

Estructuras de Datos

Grados en Ingeniería Informática, del Software y de Computadores

ETSI Informática

Universidad de Málaga

2. Características de la Programación Funcional

José E. Gallardo, Francisco Gutiérrez, Pablo López

Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación

Universidad de Málaga

Índice

- Características de la Programación Funcional
 - Listas
 - Patrones
 - Eficiencia. Parámetros Acumuladores
 - Funciones de orden superior: map y filter
 - Secuencias Aritméticas y Listas por Comprensión. Quick Sort.
 - Pruebas con QuickCheck (cont.)
 - Plegado de listas
 - Parcialización. Composición de Funciones
 - Inducción sobre Listas
 - Tipos Algebraicos y clases: Eq, Ord, Show, deriving. Enumerados: booleanos; tipo unión, tipo producto.

Listas

- Una lista es una secuencia de datos homogéneos
 - Secuencia de Datos: almacena varios valores indexados
 - Homogéneos: todos los valores deben tener el mismo tipo
- Sintaxis:

[]

la lista vacía

[7, 2, 5]

tiene tipo [Integer]

[True, False]

tiene tipo [Bool]

[('a', True), ('a', False)]

tiene tipo [(Char, Bool)]

[7, 'a', 5]



Expresión errónea:

Los elementos deben tener un tipo común



Operaciones básicas con Listas

- Primer elemento:

Prelude head :: [a] -> a

- Lista sin el primer elemento:

Prelude tail :: [a] -> [a]

- ¿Es vacía? :

Prelude null :: [a] -> Bool

Estas operaciones básicas tienen complejidad O(1)

```
Prelude> head [10,7,3,5]  
10
```

```
Prelude> tail [True,False,True]  
[False,True]
```

```
Prelude> null [7,3]  
False
```

```
Prelude> null []  
True
```

```
Prelude> head []  
*** Exception: Prelude.head: empty list
```

```
Prelude> tail []  
*** Exception: Prelude.tail: empty list
```

No definida para las listas vacías



Operaciones básicas con Listas (II)

- Podemos añadir un elemento al principio de una lista con el constructor `(::)`

Prelude

`(::) :: a -> [a] -> [a]`

Se lee **cons**

- La lista original no se modifica
- Se obtiene una **nueva** lista con un elemento más
- Añadir un elemento al principio tiene complejidad **O(1)**

Una lista se construye
usando `(::)` y `[]`

`(::)` asocia a la
derecha

Dos posibles notaciones
para describir una misma
lista

```
Prelude> 1 : []  
[1]
```

```
Prelude> 1 : [3,4,5]  
[1,3,4,5]
```

```
Prelude> 1 : (2 : (3 : []))  
[1,2,3]
```

```
Prelude> 1 : 2 : 3 : []  
[1,2,3]
```

```
Prelude> 1 : 2 : 3 : [] == [1,2,3]  
True
```

Strings

- En Haskell, un String es una lista de caracteres:

```
Prelude> type String = [Char]
```



Predefinido
Sinónimo de tipo

- Además de la sintaxis ya vista para expresar listas, las listas de caracteres pueden escribirse entre comillas:

```
Prelude> ['p', 'e', 'p', 'e'] == "pepe"
True
```

```
Prelude> head "pepe"
'p'
```

```
Prelude> tail "pepe"
"epe"
```

```
Prelude> 'p' : "epe"
"pepe"
```

Definiendo Funciones sobre Listas. Patrones

- Los **patrones** pueden usarse para definir funciones con diferentes casos, dependientes de la forma del argumento
- Los `patrones actúan de forma inversa a los constructores:
 - Los constructores componen datos
 - Los patrones descomponen datos
- Hay distintos patrones para listas:
 - **[], [x], [x,y], ...** El argumento debe ser una lista con **exactamente** 0, 1, 2, ... elementos.
 - x se refiere al primer elemento de la lista, y se refiere al segundo, ...
 - **(x:xs), (x:y:xs), ...** el argumento debe ser una lista con **al menos** 1, 2, ... elementos.
 - x se refiere a el primer elemento de la lista, y se refiere al segundo, ...
 - xs se refiere al resto de la lista

Definiendo Funciones sobre Listas. Patrones(II)

- ¿Cuántos elementos tiene una lista?

Prelude length :: [a] -> Int

length [] = 0

length (x:xs) = 1 + length xs

length es una función recursiva

Este patrón descompone la lista en cabeza (x) y cola (xs)

- La primera ecuación se usa si la lista es vacía (patrón [])
- La segunda se usa cuando la lista tiene al menos un elemento (patrón (x:xs))
 - x representa el primer elemento (head) de la lista
 - xs representa el resto (tail) de la lista

¿Cuál es la eficiencia de length?

```
length :: [a] -> Int  
length [] = 0  
length (x:xs) = 1 + length xs
```

- Para listas con 3 elementos, length realiza 7 pasos de evaluación (reducciones)
- Para listas con 2 elementos, length realiza 5 pasos de evaluación
- Para listas con n elementos, length realiza $2n+1$ pasos de evaluación

```
length [1,2,3]  
=> {- 2nd equation -}  
     1 + length [2,3]  
=> {- 2nd equation -}  
     1 + (1 + length [3])  
=> {- 2nd equation -}  
     1 + (1 + (1 + length []))  
=> {- 1st equation. Base case -}  
     1 + (1 + (1 + 0))  
=>  
     1 + (1 + 1)  
=>  
     1 + 2  
=>  
     3
```

¿Cuál es la eficiencia de length? (II)

```
length :: [a] -> Int
```

```
length [] = 0
```

```
length (x:xs) = 1 + length xs
```

- Sea $T(n)$ el número de pasos que realiza `length` con una lista de n elementos:

$$T(0) = 1$$

Un paso para aplicar la primera ecuación

$$T(n) = 2 + T(n - 1), \text{ si } n > 0$$

Un paso para aplicar la segunda ecuación y otro para sumar una unidad. $T(n - 1)$ para la recursión

- Solución a la recurrencia:

$$T(n) = 2n + 1$$

- `length` es **O(n)** (**lineal** en el número de elementos de la lista)

Definiendo Funciones sobre Listas. Patrones (III)

- La siguiente función comprueba si una lista está ordenada ascendentemente:

```
sorted :: (Ord a) => [a] -> Bool
```

```
sorted [] = True
```

```
sorted [_] = True
```

```
sorted (x:y:zs) = x<=y && sorted (y:zs)
```

