

Sprawozdanie lab02

Modelowanie Układów Dynamicznych

Marta Wleklińska

15 października 2025

1 Ćwiczenie 1

Mamy równanie

$$\dot{x} = kx(1 - x) = f(x), \quad (1)$$

przy czym $k \neq 0$. Do wyznaczenia punktów stałych przyrównujemy prawą stronę równania (1) do zera uzyskując

$$kx(1 - x) = 0 \Rightarrow x_0^* = 0, \quad x_1^* = 1. \quad (2)$$

W zależności od wartości k ($k > 0$ lub $k < 0$), możemy stwierdzić, czy punkty x_0^* , x_1^* są punktami stałymi stabilnymi lub niestabilnymi. Jeżeli $f'(x_i^*) > 0$ dla $i = 0, 1$, punkt x_i^* jest niestabilny - a jeżeli $f'(x_i^*) < 0$ - stabilny. W przypadku $f'(x_i^*) = 0$ należy dokonać dalszej analizy. W przypadku równania (1), punkty stałe:

- x_0^* : ($f'(x_0^*) = k$) jest stabilny kiedy $k < 0$ - niestabilny kiedy $k > 0$;
- x_1^* ($f'(x_1^*) = k - 2k = -k$) - stabilny kiedy $k > 0$ i niestabilny kiedy $k < 0$.

1.1 Linearyzacja w otoczeniu punktów stałych

Będziemy chcieli zatem zapisać $w(x) = (x - x_i^*)$, a funkcję $f(x)$ rozwinąć w szereg Taylora w okolicy punktów stałych

$$f(x) \approx f(x_i^*) + \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_i^*} (x - x_i^*). \quad (3)$$

Wiemy, że $f(x_i^*) = 0$, zatem zostaje drugi składnik równania. Równanie (1) będzie zatem

$$\dot{x} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_i^*} (x - x_i^*) = \lambda w(x) = \dot{w}, \quad (4)$$

przy czym $\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i^*}$. Rozwiązaniem tego równania jest zatem

$$w = w_0 e^{\lambda t}, \quad (5)$$

gdzie $w_0 = w(x_0)$ Czyli wracając do początkowego zapisu

$$x(t) - x_i^* = (x_0 - x_i^*) e^{\lambda t} \quad (6)$$

$$x(t) = x_i^* + (x_0 - x_i^*) e^{f'(x_i^*) t}. \quad (7)$$

W przypadku punktów stałych

- $x_0^* = 0$: wartość pochodnej w punkcie $f'(x_0^*)$ jest ujemna dla $k < 0$ i dodatnia dla $k > 0$. Zatem eksponenta będzie funkcją malejącą w czasie dla $k < 0$ i rosnącą dla $k > 0$.

$$x(t) = x_0 e^{f'(0)t}. \quad (8)$$

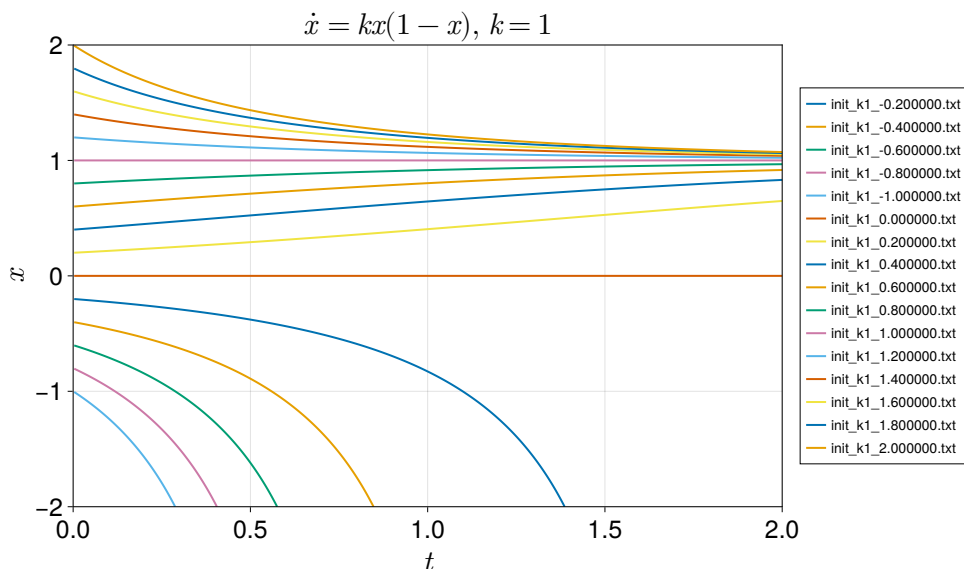
Zatem w przypadku $k < 0$ - 0.0 - stabilny, $k > 0$ - 0.0 - niestabilny.

