

# MUD lab03: Sprawozdanie

Marta Wleklińska

23 października 2025

## 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zbadanie wpływu kolejnych przybliżeń funkcji sinus na dynamikę prostego wahadła, określenie stabilności punktów stałych oraz porównanie zachowania energii w czasie.

## 2 Wahadło

Równanie ruchu prostego wahadła ma postać

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta = -\sin \vartheta, \quad (1)$$

gdzie przyspieszenie ziemskie  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $l = 9.8 \text{ m}$ . W rozwinięciu Taylora w punkcie  $\vartheta = 0$ , możemy rozwinąć sinus kąta, jako

$$\sin \vartheta \approx \vartheta - \frac{1}{6}\vartheta^3.$$

Wobec tego możemy sprawdzić poprawności kolejnych przybliżeń funkcji sinus w przypadku rozwiązywania równania różniczkowego (1)

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \vartheta = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \vartheta - \frac{1}{6}\vartheta^3 = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \sin \vartheta = 0. \quad (4)$$

Aby zapisać te równania jako układ dwóch równań pierwszego rzędu, zapisujemy kolejno układy równań z (2), (3), (4)

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\vartheta. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\vartheta + \frac{1}{6}\vartheta^3. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\sin \vartheta. \end{cases} \quad (7)$$

W dalszych rozważaniach będziemy utożsamiać problem układu równań (5), w którym funkcja sinus została przybliżona liniowo jako model 1; układ równań (6) - jako model 2 oraz układ równań (7) - model 3.

## 2.1 Punkty stałe

Aby wyznaczyć punkty stałe, porównujemy do zera prawe strony drugich układów równań, tj.

$$-\vartheta = 0 \rightarrow \vartheta_0^* = 0, \quad \omega_0^* = 0, \quad (8)$$

$$-\vartheta(t) + \frac{1}{6}\vartheta^3(t) = 0 \rightarrow \vartheta(\vartheta^2 - 6) = 0, \rightarrow \vartheta_1^* = \{0.0, -\sqrt{6}, \sqrt{6}\}, \quad \omega_1^* = 0.0, \quad (9)$$

$$\sin \vartheta = 0 \rightarrow \vartheta_2^* = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega_2^* = 0.0. \quad (10)$$

## 2.2 Analiza stabilności punktów stałych

Mając już dla każdego modelu wyznaczone wartości punktów stałych:

1. Model 1:

$$(\vartheta_0^*, \omega_0^*) = (0.0, 0.0),$$

2. Model 2:

$$(\vartheta_1^*, \omega_1^*) = \{(0.0, 0.0), (-\sqrt{6}, 0.0), (\sqrt{6}, 0.0)\},$$

3. Model 3:

$$(\vartheta_2^*, \omega_2^*) = \{(k\pi, 0.0)\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

możemy kolejno zbadać ich stabilność poprzez zapisanie równań charakterystycznych dla macierzy Jacobiego kolejnych układów równań (5), (6), (7). Dokonamy zatem zamiany zmiennych

$$u = \vartheta - \vartheta^* \Rightarrow \dot{u} = \dot{\vartheta}$$

$$v = \omega - \omega^* \Rightarrow \dot{v} = \dot{\omega}$$

i zapiszemy układ równań w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \Big|_{(\vartheta^*, \omega^*)} & \frac{\partial f}{\partial \omega} \Big|_{(\vartheta^*, \omega^*)} \\ \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \Big|_{(\vartheta^*, \omega^*)} & \frac{\partial g}{\partial \omega} \Big|_{(\vartheta^*, \omega^*)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (11)$$

gdzie  $f = f(\vartheta, \omega)$ ,  $g = g(\vartheta, \omega)$  są kolejno wyrażeniami po prawej stronie kolejnych układów równań (5) (6), (7).

Poprzez linearyzację tego układu równań wokół punktu stałego uzyskujemy równanie charakterystyczne na wartości własne  $\lambda$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0, \quad (12)$$

skąd współczynnik przy  $\lambda$  rozpoznajemy, że jako ślad macierzy układu równań ( $\text{Tr}$ ), a wyraz wolny utożsamiamy z wyznacznikiem ( $\det$ ). W zależności od tego, jakie będą te wartości i czy będą istnieć rzeczywiste rozwiązania (wyróżnik kwadratowy  $\Delta = \text{Tr}^2 - 4\det \geq 0$ ), tak będziemy klasyfikować dany punkt stały.

1. Model 1: Dla pierwszego modelu (równanie (5)) macierz tego układu równań będzie miała następujące elementy

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

czyli uzyskaliśmy zerowe elementy na diagonali i niezerowe na antydiagonali. Znaczy to, że

$$\text{Tr} = 0, \quad \det = 1.0, \quad \Delta = -4.0 < 0,$$

przy czym przyjęliśmy skrótowe oznaczenia, że ślad z rozpatrywanej macierzy zapisujemy jako  $\text{Tr}$ , a jej wyznacznik  $\det$ . **Punkt ten zatem jest centrum** - rozwiązania periodycznie orbitują wokół niego.