Tres casos:
listas con cero, uno y al menos
dos elementos

Main> sorted [1,3,4]
True

Prelude> sorted [7,3,4]
False

- [_] se refiere a listas con un elemento, sin importar qué elemento es (**patrón subrayado**)
- (x:y:zs) se refiere a listas con al menos dos elementos
 - x denota la cabeza de la lista
 - y denota el segundo elemento
 - zs denota el resto de la lista argumento (sin los dos primeros elementos)

Concatenación de Listas

Prelude

```
infixr 5 ++
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[] ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

El segundo argumento (ys) es el patrón más general. Puede ser cualquier lista

La primera ecuación se usa cuando el primer argumento es la lista vacía. La segunda cuando el primer argumento no es la lista vacía

```
Prelude> [3,4] ++ [1,2,3]
[3,4,1,2,3]
```

```
Prelude> [] ++ [3,4,5]
[3,4,5]
```

```
Prelude> [3,4,5] ++ []
[3,4,5]
```

- Propiedades de la concatenación de listas (pueden probarse usando inducción):
 - $[]$ es la identidad para la operación $(++)$:
$$[] ++ xs = xs ++ [] = xs$$
 - $(++)$ es asociativa:
$$(xs ++ ys) ++ zs = xs ++ (ys ++ zs)$$

Concatenación de Listas (II)

- ¿Cuántos pasos de evaluación requiere la concatenación de listas?

```
infixr 5 ++
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]      ++ ys   = ys
(x:xs) ++ ys  = x : (xs ++ ys)
```

```
[1,2] ++ [3,4,5]
=> {- 2nd equation -}
    1 : ([2] ++ [3,4,5])
=> {- 2nd equation -}
    1 : (2 : ([] ++ [3,4,5]))
=> {- 1st equation -}
    1 : (2 : [3,4,5])
```

- Si la primera lista tiene 2 elementos, la concatenación lleva 3 pasos de evaluación
- La eficiencia no depende de la segunda lista

Concatenación de Listas (III)

- ¿Cuántos pasos de evaluación requiere la concatenación de listas?

```
infixr 5 ++
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]      ++ ys   = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

- Sea $T(n)$ el número de pasos de evaluación para computar la concatenación cuando la longitud de la primera lista es n :

$$\begin{aligned} T(0) &= 1 \\ T(n) &= 1 + T(n - 1), \text{ si } n > 0 \end{aligned}$$

Un paso para aplicar la primera ecuación

Un paso para aplicar la segunda ecuación.
: no cuenta ya que está reducido

- Solución a la recurrencia:

$$T(n) = n + 1$$

- La concatenación toma $O(n)$ (lineal) en el número de elementos de la primera lista)

Invertiendo una Lista. Solución lenta

- Para listas con n elementos, reverse toma

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n = O(n^2) \text{ pasos}$$

Prelude

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []      = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

- Esta definición de reverse es cuadrática en la longitud de la lista

```
reverse [1,2,3]
=> {- 2nd equation -}
reverse [2,3] ++ [1]
=> {- 2nd equation -}
(reverse [3] ++ [2]) ++ [1]
=> {- 2nd equation -}
((reverse [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
=> {- 1st equation -}
(([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1] => ... => [3,2,1]
```

1 paso

2 pasos

3 pasos

Invertiendo una Lista. Solución Lenta (II)

```
Prelude reverse :: [a] -> [a]
Prelude reverse [] = []
Prelude reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

- Sea $T(n)$ el número de pasos de evaluación para invertir una lista de n elementos:

$$T(0) = 1$$

Un paso para aplicar la primera
ecuación

$$T(n) = 1 + O(n) + T(n - 1), \text{ si } n > 0$$

Un paso para aplicar la segunda
ecuación. $O(n)$ pasos para la
concatenación

- Solución a la recurrencia:

$$T(n) = O(n^2)$$

- Esta versión de reverse es $O(n^2)$ (cuadrática en el
número de elementos de la lista) ☹

Invertiendo una Lista. Solución rápida

Prelude

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse xs = rev0n xs []
where
  rev0n []      ys = ys
  rev0n (x:xs) ys = rev0n xs (x:ys)
```

rev0n xs ys devuelve la lista obtenida al colocar la inversa de la lista xs delante de la lista ys

rev0n [1,2,3] [4,5] => [3,2,1,4,5]

- Para una lista de n elementos, reverse toma $n+2 = O(n)$ pasos
- Esta definición de reverse es **lineal** en la longitud de la lista 😊

```
reverse [1,2,3]
=> {- reverse definition -}
  rev0n [1,2,3] []
=> {- rev0n 2nd equation -}
  rev0n [2,3] (1 : [])
=> {- rev0n 2nd equation -}
  rev0n [3] (2 : 1 : [])
=> {- rev0n 2nd equation -}
  rev0n [] (3 : 2 : 1 : [])
=> {- rev0n 1st equation -}
  3 : 2 : 1 : []
```

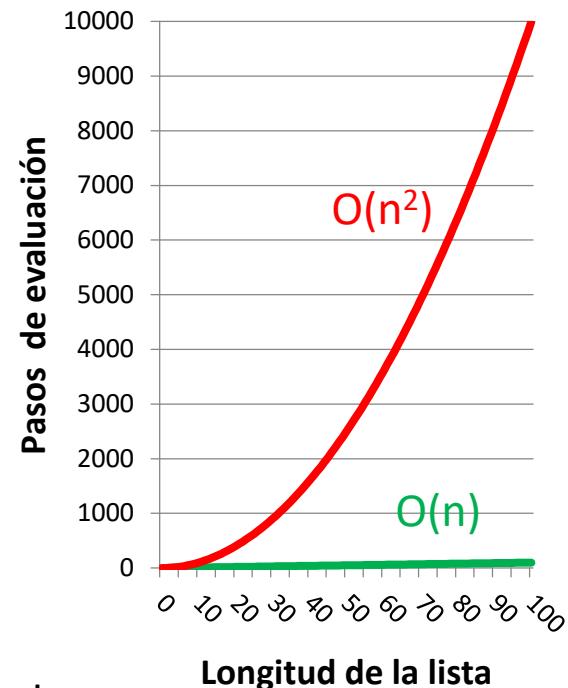
Solo $n+2$ pasos de evaluación



Parámetros Acumuladores

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse xs = rev0n xs []
where
    rev0n []      ys = ys
    rev0n (x:xs) ys = rev0n xs (x:ys)
```

- Para listas con n elementos, reverse toma $O(n)$ pasos
- Hemos pasado de una definición cuadrática a una lineal 😊
- ¿Cómo lo hemos conseguido?
 - Hemos definido una función auxiliar con un parámetro extra
 - Hemos usado el parámetro extra para calcular el resultado eficientemente
 - Nótese que primero resolvemos eficientemente un problema más general (rev0n), y entonces usamos la solución para resolver nuestro problema original (reverse)
- Esta técnica general se conoce como uso de **parámetros acumuladores**



Parámetros Acumuladores vs Bucles

- Las definiciones que usan parámetros acumuladores se parecen a los **bucles** en los lenguajes imperativos:

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial x = aux 1 x
where
  aux ac 0      = ac
  aux ac n | n>0 = aux (ac*n) (n-1)
```

