RELACIÓN DE EJERCICIOS DEL TEMA 6

Ejercicio 1 (uso de los cuantificadores):

Traduce estas fórmulas del lenguaje natural al lenguaje de la lógica de primer orden. Usa el predicado *Loves*, donde *Loves*(x,y) quiere decir "x ama a y".

a) "Hay alguien que ama a todo el mundo".
b) "Hay alguien que ama a al menos una persona".
c) "Hay alguien que ama a algún otro".
d) "Todos se aman mutuamente".
e) "Hay alguien que es amado por todos".
f) "Hay alguien a quien todos aman".
g) "Todo el mundo tiene a alguien que lo ama".

Ejercicio 2 (ontología de listas):

Considera la siguiente ontología para las listas:

–La función *Insert*(x,y) inserta el elemento x al principio de la lista y. Por ejemplo, la lista (A, B, C) se modela mediante este término:

Insert(A, *Insert*(B, *Insert*(C, *EmptyList*)))

donde *EmptyList* es un símbolo de constante que representa a la lista vacía.

–La función *Last*(x) devuelve el último elemento de una lista vacía. Devuelve la constante *ListError* para una lista vacía.

–Los axiomas de la ontología son los siguientes:

i) La lista vacía no tiene último elemento.
ii) El último elemento de una lista con un solo elemento es ese elemento.
iii) El último elemento de una lista y es también el último elemento de cualquier lista construida insertando un elemento al principio de y.

–Tu tarea es traducir los axiomas de la ontología al lenguaje de la lógica de primer orden, y a continuación explicar cómo encontrarías el último elemento de la lista (A, B, C, D) con la ayuda de un demostrador de teoremas.

Ejercicio 3 (axiomas de Peano)

Los axiomas de Peano, también conocidos como los axiomas de Dedekind–Peano o los postulados de Peano postulates, son un conjunto de axiomas para los números naturales presentados por el matemático italiano del siglo XIX Giuseppe Peano. Han sido empleados prácticamente sin cambios hasta hoy. Tu tarea es traducir un subconjunto de ellos y la definición de la suma al lenguaje de la lógica de primer orden. A continuación explica cómo demostrar que la suma es conmutativa con la ayuda de un demostrador de teoremas. Por último, explica cómo encontrar el resultado de la suma 2+3 con un demostrador de teoremas.

i) 0 es un número natural.
ii) Para cualquier número natural n, su sucesor *Suc*(n) también es un número natural.
iii) Para cualquier número natural n, *Suc*(n) = 0 es falso. Es decir, no hay ningún número natural cuyo sucesor sea 0.
iv) Para cualesquiera números naturales m y n, si *Suc*(m)=*Suc*(n), entonces m=n. O sea, *Suc* es una inyección.
v) La suma se define mediante las siguientes ecuaciones: a+0=a; a+*Suc*(b)=*Suc*(a+b).

Ejercicio 4 (espacios vectoriales):

Un espacio vectorial sobre un cuerpo **F** es un conjunto **V** junto con dos operaciones binarias que satisfacen los axiomas que se listan más abajo. Tu primera

tarea es traducir estos axiomas al lenguaje de la lógica de primer orden. A continuación explica cómo demostrarías que la siguiente propiedad se cumple con ayuda de un demostrador de teoremas: $(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{w}) = -(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
i) Asociatividad de la suma: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
ii) Conmutatividad de la suma: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
iii) Elemento neutro de la suma: existe un elemento $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$, llamado el vector nulo, de tal manera que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
iv) Elementos inversos respecto a la suma: para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, existe un elemento $-\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, llamado el inverso aditivo de $\mathbf{v}$, de tal manera que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
v) Distributividad del producto escalar respecto a la suma: $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$.
vi) Distributividad del producto escalar respecto a la suma en el cuerpo: $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$.
vii) Compatibilidad del producto escalar con el producto en el cuerpo: $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$.
viii) Elemento neutro del producto escalar $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, donde 1 denota el elemento neutro de la multiplicación en $\mathbf{F}$.

