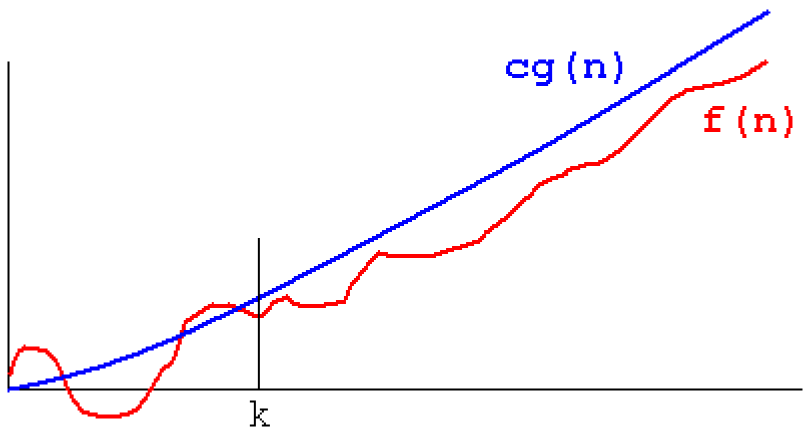
Tema 1 / Parte 1
Conceptos claves y Ejemplos

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
E.T.S. INGENIERÍA INFORMÁTICA

Cota superior: *O(g(n))*

- La complejidad de f se va a comportar igual o mejor que la función g. $f(n) \in O(g(n))$



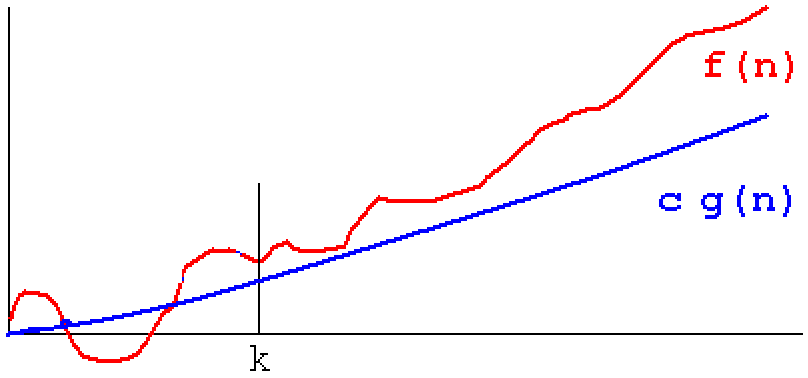
Ejemplo Por ejemplo

$$n \in O(n^2) \qquad 100n + 5 \in O(n^2) \qquad \frac{1}{2}n(n-1) \in O(n^2)$$

$$n^3 \notin O(n^2) \qquad 0.00001n^3 \notin O(n^2) \qquad n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$$

Cota inferior: $\Omega(g(n))$

- La complejidad de f se va a comportar igual o peor que la función g. $f(n) \in \Omega(g(n))$



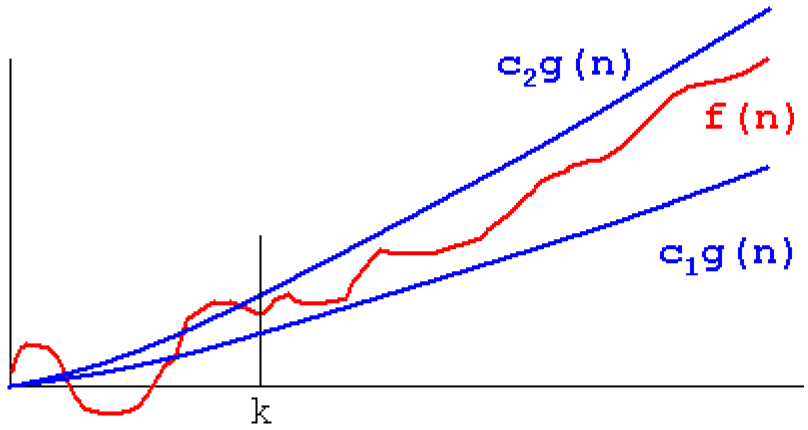
Ejemplo Por ejemplo

$$n^3 \in \Omega(n^2) \quad 100n + 5 \in \Omega(n) \quad \tfrac{1}{2}n(n-1) \in \Omega(n^2)$$

$$n \notin \Omega(n^2) \quad 0.01n^2 \in \Omega(n) \quad n^2 + n + 1 \notin \Omega(n^3)$$