Inicialización de variables

El acumulador actúa como una variable mutable que es usada para computar el producto

```
int factorial(int x) {
  int n, ac=1;
  for(n=x; n>0; n--)
    ac = ac*n;
  return ac;
}
```

El segundo argumento actúa como el índice del bucle

```
factorial 3
=> {- factorial definition -}
aux 1 3 => aux (1*3) (3-1)
=> {- aux 2nd equation -}
aux (1*3) 2 => aux (1*3*2) (2-1)
=> {- aux 2nd equation -}
aux (1*3*2) 1 => aux (1*3*2*1) (1-1)
=> {- aux 2nd equation -}
aux (1*3*2*1) 0
=> {- aux 1st equation -}
1*3*2*1 => ... => 6
```

Sublistas: take y drop

- `take n xs` devuelve el prefijo de `xs` de longitud `n`, o bien la lista `xs` si `n` es mayor o igual que la longitud de `xs`:

Prelude `take :: Int -> [a] -> [a]`

- `drop n xs` devuelve el sufijo de `xs` después de los primeros `n` elementos, o bien la lista vacía `[]` si `n` es mayor o igual que la longitud de `xs`:

Prelude `drop :: Int -> [a] -> [a]`

```
Prelude> take 2 [10,7,3,5]
[10,7]
```

```
Prelude> drop 2 [10,7,3,5]
[3,5]
```

```
Prelude> take 8 [10,7,3,5]
[10,7,3,5]
```

```
Prelude> drop 8 [10,7,3,5]
[]
```

Funciones de Orden Superior

- Una **Función de Orden Superior** es una función que toma otra función como argumento o devuelve una función como resultado

http://en.wikipedia.org/wiki/Higher-order_function

- Son claves en la programación funcional para definir **código reutilizable**
- La misma función de orden superior puede usarse para diferentes propósitos dependiendo de la función pasada como argumento

Aplicando una función a los elementos de una lista

- map aplica la misma función a todos los elementos de una lista, devolviendo la lista de los resultados:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Map_\(higher-order_function\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Map_(higher-order_function))

map es una **función de orden superior**: su primer argumento es una función!

Prelude map :: $(a \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow [b]$
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs

square :: Integer \rightarrow Integer
square x = x * x

Prelude even :: (Integral a) \Rightarrow a \rightarrow Bool
even x = mod x 2 == 0

square :: Integer \rightarrow Integer

Main> map square [1,2,3]
[1,4,9]

even :: Integer \rightarrow Bool

Main> map even [1,2,3,4]
[False,True,False,True]

Seleccionando elementos de una lista

- filter toma un **predicado** (condición) y una lista, y devuelve una lista con los elementos de la original que hacen que el predicado devuelva

True:

filter es una **función de orden superior**: su argumento es una función!

[http://en.wikipedia.org/wiki/Filter_\(higher-order_function\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Filter_(higher-order_function))

Prelude filter :: ($a \rightarrow \text{Bool}$) $\rightarrow [a] \rightarrow [a]$
filter p $\square = \square$
filter p (x:xs)
| p x = x : filter p xs
| otherwise = filter p xs

Prelude even :: (Integral a) $\Rightarrow a \rightarrow \text{Bool}$
even x = mod x 2 == 0

Char isDigit :: Char $\rightarrow \text{Bool}$
isDigit x = x >= '0' && x <= '9'

Main> filter even [1,2,0,3]
[2,0]

Main> filter isDigit "p0eple"
"01"

even :: Integer $\rightarrow \text{Bool}$

isDigit :: Char $\rightarrow \text{Bool}$

Lambda funciones

- Podemos pasar como argumento una función sin ponerle nombre
- Estas son las **funciones anónimas** o λ -funciones



Main> map ($\lambda x \rightarrow x * x$) [1,2,3]
[1,4,9]

La función que toma x para devolver $x*x$

Main> map ($\lambda x \rightarrow x + 10$) [1,2,3,4]
[11,12,13,14]

La función que toma x para devolver $x+10$

Main> filter ($\lambda x \rightarrow \text{mod } x 2 == 0$) [1,2,3,4]
[2,4]

La función de x que comprueba si x es par

Main> filter ($\lambda x \rightarrow x > 2$) [10,2,3,1]
[10,3]

La función de x que comprueba si x es mayor que 2

Secciones

- Podemos aplicar **un único** argumento a un operador binario
- Como resultado, obtenemos una función del argumento suprimido
- Esto se llama **sección** de un operador

```
Main> map (2*) [1,2,3]
[2,4,6]
```

(2*) :: Integer → Integer
(2*) es la forma abreviada de ($\lambda x \rightarrow 2^*x$)

```
Main> map (^3) [1,2,3,4]
[1,8,27,64]
```

(^3) :: Integer → Integer
(^3) es la forma abreviada de ($\lambda x \rightarrow x^3$)

```
Main> filter (<3) [10,2,3,1]
[2,1]
```

(<3) :: Integer → Bool
(<3) es la forma abreviada de ($\lambda x \rightarrow x < 3$)

Secuencias aritméticas

■ Secuencias aritméticas:

- La diferencia de cualesquiera dos elementos consecutivos es constante

```
Prelude> [1..10]
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

La diferencia es 1

```
Prelude> [2,4..10]
```

```
[2,4,6,8,10]
```

La diferencia es 2

```
Prelude> [10,9..1]
```

```
[10,9,8,7,6,5,4,3,2,1]
```

La diferencia es -1

```
Prelude> [1,3..]
```

```
[1,3,5,7,9,11,13,15...]
```

Lista infinita con los naturales impares

Listas por comprensión

http://en.wikipedia.org/wiki/List_comprehension

- Permite definir listas con una sintaxis sencilla

- Generadores:

[*expresión* | *patrón* <- *lista*]

Normalmente una
variable

Se lee como ∈