2. Model 2: macierz układu równań (6) będzie miała następującą postać

(a) dla  $(\vartheta_1^*, \omega_1^*) = (0.0, 0.0)$ ,

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 + \frac{2}{6}0^2 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

a jej ślad i wyznacznik są równe:

$$\text{Tr} = 0.0, \quad \det = 1.0, \quad \Delta = -4.0 < 0.$$

**Znaczy to, że jest to punkt stały: centrum.**

(b) dla  $(\vartheta_1^*, \omega_1^*) = (-\sqrt{6}, 0.0)$

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

a jej ślad i wyznacznik są równe:

$$\text{Tr} = 0.0, \quad \det = -1.0, \quad \Delta = 4.0 > 0.$$

**Jest to siodło** - trajektorie uciekają w jedną stronę.

(c) dla  $(\vartheta_1^*, \omega_1^*) = (\sqrt{6}, 0.0)$

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

a jej ślad i wyznacznik są równe:

$$\text{Tr} = 0.0, \quad \det = -1.0, \quad \Delta = 4.0 > 0.$$

**Jest to siodło.**

3. Model 3: macierz układu równań (7) przy  $(\vartheta_2^*, \omega_2^*) = (k\pi, 0.0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  zapisujemy jako

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ \cos(k\pi) & 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ (-1)^k & 0.0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Element (2, 1) będzie zależny od tego, czy wartość  $k$  jest parzysta czy nieparzysta. Zatem ślad będzie zawsze równy zeru, a wyznacznik - naprzemiennie  $\{-1, 1\}$

$$\text{Tr} = 0.0, \quad \det = (-1)^{k+1}, \quad \Delta = 4 \cdot (-1)^k. \quad (18)$$

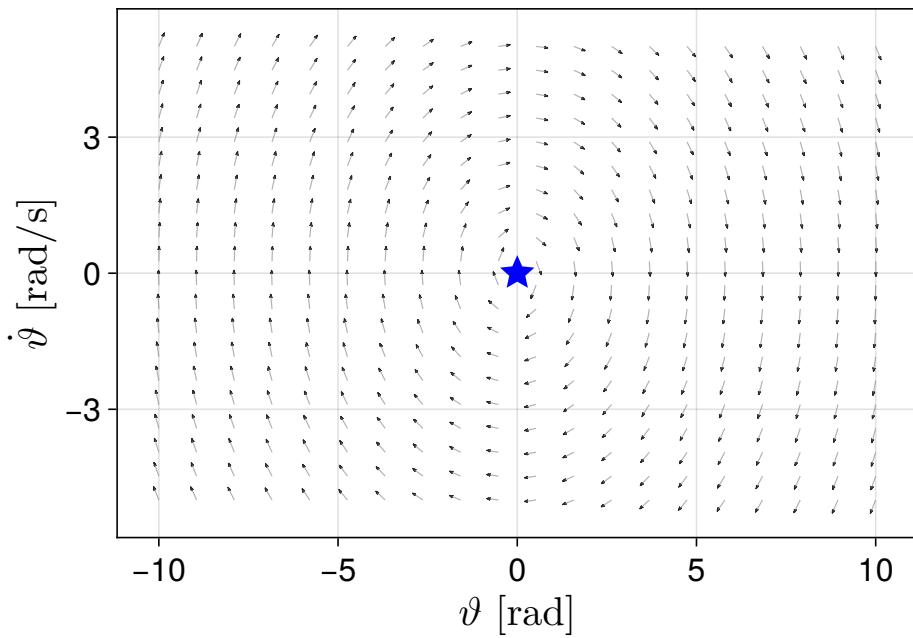
Kiedy wyznacznik jest ujemny ( $k$  jest parzyste), punkt ten jest **siodełkiem**, a dla nieparzystego  $k$  - **centrum**.

## 2.3 Portrety fazowe

W kolejnej części zapisaliśmy portret fazowy dla każdego z układów równań (5), (6), (7). Zostały one zaprezentowane na rysunkach 1, 2, 3. Możemy zatem graficznie łatwo zaobserwować punkty stałe.

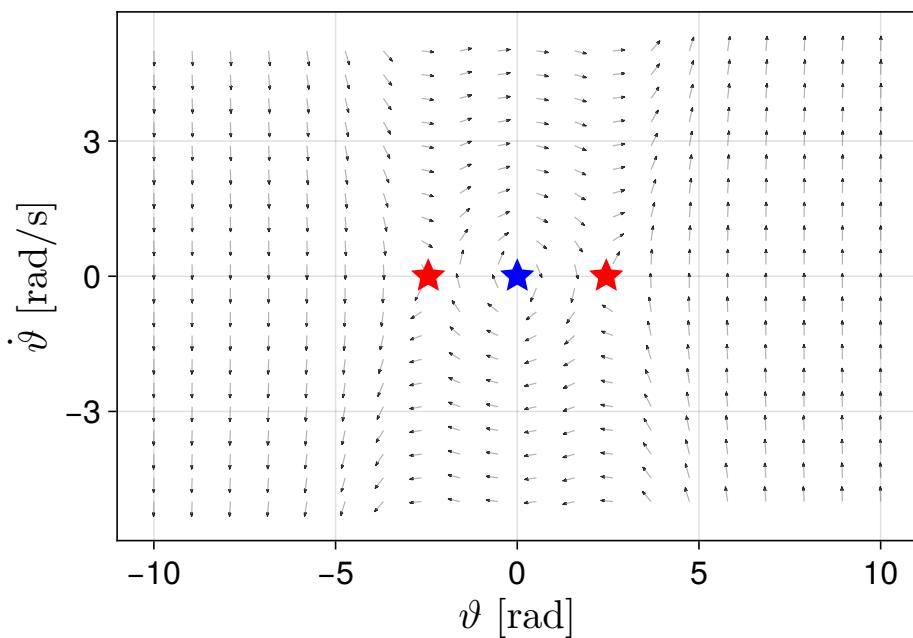
1. Dla pierwszego modelu (rys. 1): w  $(\vartheta_0^*, \omega_0^*) = (0.0, 0.0)$  - zbiegają się do niego trajektorie - zidentyfikowaliśmy ten punkt jako **centrum**.
2. Dla drugiego modelu (rys. 2):
  - (a) w  $(\vartheta_1^*, \omega_1^*) = (0.0, 0.0)$  znajdujemy **centrum**;
  - (b) w  $(\vartheta_1^*, \omega_1^*) = (-\sqrt{6}, 0.0)$  - **siodło**;
  - (c) w  $(\vartheta_1^*, \omega_1^*) = (\sqrt{6}, 0.0)$  - **siodło**.
3. Dla trzeciego modelu (rys. 3)
  - (a) dla  $k = 2n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (parzystego) - punkt  $(k\pi, 0.0)$  jest **centrum**;
  - (b) a dla  $k = 2n + 1$  (nieparzystego) - punkt  $(k\pi, 0.0)$  jest **siodłem**.