- $x_1^* = 1$: odwrotna sytuacja w tym punkcie:

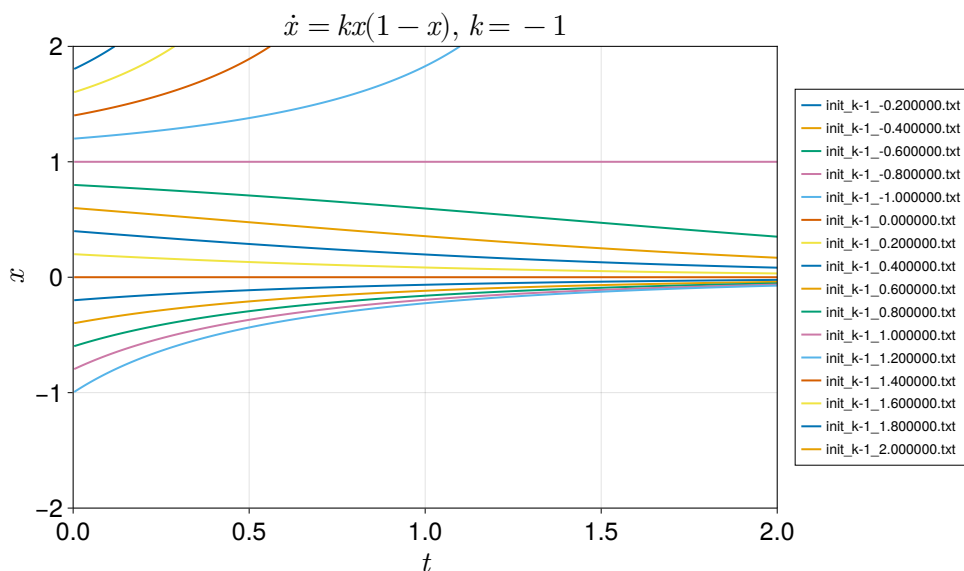
$$x(t) = 1 + (x_0 - 1)e^{f'(1)t}, \quad (9)$$

przy $k < 0$ - niestabilny, a $k > 0$ - stabilny.

Na rysunkach 1 2 zostały zapisane rozwiązania równania 1 dla różnych przypadków k . Zauważamy, że na obu wykresach widoczne są punkty $x = 0$ oraz $x = 1$, dla których funkcje zbiegają (stabilny) lub odbiegają od nich (niestabilny).



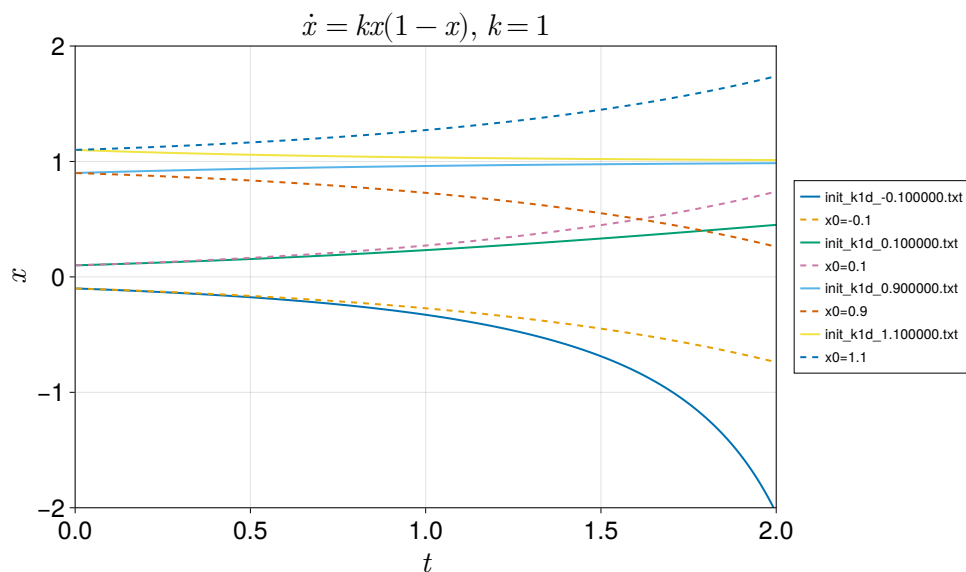
Rysunek 1: Rozwiązania równania (1) przy $k = 1$



