

Temat: Zastosowanie symulowanego wyżarzania do rozwiązywania problemu przydziału w grafie ważonym.

ETAP 3

1. Instrukcja obsługi aplikacji

Do prezentacji działania zaimplementowanego algorytmu została stworzona aplikacja, która komunikuje się z użytkownikiem za pomocą interfejsu graficznego.

a. Tworzenie grafu/grafów

Program pozwala na generację grafu lub całej serii grafów o zadanych parametrach. Aby utworzyć jeden graf należy w zakładce Rozwiązanie grafu, Współczynniki schładzania, Ilość iteracji lub Temperatury wpisać odpowiednie parametry grafu (liczbę wierzchołków jednego przedziału grafu - czyli de facto połowę liczby wierzchołków grafu oraz zakres wag krawędzi) i kliknąć przycisk "Generuj graf". Utworzony graf zostanie zapisany w formie pliku tekstowego w lokalizacji \$lokalizacja_projektu\$/output.

Możliwe jest również wygenerowanie od razu większej liczby grafów - w tym celu należy uzupełnić odpowiednie dane w zakładce Grafy i kliknąć "Generuj grafy". Grafy zostaną zapisane w wybranej przez użytkownika lokalizacji.

Generowane grafy są pełnymi dwudzielnymi symetrycznymi grafami ważonymi.

b. Zakładka "Rozwiązanie grafu"

Aby wygenerować pojedyncze rozwiązanie dla jednego grafu, trzeba najpierw wczytać plik tekstowy opisujący graf, a następnie uzupełnić parametry algorytmu symulowanego wyżarzania. Po wciśnięciu przycisku "Uruchom" zostanie znalezione rozwiązanie, które następnie będzie wypisane w okienku. Dodatkowo, jeśli rozmiar grafu jest nie większy od 10, to zostanie znalezione najlepsze rozwiązanie metodą pełnego przeglądu.

Wciśnięcie przycisku "Wykres" spowoduje wyświetlenie wykresu, prezentującego tymczasowe rozwiązania dla tymczasowych temperatur.

c. Zakładka "Grafy"

Zakładka służy do badania, jak na czas działania algorytmu wpływa rozmiar grafu. Wykonanie testów polega na wczytaniu grafów za pomocą wyboru katalogu, w którym się znajdują, wpisaniu parametrów algorytmu, a następnie wciśnięciu przycisku "Uruchom".

d. Zakładka "Współczynniki schładzania"

Zakładka ta służy do sprawdzenia, jak na czas i jakość znalezionej rozwiązania wpływa wartość współczynnika schładzania (λ).

e. Zakładka "Ilość iteracji"

Zakładka ta służy do sprawdzenia, jak na czas i jakość znalezionej rozwiązania wpływa liczba iteracji dla danej temperatury (N_{max}).

f. Zakładka "Temperature"

Zakładka ta służy do sprawdzenia, jak na czas i jakość znalezionej rozwiązania wpływa wartość temperatury początkowej T_{max} i końcowej T_{min} .

Wynikiem testów są wykresy czasu trwania algorytmu (dla zakładki c-f) oraz wybranej sumy wag krawędzi (zakładki d-f) od zmieniających się parametrów (średnie wartości i odchylenie standardowe).

2. Format plików wejściowych (opisujących graf)

Format plików definiujących graf jest następujący:

- 1) W pierwszej linii pojawia się słowo kluczowe „VERTEX_PART_NUMBER”, a następnie liczba wierzchołków jednego przedziału grafu.
- 2) W drugiej linii znajduje się słowo kluczowe "WEIGHT", a następnie minimalna i maksymalna możliwa wartość wagi krawędzi.
- 3) Kolejne linie definiują krawędzie grafu. Kolejne: indeks wierzchołka pierwszego przedziału, indeks wierzchołka drugiego przedziału i waga krawędzi.

Przykładowa zawartość opisywanego pliku przedstawiono poniżej (graf $K_{2,2}$ o wagach krawędzi z zakresu od 1 do 20).

VERTEX_PART_NUMBER	2
WEIGHT	1 20
1	1 8
1	2 3
2	1 4
2	2 17

3. Opis kodu źródłowego aplikacji

Do sprawozdania dołączamy szczegółowo opisany w komentarzach kod programu. Kod źródłowy podzielony został na trzy pakiety: alg - zawierający klasy realizujące stricte rozwiązywanie problemu przydziału w grafie ważonym (poprzez algorytm symulowanego wyżarzania oraz metodę pełnego przeglądu), graph - odpowiadający za generację i wczytywanie grafów z plików tekstowych oraz gui - reprezentujący interfejs graficzny użytkownika. Do rysowania wykresów skorzystano z biblioteki zewnętrznej *jmathplot* [3].

Wczytywany graf jest konwertowany do macierzy (int[][]), która jest wypełniona wagami odpowiednich krawędzi.

a. Algorytm symulowanego wyżarzania

Algorytm ten został dokładnie opisany w poprzednim sprawozdaniu.

b. Algorytm pełnego przeglądu

W celu wyznaczenia najlepszego rozwiązania i porównania go z wynikiem algorytmu symulowanego wyżarzania zaimplementowano również algorytm znajdujący najlepsze rozwiązanie dokonując pełny przegląd rozwiązań grafu. Tworzenie wszystkich możliwych przydziałów (wyboru wszystkich konfiguracji krawędzi) opiera się na generacji wszystkich permutacji drugiego zbioru

wierzchołków w grafie dwudzielnym. Np. Dany jest graf dwudzielnym o wierzchołkach jednego zbioru {1, 2, 3} i drugiego zbioru {4, 5, 6}. Tworzymy wektory początkowe $v1 = (1, 2, 3)$ i $v2 = (4, 5, 6)$. Rozwiązanie to krawędzie ($v1[1], v2[1]$), ($v1[2], v1[3]$), ($v1[2], v1[3]$). Następnie dokonujemy wszystkich permutacji w wektorze $v2$ tak, by utworzyć wszystkie możliwe rozwiązania.

Algorytm znajduje zawsze najlepsze rozwiązanie, ale ma bardzo niekorzystną złożoność obliczeniową (przekraczającą $O(n!)$), dlatego algorytm ten jest używany jedynie dla mniejszych grafów (których rozmiar nie przekracza 20 wierzchołków w sumie - po 10 na zbiór).

4. Testy

Najpierw sprawdzono działanie algorytmu w zależności od różnych wartości parametrów algorytmu symulowanego wyżarzania.

Wszystkie testy wykonano używając jednego grafu (o liczbie wierzchołków jednego przedziału równej 10 i o wagach w zakresie od 1 do 40).

Aby wyniki przedstawiane na wykresach układały się w określone zależności (z uwagi na dużą losowość przyjmowanych wyników), dla każdego z wymienionych parametrów są one uśrednione (z 20 przebiegów algorytmu dla tych samych danych i parametrów).

a. Współczynnik schładzania (dotyczy schematu liniowego i geometrycznego)

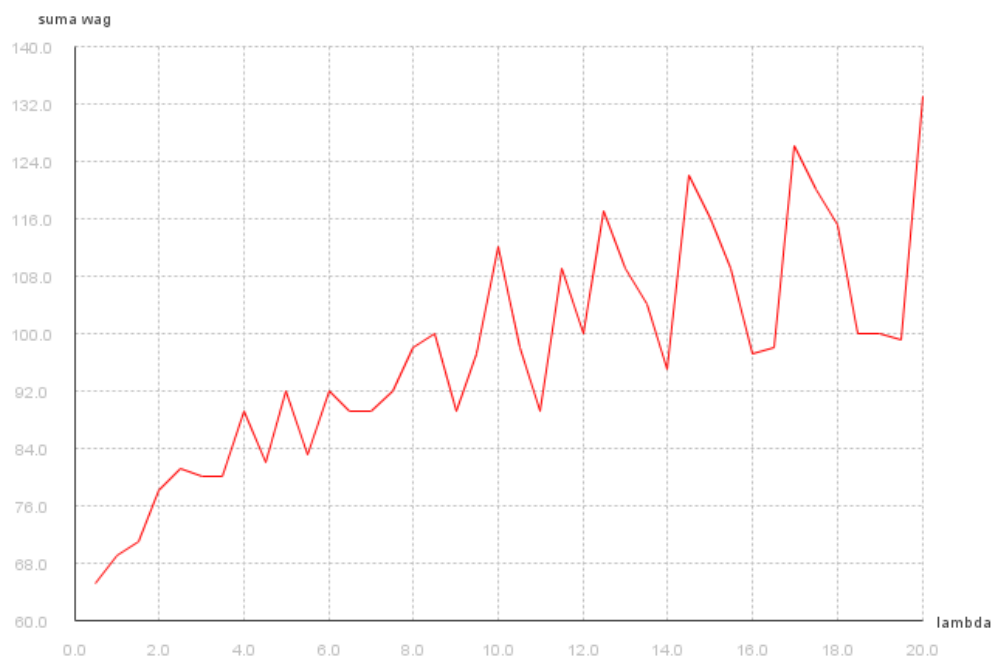
i. Schemat liniowy

Wartości parametrów:

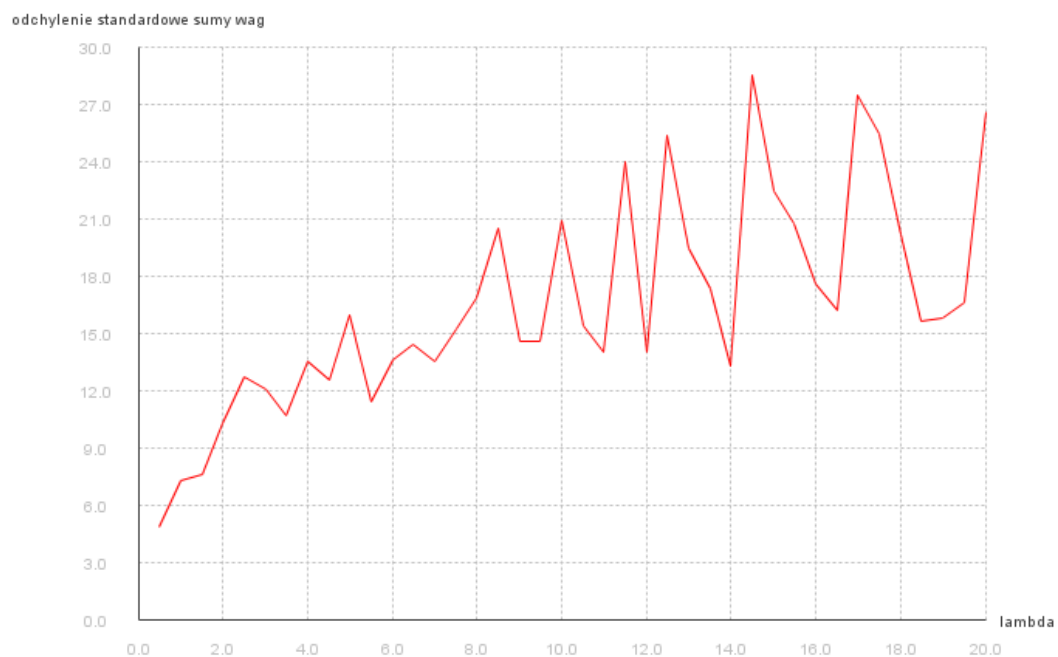
T_{max}	T_{min}	N_{max}	λ_{min}	krok λ	λ_{max}
100	1	30	0.5	0.5	20

Tab. 1

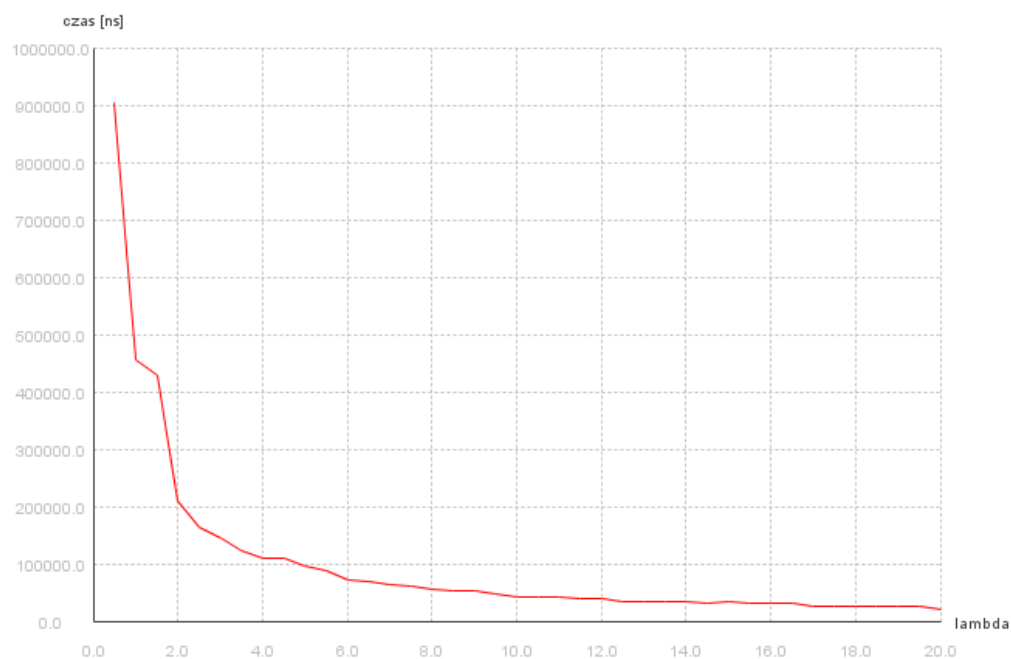
Na wykresach 1-4 znajduje się wizualizacja wyników działania algorytmu (średnia i odchylenie standardowe znalezionej sumy wag krawędzi oraz czasu wykonywania algorytmu) przy parametrach ustawionych jak w tabeli *tab. 1*.



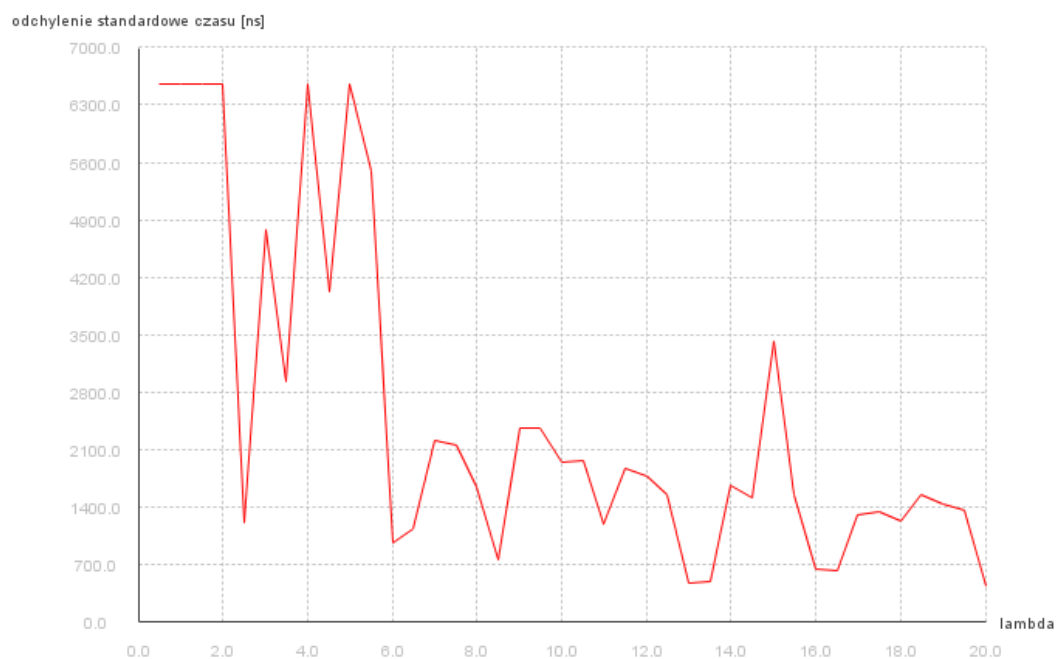
Wykres 1 Zależność średniej sumy wag od wartości współczynnika schładzania.



Wykres 2 Zależność odchylenia standardowego sumy wag od wartości współczynnika schładzania.



Wykres 3 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od wartości współczynnika schładzania.



Wykres 4 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od wartości współczynnika schładzania.

W liniowym schemacie schładzania temperatura zmienia się według zależności:

$$T_{k+1} = T_k - \lambda, \text{ gdzie } k - \text{numer iteracji, } \lambda > 0,$$

a złożoność obliczeniowa algorytmu przy tym schemacie schładzania wynosi:

$$O(N_T \cdot \frac{T_{max} - T_{min}}{\lambda} + q)$$

W związku z tym nie dziwi wykres średniego czasu trwania algorytmu (wykres 3), który pokazuje, że wraz ze wzrostem parametru λ rozwiązanie zostaje znalezione szybciej. Im większy współczynnik schładzania, tym mniej iteracji dla różnych temperatur jest wykonywanych. Widać też, że generalnie dla niższych wartości λ pojawia się większe odchylenie standardowe czasu trwania.