Ejercicio 5 (la paradoja del barbero):

Traduce las afirmaciones siguientes a fórmulas de la lógica de primer orden. Se trata de la paradoja del barbero de Bertrand Russell; se da el caso de que ambas afirmaciones no pueden ser ciertas a la vez en ninguna interpretación. ¿Cómo demostrarías esto con ayuda de un demostrador de teoremas?
i) Cualquiera que no se afeite a si mismo debe ser afeitado por el barbero (se supone qu solamente hay un barbero).
ii) Aquel a quien el barbero afeite, no se afeita a si mismo.

Ejercicio 6 (lectura de fórmulas de primer orden):

Traduce al español las siguientes fórmulas de la lógica de primer orden, y determina cuáles de ellas representan afirmaciones verdaderas cuando se interpretan en el conjunto de los números reales, $\mathbf{R}$.

a) $\neg\forall x\, x \neq 0$
b) $\exists\, x\, x = x^2 \Rightarrow x < 0$
c) $\forall x\, \forall y\, x > y \vee y > x$
d) $\forall x\, \exists y\, x > y \Rightarrow x > y^2$
e) $\exists x\, \forall y\, x + y = x$
f) $\exists x\, \forall \mathrm{y}\, x + \mathrm{y} = \mathrm{y}$
g) $\exists x\, \forall y\, x > y \vee -x > y$
h) $\exists x \forall y\, x > y \vee \neg(x > y)$
i) $\exists x \forall y\, y > x \Rightarrow y^2 > x$
j) $\exists x \forall y\, x > y \Rightarrow x > y^2$
k) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, xy = yz$
l) $\exists x\, \forall y\, \exists \mathrm{z}\, (x + y)\mathrm{z} = 1$
m) $\forall x\, \forall y\, x > y \Rightarrow \exists \mathrm{z}\, (x > \mathrm{z} \wedge \mathrm{z} > y)$
n) $\forall x\, \exists \mathrm{z}\, \forall y\, x > \mathrm{z} \Rightarrow \mathrm{z} > y$

Ejercicio 7 (formalización):

Traduce los siguientes argumentos al lenguaje de la lógica de primer orden. Provienen del libro de Lewis Carroll titulado *Symbolic Logic*:

a)
Todos los leones son feroces.

Algunos leones no beben café.
Algunas criaturas feroces no beben café.

b)

Ningún profesor es ignorante.
Todos los ignorantes son vanidosos.
Ningún profesor es vanidoso.

c)

Los bebés son ilógicos.
Nadie desprecia a quien puede domar un cocodrilo.
Las personas ilógicas son despreciadas.
Los bebés no pueden domar cocodrilos.

POSIBLES SOLUCIONES

Ejercicio 1 (uso de los cuantificadores):

a) $\exists x\ \forall y\ Loves(x,y)$
b) $\exists x\ \exists y\ Loves(x,y)$
c) $\exists x\ \exists y\ Loves(x,y) \wedge x \neq y$
d) $\forall x\ \forall y\ Loves(x,y)$
e) $\exists x\ \forall y\ Loves(y,x)$
f) $\exists x\ \forall y\ Loves(y,x)$
g) $\forall x\ \exists y\ Loves\cancel{(x,y)}$(y, x)

Ejercicio 2 (ontología de listas):

Los axiomas de la ontología se expresan en la lógica de primer orden como sigue:
i) $Last(EmptyList)=ListError$
ii) $\forall x\ Last(Insert(x,EmptyList))=x$
iii) $\forall x\ \forall y\ y \neq EmptyList \Rightarrow Last(Insert(x,y))=Last(y)$

El último elemento de la lista (A, B, C, D) puede hallarse con ayuda de un demostrador de teoremas considerando i) – iii) como la KB, y a continuación preguntando lo siguiente al demostrador:

$$ASKVARS(\text{KB}, x=Last(Insert(A, Insert(B, Insert(C, Insert(D, EmptyList))))))$$

La salida del demostrador debería ser que la fórmula anterior se infiere de la KB con la lista de ligaduras $\{x/D\}$, que indica que la constante D es el último elemento de la lista.