Rysunek 2: Rozwiązanie równania (1) przy $k = -1$

1.2 Porównanie rozwiązań analitycznych i numerycznych w pobliżu punktów stałych

Będziemy rozpatrywać wartości $x_0 = \{-0.1, 0.1, 0.9, 1.1\}$ przy $k > 0$. Powołując się na zlinearyzowane rozwiązania (8), (9), możemy porównać te rozwiązania z numerycznymi. Możemy wyraźnie zauważyć, że analityczne przybliżenie było trafne w punktach $x_0 = -0.1, 0.1, 0.9, 1.0$ (okolicie punktów stałych) przy $t \rightarrow 0^+$.



Rysunek 3: Porównanie rozwiązań numerycznych z analitycznymi (poprzez linearyzację) w okolicach punktów stałych przy $k > 0$.

1.3 Analogia do potencjału

Przypomnijmy nasze równanie (1)

$$\dot{x} = f(x) = kx(1 - x). \quad (10)$$

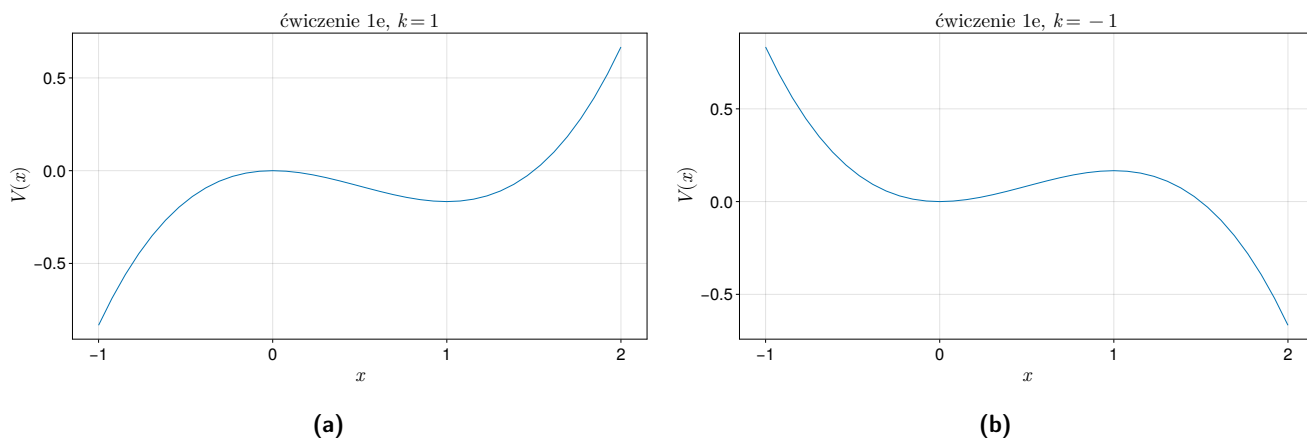
Jeżeli $f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$, to

$$\frac{dV(x)}{dx} = -f(x) = kx(x - 1). \quad (11)$$

Chcąc otrzymać $V(x)$, całkujemy - otrzymując

$$V(x) = \int dx (kx^2 - kx) = \frac{k}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2 + C = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C, & \text{przy } k = 1, \\ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C, & \text{przy } k = -1, \end{cases} \quad (12)$$

gdzie C – const (możemy przyjąć $C \equiv 0$). Na rysunku 4 zostały ukazane wykresy potencjału $V(x)$ dla wartości $k = 1, -1$. Fizyczny potencjał w punktach stabilnych może tworzyć ekstrema lokalne. Minima lokalne interpretujemy jako stabilne,



