}) = \dim(\Omega^{0,1}) = g_X$, con g_X genere della superficie X .

3.3 Relazioni bilineari di Riemann

Si consideri l'operatore $(\omega, \nu) = \iint_X \omega \wedge \nu$ definito come in precedenza su 1-forme chiuse e sulle loro classi di coomologia. È possibile estendere questo operatore alle forme complesse. Se è applicato alle 1-forme olomorfe, si deducono due proprietà:

1. $(\omega, \nu) = 0$ se ω e ν sono olomorfe;
2. $i \cdot (\omega, \bar{\omega}) > 0$ se ω è non nulla e olomorfa.

La prima proprietà segue dal fatto che $dz \wedge dz = 0$. La seconda deriva dal fatto che se, in coordinate locali, vale la scrittura $\omega = f(z)dz = f(z)(dx + idy)$, allora vale

$$i \cdot \omega \wedge \bar{\omega} = i \cdot |f(z)|^2 (dx + idy) \wedge (dx - idy) = 2|f(z)|^2 dx \wedge dy$$

Quindi il suo integrale è strettamente positivo dove vale $f \neq 0$.
Si dimostra il seguente teorema.

Teorema 3.18. (*Relazioni bilineari di Riemann*) Siano ω e ν 1-forme olomorfe. Allora valgono

1.

$$\sum_{j=1}^g \int_{a_j} \omega \int_{b_j} \nu = \sum_{j=1}^g \int_{a_j} \nu \int_{b_j} \omega$$

2.

$$i \cdot \sum_{j=1}^g \left(\int_{a_j} \omega \int_{b_j} \bar{\omega} - \int_{a_j} \bar{\omega} \int_{b_j} \omega \right) > 0$$

Dimostrazione. Si consideri la base di $H_1 X$ costituita dagli elementi $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$. Si dimostra che, per qualsiasi μ e τ 1-forme chiuse, vale

$$(\mu, \tau) = \sum_{k=1}^g \left(\int_{a_k} \mu \int_{b_k} \tau - \int_{a_k} \tau \int_{b_k} \mu \right)$$

poiché $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g\}$, con α_i e β_i costruite come nella sezione 2.4, è una base di $H^1 X$, per linearità è sufficiente dimostrare la formula nei casi in cui $\mu = \alpha_i$, oppure $\mu = \beta_i$. Infatti, una qualsiasi 1-forma chiusa μ avrà la forma

$$\mu = \sum_{i=1}^g r_i \alpha_i + \sum_{i=1}^g s_i \beta_i$$

con r_i, s_i numeri reali.

Quindi è possibile trasformare la formula nel modo seguente:

$$(\mu, \tau) = \left(\sum_{i=1}^g r_i \alpha_i + \sum_{i=1}^g s_i \beta_i, \tau \right) = \left(\sum_{i=1}^g r_i \alpha_i, \tau \right) + \left(\sum_{i=1}^g s_i \beta_i, \tau \right) = \sum_{i=1}^g r_i (\alpha_i, \tau) + \sum_{i=1}^g s_i (\beta_i, \tau)$$

Dalla formula scritta in questo modo, se si considera $\mu = \alpha_i$, per la stessa ragione è sufficiente dimostrarla nel caso in cui $\tau = \alpha_j$ oppure $\tau = \beta_i$. Analogamente, se $\mu = \beta_j$, basta dimostrare la formula nel caso in cui $\tau = \alpha_j$ oppure $\tau = \beta_j$. Si prenda una 1-forma chiusa qualsiasi, che avrà la forma

$$\tau = \sum_{j=1}^g t_j \alpha_j + \sum_{j=1}^g q_j \beta_j$$

con t_j, q_j numeri reali.

Allora, vale

$$\begin{aligned} (\mu, \tau) &= \sum_{i=1}^g r_i (\alpha_i, \sum_{j=1}^g t_j \alpha_j + \sum_{j=1}^g q_j \beta_j) + \sum_{i=1}^g s_i (\beta_i, \sum_{j=1}^g t_j \alpha_j + \sum_{j=1}^g q_j \beta_j) = \\ &= \sum_{i,j} r_i t_j (\alpha_i, \alpha_j) + \sum_{i,j} r_i q_j (\alpha_i, \beta_j) + \sum_{i,j} s_i t_j (\beta_i, \alpha_j) + \sum_{i,j} s_i q_j (\beta_i, \beta_j) \end{aligned}$$