Ejercicio 3 (axiomas de Peano)

Los axiomas y la definición se traducen al lenguaje de la lógica de primer orden como sigue:
i) Esto quiere decir que necesitamos una constante *Zero*. No hace falta ninguna fórmula de primer orden.
ii) Esto quiere decir que necesitamos una función *Suc*. No hace falta ninguna fórmula de primer orden.
iii) $\forall n\ Suc(n) \neq 0$
iv) $\forall m\ \forall n\ Suc(m)=Suc(n) \Rightarrow m=n$
v) $[\ \forall a\ Sum(a,Zero)=a\ ] \wedge [\ \forall a\ \forall b\ Sum(a,Suc(b))=Suc(Sum(a,b))\ ]$

Para demostrar que la suma es conmutativa con ayuda de un demostrador de teoremas, consideramos iii)-v) como la KB, y a continuación le preguntamos al demostrador si la fórmula de la lógica de primer orden que expresa la conmutatividad de la suma es válida:

$$ASK(\ \text{KB}, \forall a\ \forall b\ Sum(a,b)=Sum(b,a)\ )$$

El resultado de la suma 2+3 se puede hallar preguntándole lo que sigue al demostrador:

$$ASKVARS(\ \text{KB}, x=Sum(Suc(Suc(Zero)), Suc(Suc(Suc(Zero))))\ )$$

La salida del demostrdor debería ser que la fórmula anterior se infiere de la KB con la lista de ligaduras $\{\ x\ /\ Suc(Suc(Suc(Suc(Suc(Zero)))))\ \}$, que indica que 2+3=5.

Ejercicio 4 (espacios vectoriales):

Los axiomas se traducen al lenguaje de la lógica de primer orden como sigue:

i) $\forall u\ \forall v\ \forall w\ Vector(u) \wedge Vector(v) \wedge Vector(w) \Rightarrow Sum(u,Sum(v,w))=Sum(Sum(u,v),w)$

ii) $\forall u\ \forall v\ Vector(u) \wedge Vector(v) \Rightarrow Sum(u,v)=Sum(v,u)$

iii) $\forall v\ Vector(v) \Rightarrow Sum(v,ZeroVector)=v$

iv) $\forall v\ Vector(v) \Rightarrow Sum(v,Inverse(v))=ZeroVector$

v) $\forall u\ \forall v\ \forall a\ Vector(u) \wedge Vector(v) \wedge Scalar(a) \Rightarrow$
$Product(a,Sum(u,v))=Sum(Product(a,u),Product(a,v))$

vi) $\forall v\ \forall a\ \forall b\ Vector(v) \wedge Scalar(a) \wedge Scalar(b) \Rightarrow$
$Product(FieldSum(a,b),v)=Sum(Product(a,v),Product(b,v))$

vii) $\forall v\ \forall a\ \forall b\ Vector(v) \wedge Scalar(a) \wedge Scalar(b) \Rightarrow$
$Product(a,Product(b,v))=Product(FieldProduct(a,b),v)$

viii) $\forall v\ Vector(v) \Rightarrow Product(ScalarOne,v)=v$

Para demostrar que $(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{w}) = -(\mathbf{v}+\mathbf{w})$, consideramos i)-viii) como la KB, y a continuación le preguntamos al demostrador de teoremas si la fórmula de la lógica de primer orden que expresa la propiedad indicada es válida:

$$ASK(\text{ KB}, \forall v\ \forall w\ Vector(v) \wedge Vector(w) \Rightarrow Sum(Inverse(v),Inverse(w))=Inverse(Sum(v,w))\ )$$

Ejercicio 5 (la paradoja del barbero):