```
Prelude> [ x^2 | x <- [1..4] ]  
[1,4,9,16]
```

La lista de x^2 para
 $x \in [1,2,3,4]$

```
Prelude> [ even x | x <- [1..4] ]  
[False,True,False,True]
```

La lista de los valores
booleanos
correspondientes a los
test de paridad de x para
 $x \in [1,2,3,4]$

```
Prelude> [ (x,even x) | x <- [1..4] ]  
[(1,False),(2,True),(3,False),(4,True)]
```

Un par para cada
 $x \in [1,2,3,4]$

Listas por comprensión (II)

Evaluación paso a paso:

```
[ x^2 | x <- [1,2,3] ]  
=>  
1^2 : [ x^2 | x <- [2,3] ]  
=>  
1^2 : 2^2 : [ x^2 | x <- [3] ]  
=>  
1^2 : 2^2 : 3^2 : [ x^2 | x <- [] ]  
=>  
1^2 : 2^2 : 3^2 : []  
=>  
1 : 4 : 9 : []
```

Listas por comprensión (III)

■ Guardas:

[*expresión* | *patrón* <- *lista*, *guarda*]

Solo se tiene en cuenta los números positivos



Guarda : debe ser expresión booleana

```
Prelude> [ x | x <- [-1,2,3,-4], x>0 ]  
[2,3]
```

Solo se tienen en cuenta los pares

```
Prelude> [ x | x <- [1,2,3,4], even x ]  
[2,4]
```

Solo los pares se elevan al cuadrado y se devuelven

```
Prelude> [ x^2 | x <- [1,2,3,4], even x ]  
[4,16]
```

Es una combinación de map y filter

Listas por comprensión (IV)

■ Definiciones locales:

[*expresión₁* | *patrón₁* <- *lista*, let *patrón₂* = *expresión₂*]

```
Prelude> [ (x,y) | x <- [1,2,3], let y = 2*x ]  
[(1,2), (2,4), (3,6)]
```

Let *y* se refiere
al doble de *x*

```
Prelude> [ (x,2*x) | x <- [1,2,3] ]  
[(1,2), (2,4), (3,6)]
```

Sin definición
local

Listas por comprensión (V)

- Generadores múltiples:

[*expresión* | *patrón₁* <- *lista₁*, *patrón₂* <- *lista₂*, ...]

Siendo 1 el valor de x, y
toma todos los posibles
valores

```
Prelude> [(x,y) | x <- [1,2,3], y <- [10,20]]  
[(1,10), (1,20), (2,10), (2,20), (3,10), (3,20)]
```

Producto Cartesiano

```
Prelude> [(x,y) | x <- [1,2,3], y <- [10,20], even (x+y)]  
[(2,10), (2,20)]
```

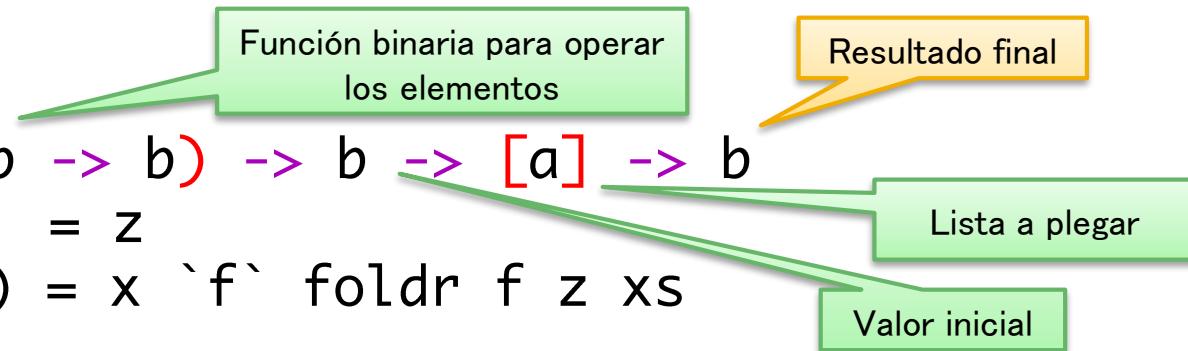
Plegando listas

- **foldr**: reduce todos los elementos de una lista a un solo valor usando una función binaria (de plegado) y un valor inicial
- **foldr** se refiere a **fold right**. Los elementos de la lista se *plegarán desde la derecha*:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Fold_\(higher-order_function\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function))

Prelude

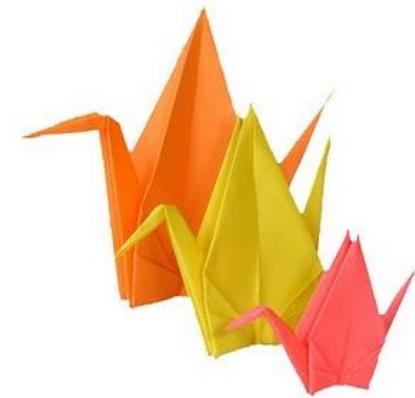
$\text{foldr} :: (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \rightarrow [\alpha] \rightarrow \beta$

$$\text{foldr } f z [] = z$$
$$\text{foldr } f z (x:xs) = x `f` \text{foldr } f z xs$$


```
foldr f z [x1, x2, ... xn]
=>
x1 `f` foldr f z [x2, ... xn]
=>
...
=>
x1 `f` (x2 `f` ... (xn-1 `f` (xn `f` z)) ... )
```

Plegando listas (II)

```
add :: (Num a) => a -> a -> a  
add x y = x + y
```



```
foldr add 0 [1, 2, 3, 4]  
=> ...  
=> 1 `add` ( 2 `add` ( 3 `add` ( 4 `add` 0 )))  
=> 1 `add` ( 2 `add` ( 3 `add` 4 ))  
=> 1 `add` ( 2 `add` 7 )  
=> 1 `add` 9  
=> 10
```

Plegando listas (III)

- `foldl`: reduce todos los elementos de una lista a un solo valor usando una función binaria (de plegado) y un valor inicial
- `foldl` se refiere a **fold left**. Los elementos de la lista se *plegarán* desde la izquierda:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Fold_\(higher-order_function\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function))

Prelude

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
foldl f z []      = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (z `f` x) xs
```

