1. Soluciones a algunos ejercicios de la primera relación de problemas de ADA

3. Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia y dar su orden de complejidad:

   a) $T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$, si $n > 1$; $T(0) = 0$; $T(1) = 1$
   La ecuación es ya homogénea, luego basta con calcular las soluciones del polinomio característico: $x^2 - 3x - 4 = 0$. Este polinomio tiene dos raíces distintas $x = 4$ y $x = -1$, luego las soluciones de la ecuación de recurrencia son de la forma:

   $$T(n) = a4^n + b(-1)^n$$

   Las condiciones iniciales nos permiten calcular los valores a y b:
   $T(0) = 0 \Rightarrow \quad a + b = 0$
   $T(1) = 1 \Rightarrow \quad 4a - b = 1$
   Operando obtenemos que $a = 1/5$ y $b = -1/5$, por lo que la solución a nuestra ecuación es

   $$T(n) = \frac{1}{5}(4^n + (-1)^{n+1}) \in \Theta(4^n)$$

   b) $T(n) = 2T(n-1) + 3^n(n+5)$,si $n > 0$; $T(0) = 0$
   OJO, en el enunciado pone $-3^n(n+5)$, lo he cambiado para que el resultado sea creciente.
   La ecuación no es homogénea, pero su término independiente es de la forma $3^n p(n)$, siendo $p(n) = n + 5$.
   Por lo tanto, el polinomio característico es $(x-2)(x-3)^2 = 0$ y las soluciones a la ecuación son del tipo:

   $$T(n) = a2^n + b3^n + cn3^n$$

   Para calcular el valor de a, b y c utilizamos los valores iniciales de la función T.
   $T(0) = 0 \Rightarrow \quad a + b = 0$
   $T(1) = 2T(0) + 3 * 6 = +18 \Rightarrow \quad 2a + 3b + 3c = +18$
   $T(2) = 2T(1) + 8 * 7 = +99 \Rightarrow \quad 4a + 9b + 18c = +99$
   Operando obtenemos que $a = -9, b = 9$ y $c = 3$, por lo que la solución a la ecuación es:

   $$T(n) = -92^n + 93^n + 3n3^n \in \Theta(n3^n)$$

   c) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$,si $\exists k \geq 1.n = 2^k$, $T(1) = 1$
   OJO en el enunciado no viene el caso base, pero lo he supuesto para luego poder calcular el valor de las constantes.
   Como un argumento de T es $n/2$, hay que realizar un *cambio de variable*. Asísuponemos que $n = 2^k$, y hacemos la sustitución en la ecuación:

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + (2^k)^2$$

Ahora en vez de calcular las soluciones de la función T, calculamos las de la función S:

$$S(k) = 4S(k-1) + (2^k)^2$$

A continuación podemos operar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrrcl} & S(k+1) & -4S(k) & = & +4^{k+1} \\ - & 4S(k) & -16S(k-1) & = & +4^{k+1} \\ \hline \end{array}$$

$$S(k+1) \quad -8T(k) \quad +16s(k-1) \quad = \quad 0$$

El polinomio característico es $x^2 - 8x + 16 = 0$ que tiene a $x = 4$ como raíz múltiple.

Por lo tanto, las soluciones de la función S son de la forma:

$$S(k) = a4^k + bk4^k$$

Deshaciendo el cambio $n = 2^k$, o equivalentemente $n^2 = 4^k$, se tiene que

$$T(n) = an^2 + bn^2 \log_2 n$$

Para calcular el valor de a y b utilizamos, como siempre, los valores iniciales de la función T.

$T(1) = 1 \Rightarrow \quad a = 1$

$T(2) = 4T(1) + 4 = 8 \Rightarrow \quad 4a + 4b = 8$

Luego $a = 1$ y $b = 1$, y la solución es:

$$T(n) = n^2 + n^2 \log_2 n \in \Theta(n^2 \log_2 n)$$

d) $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$,si $\exists k \geq 1 . n = 2^k$, $T(1) = 1$

Como un argumento de T es $n/2$, hay que realizar un *cambio de variable*. Así suponemos que $n = 2^k$, y hacemos la sustitución en la ecuación:

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k \log_2 2^k = 2T(2^{k-1}) + k2^k$$

Resolvemos ahora $S(k) = 2S(k-1) + k2^k$.