Las afirmaciones se expresan en la lógica de primer orden como sigue, entendiendo que *Shaves*(*x*,*y*) indica que *x* afeita a *y*, y que *Barber* es el barbero:

i) $\forall x\ \neg Shaves(x, x) \Rightarrow Shaves(Barber, x)$

ii) $\forall x\ Shaves(Barber, x) \Rightarrow \neg Shaves(x, x))$

Para demostrar que ambas condiciones no pueden cumplirse al mismo tiempo, usamos una KB vacía y preguntamos al demostrador de teoremas si al negación de la conjunción de ambas condiciones es válida (la respuesta debe ser "sí"):

$$ASK(\text{ KB}, \neg(\ [\forall x\ \neg Shaves(x, x) \Rightarrow Shaves(Barber, x)\ ] \wedge [\ \forall x\ Shaves(Barber, x) \Rightarrow \neg Shaves(x, x))\ ]\ )\ \ )$$

Ejercicio 6 (lectura de fórmulas de primer orden):

a) No todo número real es distinto de 0. Verdadero.

b) Existe un número real tal que, si ese número es igual a su cuadrado, entonces es negativo. Verdadero: sea cualquier x tal que $x \neq x^2$. Entonces el antecedente es falso, con lo cual la implicación es verdadera.

c) Para todo par de números reales x e y, uno de ellos es menor que el otro. Falso: tómese $x = y$.

d) Para todo real x existe un real y tal que si x es mayor que y entonces también es mayor que el cuadrado de y. Verdadero: dado x tómese $y = x$.

e) Hay un número real x que puede sumarse a cualquier número real y para obtener de nuevo x. Falso.

f) Hay un número real x que puede sumarse a cualquier número real y para obtener de nuevo y. Verdadero: tómese $x = 0$.

g) Hay un número real x tal que, para todo número real y, x es mayor que y o $-x$ es mayor que y. Falso.

h) Hay un número real x tal que para todo número real y, x es mayor que y o no lo es. Verdadero: ley del tercero excluido.

i) Hay un real x tal que todo real y mayor que x tiene un cuadrado que también es mayor que x. Verdadero: tómese por ejemplo $x = 1$.

j) Hay un real x tal que todo real y menor que x tiene un cuadrado que también es menor que x. Falso.

k) Para cualquier número real x, hay algún número real y tal que xy es igual que yz para todos los números reales z. Verdadero: dado x, tómese $y = 0$.

l) Hay un número real x tal que, dado cualquier número real y, $(x + y)z$ es igual a 1 para algún número real z. Falso: dado x, tómese $y = -x$.

m) Entre cualquier par de números reales distintos existe otro número real. Verdadero: **R** es denso.

n) Dado cualquier número real x, existe algún número real z tal que si x es mayor que z entonces z será mayor que cualquier número real. Verdadero: dado x, tómese $z = x$.

Ejercicio 7 (formalización):

a)

$\forall x\ Lion(x) \Rightarrow Fierce(x)$

$\exists x\ Lion(x) \wedge \neg Drinks(x,Coffee)$

$\exists x\ Fierce(x) \wedge \neg Drinks(x,Coffee)$

donde $Lion(x) \equiv x$ es un león; $Fierce(x) \equiv x$ es feroz; $Drinks(x,y) \equiv x$ bebe y.

b)

$\neg\ [\ \exists x\ Professor(x) \wedge Ignorant(x)\ ]$

$\forall x\ Ignorant(x) \Rightarrow Vain(x)$

$\neg\ [\ \exists x\ Professor(x) \wedge Vain(x)\ ]$

donde $Professor(x) \equiv x$ es un profesor; $Ignorant(x) \equiv x$ es ignorante; $Vain(x) \equiv x$ es vanidoso.

c)

$\forall x\ Baby(x) \Rightarrow Illogical(x)$

$\forall x\ [\ \exists y\ Crocodile(y) \wedge Manages(x,y)\ ] \Rightarrow \neg Despised(x)$

$\forall x\ Illogical(x) \Rightarrow Despised(x)$

$\forall x\ Baby(x) \Rightarrow \neg\ [\ \exists y\ Crocodile(y) \wedge Manages(x,y)\ ]$

donde $Baby(x) \equiv x$ es un bebé; $Crocodile(x) \equiv x$ es un cocodrilo; $Despised(x) \equiv x$ es despreciado; $Manages(x,y) \equiv x$ puede domar a y.