Orden exacto: $\Theta(g(n))$

- La complejidad de f se va a comportar igual asintóticamente que g. $f(n) \in \Theta(g(n))$



Ejemplo Por ejemplo

$$100n^2 \in \Theta(n^2) \quad 100n + 5 \in \Theta(n) \quad \tfrac{1}{2}n(n-1) \in \Theta(n^2)$$

$$n \notin \Theta(n^2) \quad 0.01n \notin \Theta(n^2) \quad n^2 + n + 1 \notin \Theta(n^3)$$

Notación Asintótica: propiedades

- Para cualquier función f se tiene que $f \in \Theta(f)$
- $\Theta(f) = \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \Theta(g)$ y $g \in \Theta(f)$
- Si $f \in \Theta(g)$ y $g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$
- Regla de la suma:

  Si $f_1 \in \Theta(g)$ y $f_2 \in \Theta(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \Theta(\max(g, h))$
- Regla del producto:

  Si $f_1 \in \Theta(g)$ y $f_2 \in \Theta(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in \Theta(g \cdot h)$

Notación Asintótica: propiedades

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} < \infty & \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \\ 0 < c < \infty & \Leftrightarrow f(n) \in \Theta(g(n)) \\ > 0 & \Leftrightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Ejemplo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow 1 \in O(n^2)$$

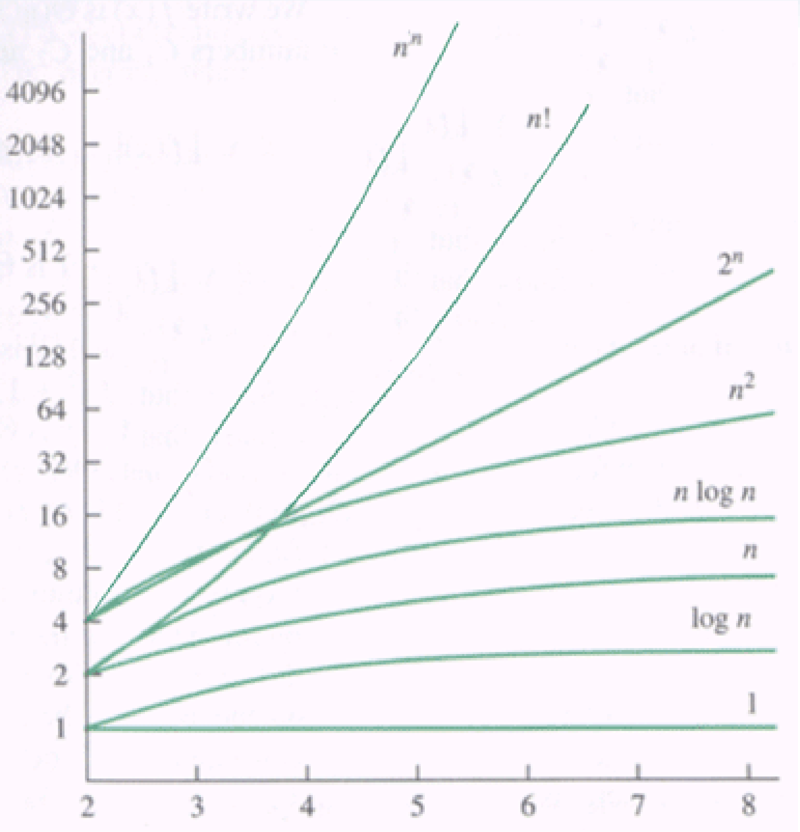
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n} = 2 > 0 \Rightarrow 2n \in \Theta(n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n} = \infty \Rightarrow 2n^2 \in \Omega(n)$$