Odwrotnie sytuacja się ma z jakością znalezionej odpowiedzi. Większy współczynnik λ to więcej iteracji algorytmu, a więc większa szansa na znalezienie dobrego rozwiązania. Odchylenie standardowe również rośnie wraz z wzrostem współczynnika schładzania. Dzieje się tak, ponieważ przy mniejszej ilości iteracji rozwiązanie jest bardziej zależne od czynników losowych: pierwszego wylosowanego rozwiązania oraz losowanych rozwiązań sąsiednich.

Wykres średniego czasu wykonywania się algorytmu kształtem przypomina wykres funkcji $y = \frac{a}{x}$, $a = \text{const.}$ (zgodnie z oczekiwaniami).

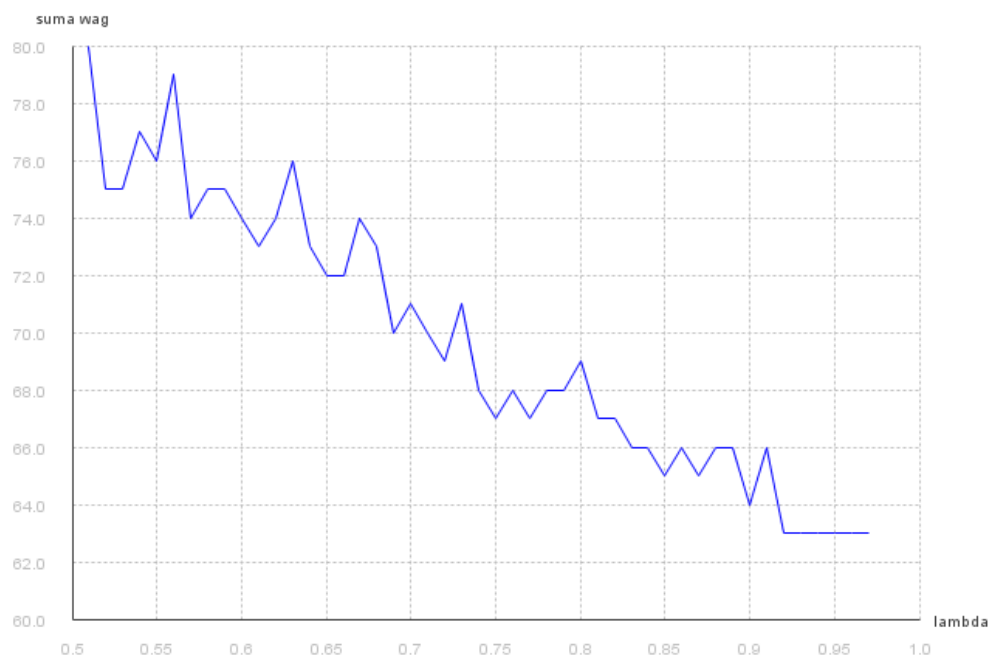
ii. Schemat geometryczny

Wartości parametrów:

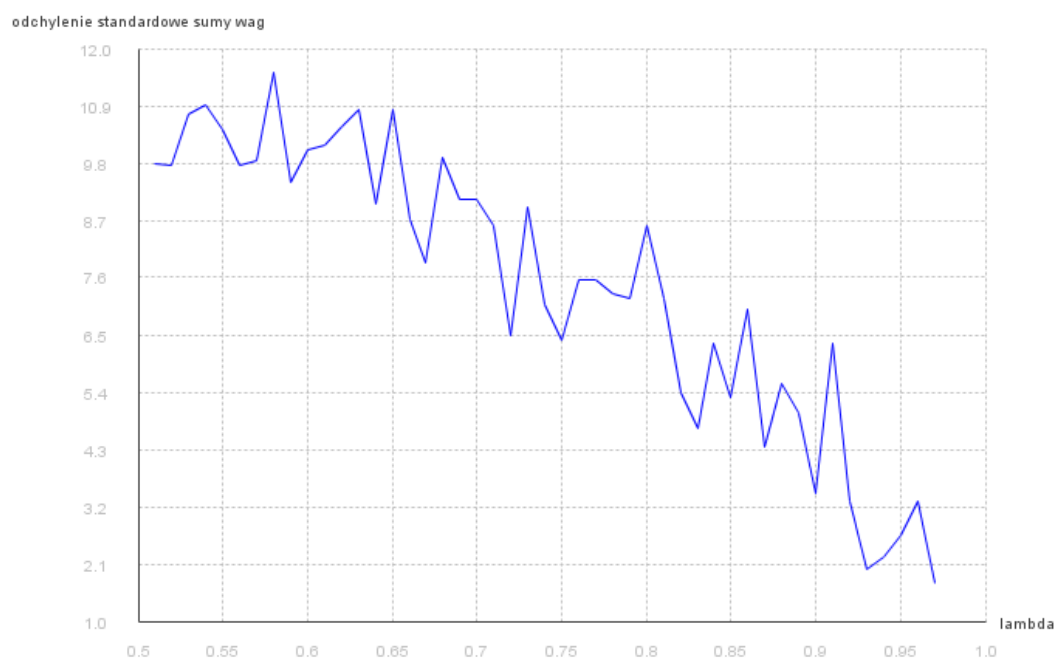
T_{max}	T_{min}	N_{max}	λ_{min}	krok λ	λ_{max}
100	1	30	0.51	0.01	0.98

Tab. 2

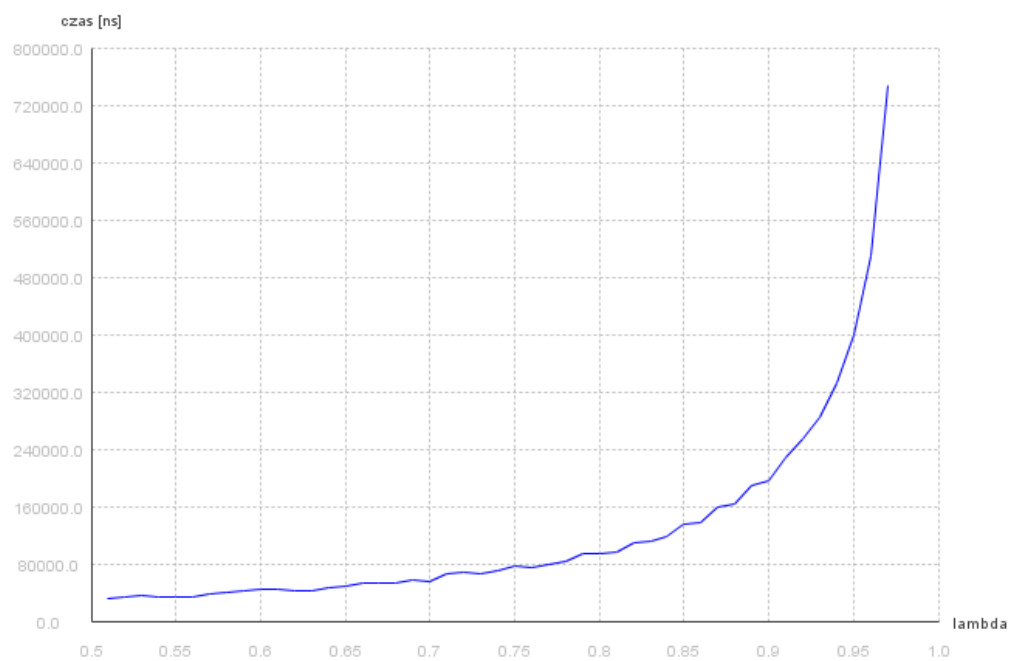
Na wykresach 5-8 znajduje się wizualizacja wyników działania algorytmu (średnia i odchylenie standardowe znalezionej sumy wag krawędzi oraz czasu wykonywania algorytmu) przy parametrach ustawionych jak w tabeli tab. 2.



Wykres 5 Zależność średniej sumy wag od wartości współczynnika schładzania



Wykres 6 Zależność odchylenia standardowego sumy wag od wartości współczynnika schładzania.



Wykres 7 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od wartości współczynnika schładzania



Wykres 8 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od wartości współczynnika schładzania.

Chłodzenie geometryczne przebiega według schematu:

$$T_{k+1} = \lambda \cdot T_k, \text{ gdzie } \lambda \in \langle 0.50, 0.99 \rangle$$

Złożoność obliczeniowa algorytmu przy tym schemacie chłodzenia wynosi:

$$O(N_T \cdot \log_{\lambda} \frac{T_{min}}{T_{max}} + q)$$

Wynika z tego fakt, że im mniejszą wartość przyjmuje parametr λ , tym szybciej temperatura będzie zbiegać do temperatury końcowej. Z tego powodu dla większej wartości współczynnika schładzania algorytm wykonuje się dłużej, ale uzyskuje lepsze rezultaty. Odchylenie standardowe uzyskiwanych sum podobnie jak dla schematu liniowego rośnie, gdy wykonywanych jest mniej iteracji temperatury (czyli dla mniejszego λ).

Warto również zwrócić uwagę, że kształt wykresu zależności czasu wykonywania algorytmu od współczynnika schładzania przyjmuje kształt zbliżony do wykresu $y = A \log_x B$, A i B - stałe, $x \in (0.5, 1)$.

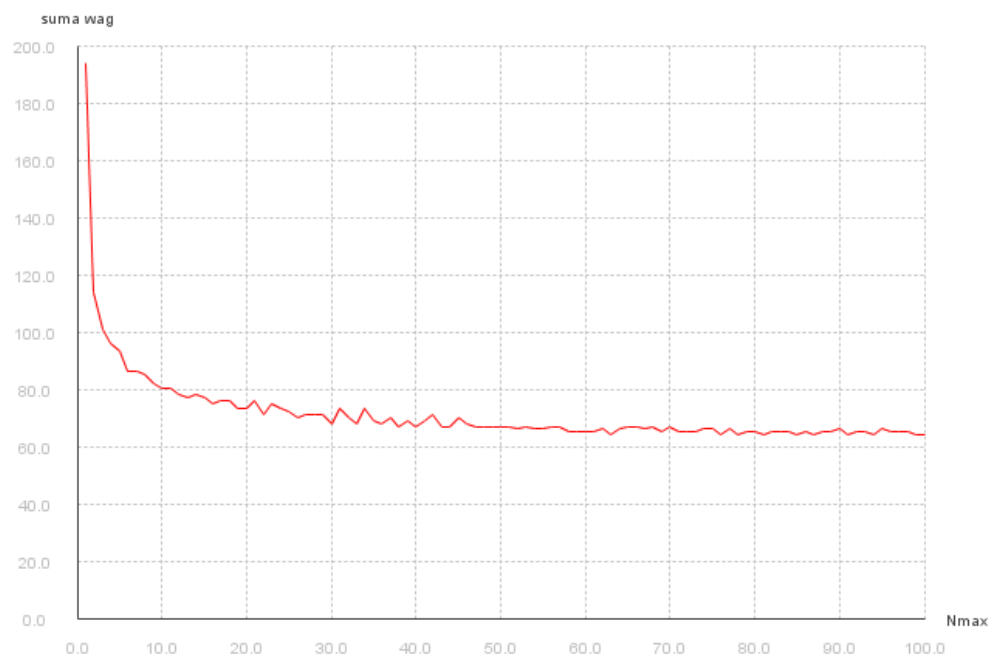
b. Liczba iteracji dla jednej temperatury

i. Schemat liniowy

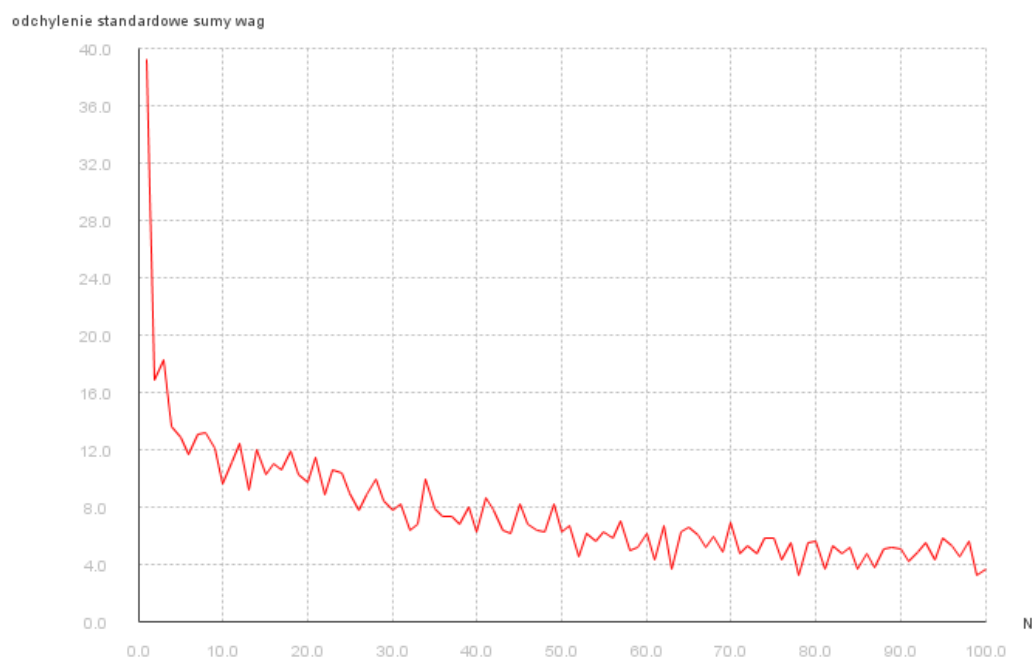
Wartości parametrów:

T_{max}	T_{min}	λ	N_{min}	krok N	N_{max}
100	1	1	1	1	100

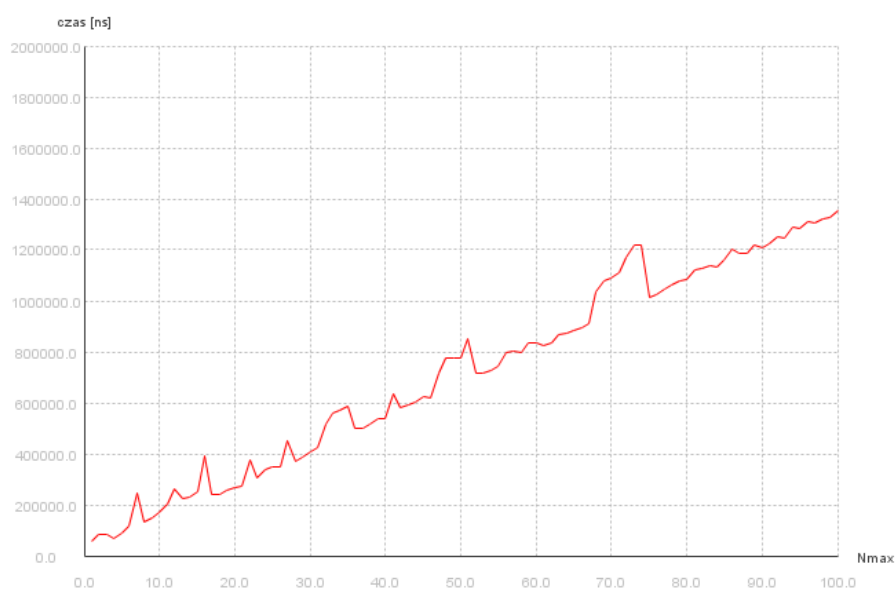
Tab. 3



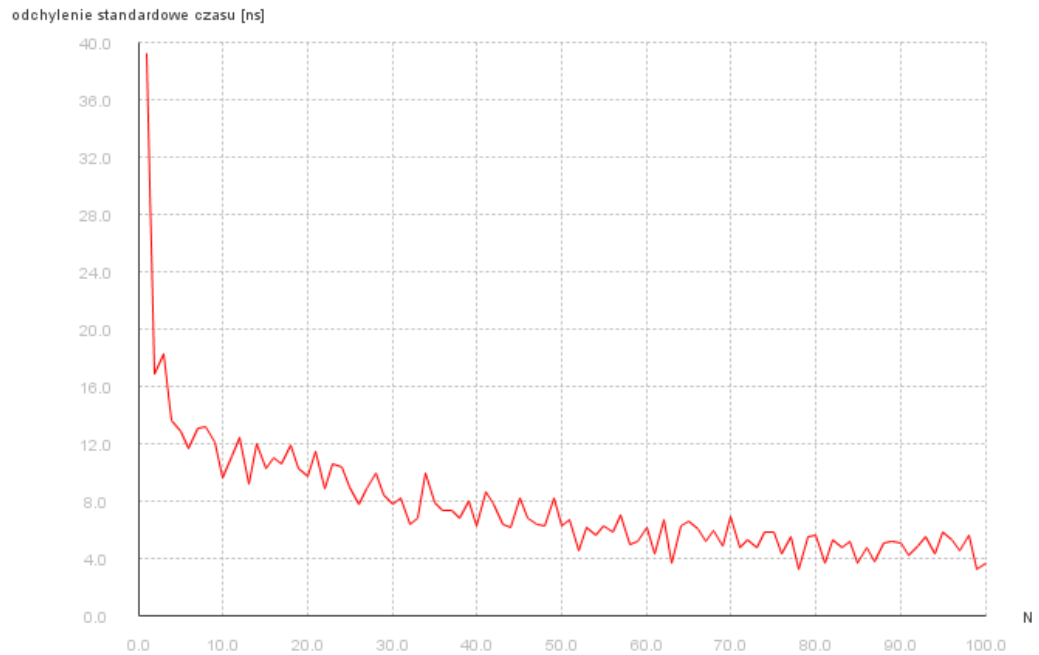
Wykres 9 Zależność średniej sumy wag krawędzi od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 10 Zależność odchylenia standardowego sumy wag krawędzi od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 11 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 12 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od liczby iteracji dla jednej temperatury.