El polinomio característico es $(x-2)^3 = 0$ por lo que las soluciones de S son de la forma:

$$S(k) = a2^k + bk2^k + ck^2 2^k$$

Deshaciendo los cambios, tenemos que las soluciones de T tienen la forma:

$$T(n) = an + bn \log_2 n + cn \log_2^2 n$$

Para calcular el valor de a, b y c utilizamos los valores iniciales de la función T.

$$\begin{array}{ll} T(1) = 1 \Rightarrow & a = 1 \\ T(2) = 2T(1) + 2 * 1 = 4 \Rightarrow & 2a + 2b + 2c = 4 \\ T(4) = 2T(2) + 4 * 2 = 16 \Rightarrow & 4a + 8b + 16c = 16 \end{array}$$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos que $a = 1, b = 1/2$ y $c = 1/2$. Por lo que la solución es:

$$T(n) = n + \frac{1}{2} n \log_2 n + \frac{1}{2} n \log_2^2 n \in \Theta(n \log_2^2 n)$$

e) $T(n) = 3T(n/2) + 5n + 3$,si $\exists k \geq 1 . n = 2^k$, $T(1) = 1$

OJO como en el caso anterior he supuesto el caso base para luego poder calcular el valor de las constantes.

Primero hacemos el cambio de variable $n = 2^k$:

$$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + 5 * 2^k + 3$$

y resolvemos la ecuación de recurrencia $S(k) - 3S(k-1) = 5 * 2^k + 3$. Como no es homogénea, buscamos el polinomio característico, que en este caso es $(x-3)(x-2)(x-1) = 0$

Luego las soluciones de S tienen la forma:

$$S(k) = a + b2^k + c3^k$$

Para deshacer los cambios, hay que relacionar n y 3^k del modo siguiente: como $n = 2^k$ entonces $\log_2 n = \log_2 2^k = k$, luego $3^{log_2 n} = 3^k$ o lo que es lo mismo $n^{\log_2 3} = 3^k$.

Por tanto, las solución de T tiene la forma:

$$T(n) = a + bn + cn^{\log_2 3}$$

Usando el caso base obtenemos que $a = -3/2, b = -10$ y $c = 25/2$, luego la solución es:

$$T(n) = -\frac{3}{2} - 10n + \frac{25}{2} n^{\log_2 3} \Theta(n^{\log_2 3})$$

f) $T(n) = 2T(n/2) + \log_2 n$,si $\exists k \geq 1 . n = 2^k$, $T(1) = 1$

OJO como en los casos anteriores he supuesto el caso base para luego poder calcular el valor de las constantes.

Primero hacemos el cambio de variable $n = 2^k$, y resolvemos la ecuación para k:

$$S(k) = 2S(k-1) + k$$

A continuación operamos para obtener una ecuación homogénea. En este caso, utilizamos la recurrencia para eliminar el término independiente:

$$\begin{array}{rrrrcl} & & S(k+1) & -2S(k) & = & k+1 \\ & - & S(k) & -2S(k-1) & = & k \\ \hline S(k+1) & & -3S(k) & +2S(k-1) & = & 1 \end{array}$$

Operamos de nuevo,

$$\begin{array}{rrrrrr} & S(k+2) & -3S(k+1) & +2S(k) & = & +1 \\ - & S(k+1) & -3S(k) & +2S(k-1) & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} S(k+2) & -4S(k+1) & +5S(k) & -2S(k-1) & = & 0 \end{array}$$

Luego el polinomio característico es $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ cuyas raíces, que pueden calcularse por Ruffini, son $x = 1$ doble, y $x = 2$. Por lo tanto, las soluciones a S tienen la forma:

$$S(k) = a1^k + bk1^k + c2^k = a + bk + c2^k$$

Deshaciendo el cambio $n = 2^k$ obtenemos que las soluciones de T tienen la forma:

$$T(n) = a + b\log_2 n + cn$$

Usando el caso base obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} T(1) = 1 \Rightarrow & a + c = 1 \\ T(2) = 2T(1) + 1 = 3 \Rightarrow & a + b + 2c = 3 \\ T(4) = 2T(2) + 2 = 8 \Rightarrow & a + 2b + 3c = 8 \end{array}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene $a = -2, b = -1, c = 3$, por lo que la solución es:

$$T(n) = 3n - \log_2 n - 2 \in \Theta(n)$$

g) $T(n) = 2T(n^{1/2}) + \log_2 n$, y $\exists k \geq 0. n = 2^{2^k}$, $T(2) = 1$

