MÚSICA Y MATEMÁTICAS

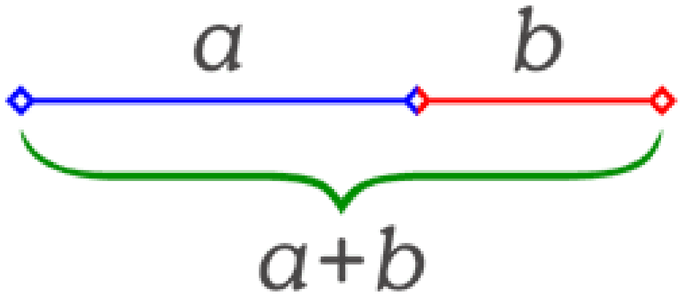
Una relación armónica

Marta Fernández y Violeta Atienza

INTRODUCCIÓN

CÓMO LAS MATEMÁTICAS VIVEN EN LA MÚSICA

PROPORCIÓN ÁUREA



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$$

EJEMPLOS

- Primer movimiento Sonata para piano de Mozart. [1]
  100 compases. 38/63 - 62/100

- Primer movimiento Sinfonía n.º 5 Beethoven [2]*
  600 compases. 228/372-372/600

- Primer movimiento Música para cuerda, percusión y celesta de Bartok. [3]
  88 compases. 33/55-55/88.

- Canción Lateralus (disco homónimo) de Tool. [4]
  El número de sílabas de cada frase sigue la sucesión de Fibonacci

*Tened cuidado que empieza súper bajito al principio y luego sube. A ver si os quedáis sordos

REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE CONCEPTOS MUSICALES

Idea inicial:

Podemos representar todos los sonidos que forman una escala dodecafónica como Z_{12}, y una escala normal como Z_7

GRUPO T/I. [1]

Traslaciones

$T_n: Z_{12} \to Z_{12}$

$T_n(x) = x + n$

En música se corresponden con las transposiciones

Inversiones

$I_n: Z_{12} \to Z_{12}$

$I_n(x) = -x + n$

Cogemos todas las traslaciones e inversiones de Do M.

¿Y para qué sirve esto?

Para realizar variaciones en un motivo principal, lo cual es muy útil, por ejemplo en las fugas.

JOHANN SEBASTIAN BACH

El rey de las fugas [1]

SIMETRÍAS EN LA OBRA DE BACH

- Simetrías respecto a una nota
- Simetrías respecto a la barra de compás

Otras obras con simetría

- Tristan und Isolde, preludio de Wagner [1]
- Ludus Tonalis, fuga de Hindemith [2]

SEGUNDO GRUPO

Trabajamos ahora con acordes. Partimos del de Do M (0,4,7).

Traslaciones

(0,4,7)
(1,5,8)
(2,6,9)
...

Los intervalos son de 4, 3.

Inversiones

(0,8,5)
(1,9,6)
(2,10,7)
...

Los intervalos son de 8, 9

GRUPO PLR

$\mathrm{P}: \mathrm{S} \to \mathrm{S}$

$\mathrm{P}(\mathrm{x}) =$ elemento de la clase contraria con la primera y tercera nota cambiada

$$\mathrm{P}(0,4,7) = (7,3,0)$$

$\mathrm{L}: \mathrm{S} \to \mathrm{S}$

$\mathrm{L}(\mathrm{x}) =$ elemento de la clase contraria con la segunda y tercera nota cambiada

$$\mathrm{L}(0,4,7) = (11,7,4)$$

$\mathrm{R}: \mathrm{S} \to \mathrm{S}$

$\mathrm{R}(\mathrm{x}) =$ elemento de la clase contraria con la primera y segunda nota cambiada

$$\mathrm{R}(0,4,7) = (4,0,9)$$

¿Qué son musicalmente?

- P pasa tonos menores a mayores y viceversa
- L sube una tercera
- R devuelve la tonalidad relativa [1]

GRUPO PLR [1]

Aquel constituido por todas las composiciones posibles de P, L y R.

$$\{P, L, R, L \circ R, R \circ L, \ldots\}$$

¿Y para qué sirve esto en la música?

Porque utilizándolo podemos conseguir todas las secuencias de acordes posibles.

$$\mathrm{I} \xrightarrow{\quad R \quad} \mathrm{VI} \xrightarrow{\quad L \quad} \mathrm{IV} \xrightarrow{R \circ L \circ R \circ L} \mathrm{V} \xrightarrow{\quad L \circ R \quad} \mathrm{I}$$

CHANGE RINGING

¿Qué es? [1][2]

Considerada desde deporte hasta arte, es una actividad que consiste en tocar campanas siguiendo una serie de reglas.

Aunque se practica en multitud de lugares, es típico sobre todo en Inglaterra.

ORGANIZACIÓN

Supongamos que una iglesia tiene n campanas.

Las numeramos de tal forma que la campana número 1 es la más aguda, y a partir de ahí van haciéndose más graves (justo al contrario de cómo suele representarse la música)

Cada persona puede tocar únicamente una campana.

Normalmente las iglesias suelen tener de 6 a 8 campanas.

LAS REGLAS

- **Intención:** Queremos que suenen todas las ordenaciones posibles, empezando y terminando con la trivial (1, 2, …, n)
- No puede haber ninguna repetición.
- En cada paso solo podemos intercambiar de posición campanas que se encuentren juntas.
- Las personas que tocan las campanas (*bell ringers*) no tienen permitido tener ninguna ayuda o partitura: tienen que aprenderse la secuencia de memoria.