Zgodnie z oczekiwaniami zaobserwowano, że wykres zależności średniego czasu wykonywania algorytmu rośnie wraz ze wzrostem liczby iteracji dla jednej temperatury i wykres ten przypomina wykres funkcji liniowej. Podobnie ponownie odchylenie standardowe - zarówno czasu jak i uzyskiwanych sum wag - spada wraz ze wzrostem liczby iteracji (spadek wpływu czynników losowych).

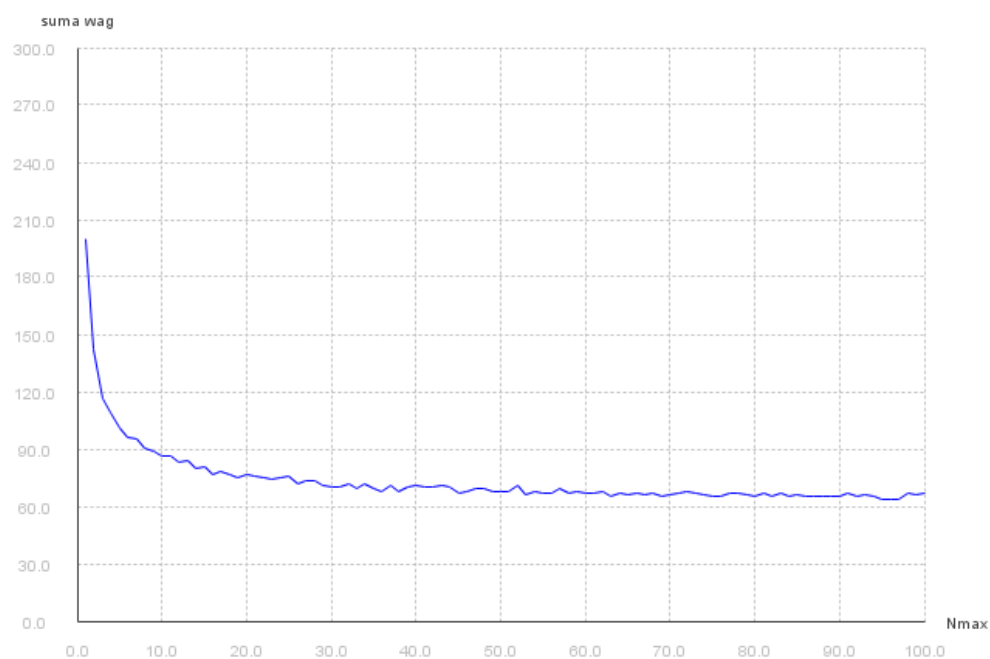
Zauważyć również należy, że dla małej liczby iteracji generowane rozwiązania są zauważalnie gorsze, natomiast przy parametrach $N = 25$ i większych jakość średniego rozwiązania nie różni się znacząco.

ii. Schemat geometryczny

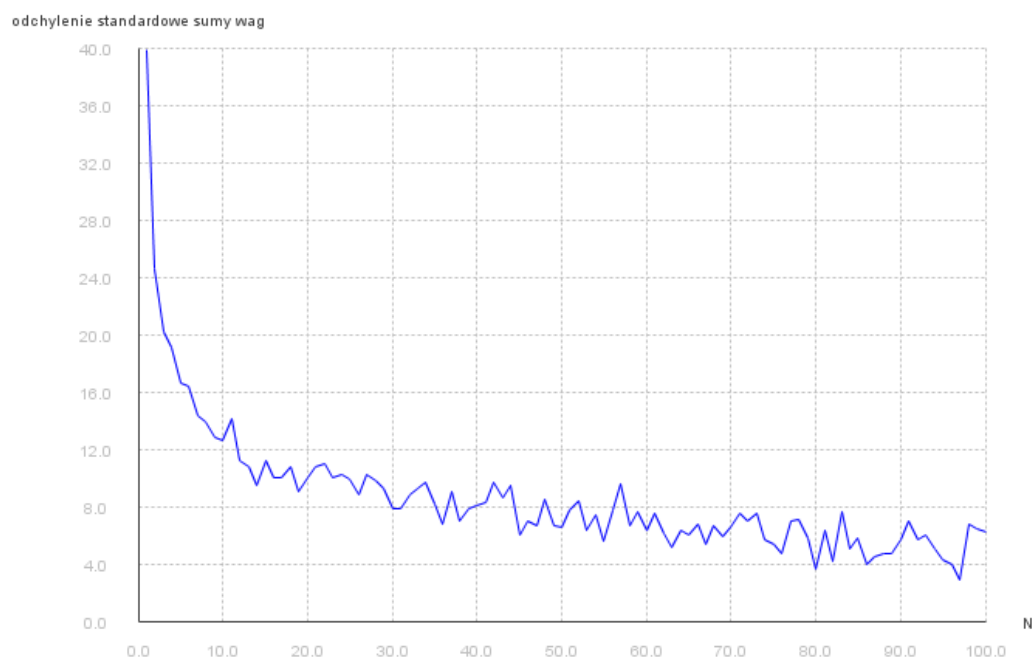
Wartości parametrów:

T_{max}	T_{min}	λ	N_{min}	krok N	N_{max}
100	1	0.7	1	1	100

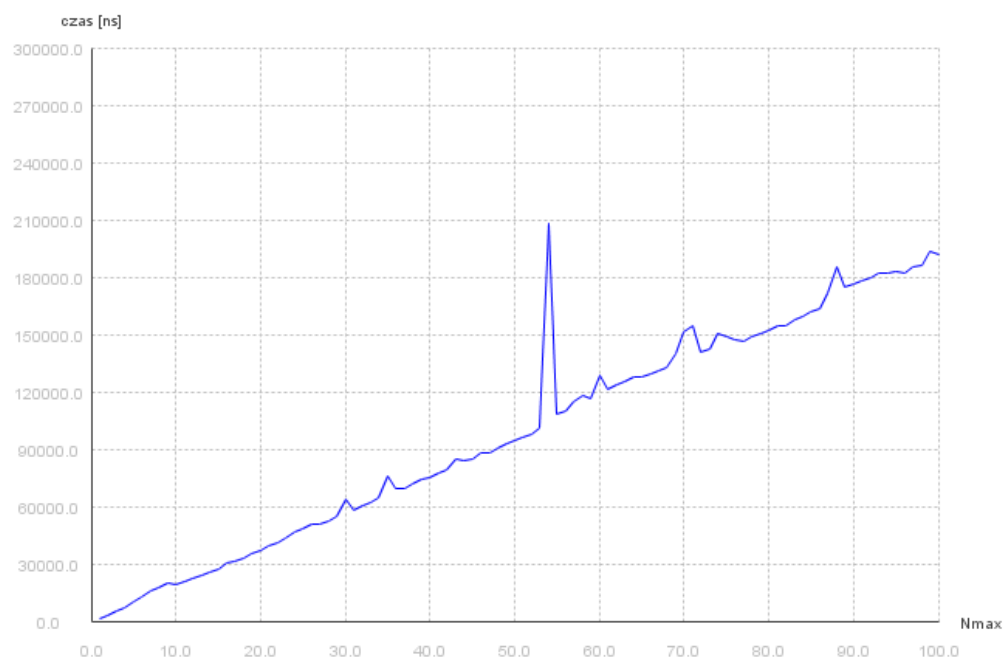
Tab. 4



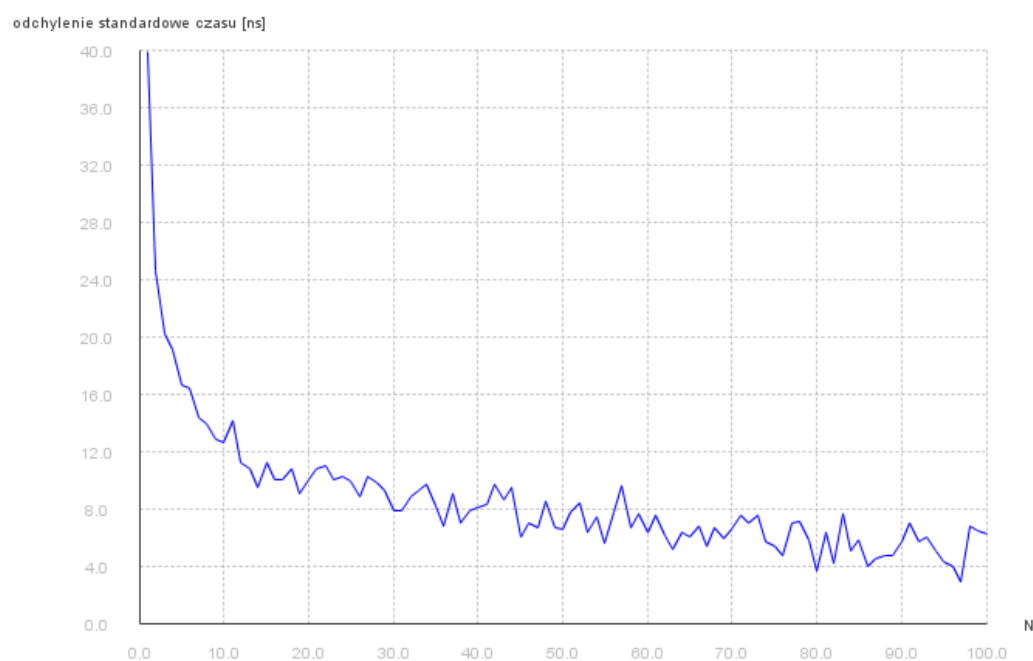
Wykres 13 Zależność średniej sumy wag krawędzi od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 14 Zależność odchylenia standardowego sumy wag krawędzi od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 15 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 16 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od liczby iteracji dla jednej temperatury.

Podobnie jak przy schładzaniu liniowym tak jak w schładzaniu geometrycznym przewidywana złożoność obliczeniowa algorytmu miała zależeć liniowo od liczby iteracji dla danej temperatury - jest to również widoczne na wykresach. Nie dziwią również lepsze wyniki (niższa suma wag) przy większej liczbie iteracji.

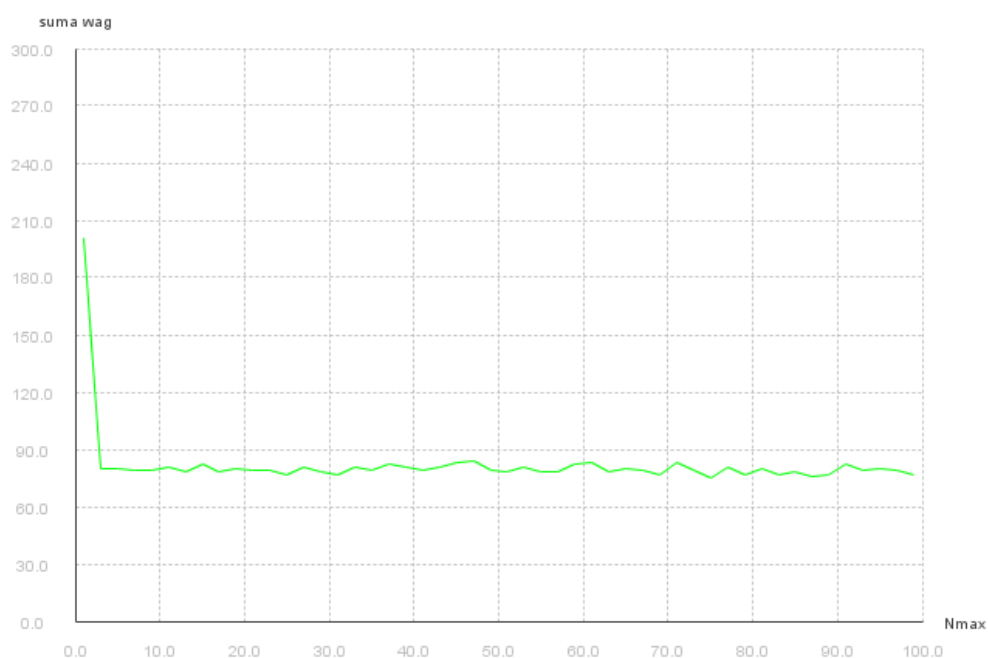
iii. Schemat logarytmiczny

Wartości parametrów:

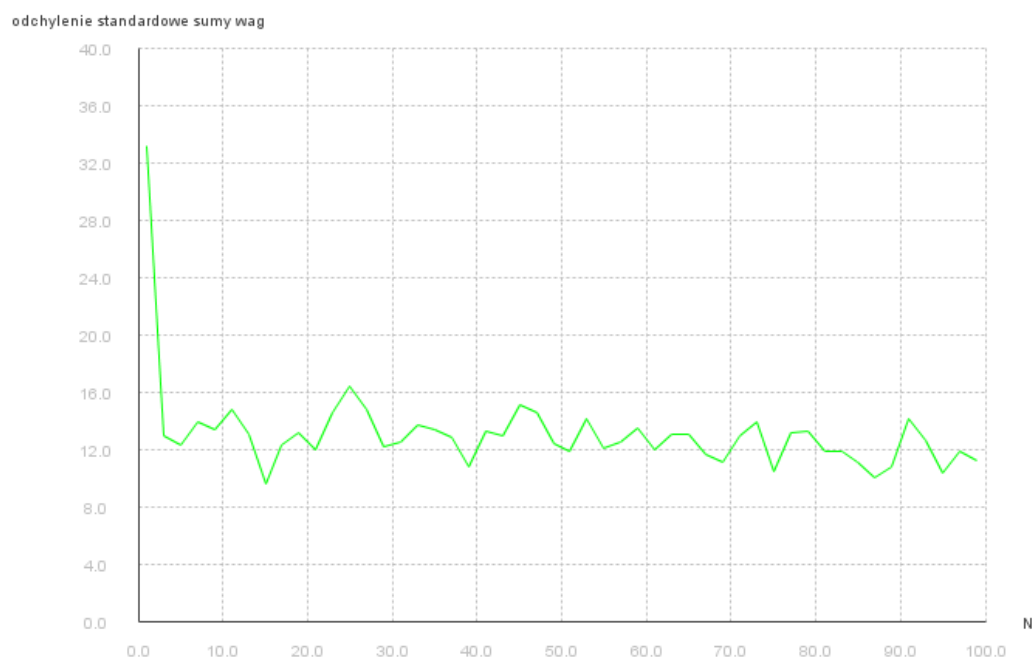
T_{max}	T_{min}	λ	N_{min}	krok N	N_{max}
50	5	-	1	2	100

Tab. 5

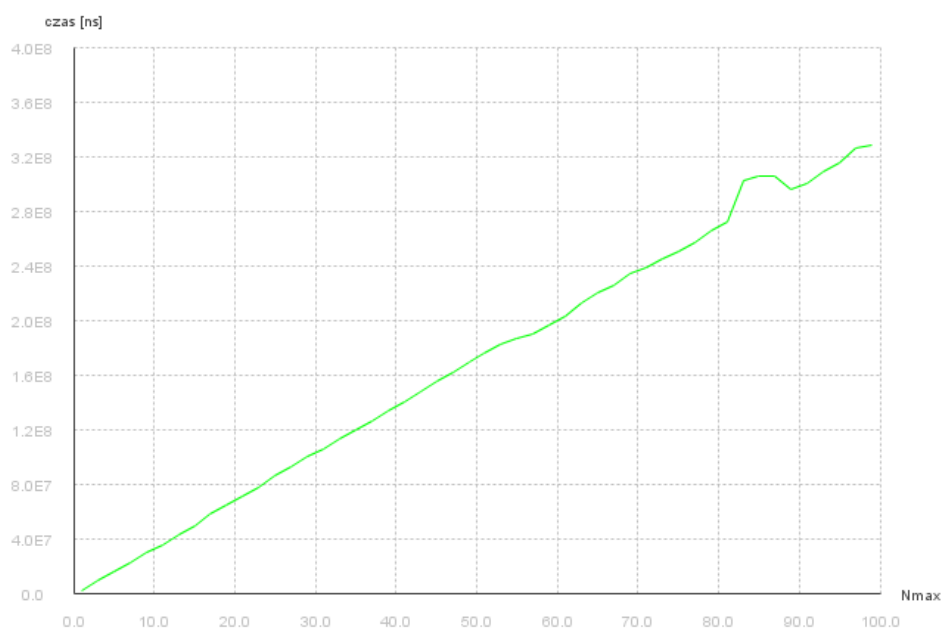
Ze względu na dużą złożoność algorytmu z zastosowaniem schematu logarytmicznego (proporcjonalną do $\exp(\frac{T_{max}}{T_{min}})$) zdecydowano się na mniejszy zakres temperatur: od 50 do 5.