model 1

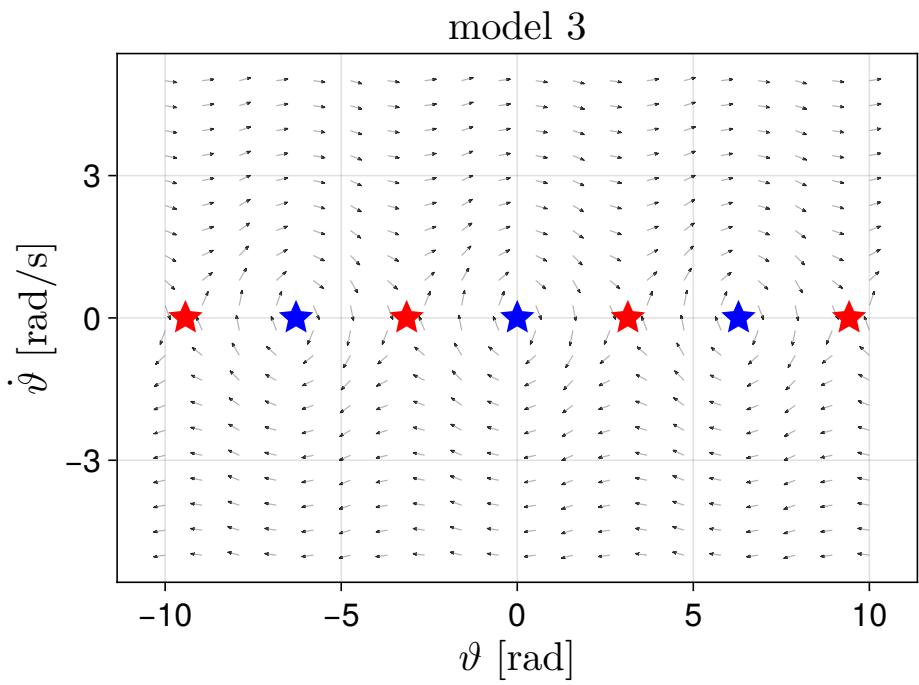


Rysunek 1: Portret fazowy dla pierwszego przybliżenia  $\sin \vartheta \approx \vartheta$  układu równań (5) wraz z zaznaczonym punktem stałym (centrum)

model 2



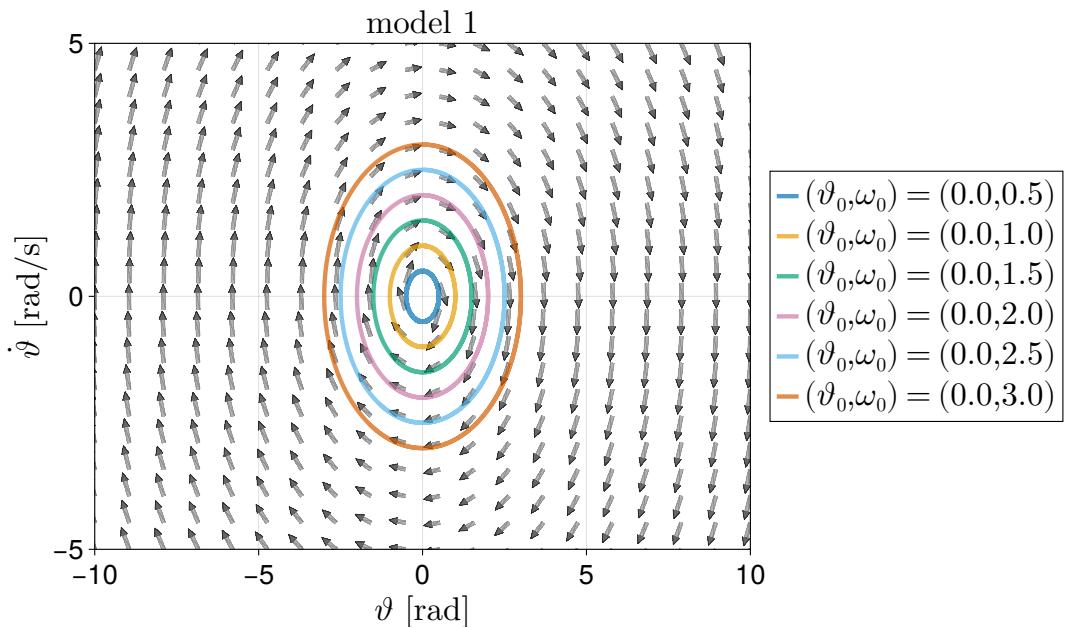
Rysunek 2: Portret fazowy dla drugiego przybliżenia  $\sin \vartheta \approx \vartheta - \frac{1}{6}\vartheta^3$  układu równań (6) wraz z zaznaczonymi punktami stałymi (niebieski - centrum; czerwony - siodło)