Para resolver esta ecuación hay que hacer un cambio de variable un poco más complicado: $n = 2^{2^k}$. Así obtenemos la expresión:

$$T(2^{2^k}) = 2T(2^{2^{k-1}}) + \log_2 2^{2^k}$$

por lo que una vez realizado el cambio de variable nos queda:

$$S(k) = 2S(k-1) + 2^k$$

Operando, para que nos quede homogénea se tiene:

$$\begin{array}{rrrrr} & S(k+1) & -2S(k) & = & 2^{k+1} \\ - & 2S(k) & -4S(k-1) & = & 2^{k+1} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} S(k+1) & -4S(k) & +4S(k-1) & = & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio característico es $x^2 - 4x + 4 = 0$ que tiene $x = 2$ como única raíz doble. Así que las soluciones de S son del tipo:

$$S(k) = a2^k + bk2^k$$

Deshaciendo el cambio $n = 2^{2^k}$ se obtiene la ecuación

$$T(n) = a\log_2 n + b\log_2 n \log_2 \log_2 n$$

Utilizando los casos base se obtiene que los valores de las constantes son $a = b = 1$, por lo que la solución es:

$$T(n) = \log_2 n + \log_2 n \log_2 \log_2 n \in \Theta(\log_2 n \log_2 \log_2 n)$$

h) $T(n) = 5T(n/2) + (n \log_2 n)^2$, y $\exists k \geq 0.n = 2^k$, $T(1) = 1$
Hacemos el cambio de variable $n = 2^k$, y obtenemos la ecuación

$$S(k) = 5S(k-1) + (2^k k)^2 = 5S(k-1) + 4^k k^2$$

Por lo tanto, el polinomio característico es $(x-5)(x-4)^3 = 0$, y la solución general de la ecuación S tiene la forma:

$$S(k) = a4^k + bk4^k + ck^2 4^k + d5^k$$

Deshaciendo el cambio obtenemos:

$$T(n) = an^2 + bn \log_2 n + cn \log_2^2 n + dn^{\log_2 5} \Theta(n^{\log_2 5})$$

teniendo en cuenta que si $n = 2^k$ entonces $\log_2 n = k$ y, por lo tanto, $5^{\log_2 n} = 5^k$, o lo que es lo mismo, $5^k = n^{\log_2 5}$.

i) $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) - 2T(n-3)$ si $n > 2$, y
$T(n) = 9n^2 - 15n + 106$ si $n = 0, 1, 2$
Esta es una ecuación homogénea, y su polinomio característico es

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$$

Las raíces del polinomio son $x = 1, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$. Luego las soluciones de T tienen la forma:

$$T(n) = a + b\sqrt{2}^n + c(-\sqrt{2})^n$$

Utilizando los casos base obtenemos los valores de los coeficientes: $a = 100, b = 3, c = 3$. Luego, la solución es:

$$T(n) = 100 + 3\sqrt{2}^n + 3(-\sqrt{2})^n \in \Theta(\sqrt{2}^n)$$

j) Esta no se resuelve

k) $T(n) = 2T(n/4) + n^{1/2}$, si $\exists k > 0.n = 4^k$, $T(1) = 1$.
OJO, he vuelto a suponer el caso T(1) = 1
Hacemos el cambio $n = 4^k$ y obtenemos la ecuación

$$S(k) = 2S(k-1) + 2^k$$

El polinomio característico es $(x-2)^2 = 0$, luego las soluciones de S tienen la forma:

$$S(k) = a2^k + bk2^k$$

Desahciendo el cambio se obtiene la expresión

$$T(n) = a\sqrt{n} + b\sqrt{n}\log_4 n$$

Utilizando el caso base obtenemos que $a = b = 1$, por lo que la solución es:

$$T(n) = \sqrt{n} + \sqrt{n}\log_4 n \in \Theta(\sqrt{n}\log_4 n)$$

l) $T(n) = 4T(n/3) + n^2$, si $\exists k > 0.n = 3^k$, $T(1) = 1$.
OJO, he vuelto a suponer el caso T(1) = 1
Hacemos el cambio $n = 3^k$ y obtenemos la ecuación

$$S(k) = 4S(k-1) + 9^k$$

El polinomio característico es $(x-4)(x-9) = 0$, luego las soluciones de S tienen la forma:

$$S(k) = a4^k + b9^k$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos la expresión

$$T(n) = an^{\log_3 4} + bn^2$$

teniendo en cuenta que si $n = 3^k$ entonces $n^{\log_3 4} = 4^k$.
Con el caso base, calculamos los valores de las constantes $a = -4/5, b = 9/5$. Luego, la solución es:

$$T(n) = \frac{-4n^{\log_3 4} + 9n^2}{5} \in \Theta(n^2)$$

4. Para cada una de las siguientes recurrencias determine su orden de complejidad usando el Teorema Maestro. Una vez realizado esto, encuentre las ecuaciones exactas para cada una de ellas (no es necesario calcular los valores de los coeficientes que dependen de las condiciones iniciales).