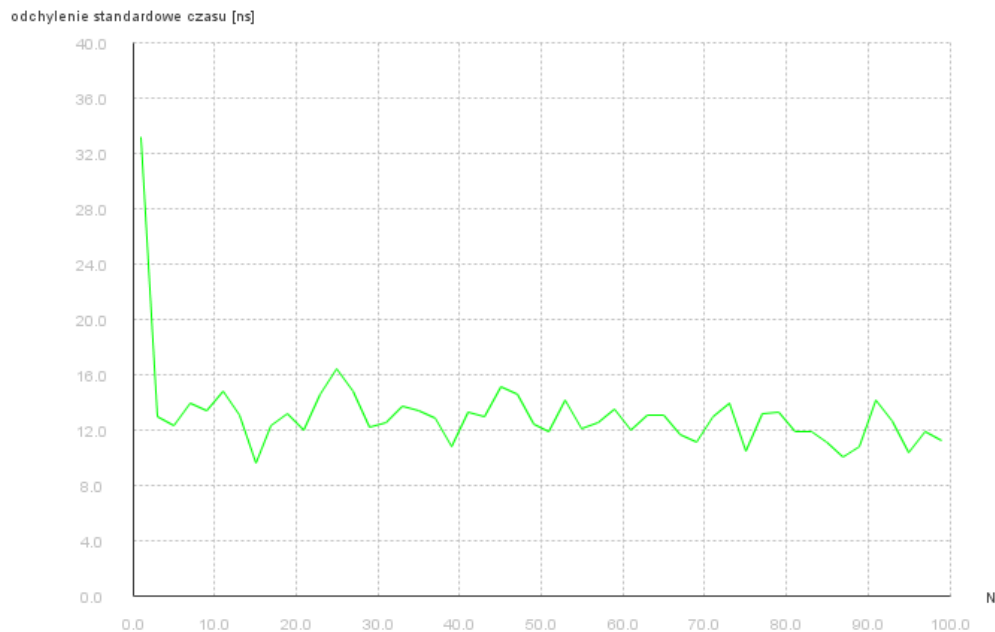
Wykres 17 Zależność średniej sumy wag od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 18 Zależność odchylenia standardowego rozwiązania algorytmu od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 19 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od liczby iteracji dla jednej temperatury.



Wykres 20 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od liczby iteracji dla jednej temperatury.

Pierwszą obserwację, która się nasuwa, jest fakt, że algorytm z zastosowaniem tego schematu chłodzenia działa zdecydowanie najwolniej - ze względu na postać wspomnianej złożoności obliczeniowej. W najgorszym wypadku algorytm pracował przez prawie 0.4 s.

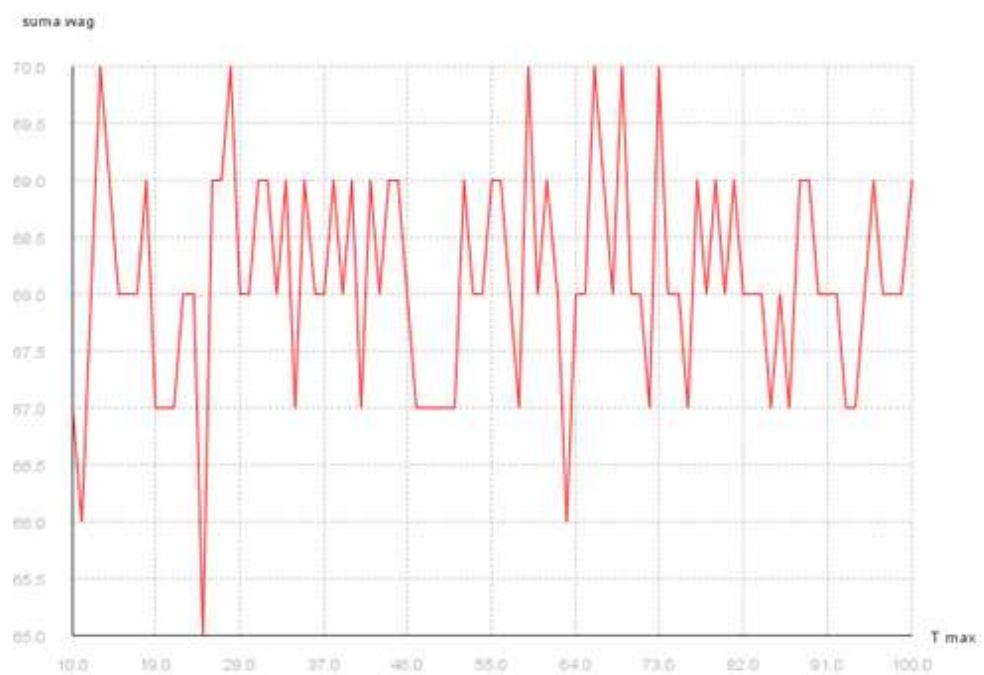
Ponownie zaobserwowano lepsze wyniki dla wyższej liczby iteracji, liniowy wygląd wykresu średniego czasu od N. Przy tym jednak schemacie schładzania zauważono, że już dla stosunkowo niewielkich wartości N (ok. 5) algorytm uzyskuje dobre rozwiązania i stabilizuje się odchylenie standardowe czasu wykonywania oraz sumy wag krawędzi.

c. Wartość temperatury początkowej

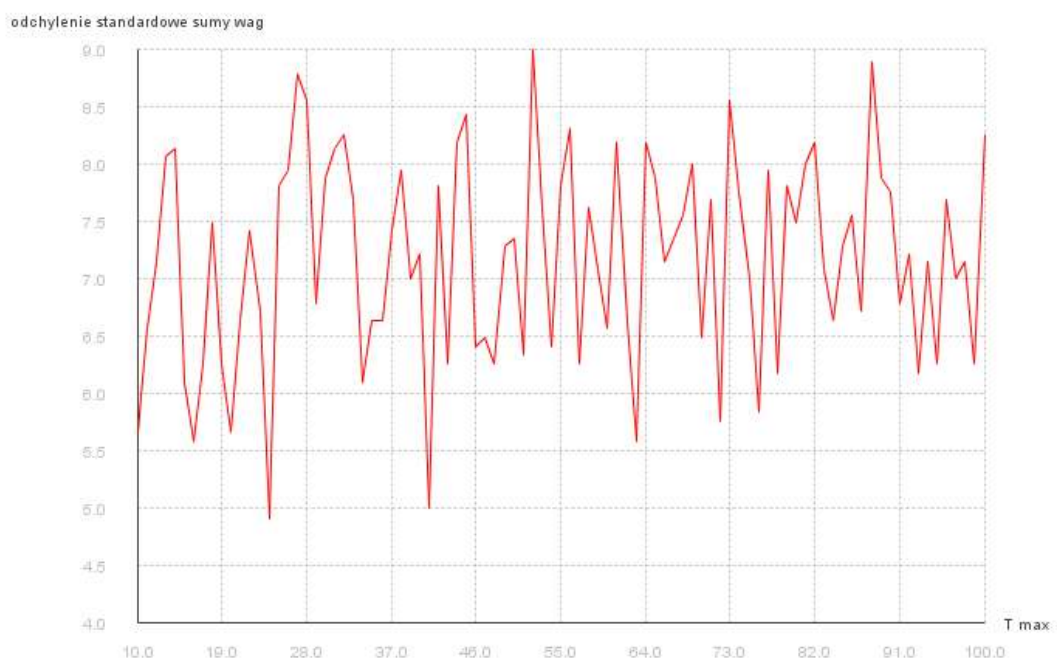
i. Schemat liniowy

N	T_{min}	λ	$T_{max_{min}}$	krok T_{max}	$T_{max_{max}}$
30	1	1	1	1	100

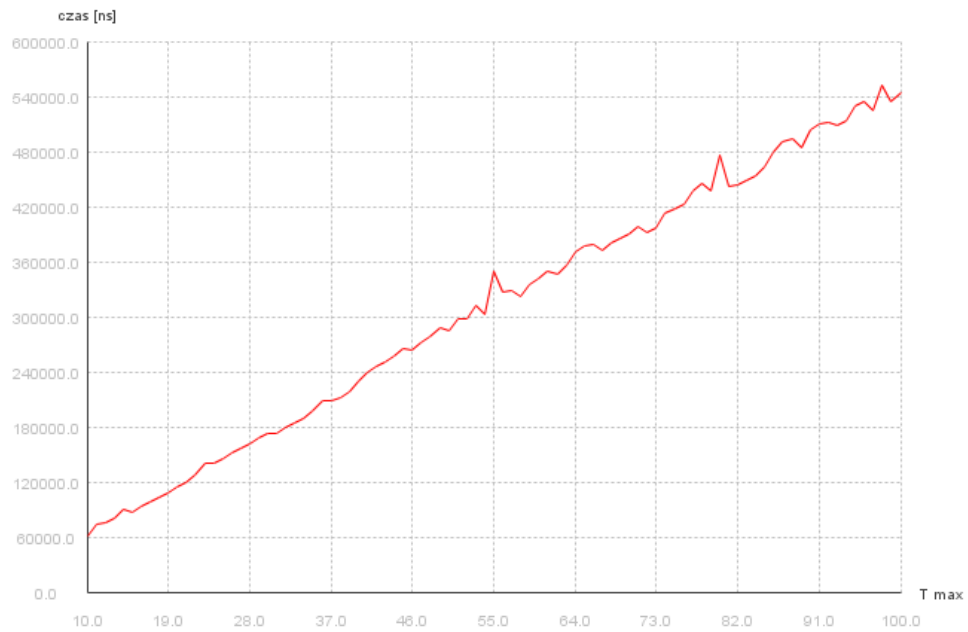
Tab. 6



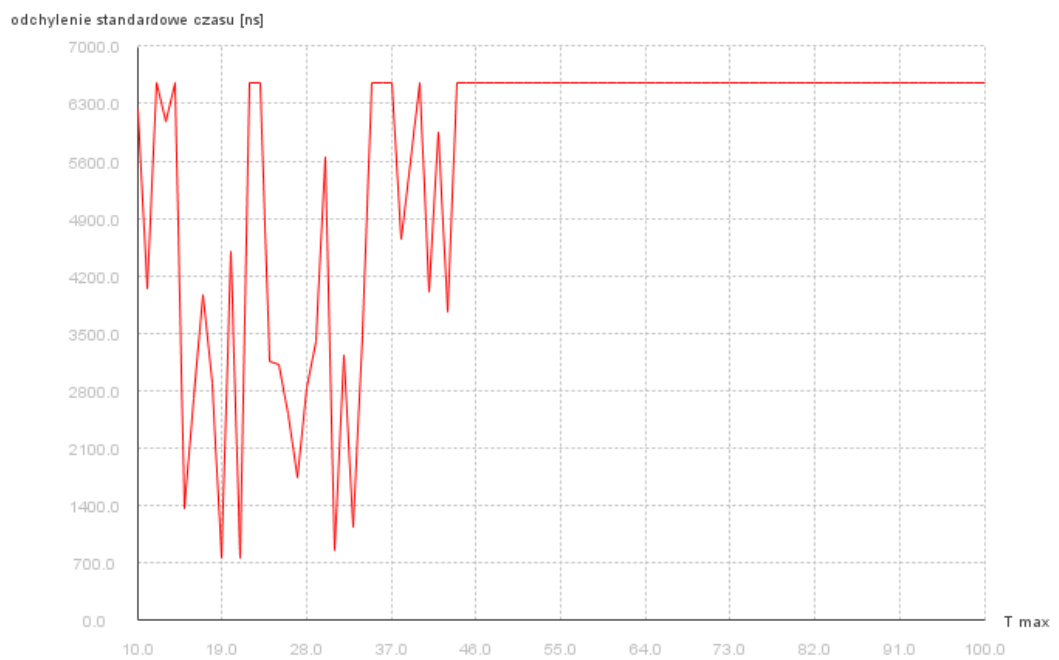
Wykres 21 Zależność średniej sumy wag krawędzi od temperatury początkowej.



Wykres 22 Zależność odchylenia standardowego sumy wag krawędzi od temperatury początkowej.



Wykres 23 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od temperatury początkowej.



Wykres 24 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od temperatury początkowej.

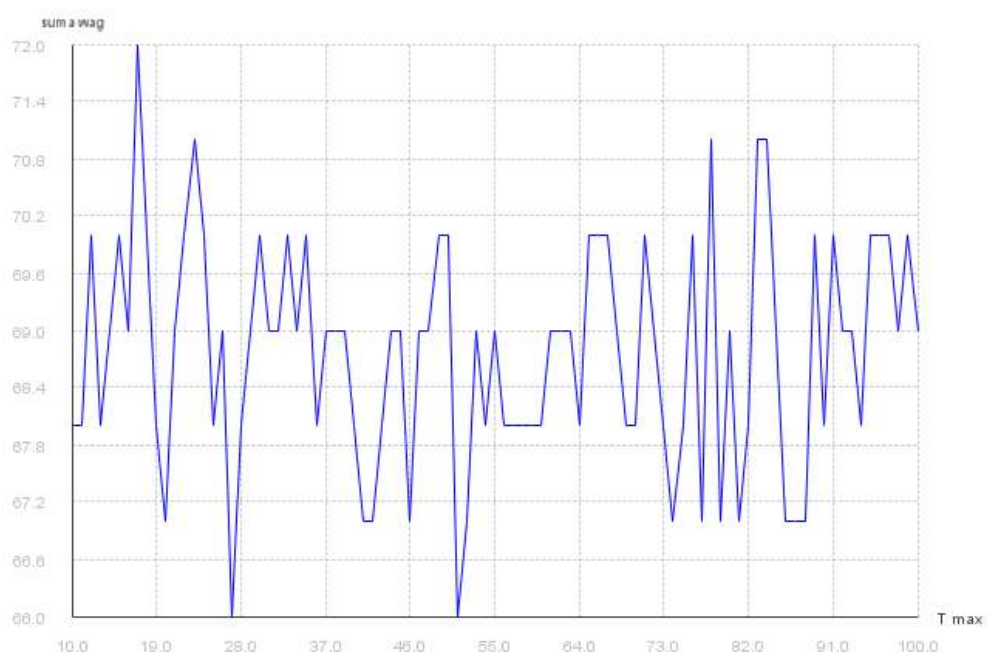
Wyższa temperatura początkowa chroni przed utknięciem w minimum lokalnym. Wnioskując z wykresu zależności sumy wag krawędzi od temperatury początkowej w badanym grafie nie ma zbyt wielu "pułapek" z tego powodu dobór temperatury początkowej nie ma aż takiego wpływu na jakość działania algorytmu.

Za to zgodnie z oczekiwaniami jest wprost proporcjonalny do złożoności obliczeniowej.