**Rysunek 3:** Portret fazowy dla układu równań (7) wraz z zaznaczonymi punktami stałymi (niebieski - centrum; czerwony - siodło)

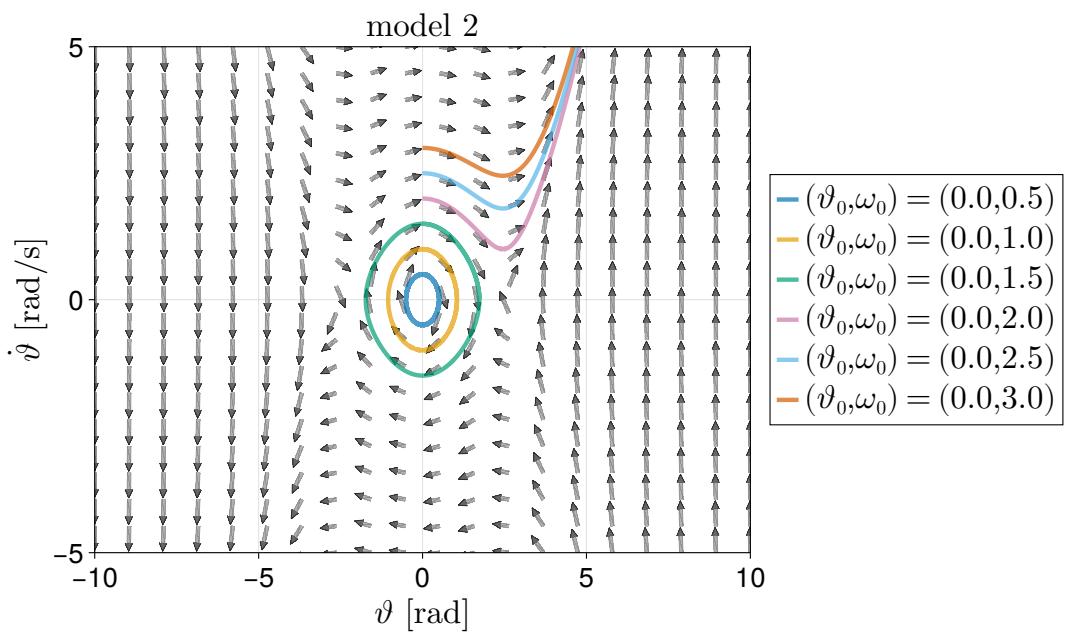
## 2.4 Rozwiązania - trajektorie w przestrzeni fazowej

Dla każdego modelu zatem rozwiązywaliśmy układ równań za pomocą biblioteki GSL. Na rysunkach 4, 5, 6 zostały zapisane rozwiązania w przestrzeni fazowej ( $\vartheta$ ,  $\dot{\vartheta}$ ).

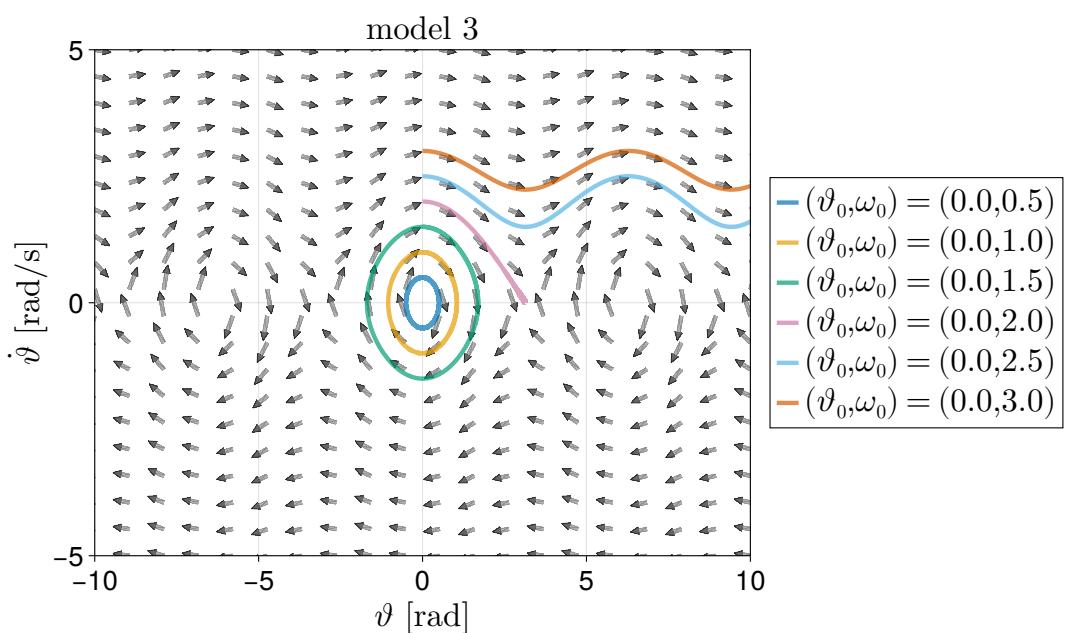


**Rysunek 4:** Trajektorie w przestrzeni fazowej dla pierwszego przybliżenia sinusu (5)

1. W modelu 1 (rys. 4) rozwiązania oscylują dookoła centrum w zależności od warunku początkowego;



Rysunek 5: Trajektorie w przestrzeni fazowej dla drugiego przybliżenia sinusa (6)