Si nota, applicando i lemmi 2.15 e 2.18, che (α_i, α_j) e $\int_{a_i} \alpha_j$ sono entrambi nulli, così come (β_i, β_j) e $\int_{b_i} \beta_j$. Inoltre (α_i, β_j) e $\int_{a_i} \beta_j$ valgono 1 se $i = j$, e 0 altrimenti. Allo stesso modo (β_i, α_j) e $\int_{b_i} \alpha_j$ valgono -1 se $i = j$, e 0 altrimenti. Vale quindi la formula cercata non solo nei casi indicati sopra, ma anche nel caso generale in cui $\mu, \tau \in Z^1(X)$.

Applicando la formula appena dimostrata a due 1-forme olomorfe ω e ν , si ottiene

$$0 = (\omega, \nu) = \sum_{j=1}^g \left(\int_{a_j} \omega \int_{b_j} \nu - \int_{a_j} \nu \int_{b_j} \omega \right)$$

ricordando la prima proprietà delle 1-forme olomorfe enunciata sopra.

La seconda tesi si dimostra analogamente, applicando la seconda proprietà delle 1-forme olomorfe:

$$0 < i \cdot (\omega, \overline{\omega}) = i \cdot \sum_{j=1}^g \left(\int_{a_j} \omega \int_{b_j} \overline{\omega} - \int_{a_j} \overline{\omega} \int_{b_j} \omega \right)$$

□

Corollario 3.19. *Esiste ed è unica una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $\Omega^{1,0}$ tale che*

$$\int_{a_j} \omega_k = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ricorda che, per il teorema enunciato nella sezione precedente, vale $H^1(X; \mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$. Si osserva che gli elementi a_j della base di $H_1 X$ sono reali. Se l'integrale di $\int_{a_j} \omega_k$ fosse nullo, allora per ogni $\omega \in H^{1,0}$ anche l'integrale $\int_{a_j} \omega$ lo sarebbe. Inoltre, poiché $H^{1,0}$ e $H^{0,1}$ sono coniugati, se vale $\int_{a_j} \omega = 0$ allora

vale anche $\int_{a_j} \bar{\omega} = 0$. Applicando la seconda relazione bilineare di Riemann a ω e $\bar{\omega}$, si conclude che $\omega = 0$. Quindi, la mappa

$$\omega \mapsto \int_{a_j} \omega$$

tra lo spazio $H^{1,0}$ e lo spazio duale dello span complesso degli a_j è una mappa iniettiva, e quindi un isomorfismo poiché entrambi gli spazi hanno dimensione complessa g . Quindi lo spazio $H^{1,0}$ è isomorfo allo spazio duale di $\text{span}(a_1, \dots, a_g)$, e si può considerare la base duale $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $\Omega^{1,0}$, che possiede le caratteristiche richieste. \square

Si osservi ora che l'integrale della base $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $\Omega^{1,0}$ sugli elementi della base di $H_1 X$ non considerati nel corollario fornisce una matrice.

Definizione 3.20. La **matrice dei periodi** è una matrice di numeri complessi $Z = (\tau_{j,k})$ di dimensione $g \times g$, dove vale

$$\tau_{j,k} = \int_{b_k} \omega_j \quad \text{con } j, k \in 1, \dots, g$$

Si osserva che la matrice dei periodi non è singolare. Infatti, analogamente alla dimostrazione del corollario, si può provare che $H^{1,0}$ è lo spazio duale di $\text{span}(b_1, \dots, b_g)$. Le colonne di Z sono linearmente indipendenti, e quindi la matrice ha rango massimo e non può essere singolare.

Inoltre vale il seguente teorema:

Teorema 3.21. 1. La matrice Z è simmetrica.

2. La matrice $\text{Im}(Z)$ è una matrice definita positiva.

Dimostrazione. 1. Si consideri la base $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $\Omega^{1,0}$, la cui esistenza è dimostrata dal corollario enunciato sopra. Si applichi ora la prima delle relazioni bilineari di Riemann alle forme ω_j e ω_k appartenenti alla base di $\Omega^{1,0}$:

$$\sum_{i=1}^g \int_{a_i} \omega_j \int_{b_i} \omega_k = \sum_{i=1}^g \int_{a_i} \omega_k \int_{b_i} \omega_j$$

Sempre per il corollario precedente, i termini $\int_{a=1} \omega_j$ e $\int_{a=1} \omega_k$ si annullano per ogni valore di i , tranne per $i = j$ e $i = k$ rispettivamente, dove valgono 1. Quindi vale

$$\int_{b_j} \omega_k = \int_{b_k} \omega_j$$

Questo prova che la matrice Z è simmetrica.