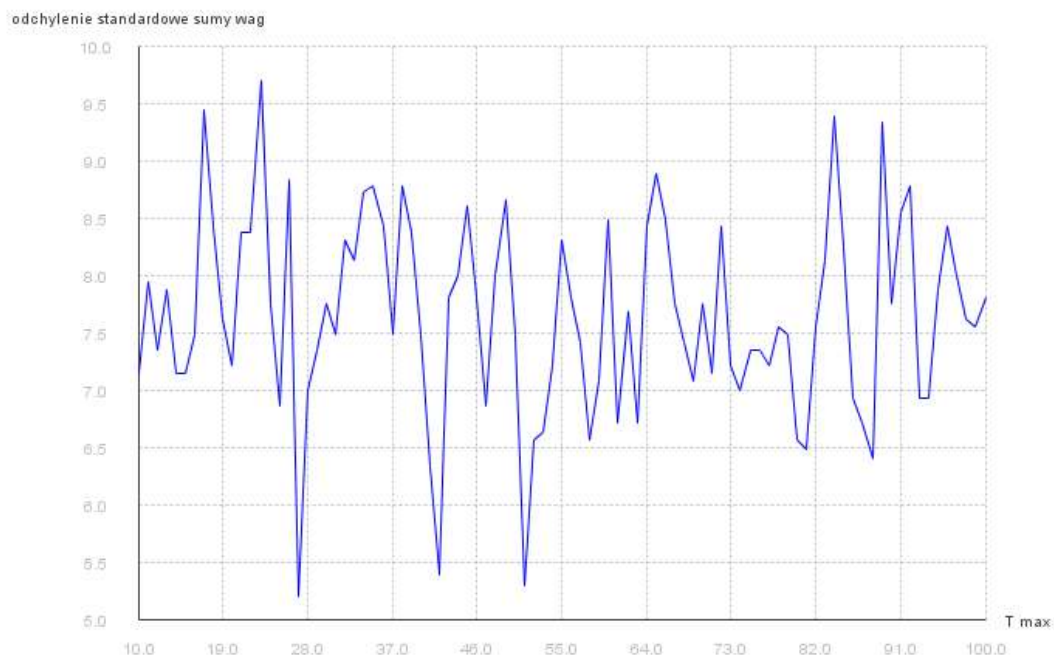
ii. Schemat geometryczny

N	T_{min}	λ	$T_{max_{min}}$	krok T_{max}	$T_{max_{max}}$
30	1	0.7	1	1	100

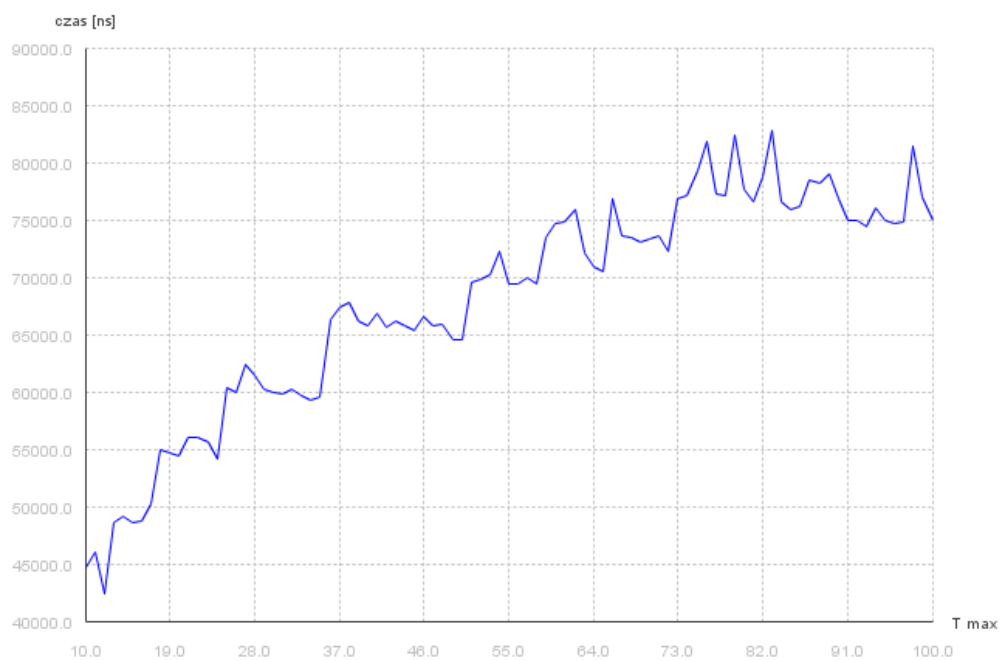
Tab. 7



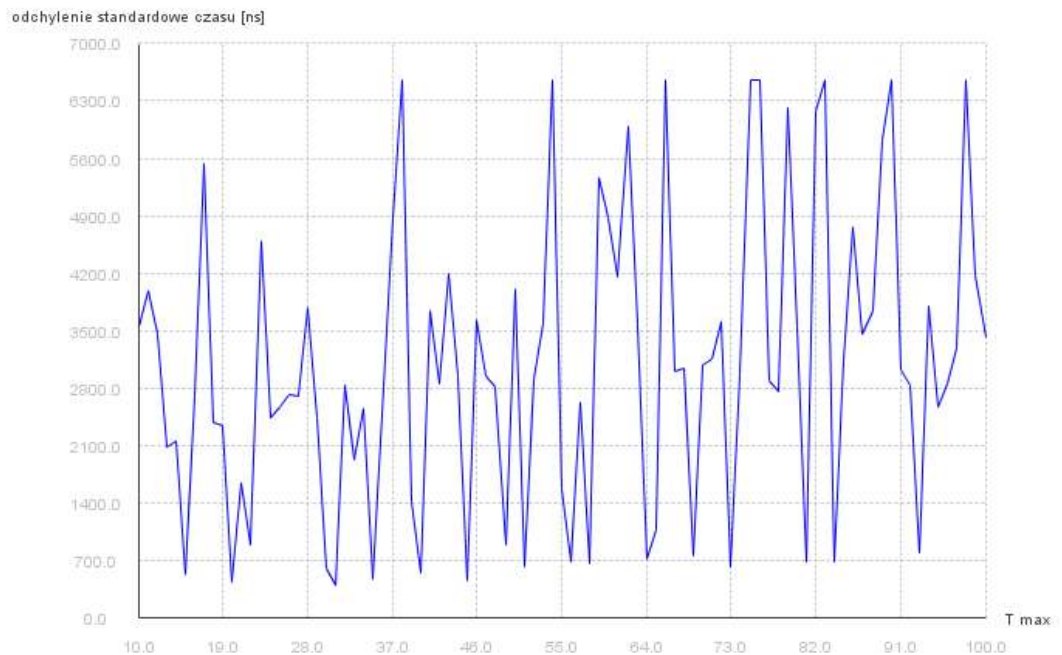
Wykres 25 Zależność średniej sumy wag krawędzi od temperatury początkowej.



Wykres 26 Zależność odchylenia standardowego sumy wag krawędzi od temperatury początkowej.



Wykres 27 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od temperatury początkowej.



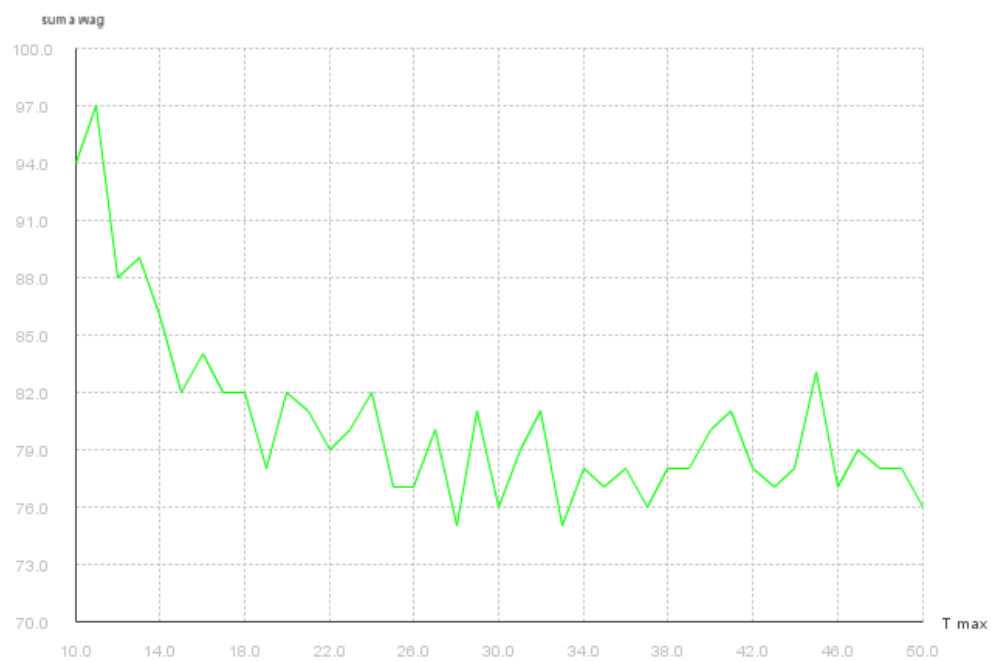
Wykres 28 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od temperatury początkowej.

Podobnie jak w przypadku schładzania liniowego wartość temperatury początkowej nie wpływa znacząco na ostateczny wynik działania algorytmu. Zauważyć należy natomiast, że kształt krzywej reprezentującej zależność średniego czasu trwania algorytmu od wartości temperatury początkowej przypomina kształtem krzywą $y = -A \log_B x$ dla $0 < B < 1$, co jest zgodne z przewidywaną złożonością obliczeniową.

iii. Schemat logarytmiczny

N	T_{min}	λ	$T_{max_{min}}$	krok T_{max}	$T_{max_{max}}$
10	5	1	10	1	50

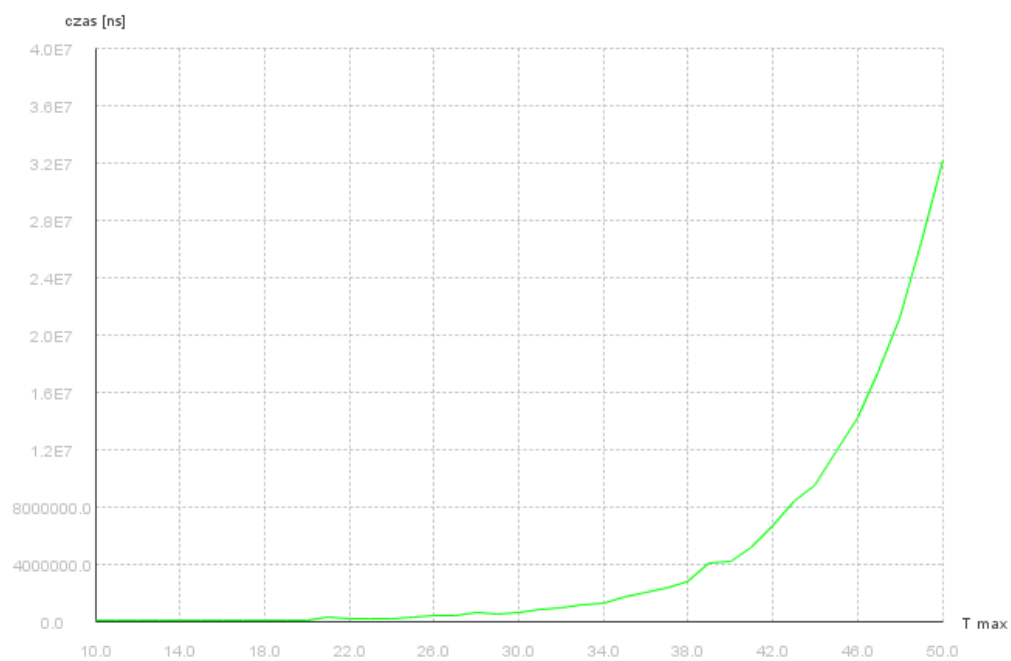
Tab. 8



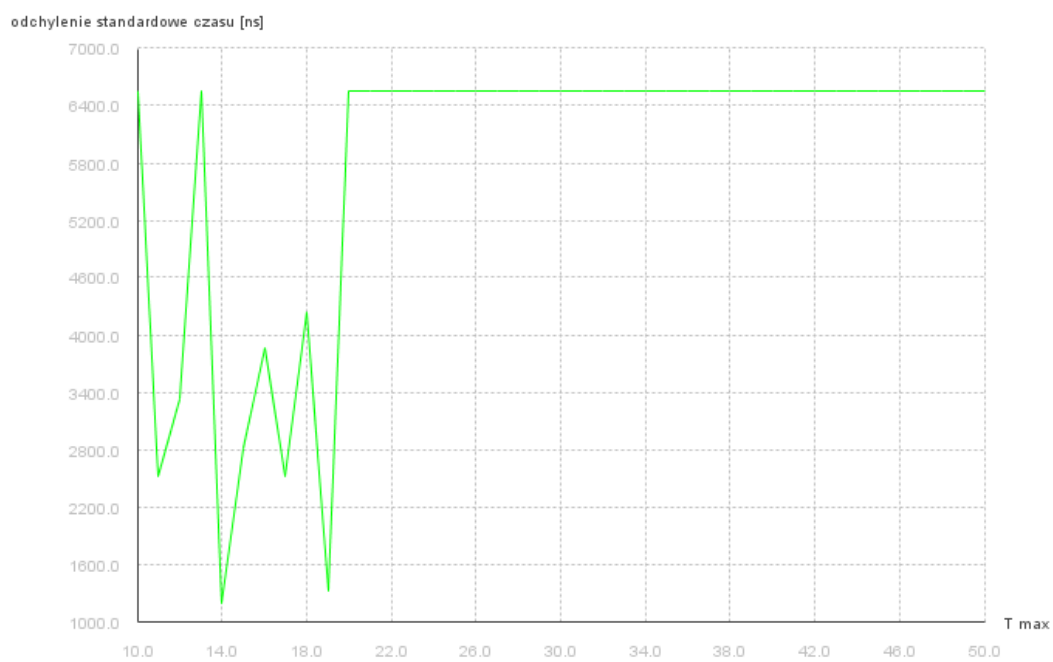
Wykres 30 Zależność średniej sumy wag od temperatury początkowej.



Wykres 31 Zależność odchylenia standardowego sumy wag od temperatury początkowej.



Wykres 31 Zależność średniego czasu trwania algorytmu od temperatury początkowej.



Wykres 32 Zależność odchylenia czasu trwania algorytmu od temperatury początkowej.

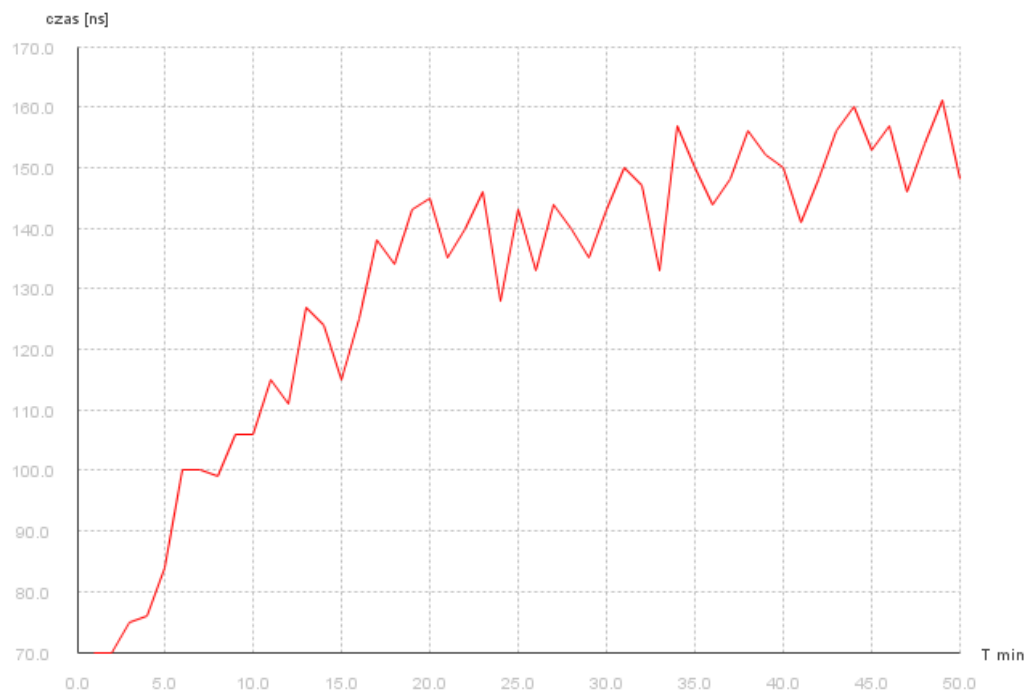
Wartość temperatury zamrażania

i. Schemat liniowy

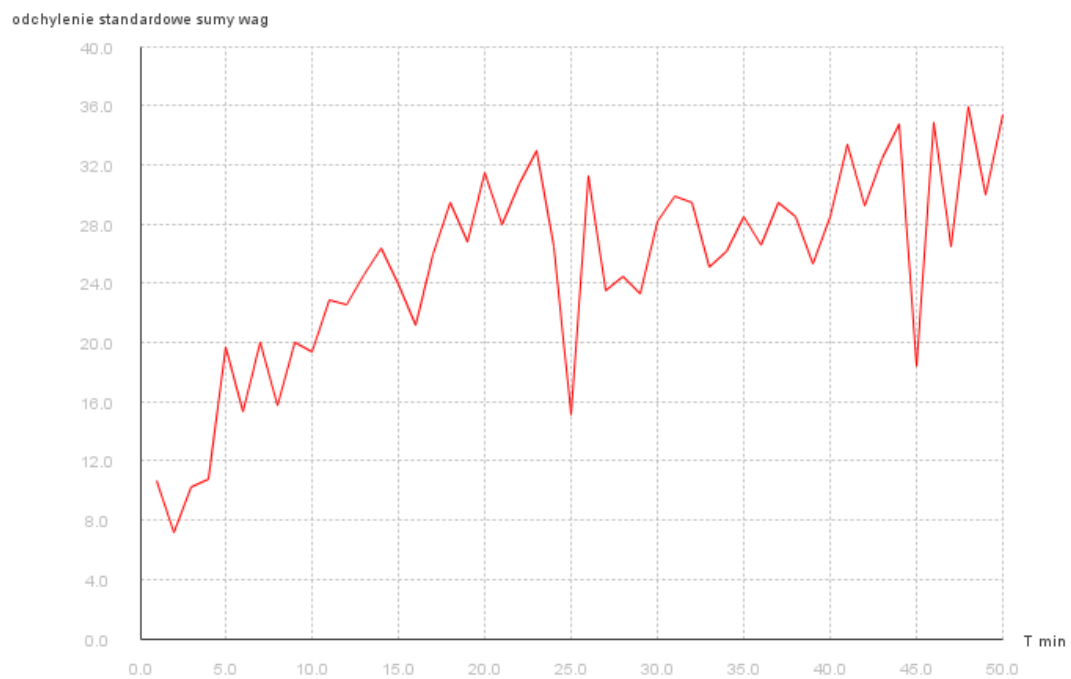
Wartości parametrów:

T_{max}	N_{max}	λ	$T_{min_{min}}$	krok T_{min}	$T_{min_{max}}$
100	30	1	1	1	50

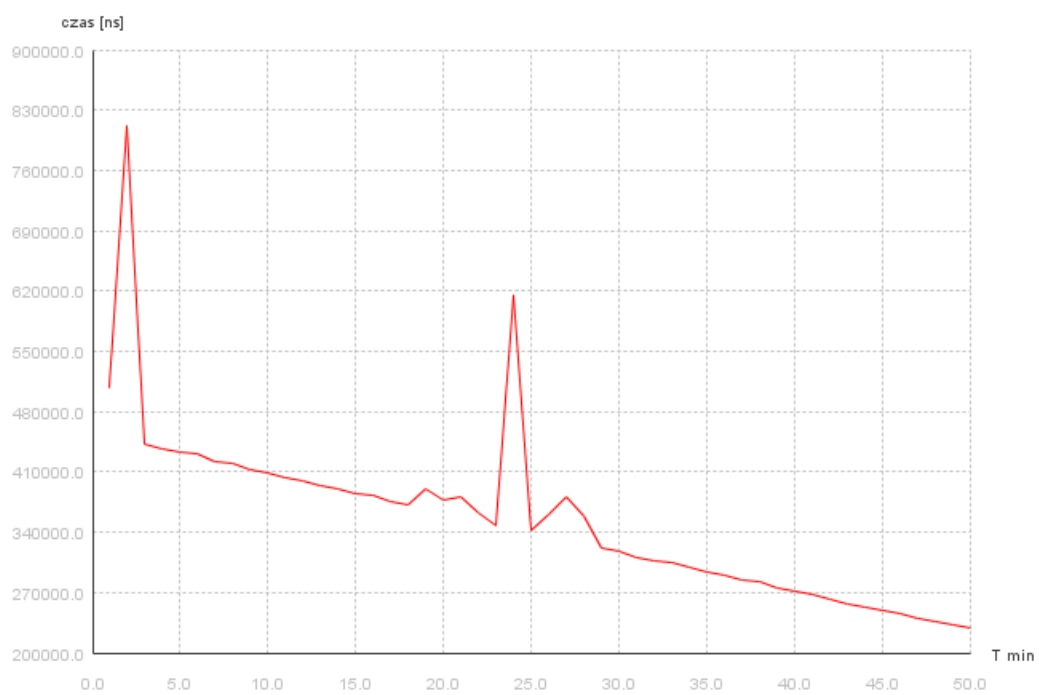
Tab.9.



Wykres 33 Zależność średniej sumy wag krawędzi od temperatury zamrażania



Wykre 34 Zależność odchylenia standardowego sumy wag krawędzi od temperatury zamrażania



Wykres 35 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od temperatury zamrażania

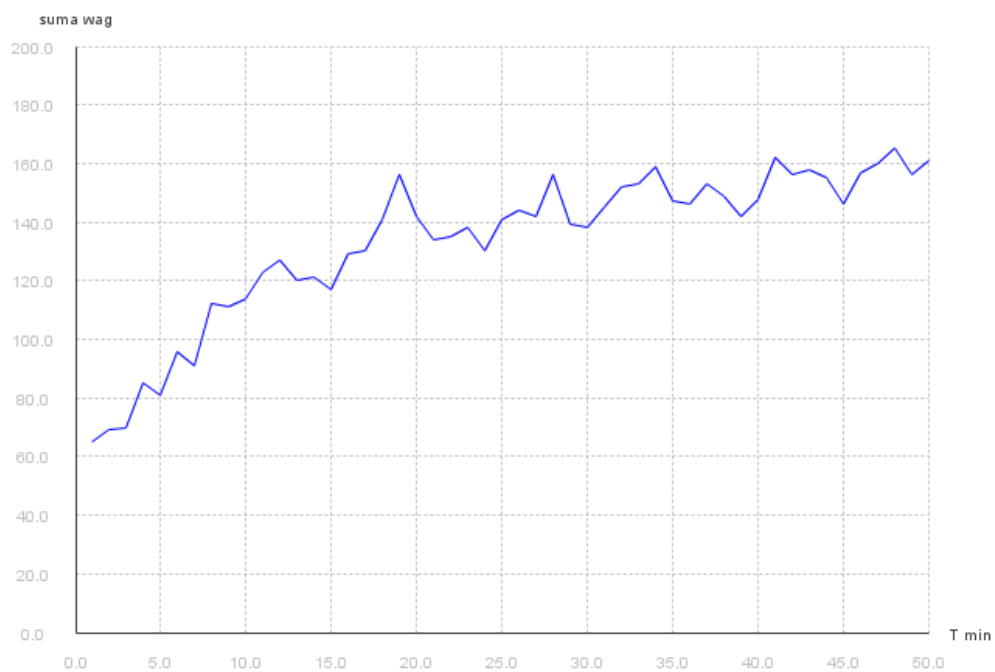


Wykre 36 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od temperatury zamrażania.

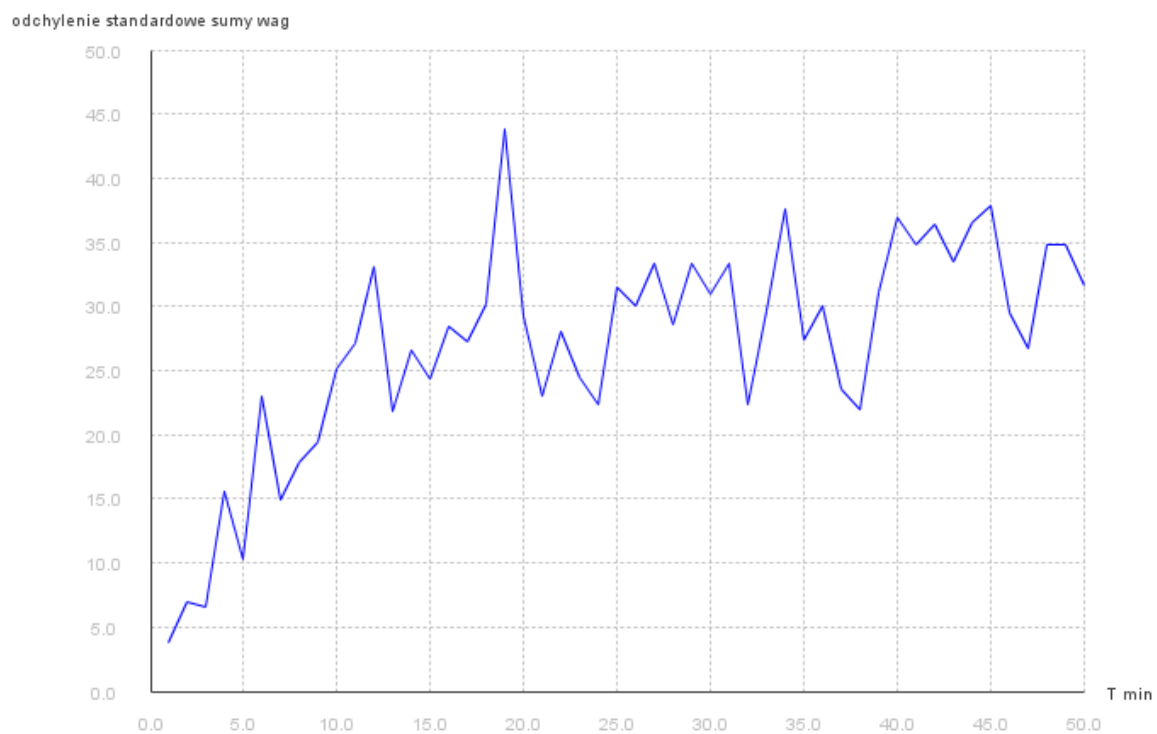
iii. ii. Schemat geometryczny

N	T_{max}	λ	$T_{min_{min}}$	krok T_{min}	$T_{min_{max}}$
30	100	0.9	1	1	50

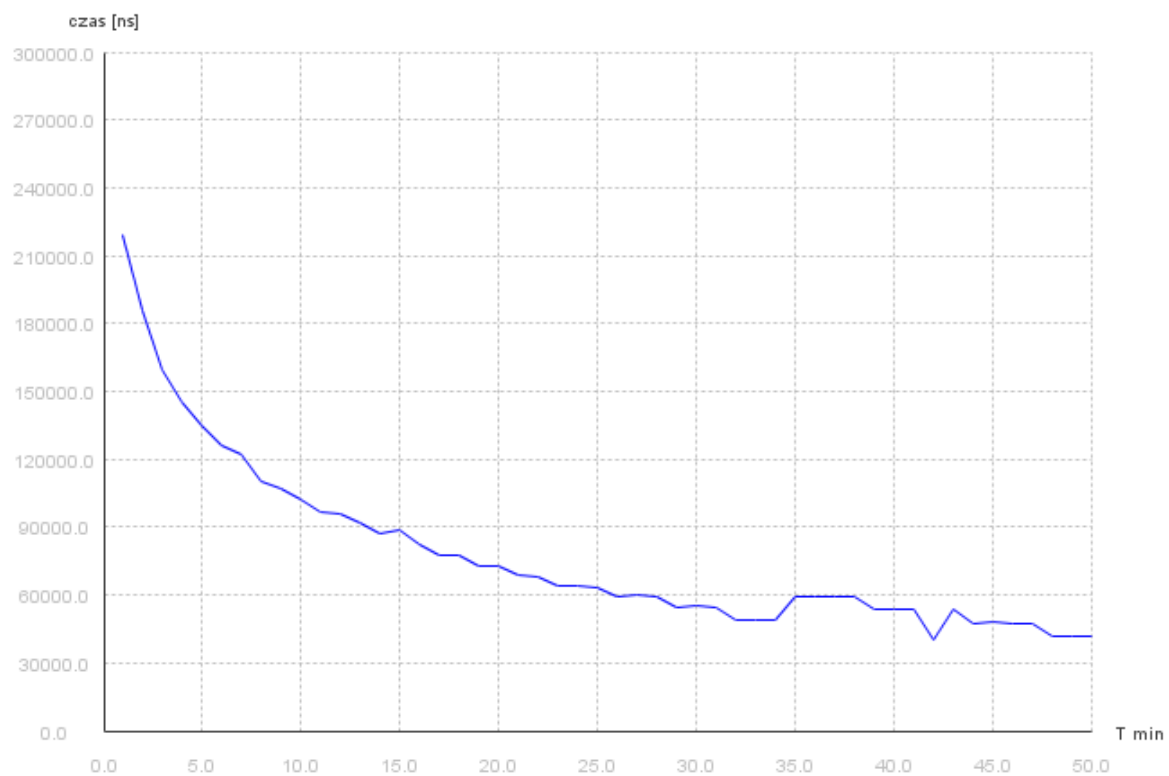
Tab. 10



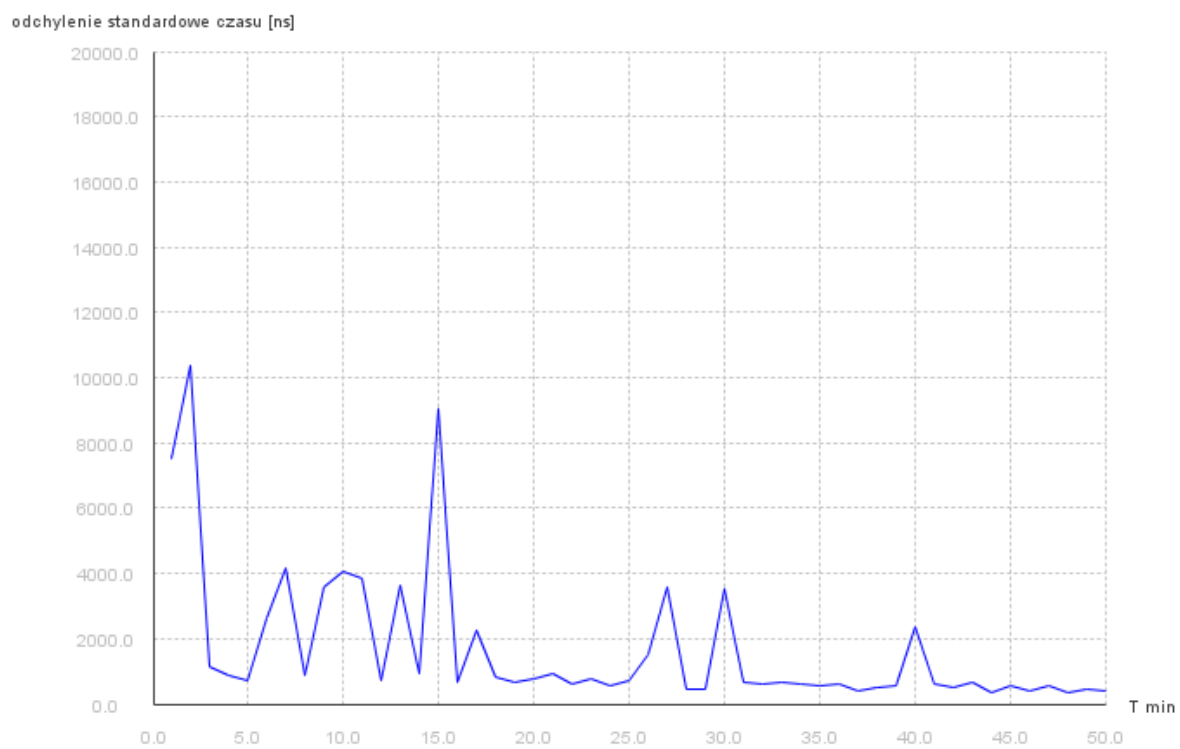
Wykres 37 Zależność średniej sumy wag krawędzi od temperatury zamrażania



Wykres 38 Zależność odchylenia standardowego sumy wag krawędzi od temperatury zamrażania



Wykres 39 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od temperatury zamrażania