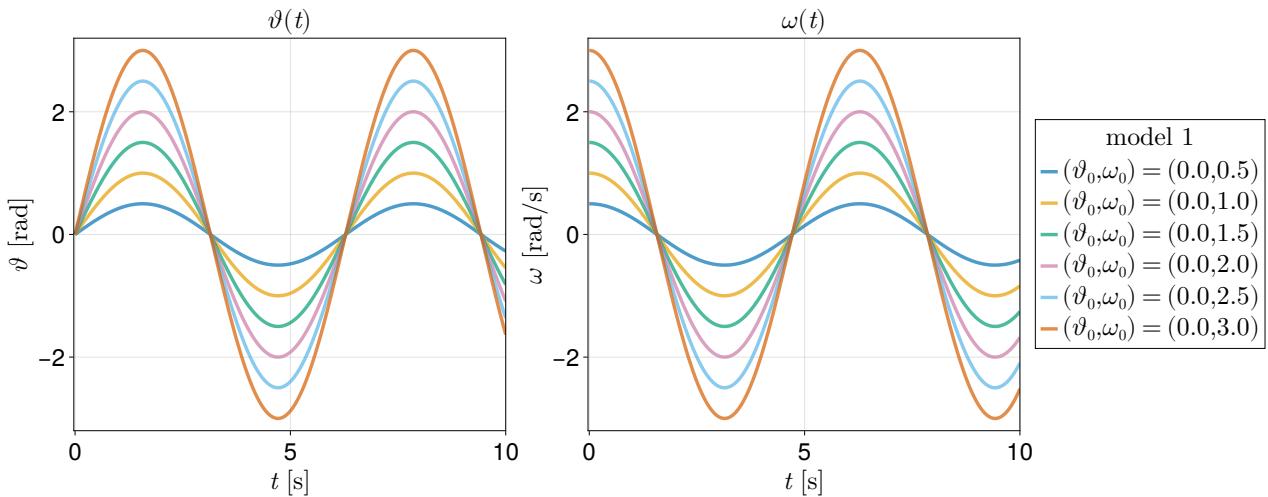


Rysunek 6: Trajektorie w przestrzeni fazowej dla dokładnego równania (7)

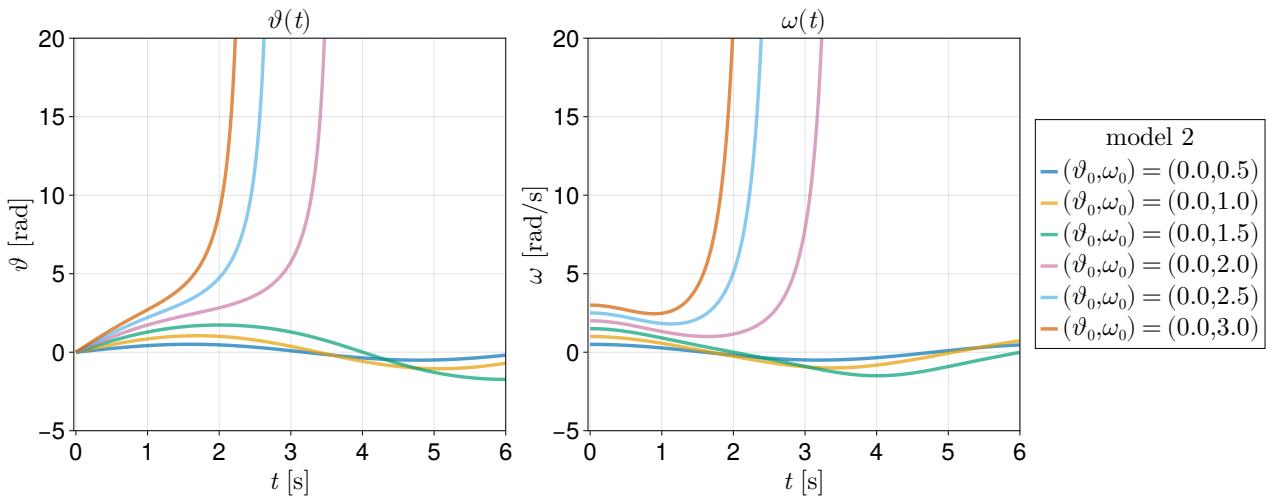
2. W modelu 2 (rys. 5) dla niższych początkowych wartości  $\omega_0$  trajektorie oscylują dookoła centrum, jednak dla większych  $\omega_0$  - trajektorie uciekają do nieskończoności zauważając punkt stały w postaci siodła.
3. W modelu 3 (rys. 6) zauważamy ponownie, że dla niskich  $\omega_0$  oscylują wokół centrum, a dla wyższych oscylują wokół kolejnych center i uciekają od siodeł tworząc sinusoidalne oscylacje.

## 2.5 Rozwiązańa funkcji w czasie

Oprócz trajektorii, mogliśmy zapisać rozwiązania  $\vartheta(t)$ ,  $\omega(t)$ , które dla kilku warunków początkowych zostały zapisane na rysunkach 7, 8, 9.