EJEMPLO: 3 CAMPANAS

$3! = 6$ posibles ordenaciones

Utilizamos las transposiciones a $= (12)$ y b $= (23)$

	$(1\ 2\ 3)$
a	$(2\ 1\ 3)$
b	$(2\ 3\ 1)$
a	$(3\ 2\ 1)$
b	$(3\ 1\ 2)$
a	$(1\ 3\ 2)$
b	$(1\ 2\ 3)$

Cada campana se cambia el mismo número de veces, y el método es palíndromo

$(\mathrm{a\ b\ a\ b\ a})^{-1} = (\mathrm{a\ b\ a\ b\ a})$

Con tres campanas quizás parece fácil; pero cuando aumenta el número cada vez se hace más complicado.

Con cuatro campanas tendríamos $4! = 24$ ordenaciones posibles, y tendríamos que utilizar (por ejemplo) $\mathrm{a} = (12)(34)$, $\mathrm{b} = (23)$ y $\mathrm{c} = (34)$

Lleva vigente desde hace muchos años y en la mayoría de ocasiones no se ha afrontado el problema desde una perspectiva matemática.

En 1963, Loughborough, se llegó a efectuar el problema con 8 campanas. $8! = 40320$ ordenaciones posibles. Tardaron un total de 18 horas.

MÉTODOS DE COMPOSICIÓN BASADOS EN LAS MATEMÁTICAS

ALGUNOS EJEMPLOS RÁPIDOS

- Melodía a partir de las cifras de Pi [1] [2]
- L – Systems [3]
- Algoritmos genéticos [5]
- A partir de la teoría del caos [6]

USANDO LA SUCESIÓN THUE-MORSE [1]

$$0110100110010110100101100110110 1001\ldots$$

Podemos construirla de dos formas:

De forma recursiva

$$0 \rightarrow 01$$
$$1 \rightarrow 10$$

De forma no recursiva

Expresamos los números naturales en base dos, y sumamos sus cifras en base 2

¿Cómo podemos usarlo para componer?

Cogemos la secuencia de naturales en binario y sumamos sus cifras en decimal. A esto le aplicamos módulo 24 para situarlos en dos escalas cromáticas.

En el caso de que multiplicásemos por 31 los naturales

Algunos ejemplos más

Multiplicamos por 33 y expresamos en base 2

Multiplicamos por 10 y expresamos en base 3

UTILIZANDO LOS NÚMEROS PRIMOS

Primera forma: la fácil

Le aplicamos mod 24 a la sucesión de los números primos

Segunda forma:

Armand Turpel en *Make Prime Music*

(aka la complicada)

Comenzamos por el número siete, tomando tríos de primos. Les aplicamos mod 5 y le restamos 1. Se considera que el triplete restante está en base 4, y las pasamos a base 10.

RITMOS EUCLÍDEOS [1][2]*

*Ampliación

REPASO RÁPIDO DEL ALGORITMO DE EUCLIDES

```
AlgoritmoEuclides(m, k)
    Si k = 0
        Devolvemos m
    Si no
        Devolvemos AlgoritmoEuclides(k, m mod k)
```

ALGORITMO DE BJORKLUND

Tenemos n intervalos con k<n pulsos y queremos distribuirlos de la forma más igualada posible.

Bjorklund lo representa como una secuencia de k unos y n-k ceros.

¿Cómo resolvemos el problema?

- En el caso de que k divida a n, la solución es muy fácil.

Ejemplo: con $\mathrm{n} = 16$ y $\mathrm{k} = 4$

$$1000\ 1000\ 1000$$

¿Qué ocurre si k no divide a n?

Expliquémoslo mediante un ejemplo, con $\mathrm{n} = 16$ y $\mathrm{k} = 5$

$$[111110000000000]$$

$$[10]\ [10]\ [10]\ [10]\ [10]\ [0]\ [0]\ [0]$$

$$[100]\ [100]\ [100]\ [10]\ [10]$$

$$[10010]\ [10010]\ [100]$$

Podríamos haber realizado un cambio más; pero como la secuencia es cíclica verdaderamente da lo mismo.

¿Cómo podemos aplicar esto a la música?

Cada bit es una unidad de tiempo, siendo 0 un silencio y 1 un sonido.

Tendremos entonces $\mathrm{E(k,\, n)}$ siendo k el número de 1s y n la longitud de la secuencia.

Cambiamos la notación: 1→ x y 0 → $.$

De esta forma:

$$\mathrm{E(5,\, 13) = [x..x.x..x.x..]}$$

A partir de aquí sacamos ritmos empleados desde en la música tradicional, como en canciones actuales.

Tenemos por ejemplo que:

$\mathrm{E}(12{,}5) = [\mathrm{x..x..x.x.x.}] = [\mathrm{.x..x..x.x.x}]$ es el ritmo de las soleás/alegrías/bulerías

$\mathrm{E}(3{,}8) = [\mathrm{x..x..x.}]$ es un tresillo

$\mathrm{E}(4{,}12)$ → Fandango

$\mathrm{E}(3{,}7)$ → Money de Pink Floyd

CONCLUSIÓN

AMPLIACIÓN

- El Espejo, Mozart [1] [2]
- Mozart partitura dados [3]
- Serialismo y dodecafonismo [4] [5] [6]
- Métodos transposición limitada [7]
- Música a partir de fractales [8] [9] [10]
- ¡Y muchas cosas más! [11] [12] [13] [14] [15]