Rysunek 4: Szkic funkcji $V(x)$ przy **(a)** $k = 1$; **(b)** $k = -1$

a maksima - niestabilne.

1. Dla punktu $x_0^* = 0$ z równania (1) wynikało, że przy $k < 0$ - punkt jest stabilny, a przy $k > 0$ - niestabilny. Z rysunku 4 również wynikało, że przy $k < 0$ - punkt stały jest stabilny (identyfikujemy z minimum lokalnym).
2. Dla punktu $x_1^* = 1$ z równania (1) wynikało, że przy $k > 0$ - punkt stabilny, a przy $k < 0$ - niestabilny. Z rysunku 4 minimum lokalne w tym punkcie jest przy $k > 0$, a punkt stały niestabilny - $k < 0$.

Zauważyliśmy zatem, że analogia z fizycznym potencjałem - jest trafna. Minimum lokalne takiego potencjału odpowiada punktowi stałemu stabilnemu - a maksimum lokalne - punktowi stałemu niestabilnemu.

2 Ćwiczenie 2

Rozważamy układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y-1) = f(x, y) \\ \dot{y} = 3x - 2y + x^2 - 2y^2 = g(x, y). \end{cases} \quad (13)$$

2.1 Znalazienie punktów stałych

Ponownie jak w ćwiczeniu 1, wyznaczenie punktów stałych wiąże się z przyrównaniem prawych stron równania do zera $f(x_i^*, y_i^*) = 0$, $g(x_i^*, y_i^*) = 0$. Z pierwszego równania uzyskujemy, że dla $x_0^* = 0$ i dowolnego y , $f(0, y) = 0$ i podstawiając to do drugiego równania

$$x_0^* = 0 : \quad -2y^2 - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0^* = 0 \text{ lub } y_0^* = -1.$$

Z kolei przyjmując $y_1^* = 1$ zeruje się pierwsze równanie $f(x, 1) = 0$ i podstawiając tę wartość do drugiego równania

$$y_1^* = 1 : \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 1 \text{ lub } x_1^* = -4. \quad (14)$$

W takim razie uzyskaliśmy cztery punkty stałe: $(0.0, 0.0)$, $(0.0, -1.0)$, $(1.0, 1.0)$, $(-4.0, 1.)$.

2.2 Portret fazowy

Do znalezienia izoklin zerowych przyrównujemy prawe strony równań (13) do zera i rozwiązujemy ze względu na x i y

$$x(y-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \text{ lub } y = 1 \quad (15)$$

$$3x - 2y + x^2 - 2y^2 = 0$$

$$2y^2 + 2y - x^2 - 3x = 0$$

$$y_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8(x^2 + 3x)}}{4} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{2x^2 + 6x + 2} \right).$$