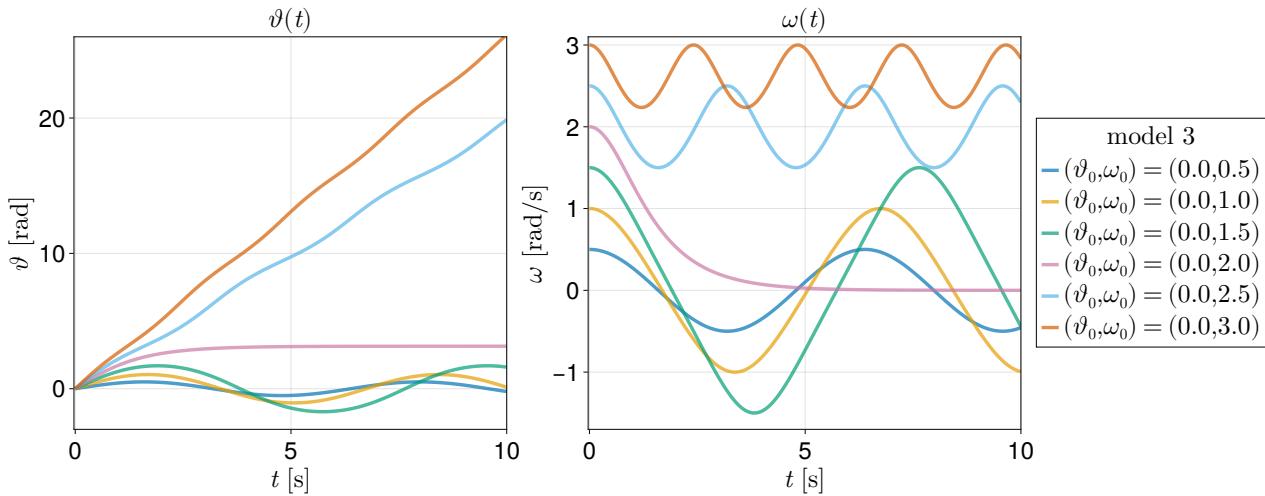


Rysunek 7: Rozwiązańa  $\vartheta(t)$ ,  $\omega(t)$  w czasie w pierwszym przybliżeniu równania (5)



Rysunek 8: Rozwiązańa  $\vartheta(t)$ ,  $\omega(t)$  w czasie w drugim przybliżeniu równania (6)

1. W pierwszym modelu (rys. 7) rozwiązania  $\vartheta(t)$ ,  $\omega(t)$  mają charakter sinusoidalny, przy czym są przesunięte w fazie.
2. W drugim modelu (rys. 8) dla niższych wartości początkowego  $\omega_0$  rozwiązania  $\vartheta(t)$ ,  $\omega(t)$  oscylują ponownie będąc przesunięte w fazie, jednak dla trzech przypadków o wyższych wartościach  $\omega_0$  - oscylacje zamieniają się po pewnym czasie gwałtownym zmierzaniem do nieskończoności, co również możemy potwierdzić z rozwiązaniem w przestrzeni fazowej 5.

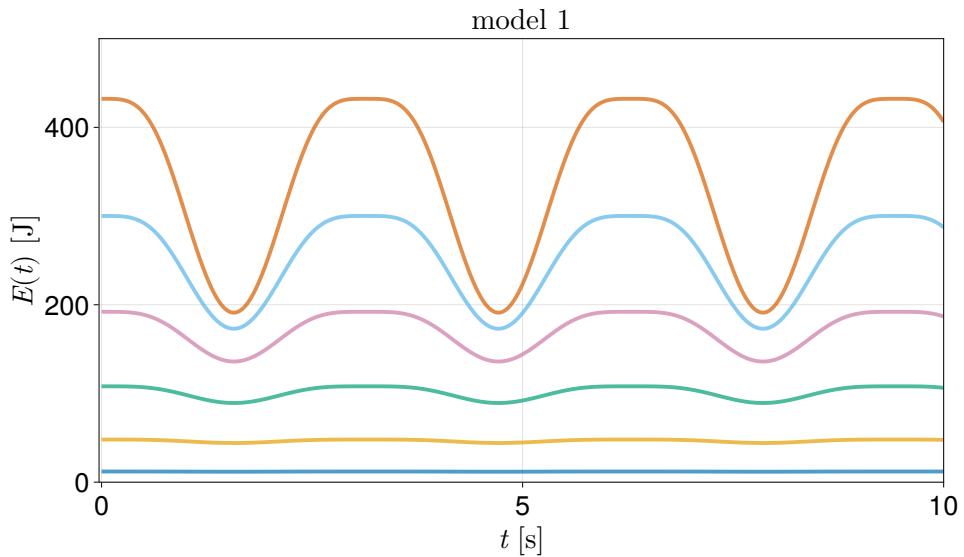


Rysunek 9: Rozwiązania  $\vartheta(t)$ ,  $\omega(t)$  w czasie równania (7)

3. W modelu trzecim (dokładnym rozwiązaniem równania wahadła - rys. 9) rozwiązania ponownie dzielimy te które oscylują jedynie wokół centrum  $(0.0, 0.0)$  i pozostałymi, które oscylują wokół pozostałych center. Te pierwsze rozwiązania mają charakter oscylacyjny - jak w poprzednich modelach, a te drugie - monotonicznie rosną ( $\vartheta(t)$ ) w czasie.