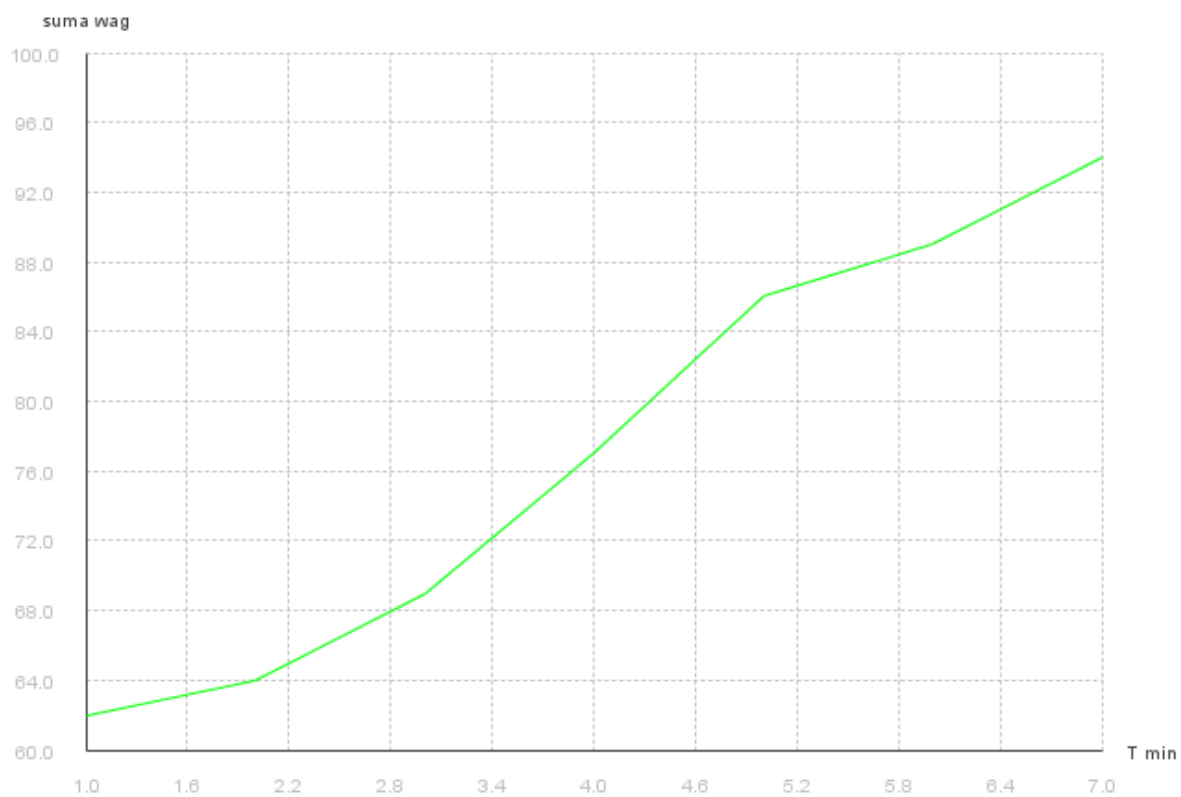


Wykres 40 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od temperatury zamrażania.

iv. Schemat logarytmiczny

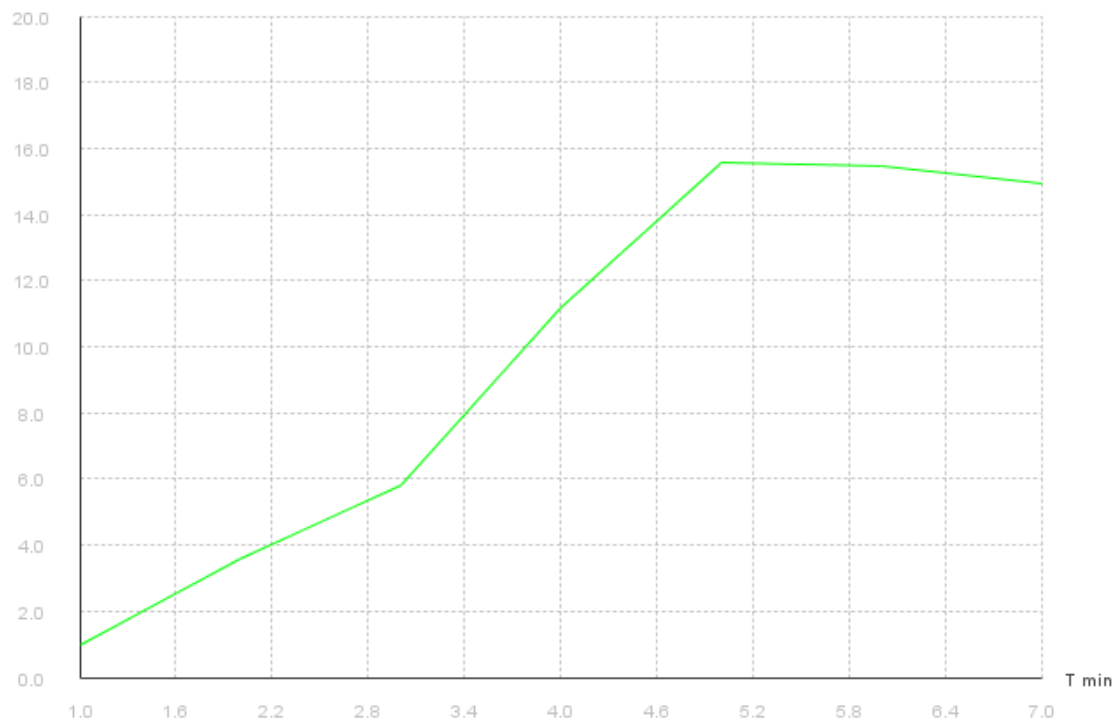
N	T_{max}	λ	$Tmin_{min}$	$Tmin_{max}$
10	15	1	1	7

Tab. 11

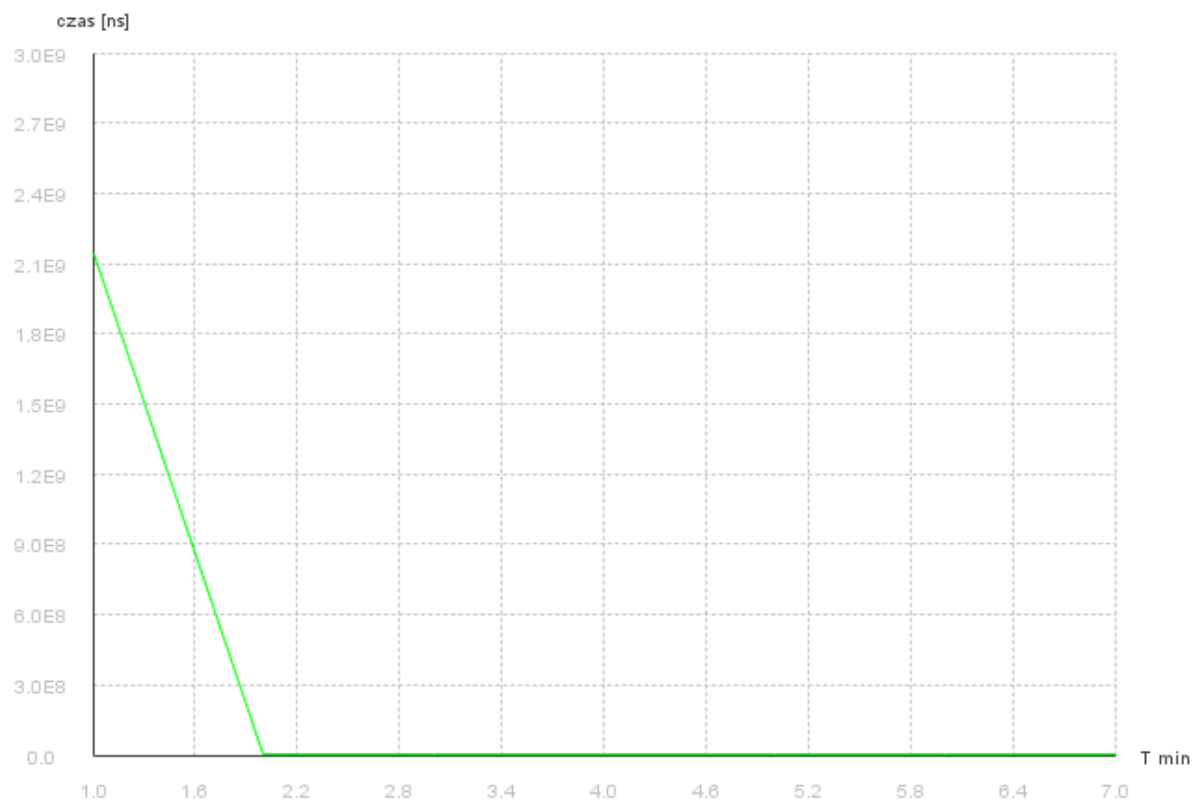


Wykres 41 Zależność średniej sumy wag krawędzi od temperatury zamrażania

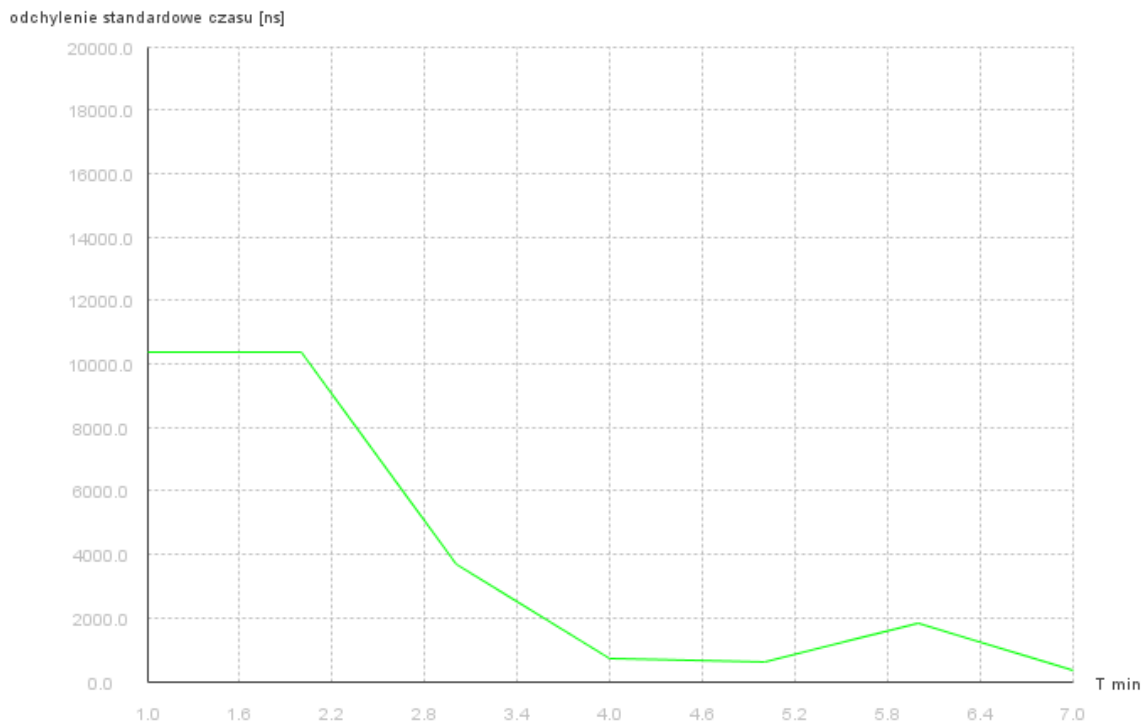
odchylenie standardowe sumy wag



Wykres 42 Zależność odchylenia standardowego sumy wag krawędzi od temperatury zamrażania



Wykres 43 Zależność średniego czasu wykonywania algorytmu od temperatury zamrażania



Wykres 44 Zależność odchylenia standardowego czasu wykonywania algorytmu od temperatury zamrażania.

Dobór temperatury zamrażania ma wpływ na uzyskany wynik, jako, że w zakresie tych temperatur jest uzyskiwane rozwiązanie. W związku z tym - im wyższa temperatura zamrażania, tym gorszy wynik.

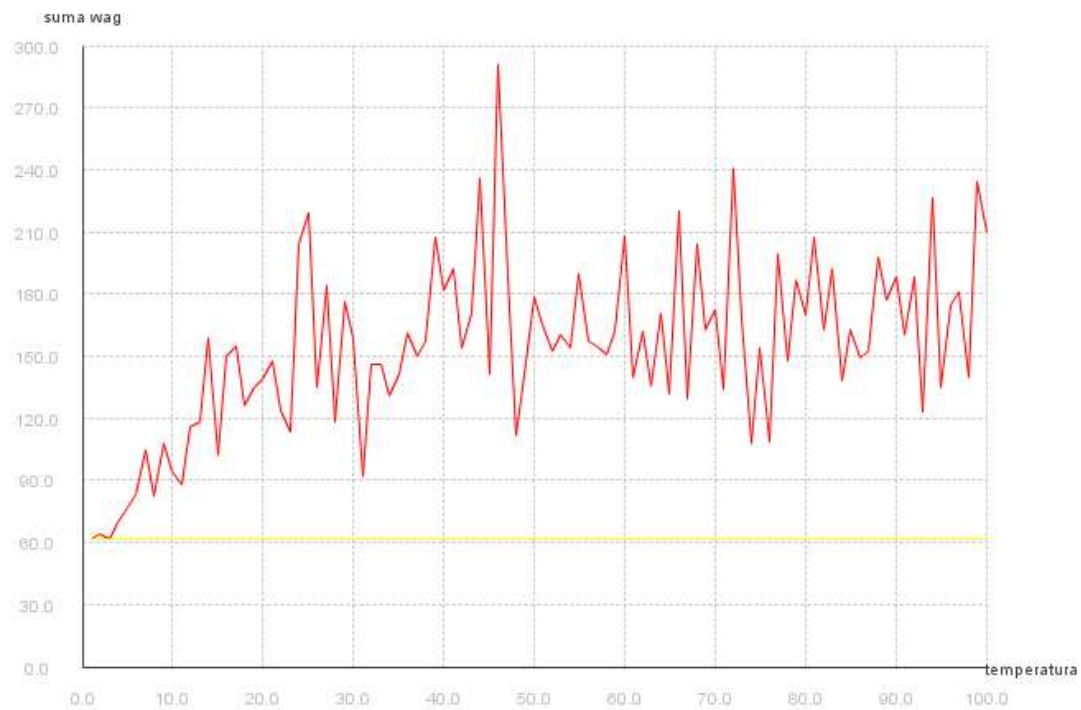
Jednocześnie wyższa temperatura zamrażania zmniejsza ilość iteracji, dlatego złożoność czasowa jest niższa.

d. Szukanie rozwiązania dla grafu.

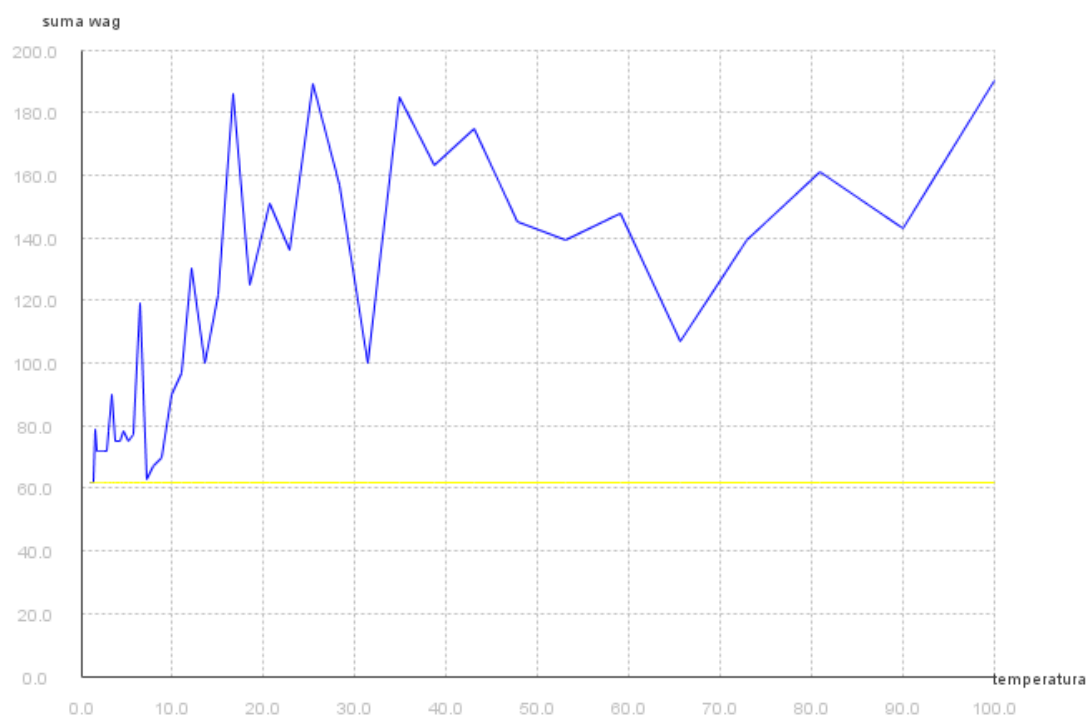
Zakładka "Rozwiązanie grafu" pozwala na znalezienie rozwiązania dla zadanego grafu. Dla grafów o liczbie wierzchołków jednego przydziału nie większej od 10 jest możliwość porównania wyniku z faktycznym minimum (znalezionym przez pełne przeszukiwanie).

Poniższe wykresy ilustrują przyjmowane pośrednie rozwiązania (sumy wag) dla kolejnych temperatur (z odniesieniem do minimum - żółty wykres).