Función binaria para operar los elementos

Resultado final

Lista a plegar

Valor inicial

```
foldl f z [x1, x2, ... xn]
=>
foldl f (z `f` x1) [x2, ... xn]
=>
...
=>
( ... ((z `f` x1) `f` x2) ... `f` xn-1) `f` xn
```

Plegando listas (IV)

```
add :: (Num a) => a -> a -> a  
add x y = x + y
```



```
foldl add 0 [1, 2, 3, 4]  
=> ...  
=> (((0 `add` 1) `add` 2) `add` 3) `add` 4  
=> ((1 `add` 2) `add` 3) `add` 4  
=> (3 `add` 3) `add` 4  
=> 6 `add` 4  
=> 10
```

Plegando listas (y V)

- Muchas funciones del **Prelude** están definidas usando plegados:

Prelude
sum :: (Num a) => [a] -> a
sum xs = foldl (+) 0 xs

Prelude
product :: (Num a) => [a] -> a
product xs = foldl (*) 1 xs

Prelude
and :: [Bool] -> Bool
and xs = foldr (&&) True xs

Prelude
or :: [Bool] -> Bool
or xs = foldr (||) False xs

Prelude
concat :: [[a]] -> [a]
concat XSS = foldr (++) [] XSS

Prelude
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
xs ++ ys = foldr (:) ys xs

```
Main> sum [1,2,3,4]
10
Main> product [1,2,3,4]
24
Main> and [1<3, even 2, 2==1+1]
True
Main> or [1<3, even 5, 6==1+1]
True
Main> concat [[1,2,3], [4], [5,6]]
[1,2,3,4,5,6]
Main> [1,2,3] ++ [5,6]
[1,2,3,5,6]
```

foldl (+) 0 xs

Para pasar un operador como parámetro a una función de orden superior hay que usar paréntesis

Parcialización

- La idea original es de:

<http://en.wikipedia.org/wiki/Currying>



Moses Schönfinkel y Haskell Curry

- Las funciones de varios argumentos pueden ser representadas usando varias funciones de un solo argumento
- Una función que toma n argumentos es representada por una función de orden superior que toma un solo argumento y devuelve una función que toma $n-1$ argumentos
- Iterando este principio, cualquier función que toma n argumentos se representará por una cadena de n funciones, cada una de las cuales toma un solo argumento

Parcialización (II)

- Consideremos la siguiente función:

$f :: \text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int}$
 $f x y z = x + 2*y + 3*z$

f toma tres enteros (x,y,z) devolviendo el entero $(x + 2*y + 3*z)$



- La definición equivale a:

$f :: \text{Int} \rightarrow (\text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int})$
 $f = \lambda x \rightarrow (\lambda y \ z \rightarrow x + 2*y + 3*z)$

→ es asociativo a la derecha

f toma un entero (X) devolviendo la función que toma dos enteros (y,z) devolviendo el entero $(x + 2*y + 3*z)$

- Que también es:

$f :: \text{Int} \rightarrow (\text{Int} \rightarrow (\text{Int} \rightarrow (\text{Int} \rightarrow \text{Int})))$
 $f = \lambda x \rightarrow (\lambda y \rightarrow (\lambda z \rightarrow x + 2*y + 3*z))$

f toma un entero (X) devolviendo la función que toma un entero (y) devolviendo la función que toma un entero (z) devolviendo el entero $(x + 2*y + 3*z)$

Parcialización (III)

- Las funciones parcializadas pueden usarse aplicando sus argumentos uno a uno
- Después de cada aplicación, se obtiene una función con el resto de argumentos

```
f :: Int -> Int -> Int -> Int  
f x y z = x + 2*y + 3*z
```

- La expresión $f \ 10$ tiene tipo $\text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int}$
y se refiere a $\lambda y \ z \rightarrow 10 + 2*y + 3*z$
Una función que toma dos argumentos
- La expresión $f \ 10 \ 20$ tiene tipo $\text{Int} \rightarrow \text{Int}$
y se refiere a $\lambda z \rightarrow 10 + 2*20 + 3*z$
Una función que toma un argumento
- La expresión $f \ 10 \ 20 \ 30$ tiene tipo Int
y se refiere a $10 + 2*20 + 3*30$
Un valor (función que toma cero argumentos)



Tipificación en Haskell

■ Regla fundamental de tipificación en Haskell:

- *Si*

$$f :: \alpha \rightarrow \beta$$

Recuerde que :

even :: Int \rightarrow Bool
10 :: Int

- *y además*

$$x :: \alpha$$

Por tanto:

even 10 :: Bool

- *entonces*

$$f\ x :: \beta$$

Tipificación en Haskell (II)

Regla fundamental de tipificación en Haskell:

- *Si*

$$f :: \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$$

- *y además*

$$x :: \alpha$$

- *entonces*

$$f\ x :: \beta \rightarrow \gamma$$

- *Si además*

$$y :: \beta$$

- *entonces*

$$f\ x\ y :: \gamma$$

Recordemos que:

`take :: Int -> [a] -> [a]`
`2 :: Int`
`[True, True, False] :: [Bool]`

Por tanto:

`take 2 :: [a] -> [a]`
`take 2 [True, True, False] :: [Bool]`

Parcialización (y VI)

■ Más ejemplos:

```
-- tests whether x is a multiple of y
isMultipleOf :: Int -> Int -> Bool
isMultipleOf y x = mod x y == 0
```

```
isMultipleOf 3 :: Int -> Bool
```

```
Main> filter (isMultipleOf 3) [1..10]
[3,6,9]
```

```
Main> filter (isMultipleOf 2) [1..10]
[2,4,6,8,10]
```

```
Main> map (+1) [2,4,6]
[3,5,7]
```

```
map (+1) :: [Int] -> [Int]
```

```
Main> map (map (+1)) [[2,4,6], [5], [0,1]]
[[3,5,7], [6], [1,2]]
```

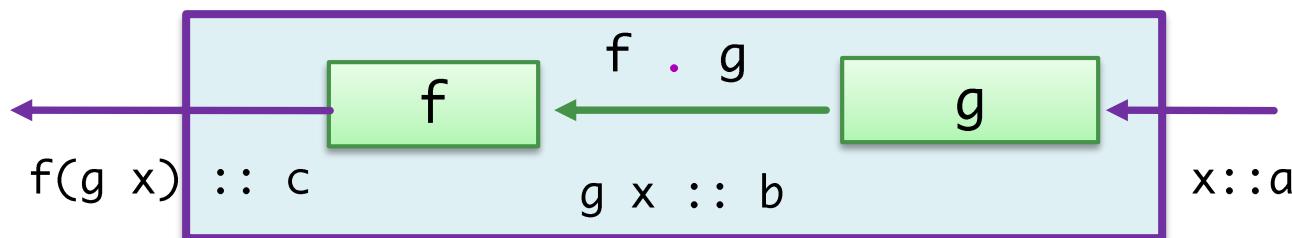
Composición de Funciones

Prelude

infixr 9 .