## 2.6 Energia w czasie

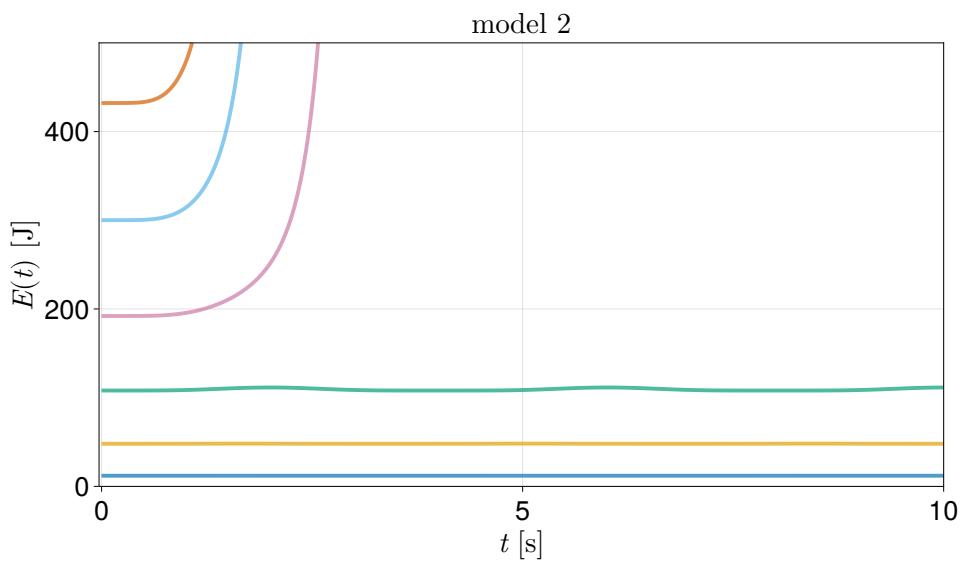
Analizowaliśmy wartości energii całkowitej układu dla różnych warunków początkowych w każdym z rozpatrywanych modeli. Dla modelów 1, 2, 3 (rozwiązywanie kolejno równań (5), (6), (7)) uzyskaliśmy wykresy na rysunkach 10, 11, 12. Energia całkowita w tym układzie zachowawczym



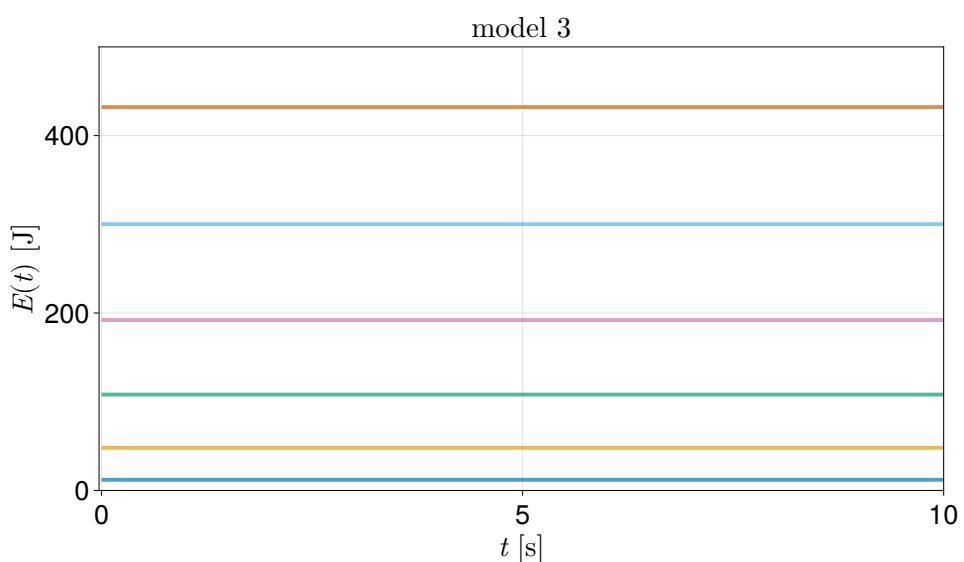
Rysunek 10: Energia całkowita układu w czasie dla różnych warunków początkowych dla pierwszego przybliżenia (5)

powinna być stała. Jednak analizując wykresy, możemy zauważyc, że

1. dla pierwszego przybliżenia (rys. 10), energia ta wyraźnie oscyluje. Nie wynika to z metody numerycznej, a z linearyzacji funkcji sinus w pobliżu  $\vartheta \rightarrow 0$ .



Rysunek 11: Całkowita energia układu dla drugiego przybliżenia  $\sin \vartheta \approx \vartheta - 1/6\vartheta^3$