2. Segue dalla seconda delle relazioni bilineari di Riemann, applicata alla forma $\omega = \sum_{j=1}^g t_j \omega_j$, con t_j numeri reali, non tutti nulli. Infatti

$$0 < i \cdot (\omega, \bar{\omega}) = i \cdot \sum_{j,k} t_j t_k (\bar{\tau}_{k,j} - \tau_{j,k}) = 2 \sum_{j,k} t_j t_k (\text{Im}(\tau_{j,k}))$$

\square

La matrice non è unica, poiché dipende dalla scelta della base dell'omologia. In particolare, è univocamente determinata a meno dell'azione di una matrice simplettica a coefficienti interi mediante trasformazioni lineari fratte.

Si osserva inoltre che, data una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ dello spazio delle 1-forme olomorfe, si ottiene la mappa

$$H_1 X \rightarrow \mathbb{C}^g$$

$$\gamma \mapsto \left(\int_{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{\gamma} \omega_g \right)$$

È allora possibile dimostrare il teorema:

Teorema 3.22. *L'immagine degli elementi della base a_1, \dots, b_g tramite la mappa forma una base di \mathbb{C}^g come spazio vettoriale reale.*

Dimostrazione. Si consideri la base a_1, \dots, b_g di $H_1 X$, e sia una c una combinazione lineare reale degli elementi a_j e b_j . Se c appartenesse al nucleo della mappa, allora, per ogni $\omega \in H^{1,0}$ olomorfa, l'integrale $\int_c \omega$ sarebbe nullo. poiché c è reale, vale lo stesso anche per ogni $\omega \in H^{0,1}$ antiolomorfa. Allora l'integrale lungo c di ogni forma chiusa su X è nullo, quindi $c = 0$. Quindi le immagini di $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ tramite la mappa sono linearmente indipendenti su \mathbb{R} nello spazio duale delle 1-forme olomorfe. Sono quindi anche una base di tale spazio, e formano una base reale di \mathbb{C}^g tramite la mappa. \square

Dal teorema si deduce che lo spazio $H_1 X$ è collocato in \mathbb{C}^g con una struttura di reticolo. Questo reticolo è denotato come Λ .

Definizione 3.23. Lo **Jacobiano** $J(X)$ di X è lo spazio quoziente \mathbb{C}^g / Λ .

Dati due punti P e Q in X si può definire l'elemento detto $[Q - P]$, con la formula

$$[Q - P] = \left(\int_P^Q \omega_1, \dots, \int_P^Q \omega_g \right) \in J(X)$$

La mappa $H_1 X \rightarrow \mathbb{C}^g$ può essere definita intrinsecamente, senza scegliere una base di 1-forme olomorfe. Per esempio, si può scegliere la mappa

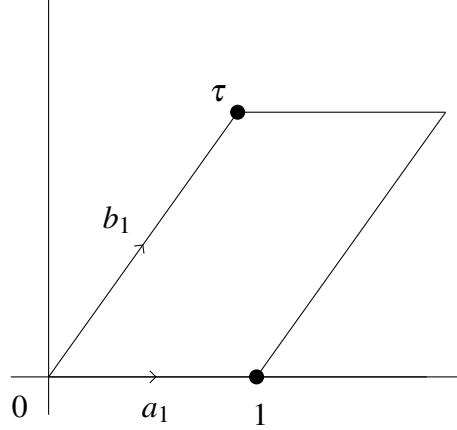
$$H_1 X \rightarrow \Omega^{1,0}(X)^*$$

$$\gamma \mapsto \left[\omega \mapsto \int_{\gamma} \omega \right]$$

con $\Omega^{1,0}(X)^* = \text{Hom}(\Omega^{1,0}, \mathbb{C})$. Lo jacobiano della superficie X è quindi $J(X) = \Omega^{1,0}(X)^* / H_1 X$.

3.4 Curve ellittiche

Si consideri una superficie di Riemann X della forma \mathbb{C}/Λ , con Λ un reticolo generato da 1 e τ , dove τ è un numero complesso appartenente alla metà superiore del piano.