Ejemplo $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$$

Notación Asintótica: propiedades

Los comportamientos asintóticos de más frecuente aparición se pueden ordenar de menor a mayor crecimiento de la siguiente forma:



$$1 << \log n << n << n\cdot\log n << n^2 << n^3 << \ldots << 2^n << n!$$

Tema 1 /Parte 1
Ejemplos de Problemas Resueltos

Ejemplos de Problemas

- Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

Verdadero

a) $n^2 \in O(n^3)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \ \rightarrow f(n) \in O(g(n))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < \infty$$

Ejemplos de Problemas

- Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

Falso

b) $\log n \in \Omega\left(n^{1/2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \ \to f(n) \in \Omega(g(n))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log e}{n}}{\frac{1}{2n^{1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\log e\, n^{1/2}}{n} = 0$$

Ejemplos de Problemas

- Dar un ejemplo de funciones f y g tales que $f \in O(g)$ pero que $f \notin \Omega(g)$.

Sean $f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ y $g(n) = n^2$

Entonces $\Theta(g) = \Theta(n^2)$ y $O(f) = O(n2)$
Con lo cual $f \in O(n^2) = O(g)$.

Sin embargo, si n es impar no puede existir $c > 0$ tal que $f(n) = 1 \geq cn^2 = cg(n)$
Por consiguiente $f \notin \Omega(g)$.

Ejemplos de Problemas

- Calcular el tiempo de ejecución y determinar la complejidad de los casos mejor y peor del siguiente algoritmo:

```
public static void algoritmo (int n){
      int x=1;  ← 1
      int i,j,k;
      for (i=1; i<=n; i++) ← 1 + [Σ 3] + 1
            for(j=i+1; j<=n; j++)  ← 2 + [Σ 3] + 1
  3 + [Σ 3] + 1 →  for (k=i+j+1; k<=n; k++)
                        x=x+2; ← 2
}
```

Ejemplos de Problemas

- Calcular el tiempo de ejecución y determinar la complejidad de los casos mejor y peor del siguiente algoritmo:

```
public static void algoritmo (int n){
      int x=1;  ← 1
      int i,j,k;
      for (i=1; i<=n; i++) ← 2 + [Σ 3]
          for(j=i+1; j<=n; j++)  ← 3 + [Σ 3]
   4 + [Σ 3] →  for (k=i+j+1; k<=n; k++)
                     x=x+2; ← 2
}
```

Ejemplos de Problemas

$$T(n) = 1 + 2 + \left(\sum_{i=1}^{n} 3 + \left(3 + \left(\sum_{j=i+1}^{n} 3 + \left(4 + \left(\sum_{k=i+j+1}^{n} 3 + 2 \right) \right) \right) \right) \right)$$

$$T(n) = 3 + \left(\sum_{i=1}^{n} 3 + \left(3 + \left(\sum_{j=i+1}^{n} 3 + 4 + 5(n - i - j) \right) \right) \right)$$

$$T(n) = 3 + \left(\sum_{i=1}^{n} 3 + \left(3 + \sum_{j=i+1}^{n} 7 + \sum_{j=i+1}^{n} 5(n - i) - \sum_{j=i+1}^{n} 5j \right) \right)$$

Ejemplos de Problemas

$$T(n) = 3 + \left(\sum_{i=1}^{n} 3 + \left(3 + 7(n-i) + 5(n-i)(n-i) - 5\frac{(n+i+1)(n-i)}{2} \right) \right)$$

$$T(n) = 3 + \left(\sum_{i=1}^{n} 6 + 7n - 7i + 5n^2 - 10ni + 5i^2 - \frac{5}{2}(n^2 + n - i^2 - i) \right)$$

$$T(n) = 3 + \left(\sum_{i=1}^{n} 6 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{9}{2}n - \frac{25}{2}ni + \frac{15}{2}i^2 - \frac{9}{2}i \right)$$

$$T(n) = 3 + \sum_{i=1}^{n} 6 + \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{2}n^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{2}n - \sum_{i=1}^{n} \frac{25}{2}ni + \sum_{i=1}^{n} \frac{15}{2}i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{2}i$$