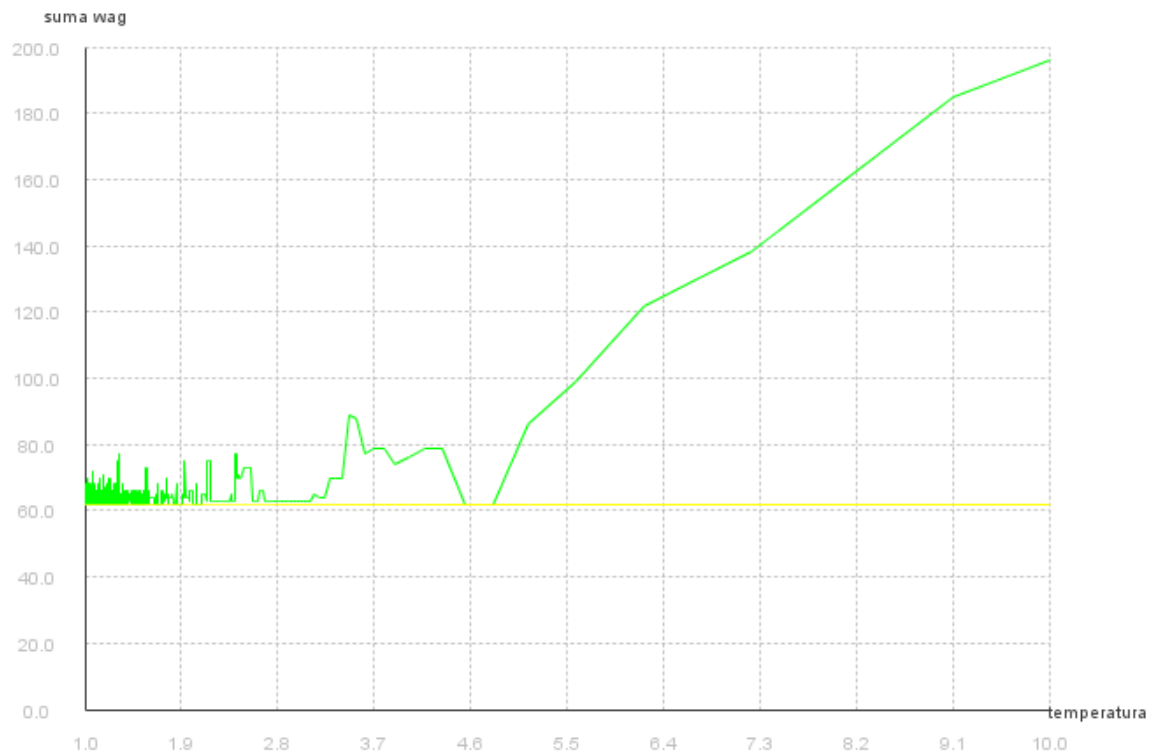
Wykresy te są jednocześnie weryfikacją poprawności działania algorytmu. O ile w zakresie wysokich temperatur przyjmowane rozwiązania mogą być losowe (ze względu na duże prawdopodobieństwo przyjęcia gorszego rozwiązania), tak w zakresie niskich temperatur przyjmowane rozwiązania powinny dążyć do mniejszych wartości.



Wykres 45 Tymczasowe rozwiązania dla kolejnych temperatur - schemat liniowy



Wykres 46 Tymczasowe rozwiązania dla kolejnych temperatur - schemat geometryczny



Wykres 47. Tymczasowe rozwiązania dla kolejnych temperatur - schemat logarytmiczny

Testowanie algorytmu dla grafów o różnym rozmiarze

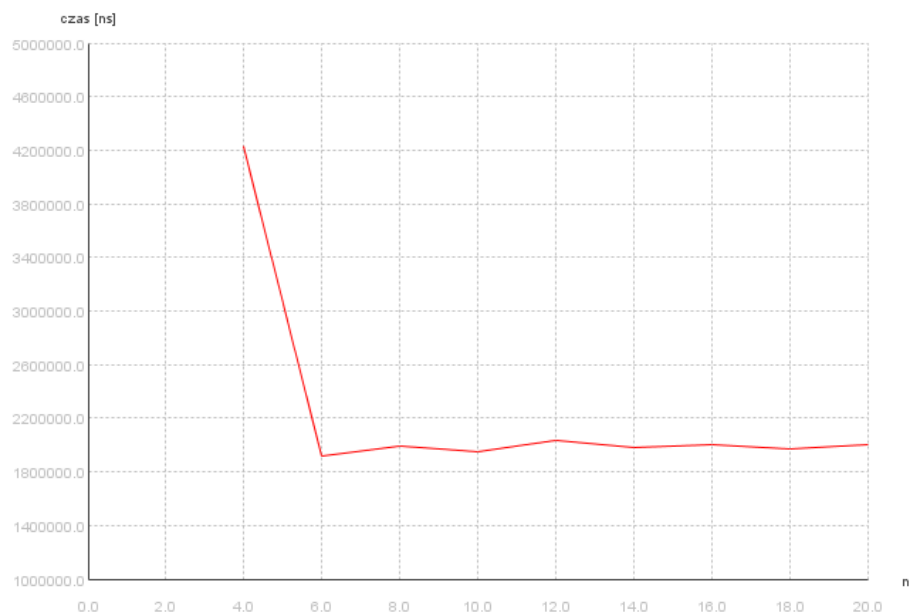
Wykonane zostały testy, które obrazują złożoność czasową w zależności od rozmiaru grafu. Wygenerowane zostały grafy o rozmiarach od 2 do 10 wierzchołków jednego przedziału. Wagi krawędzi w zakresie od 1 do 100.

i. Schemat liniowy

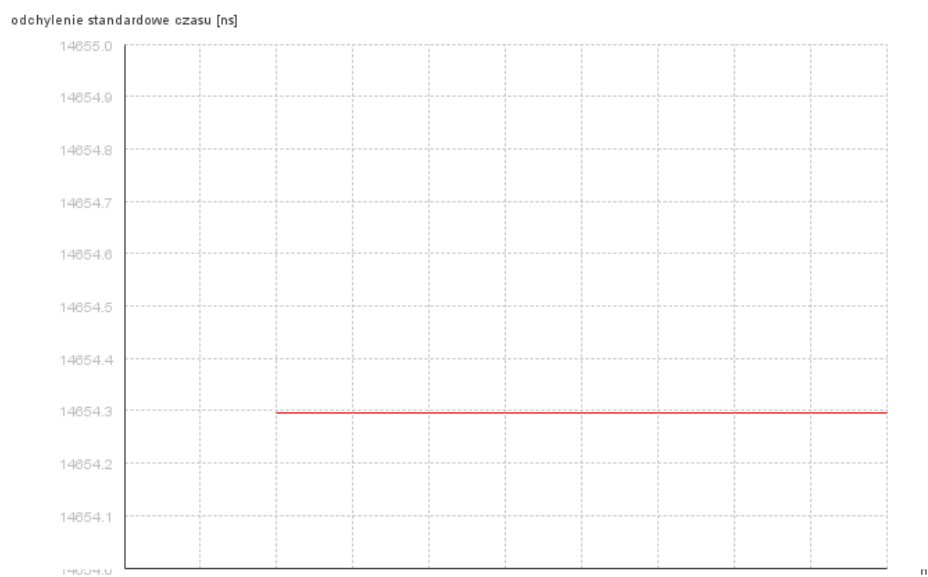
Wartości parametrów:

T_{max}	T_{min}	λ	N_{max}
100	1	1	100

Tab. 12



Wykres 48 złożoność czasowa w zależności od liczby wierzchołków jednego przedziału- schemat liniowy



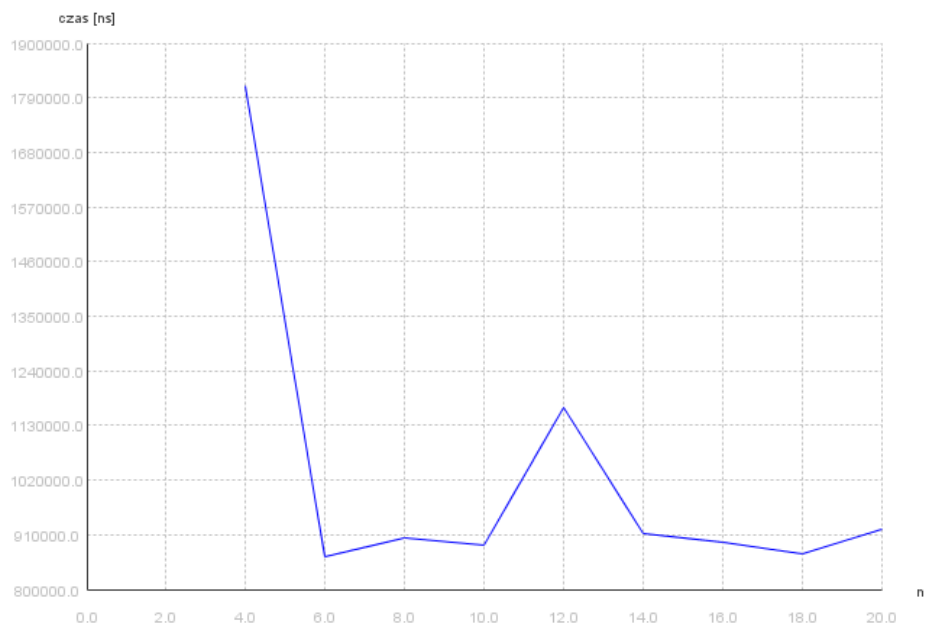
Wykres 49 Odchylenie standardowe w zależności od liczby wierzchołków jednego przedziału - schemat liniowy

ii. Schemat geometryczny

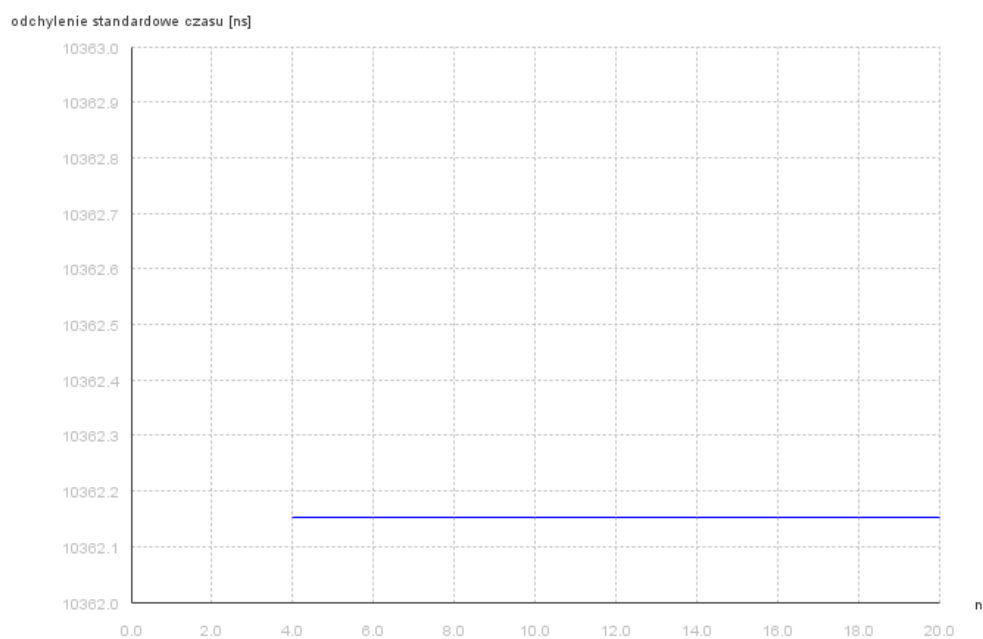
Wartości parametrów:

T_{max}	T_{min}	λ	N_{max}
100	1	0,9	100

Tab. 13



Wykres 50 złożoność czasowa w zależności od liczby wierzchołków jednego przedziału- schemat geometryczny

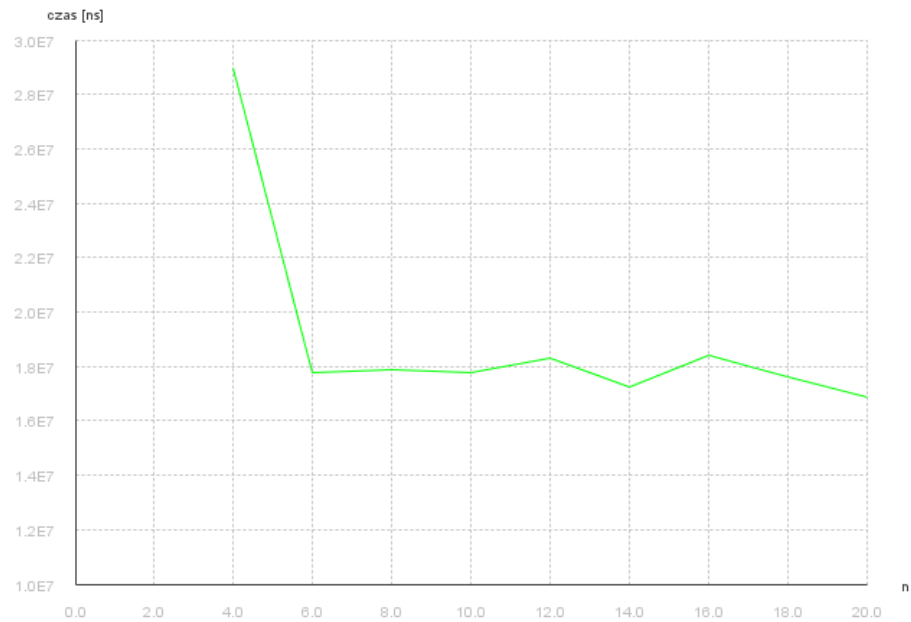


Wykres 51 Odchylenie standardowe w zależności od liczby wierzchołków jednego przedziału- schemat geometryczny

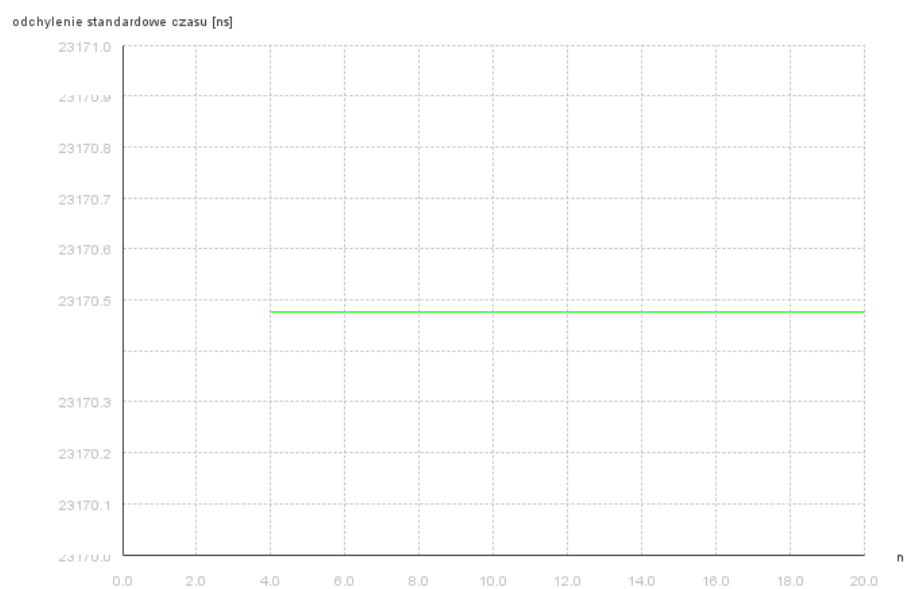
iii. Schemat logarytmiczny

T_{max}	T_{min}	N_{max}
10	1	10

Tab. 14



Wykres 52 złożoność czasowa w zależności od liczby wierzchołków jednego przedziału- schemat logarytmiczny



Wykres 53 Odchylenie standardowe w zależności od liczby wierzchołków jednego przedziału - schemat logarytmiczny

Z powyższych wykresów widać, że złożoność czasowa nie jest zależna od rozmiaru grafu. Oczekiwana złożoność obliczeniowa wynosi: $O(q + Nt \cdot N)$, gdzie q - liczba krawędzi grafu, Nt - liczba iteracji po temperaturach, N - liczba iteracji dla jednej temperatury. Czynniki $Nt \cdot N$ jest dominujący, jeśli chodzi o czas wykonywania algorytmu i nie zależy on od rozmiaru grafu, ponieważ zgenerowanie sąsiednich rozwiązań w algorytmie jest realizowane poprzez usunięcie i wstawienie dwóch krawędzi. Operacja ta ma $O(1)$ i w związku z tym faktyczna złożoność czasowa nie zależy od rozmiaru grafu.

5. Źródła

- [1] Z. Michalewicz, D. Fogel, *Jak to rozwiązać, czyli nowoczesna heurystyka*
- [2] Sebastian Kozłowski, *Metody heurystyczne*. Slajdy wykładowe do przedmiotu Współczesne Metody Heurystyczne
- [3] Strona internetowa projektu jmathplot <https://code.google.com/p/jmathplot/>