La superficie X è ottenuta dall'identificazione dei lati opposti del parallelogramma, e le immagini a_1 e b_1 di tali lati sono la base standard di H_1X .

Si osserva ora che X possiede una 1-forma olomorfa naturale detta ω , il cui tirato indietro su \mathbb{C} è la 1-forma dz (dove z è la coordinata standard su \mathbb{C}). L'integrale di ω lungo a_1 vale 1, e il suo integrale lungo b_1 vale τ . Si nota che la matrice dei periodi corrispondente è $Z = (\tau)$. Inoltre, la mappa $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$, da H_1X a $\mathbb{C} = \mathbb{C}^g$, ha come immagine Λ . Sia fissato quindi il punto P_0 in modo che sia immagine dell'origine in \mathbb{C} . Si consideri ora la mappa di Abel-Jacobi, definita nel modo seguente:

$$X \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$$

$$P \mapsto [P - P_0] = \int_{P_0}^P \omega$$

In questo caso, si osserva che la mappa è un isomorfismo.

Si consideri ora una superficie di Riemann X compatta di genere 1, che sia dotata di una 1-forma olomorfa non nulla, detta ω . Come prima, la mappa $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$, da H_1X a \mathbb{C} , ha come immagine un reticolo Λ in \mathbb{C} . Data la base a_1, b_1 di H_1X , si scelga ω in modo che valga $\int_{a_1} \omega = 1$. Allora il reticolo è generato da 1 e da $\tau = \int_{b_1} \omega$. Per il teorema sulle proprietà della matrice dei periodi, si deduce che τ è nella metà superiore del piano. Si fissi ora un punto P_0 in X .

Teorema 3.24. *La mappa di Abel-Jacobi*

$$X \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$$

$$P \mapsto [P - P_0] = \int_{P_0}^P \omega$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. La mappa considerata è analitica e non costante, quindi è anche non ramificata per la formula di Riemann-Hurwitz. poiché X è una superficie di Riemann di genere 1, la mappa è un ricoprimento. É possibile costruire una corrispondenza biunivoca tra i ricoprimenti di \mathbb{C}/Λ e i sottogruppi del suo gruppo fondamentale. Il gruppo fondamentale di \mathbb{C}/Λ è isomorfo a Λ . Scelto un sottogruppo $\Lambda' \subset \Lambda$, si può dimostrare che $p : \mathbb{C}/\Lambda' \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ è un ricoprimento di \mathbb{C}/Λ . Allora, X ha la forma \mathbb{C}/Λ' dove Λ' è un sottogruppo finito di Λ . Come dimostrato sopra, se X ha questa forma, la relativa mappa di Abel-Jacobi è un isomorfismo. \square

É stato quindi provato che una generica superficie di Riemann di genere 1 ha la forma \mathbb{C}/Λ , dove Λ è un reticolo.

Si consideri ora una superficie di Riemann X che sia il ricoprimento di grado 2 della sfera di Riemann $P^1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}) \cup \infty$, con quattro punti di ramificazione. É possibile usare la formula di Riemann-Hurwitz per calcolare che il genere di X vale 1. Componendo il ricoprimento con un isomorfismo $P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$, è possibile assumere che i quattro punti di ramificazione abbiano immagine 0, 1, ∞ , e un certo $\lambda \in \mathbb{C}$. Ne segue che X è la superficie di Riemann associata al polinomio $w^2 = z(z-1)(z-\lambda)$. Si osserva inoltre che, poiché dz/w è una 1-forma olomorfa su X , la mappa

$$P \mapsto \int_{P_0}^P \frac{dz}{w} = \int_{P_0}^P \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}}$$

con P_0 fissato in X , fornisce un isomorfismo tra X e \mathbb{C}/Λ . Più in generale, si può dimostrare che ogni superficie di Riemann di genere 1 è isomorfa a quella appena costruita. Poiché questa categoria di superfici di Riemann sono generate da curve ellittiche, sono anche dette superfici ellittiche.

Bibliografia

- [1] William Fulton. *Algebraic Topology*. Springer, 1995.
- [2] Victor Guillemin e Peter Haine. *Differential Forms*. 1^a ed. WSPC, 2019.
- [3] Edoardo Sernesi. *Geometria*. 2^a ed. Vol. 2. Bollati Boringhieri, 2019.