Ejemplos de Problemas

$$T(n) = 3 + 6\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{5}{2}n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{2}n \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{25}{2}n \sum_{i=1}^{n} i + \frac{15}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{9}{2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$T(n) = 3 + 6n + \frac{5}{2}n^3 + \frac{9}{2}n^2 - \frac{25}{2}n\frac{(n+1)n}{2} + \frac{15}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{9}{2}\frac{(n+1)n}{2}$$

$$T(n) = 3 + 6n + \frac{5}{2}n^3 + \frac{9}{2}n^2 - \frac{25}{2}n\frac{n^2+n}{2} + \frac{15}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{9}{2}\frac{n^2+n}{2}$$

$$T(n) = 3 + 6n + \frac{5}{2}n^3 + \frac{9}{2}n^2 - \frac{25}{4}n^3 - \frac{25}{4}n^2 + \frac{15}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{9}{4}n^2 + \frac{9}{4}n$$

Ejemplos de Problemas

$$T(n) = 3 + \frac{24}{4}n + \frac{20}{4}n^3 + \frac{18}{4}n^2 - \frac{25}{4}n^3 - \frac{25}{4}n^2 + \frac{15}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{9}{4}n^2 + \frac{9}{4}n$$

$$T(n) = 3 + \frac{33}{4}n - \frac{5}{4}n^3 - \frac{16}{4}n^2 + \frac{15}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$T(n) = -\frac{5}{4}n^3 - \frac{16}{4}n^2 + \frac{33}{4}n + 3 + \frac{15}{2}\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$T(n) = -\frac{5}{4}n^3 - \frac{21}{4}n^2 + \frac{19}{2}n + 3 + \frac{5}{2}n^3 + \frac{15}{4}n^2 + \frac{15}{12}n$$

$$\boxed{T(n) = \frac{5}{4}n^3 - \frac{6}{4}n^2 + \frac{43}{4}n + 3}$$

Complejidad $T(n) \in \Theta(n^3)$

Ejemplos de Problemas

3. Determinar la complejidad del siguiente algoritmo de forma simplificada (sin tener en cuenta asignaciones, comparaciones u operaciones de los bucles; teniendo en cuenta solo operaciones esenciales para el problema):

```
public static void algoritmo (int n){
      int x=1;   ← X: inicialización
      int i,j,k;
      for (i=1; i<=n; i++) ← X: bucle
            for(j=i+1; j<=n; j++ ) ← X: bucle
  X: bucle →  for (k=i+j+1; k<=n; k++)
                        x=x+2; ← V: operación esencial
}                                Coste 1 (por la suma)
```

Ejemplos de Problemas

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (n - j - i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=i+1}^{n} (n - i) - \sum_{j=i+1}^{n} j \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(n - i)(n - i) - \frac{(n + i + 1)(n - i)}{2} \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[n^2 - 2ni + i^2 - \frac{n^2 + n - i^2 - i}{2} \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n - 2ni + \frac{3}{2} i^2 + \frac{1}{2} i \right] = \frac{1}{2} n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{2} n \sum_{i=1}^{n} 1 - 2n \sum_{i=1}^{n} i + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$T(n) = \frac{1}{2} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - 2n \frac{(n + 1)n}{2} + \frac{3}{2} \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{(n + 1)n}{2}$$

$$\boxed{T(n) \approx n^3 + n^2 + n}$$

$$\boxed{\text{Complejidad } T(n) \in \Theta(n^3)}$$

Tema 1 / Parte 2
Conceptos claves
y Ejemplos

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

E.T.S. INGENIERÍA INFORMÁTICA

Algoritmos recursivos: Posibilidades

- **Recurrencias homogéneas:**

Ecuación: $a_0T(n) + a_1T(n-1) + \cdots + a_kT(n-k) = 0$

Polinomio: $a_0\,x^k + a_1x^{k-1} + a_2\,x^{k-2} + \cdots + a_k = 0$

Raíces distintas $r_1, r_2 \ldots r_m$:

$$\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_m r_m^n$$

Raíces iguales r, m veces:

$$\alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n + \cdots + \alpha_m n^{m-1} r^n$$