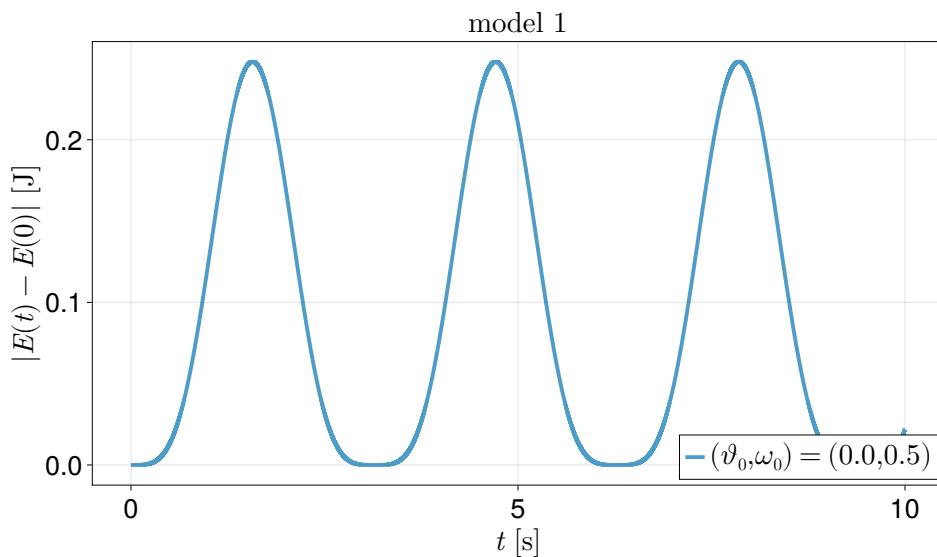


Rysunek 12: Całkowita energia układu dla  $\sin \vartheta = \sin \vartheta$

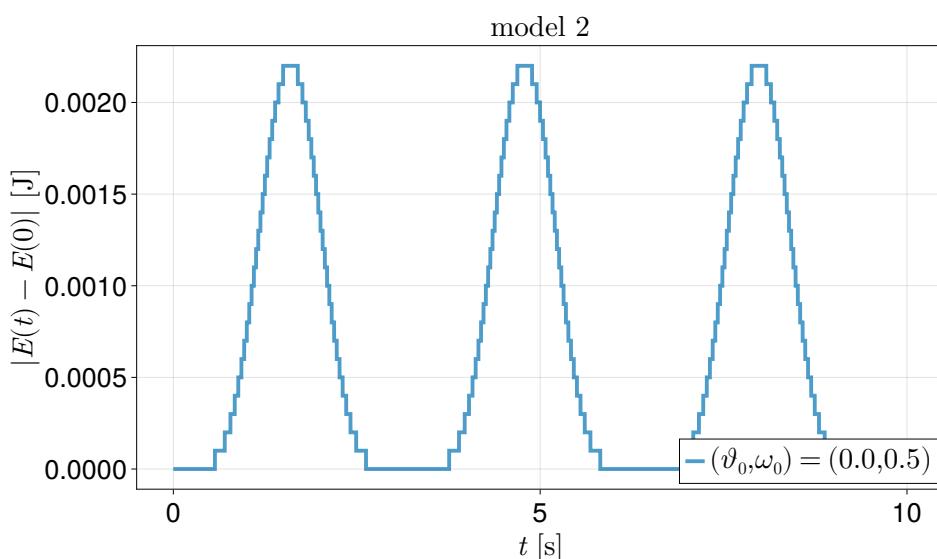
2. W drugim przybliżeniu (rys. 11) dla trzech warunków początkowych, wybiega ona do nieskończoności, co również widzieliśmy na wykresach kąta i częstości w czasie  $\vartheta(t), \omega(t)$  na rysunku 8. Dla pozostałych warunków delikatnie oscyluje w czasie.
3. Dla dokładnego rozwiązania (rys. 12) nie występują oscylacje - energia całkowita układu dla zadanego warunku początkowego pozostaje stała.

## 2.7 Różnice w energii

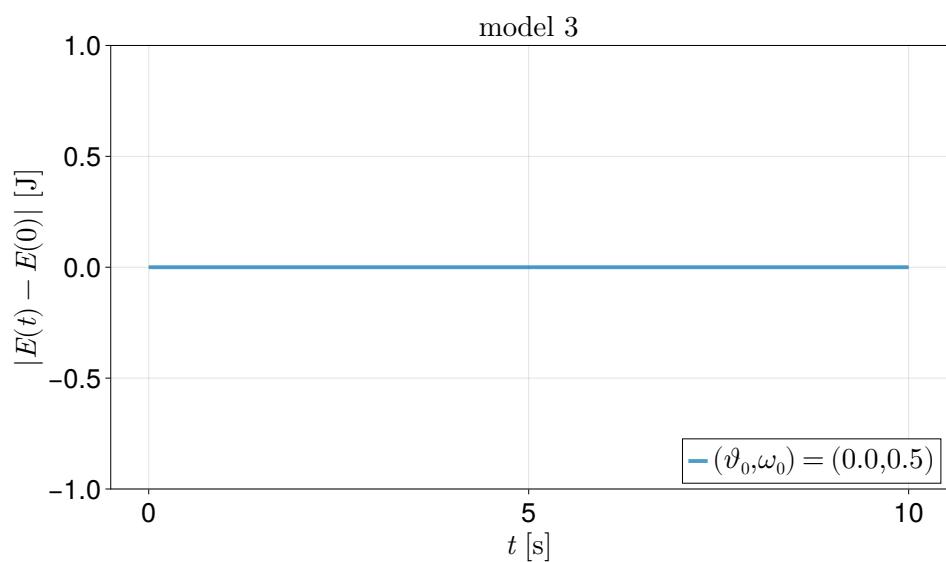
Aby porównać kolejne dokładności zapiszemy różnice wartości energii w czasie  $E(t)$  przeskalowane o wartość początkową  $E(0)$  dla jednego warunku początkowego  $(\vartheta_0, \omega_0) = (0.0, 0.5)$ , przez co będziemy mogli porównać trzy modele i równania różniczkowe. Dla kolejnych równań (5), (6), (7) różnice energii  $\Delta E = |E(t) - E(0)|$  zostały zapisane na rysunkach 13, 14, 15. Ponownie zauważamy,



Rysunek 13: Różnica energii  $\Delta E = |E(t) - E(0)|$



Rysunek 14: Różnica energii  $\Delta E = |E(t) - E(0)|$



**Rysunek 15:** Różnica energii  $\Delta E = |E(t) - E(0)|$

że ta przeskalowana energia nie jest stała w czasie dla pierwszego i drugiego modelu (przybliżenia), a dla dokładnego rozwiązania jest ona stała (rys. 15).