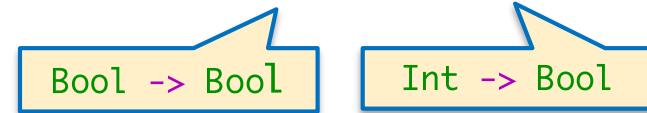
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
 $f . g = \lambda x -> f(g x)$

[http://en.wikipedia.org/wiki/Function_composition_\(computer_science\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Function_composition_(computer_science))



- $(.)$ es una función de orden superior que toma dos funciones y devuelve como resultado la función composición de ambas
- donde vemos que la función compuesta $f . g$ toma el argumento x , aplica g a éste, el resultado se pasa a la primera función f que devolverá el resultado final de la composición

isOdd :: Int -> Bool
isOdd = not . isEven



Tipos Algebraicos

http://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_data_type

- Podemos definir nuevos tipos de datos usando definiciones de Tipos Algebraicos (**data**)
- Cada definición proporciona uno o más **casos** para construir valores
- Cada caso tiene asociado una etiqueta (**Constructor de Datos**) y cero o más componentes

Tipos Enumerados

- El nuevo tipo es un conjunto finito de valores

Constructores de Datos (valores): también comienzan con Mayúsculas

```
data Direction = North | South | East | West
```

Nuevo **Tipo**. Comienza con mayúscula

Clases de Tipos

- Una **Clase de Tipos** representa un conjunto abstracto de operaciones (funciones y operadores)
- Si un tipo de datos implementa estas operaciones podemos decir que es una **instancia** de la clase
- El concepto es similar a los interfaces de Java y puede incluir definiciones de operaciones por defecto

Clase Eq

- Eq es una clase de tipos que define los operadores de igualdad y desigualdad:

Prelude
`class Eq a where`
`(==) :: a -> a -> Bool`
`(/=) :: a -> a -> Bool`

$$\begin{aligned}x == y &= \text{not } (x /= y) \\x /= y &= \text{not } (x == y)\end{aligned}$$

Definiciones por defecto

En cada instancia de Eq hay que definir al menos uno de los dos operadores para romper la circularidad

Igualdad para el tipo Direction

- Para definir la igualdad (y desigualdad) para el tipo Direction, debemos declarar la instancia:

```
data Direction = North | South | East | West
```

```
instance Eq Direction where
```

North	<code>==</code>	North	<code>= True</code>
South	<code>==</code>	South	<code>= True</code>
East	<code>==</code>	East	<code>= True</code>
West	<code>==</code>	West	<code>= True</code>
-	<code>==</code>	-	<code>= False</code>

```
Main> North == North  
True
```

```
Main> North == South  
False
```

```
Main> North /= South  
True
```

Basta definir `(==)` en la instancia. Para reducir `x /= y` se usa la definición por defecto que aparece en la clase

Clase Ord

- **Ord** es la clase de tipos que define los operadores de ordenación:

```
Prelude data Ordering = LT | EQ | GT
```

LT = less than
EQ = equal than
GT = greater than

```
Prelude class Eq a => Ord a where  
  (<) :: a -> a -> Bool  
  (<=) :: a -> a -> Bool  
  (>) :: a -> a -> Bool  
  (>=) :: a -> a -> Bool  
  max :: a -> a -> a  
  min :: a -> a -> a  
  compare :: a -> a -> Ordering
```

Definiciones por defecto. Hay que definir (\leq) o bien compare

$x < y = x \leq y \ \&\! not (x == y)$
 $x > y = y < x$

... otras definiciones por defecto

Orden para Direction

- Para definir el siguiente orden en Direction

North < South < East < West

debemos declarar la instancia:

```
instance Ord Direction where
    North  <= _      = True
    South   <= North = False
    South  <= _      = True
    East   <= North = False
    East   <= South = False
    East  <= _      = True
    West   <= North = False
    West   <= South = False
    West   <= East  = False
    West  <= _      = True
```

```
Main> North <= North
True
Main> West > South
True
Main> max West South
West
Main> compare West South
GT
```

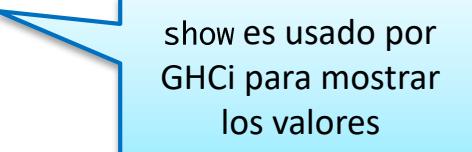
Solo definimos (\leq) en la instancia.
Para el resto de operadores usaremos las
definiciones por defecto

Clase Show

- Show es la clase de tipos que define cómo Haskell debe mostrar los datos:

```
Prelude class Show a where  
    show :: a -> String
```

```
instance Show Direction where  
    show North = "North"  
    show South = "South"  
    show East = "East"  
    show West = "West"
```



show es usado por
GHCi para mostrar
los valores

Generación automática de instancias

- Las instancias pueden a veces ser generadas automáticamente. Para ello debemos incluir la cláusula **deriving** en la definición **data** :

```
data Direction = North | South | East | West deriving (Show, Eq, Ord)
```

```
Main> show North  
"North"  
  
Main> North == North  
True  
  
Main> North == South  
False  
  
Main> North < South  
True  
  
Main> West > South  
True
```

Solo dos valores idénticos son considerados iguales

Los valores se ordenan según aparecen en la definición del tipo.
Menor el de más a la izquierda

Las instancias para Show, Eq y Ord se generan automáticamente para este tipo de datos

Tipos Unión

- Disponen de varios constructores de datos con un componente:

```
data Degrees = Celsius Double | Fahrenheit Double deriving Show
```

Primer
Constructor

Segundo
Constructor

```
frozen :: Degrees -> Bool
frozen (Celsius c) = c <= 0
frozen (Fahrenheit f) = f <= 32
```

```
Main> toCelsius (Fahrenheit 32)
Celsius 0.0
Main> frozen (Celsius 20)
False
Main> :t Celsius
Celsius :: Double -> Degrees
```