Raíces compuestas, $r_1, r_2 \ldots r_m$ y r_z, t veces :

$$\alpha_1 r_1^n + \cdots + \alpha_m r_m^n + \alpha_{m+1} r^n + \alpha_{m+2} n r^n + \cdots + \alpha_{m+t} n^{t-1} r_z^n$$

Algoritmos recursivos: Posibilidades

(Ejemplos)

- **Recurrencias homogéneas:**

Ecuación: $T(n) - 5T(n-1) + 6T(n-2) = 0$

Polinomio: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$a_o = 1$
$a_1 = -5$
$a_2 = 6$
$k = 2$

Raíces distintas $r_1, r_2 \dots r_m$: 2 y 3

$$\alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n$$

Raíces iguales r, m veces: 4 (doble)

$$\alpha_1 4^n + \alpha_2 n 4^n$$

Raíces compuestas, $r_1, r_2 \dots r_m$ y r_z, t veces : 2, 5 y 3 (doble)

$$\alpha_1 2^n + \alpha_2 5^n + \alpha_3 3^n + \alpha_4 n 3^n$$

Algoritmos recursivos: Posibilidades

- **Recurrencias no homogéneas:**

  Ecuación: $a_0T(n) + a_1T(n-1) + \cdots + a_kT(n-k) = b^n p(n)$

  Polinomio: $(a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$

- **Recurrencias no homogéneas general:**

  Ecuación: $a_0T(n) + a_1T(n-1) + \cdots + a_kT(n-k) =$
  $b_1^n p_1(n) + \cdots + b_s^n p_s(n)$

  Polinomio: $\left(a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k\right) \cdot$
  $(x-b_1)^{d_1+1} \ldots (x-b_s)^{d_s+1} = 0$

- **Cambio variable:** siempre que $n = a^k$

  Entonces: $T(n) = c_1T(n) + c_2n^d \;\rightarrow\; T\left(a^k\right) = c_1T\left(a^k\right) + c_2a^{k\cdot d}$

Algoritmos recursivos: Posibilidades

(Ejemplos)

- **Recurrencias no homogéneas:**

  Ecuación: $T(n) + 2T(n-1) - 4T(n-2) = 3^n$

  Polinomio: $(x^2 + 2x - 4)(x - 3) = 0$

  $a_o = 1 \quad a_1 = 2$
  $a_2 = -4 \quad k = 2$
  $b = 3 \quad d = 0$

- **Recurrencias no homogéneas general:**

  Ecuación: $T(n) - 3T(n-1) = 2^n + 3^n n$

  Polinomio: $(x - 3)(x - 2)(x - 3)^2 = 0$

  $a_o = 1 \quad a_1 = -3$
  $b_1 = 2 \quad b_2 = 3$
  $d_1 = 0 \quad d_2 = 1$

- **Cambio variable:** $n = 2^k$

  Entonces: $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \rightarrow T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^{k \cdot 2}$

  $A(k) = 4A(k-1) + 4^k \rightarrow$ Rec. no homogénea

Teorema Maestro (versión reducida)

- Algoritmo que para problema de tamaño n aplica un método recursivo que lo divide en a problemas de tamaño (n/b) y que combinar esas soluciones para obtener el resultado final requiere un esfuerzo "$f(n)$".
- Si $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, con $f(n) \in \Theta(n^d), d \geq 0$
- Entonces:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{log_b a}) & a > b^d \\ \Theta(n^d \log n) & a = b^d \\ \Theta(n^d) & a < b^d \end{cases}$$

Teorema Maestro (versión general)