   a) $t(n) = 4t(n/2) + n^2$
   En este caso, $f(n) = n^2$, $a = 4, b = 2$ y $n^{\log_b a} = n^2$. Como $f(n) = n^2 \in \Theta(n^2)$, se aplica el caso 2 del Teorema Maestro y obtenemos que $t(n) \in \Theta(n^2 \log n)$. La solución exacta a la ecuación corresponde al apartado c) del ejercicio anterior.

   b) $t(n) = 2t(n/2) + n\log_2 n$.
   Para esta ecuación $f(n) = n\log_2 n, a = 2, b = 2$ y $n^{\log_b a} = n$. Como $f(n) = n\log_2 n \in \Theta(n\log_2 n)$ se aplica el caso 2 del Teorema Maestro y se obtiene que $t(n) \in \Theta(n\log_2^2 n)$. Esta ecuación está resuelta en el apartado d) del ejercicio anterior.

   c) $t(n) = 3t(n/2) + 5n + 3$.
   Para aplicar el Teorema Maestro, se tiene que $f(n) = 5n + 3, a = 3, b = 2$ y $n^{\log_b a} = n^{\log_2 3}$. Como $\log_2 3 > 1$, sabemos que $3n + 5 \in \Theta(n^{\log_2 3-\epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$, por el Teorema Maestro (caso 1), tenemos que $t(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$. La ecuación exacta está resuelta en apartado e) del ejercicio anterior.

d) $t(n) = 2t(n/2) + \log_2 n$.

Procediendo como en los anteriores apartados $f(n) = log_2 n, a = 2, b = 2$, y $n^{\log_b a} = n$. Como $f(n) = \log_2 n \in \Theta(n^{-\epsilon})$, para algún $\epsilon > 0$, aplicando el caso 1 del Teorema Maestro se tiene que $t(n) \in \Theta(n)$. La ecuación exacta está resuelta en apartado f) del ejercicio anterior.

e) $t(n) = 2t(\sqrt{n}) + \log_2 n$

Como la forma de la ecuación no se corresponde con el modelo al que puede aplicársele el Teorema Maestro, hay que hacer un cambio de variable. Sea $n = 2^k$, entonces $\sqrt{n} = n^{1/2} = 2^{k/2}$. Haciendo el cambio en la ecuación se obtiene $s(k) = 2s(k/2) + k$ a la que sí puede aplicarse el Teorema Maestro. En este caso, $f(k) = k, a = 2, b = 2$ y $k^{\log_b a} = k$. Luego, como $f(k) \in \Theta(k)$, podemos aplicar el caso 2 del Teorema Maestro, y obtenemos que $s(k) \in \Theta(k \log_2 k)$. Ahora, deshaciendo el cambio, se tiene que $t(n) \in \Theta(\log_2 n \log_2 \log_2 n)$. La ecuación exacta está resuelta en apartado g) del ejercicio anterior.

f) $t(n) = 5t(n/2) + (n \log_2 n)^2$

En este caso, $f(n) = n^2 \log_2^2 n, a = 5, b = 2$, y $n^{\log_b a} = n^{\log_2 5}$. Ahora, el problema está en decidir cual de las dos funciones $n^2 \log_2^2 n$ ó $n^{\log_2 5}$ es mejor desde el punto de vista de la eficiencia, teniendo en cuenta que $\log_2 5 > 2$. Para ello, podemos calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \log_2^2 n}{n^{\log_2 5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2^2 n}{n^{\log_2 5 - 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \log_2 e \log n}{(\log_2 5 - 2) n^{\log_2 5 - 2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \log_2^2 e}{(\log_2 5 - 2)^2 n^{\log_2 5 - 2}} = 0$$

Lo que significa que $n^2 \log_2^2 n$ es estrictamente mejor que $n^{\log_2 5}$, por lo que, $n^2 \log_2^2 n \in O(n^{\log_2 5 - \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$. De esta forma, aplicado el caso 1 del Teorema Maestro, deducimos que $t(n) \in \Theta(n^{\log_2 5})$. La ecuación exacta está resuelta en apartado h) del ejercicio anterior.