Los Constructores de Datos pueden
usarse en los Patrones ...

```
toCelsius :: Degrees -> Degrees
toCelsius (Celsius c) = Celsius c
toCelsius (Fahrenheit f) = Celsius ((f-32) / 1.8)
```

```
toFahrenheit :: Degrees -> Degrees
toFahrenheit (Celsius c) = Fahrenheit (c * 1.8 + 32)
toFahrenheit (Fahrenheit f) = Fahrenheit f
```



Tipos Unión (II)

- Tipo unión polimórfico predefinido:

```
Prelude data Either a b = Left a | Right b
```

```
list :: [Either Int Bool]
```

```
list = [Left 1, Right True, Left 3, Left 4 ]
```

- Tipo opcional polimórfico predefinido:

```
Prelude data Maybe a = Nothing | Just a
```

```
Prelude> lookup 2 [(1,"hi"),(2,"good"),(3,"bye")]
Just "good"
```

```
Prelude> lookup 6 [(1,"hi"),(2,"good"),(3,"bye")]
Nothing
```

```
Prelude lookup :: (Eq a) => a -> [(a, b)] -> Maybe b
lookup k' [] = Nothing
lookup k' ((k,v):xs)
| k' == k    = Just v
| otherwise   = lookup k' xs
```

Devuelve un valor *x* de tipo *b* (con *Just x*) o puede no devolver *nada* con *Nothing*

Tipos Productos

- Disponen de un único constructor de datos con varios componentes:

```
type Name = String  
type Surname = String  
type Age = Int
```

Sinónimos de tipo

```
data Person = Pers Name Surname Age deriving Show
```

Constructor

```
john :: Person
```

3 componentes

```
john = Pers "John" "Smith" 35
```

```
name :: Person -> Name
```

```
name (Pers nm _ _) = nm
```

el patrón nm es de tipo Name

```
surname :: Person -> Surname
```

```
surname (Pers _ snm _) = snm
```

snm :: Surname

```
age :: Person -> Age
```

```
age (Pers _ _ ag) = ag
```

ag :: Age

```
Main> name john  
"John"
```

```
Main> age john  
35
```

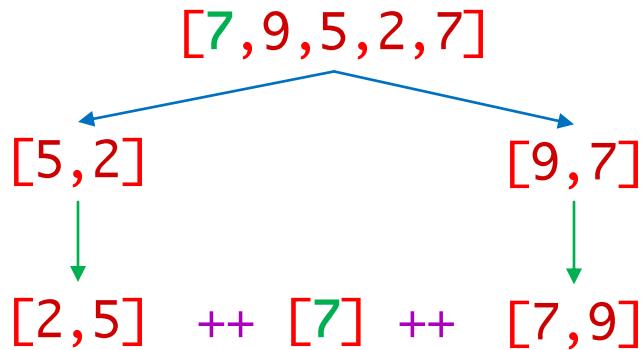
```
Main> surname (Pers "Mick" "Jagger" 70)  
"Jagger"
```

Material Complementario

Para profundizar

Ordenando una lista

- **Quick Sort:** el algoritmo de ordenación de C.A.R. Hoare (Premio Turing 1980)



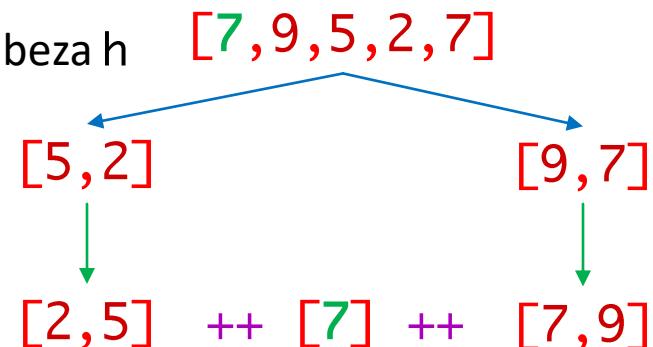
<http://en.wikipedia.org/wiki/Quicksort>

- Para ordenar una lista:
 - Tomamos un elemento de la lista, por ejemplo, la cabeza h
 - Partimos la lista restante en dos sublistas: una con los menores que h , y otra con los mayores o iguales que h
 - Recursivamente, ordenamos estas sublistas
 - Concatenamos la primera sublista ordenada con la cabeza y con la segunda sublista ordenada

Ordenando una lista (II)

Quick Sort:

- Tomamos un elemento de la lista, por ejemplo, la cabeza h
- Partimos la lista restante en dos sublistas: una con los menores que h , y otra con los restantes
- Recursivamente, ordenamos estas sublistas
- Concatenamos la primera sublista ordenada con la cabeza y con la segunda sublista ordenada



```
qSort :: (Ord a) => [a] -> [a]
qSort [] = []
qSort (h:xs) = qSort ys ++ [h] ++ qSort zs
  where
    ys = [ x | x <- xs, x < h ]
    zs = [ x | x <- xs, x >= h ]
```

```
Main> qSort [3,1,2,3]
[1,2,3,3]
Prelude> qSort "haskell"
"aehklls"
```

Analizar cómo trabaja

Pruebas con QuickCheck (cont. IV)

```
import Data.List
import Test.QuickCheck
```

```
isPermutationOf :: (Eq a) => [a] -> [a] -> Bool
xs `isPermutationOf` ys = null (xs \\ ys) && null (ys \\ xs)

sorted :: (Ord a) => [a] -> Bool
sorted [] = True
sorted [_] = True
sorted (x:xs@(y:_)) = (x<=y) && sorted xs
```

- Una propiedad para probar qSort:

```
p_qSort xs = True ==> sorted ys && ys `isPermutationOf` xs
where ys = qSort xs
```

QuickCheck prueba nuestra propiedad con 100 listas de enteros aleatorios

QuickCheck prueba nuestra propiedad con 100 listas de doubles aleatorios

```
Main> [3,1,2,1] \\ [1,3]
[2,1]
```

Diferencia de listas:
import List

```
Main> [3,1,2] `isPermutationOf` [1,2,3]
True
```

isPermutationOf: ¿los argumentos tienen los mismos elementos, posiblemente en distinto orden ?

La lista ys obtenida con qSort xs debe estar ordenada y tener los mismos elementos que la original

```
Main> quickCheck (p_qSort :: [Int] -> Property)
+++ OK, passed 100 tests.
```

```
Main> quickCheck (p_qSort :: [Double] -> Property)
+++ OK, passed 100 tests.
```

Parcialización (IV)

```
-- tests whether x is a multiple of y  
isMultipleOf :: Int -> Int -> Bool  
isMultipleOf y x = mod x y == 0
```

isEven :: Int -> Bool

¿Cuál es el tipo de isEven?

isEven = isMultipleOf 2

¿Dónde está el argumento?