- Si $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, con $a \geq 1$, $b \geq 2$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{log_b a}) & \exists \epsilon > 0\text{:}\;\; f(n) \in O(n^{log_b a - \epsilon}) \\ \Theta(n^{log_b a} \log^{k+1} n) & f(n) \in \Theta(n^{log_b a} \log^k n) \\ \Theta(f(n)) & \exists \epsilon > 0\text{:}\;\; f(n) \in \Omega(n^{log_b a + \epsilon}) \\ & \text{y se cumple cond. regularidad} \end{cases}$$

Caso 1: Si $f(n)$ es estrictamente mejor que $n^{\log_b a}$ entonces $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

Caso 2: Si $f(n)$ es igual que $n^{\log_b a}$ (salvo alguna constante $\log^k n$)
entonces $T(n) \in \Theta(n^{log_b a} \log^{k+1} n)$

Caso 3: Si $f(n)$ es estrictamente peor que $n^{\log_b a}$ entonces $T(n) \in \Theta(f(n))$,
y si se satisface la condición de regularidad, es decir, $af(n/b) \leq cf(n)$,
para valores de n suficientemente grandes y una constante $c < 1$.

Tema 1 /Parte 2
Ejemplos de Problemas Resueltos

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

E.T.S. INGENIERÍA INFORMÁTICA

Ejemplos de Problemas

- Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia y dar su orden de complejidad:

  $a)\ T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$, si $n>1$;

  Casos base: $T(0) = 0\,;\ T(1) = 1$

Polinomio característico: $x^2 - 3x - 4 = 0$

Dos raíces distintas: $x = 4$ y $x = -1$

Solución de recurrencia: $T(n) = \alpha_1 4^n + \alpha_2 (-1)^n$

Ejemplos de Problemas

- Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia y dar su orden de complejidad:

  a) $T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$, si $n>1$;

  Casos base: $T(0) = 0$; $T(1) = 1$

Solución particular: $T(0) = 0 \;\rightarrow\; \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$T(1) = 1 \;\rightarrow\; 4\alpha_1 - \alpha_2 = 1$

$\alpha_1 = 1/5$ y $\alpha_2 = -1/5$

$$T(n) = \frac{1}{5}\,4^n - \frac{1}{5}(-1)^n \in \Theta(4^n)$$

Ejemplos de Problemas

- Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia y dar su orden de complejidad:

a) $T(n) = 4T(n/2) + n$; Casos base: $T(1) = 1$; $T(2) = 6$

Por el Teorema Maestro Simplificado:

$$a = 4$$
$$b = 2$$
$$f(n) = n$$
$$d = 1$$

$$4 > 2^1 \qquad a > b^d$$

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 4}) \in \Theta(n^2)$$

Ejemplos de Problemas

- Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia y dar su orden de complejidad:

a) $T(n) = 4T(n/2) + n$; Casos base: $T(1) = 1$; $T(2) = 6$

Como un argumento de T es $n/2$, hay que realizar un cambio de variable. Así suponemos que $n = 2^k$, sustitución:

$$T\left(2^k\right) = 4T\left(2^{k-1}\right) + 2^k = 4T\left(2^{k-1}\right) + 2^k$$

$$A(k) = 4T(k-1) + 2^k$$

Ejemplos de Problemas

- Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia y dar su orden de complejidad:

a) $T(n) = 4T(n/2) + n$; Casos base: $T(1) = 1$; $T(2) = 6$

Polinomio característico: $(r-4)(r-2) = 0$

Dos raíces distintas: $r = 4$ y $r = 2$

Solución de recurrencia: $A(k) = \alpha_1 4^k + \alpha_2 2^k$

Deshaciendo el cambio ($n = 2^k;\ 4^k = 2^{k^2}$) obtenemos:

$$T(n) = \alpha_1 n^2 + \alpha_2 n$$

Ejemplos de Problemas

- Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia y dar su orden de complejidad:

a) $T(n) = 4T(n/2) + n$; Casos base: $T(1) = 1$; $T(2) = 6$

Solución particular:

$$T(1) = 1 \;\rightarrow\; \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$T(2) = 6 \;\rightarrow\; 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 6$$

$$\alpha_1 = 2 \text{ y } \alpha_2 = 1$$

$$T(n) = 2n^2 + n \in \Theta(n^2)$$