Está aquí

Como isEven = isMultipleOf 2,
isEven debe tener el mismo
Tipo que isMultipleOf 2

¿Cuál es el tipo de isMultipleOf 2?

isMultipleOf 2 :: Int -> Bool

Por tanto:

isEven :: Int -> Bool

Parcialización (V)

- Dos maneras diferentes de definir la misma función:

-- tests whether x is a multiple of y

```
isMultipleOf :: Int -> Int -> Bool  
isMultipleOf y x = mod x y == 0
```

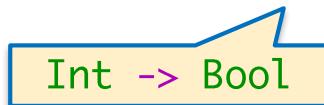
-- without currying

```
isEven' :: Int -> Bool  
isEven' x = isMultipleOf 2 x
```



-- using currying

```
isEven :: Int -> Bool  
isEven = isMultipleOf 2
```



```
isEven 10  
⇒ {- isEven definition -}  
isMultipleOf 2 10  
⇒ {- isMultipleOf definition -}  
mod 10 2 == 0  
⇒ {- mod definition -}  
0 == 0  
⇒  
True
```

Inducción sobre listas

- Las pruebas no aseguran la corrección de los programas, y en ocasiones es necesario demostrar la corrección.
- Si una propiedad *prop* está definida sobre valores de un tipo inductivo *t*, podemos intentar demostrar la propiedad por inducción.
- En el caso de listas finitas podemos usar el esquema de **inducción estructural sobre listas**:

$$\forall xs . prop(xs) \iff \begin{cases} prop([]) \\ \forall xs . prop(xs) \implies prop(x : xs) \end{cases}$$

Caso base

Hipótesis de inducción

Paso inductivo



- **Caso base:** consiste en demostrar la propiedad para la lista vacía
- **Paso inductivo:** consiste en demostrar la propiedad para la lista $(x:xs)$. Para ello podemos asumir que la propiedad es cierta para la lista xs (**hipótesis de inducción**), o para cualquier sublista de $(x:xs)$.

Un ejemplo de demostración por inducción sobre listas(I).

Es esencial describir con precisión la propiedad a demostrar

```
length :: [a] -> Int
length [] = 0
length (_:xs) = 1 + length xs

map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

- Queremos probar que `map` no cambia la longitud de la lista:

$$\forall xs . \text{length}(\text{map } f \ xs) = \text{length } xs$$

- Usando inducción, debemos probar:

- Caso base: $\text{length}(\text{map } f \ []) = \text{length } []$
- Paso inductivo:

Si $\text{length}(\text{map } f \ xs) = \text{length } xs$

Hipótesis de inducción

entonces $\text{length}(\text{map } f \ (x:xs)) = \text{length} \ (x:xs)$

Un ejemplo de demostración por inducción sobre listas (II)

```
length :: [a] -> Int
length [] = 0
length (_:xs) = 1 + length xs

map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

- Demostrando el caso base:

$$\text{length}(\text{map } f \text{ []}) = \text{length} \text{ []}$$

↔ {- 1^a ecuación de map al miembro izquierdo -}

$$\text{length} \text{ []} = \text{length} \text{ []}$$

Un ejemplo de demostración por inducción sobre listas (III)

Demostrando el paso inductivo:

Si $\text{length}(\text{map } f \text{ xs}) = \text{length xs}$

entonces $\text{length}(\text{map } f (\text{x}: \text{xs})) = \text{length}(\text{x}: \text{xs})$

Hipótesis de inducción

$\text{length} :: [\text{a}] \rightarrow \text{Int}$
 $\text{length } [] = 0$
 $\text{length } (\text{x}: \text{xs}) = 1 + \text{length xs}$

$\text{map} :: (\text{a} \rightarrow \text{b}) \rightarrow [\text{a}] \rightarrow [\text{b}]$
 $\text{map } f [] = []$
 $\text{map } f (\text{x}: \text{xs}) = f \text{ x} : \text{map } f \text{ xs}$

$$\text{length}(\text{map } f (\text{x}: \text{xs})) = \text{length}(\text{x}: \text{xs})$$

$\Leftrightarrow \{- \text{ 2}^{\text{a}} \text{ ecuación de map (izda), y 2}^{\text{a}} \text{ de length (derecha) -}\}$

$$\text{length}(f \text{ x} : \text{map } f \text{ xs}) = 1 + \text{length xs}$$

$\Leftrightarrow \{- \text{ 2}^{\text{a}} \text{ de length (izda) -}\}$

$$1 + \text{length}(\text{map } f \text{ xs}) = 1 + \text{length xs}$$

$\Leftrightarrow \{- \text{ Hipótesis de inducción (izda) y sustitutividad) -}\}$

$$1 + \text{length xs} = 1 + \text{length xs}$$

Tipos Enumerados; los booleanos

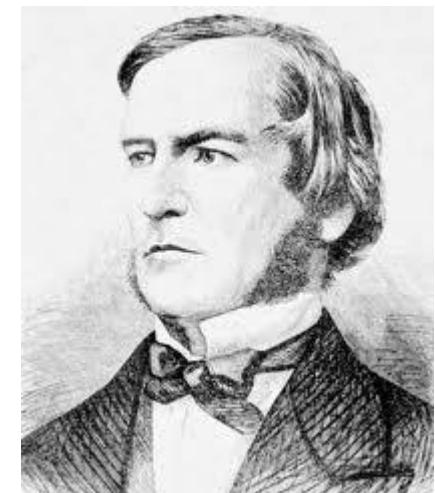
Constructores de
Datos

```
Prelude data Bool = False | True

Prelude instance Eq Bool where
    False == False = True
    True == True = True
    _ == _ = False

Prelude instance Ord Bool where
    False <= _ = True
    True <= False = False
    True <= _ = True

Prelude instance Show Bool where
    show False = "False"
    show True = "True"
```



George Boole

http://es.wikipedia.org/wiki/George_Boole

Booleanos (II)

Prelude
not :: Bool -> Bool
not False = True
not True = False

Prelude
infixr 3 &&
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
False && _ = False
True && x = x

Prelude
infixr 2 ||
(||) :: Bool -> Bool -> Bool
False || x = x
True || _ = True

este operador es **estricto**
solo en el primer argumento

Main> 1 < 2 || div 1 0 == 20
True



Los Constructores de
Datos pueden ser usados
como Patrones