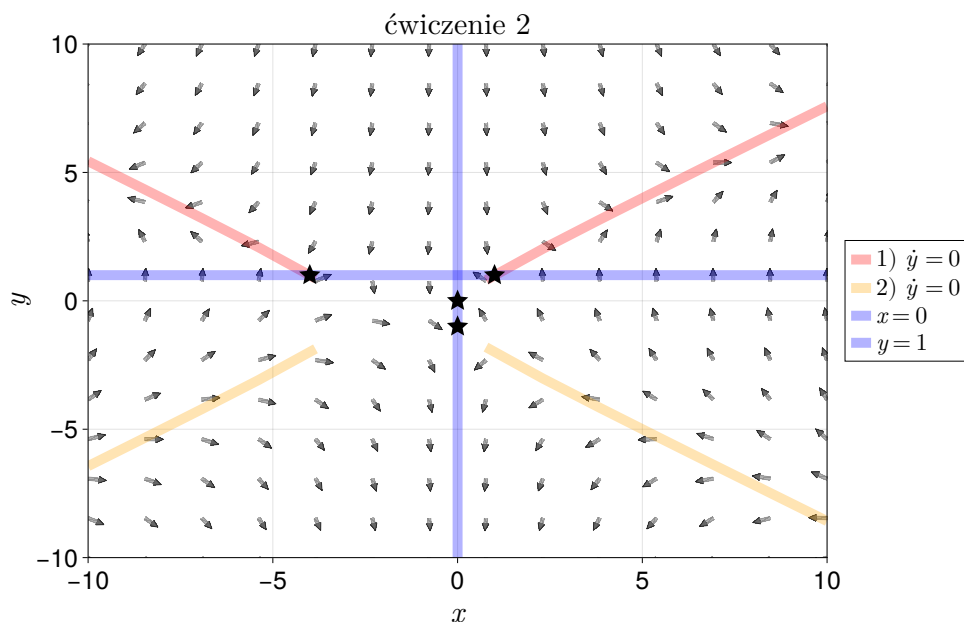
Krzywe te mają wartości rzeczywiste, kiedy wyróżnik kwadratowy, czyli wyrażenie pod pierwiastkiem, jest nieujemne. Osobno możemy rozważać krzywe y_+ i y_- .

Na rysunku 5 przedstawiony został portret fazowy wraz z izoklinami.

2.2.1 Stabilność punktów

Przeanalizujemy punkty stałe, które na rysunku 6 są zaznaczone przez \star .

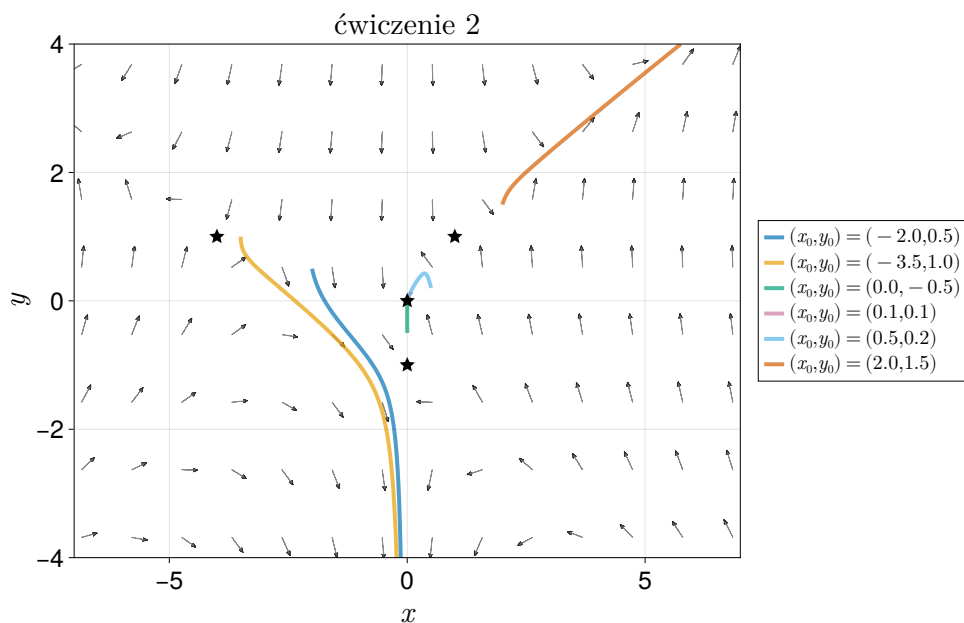
1. Punkt $(x_0, y_0) = (0.0, 0.0)$ - najpewniej punkt stały stabilny. Zbiegają do niego *strzałki* na portrecie fazowym.
2. Punkt $(x_0, y_0) = (0.0, -1.0)$ - trudniejszy do identyfikacji z portretu fazowego, jako że jest on *blisko* punktu $(0, 0)$. Najpewniej jest to jednak punkt siodłowy, jako że punkty z niego jednocześnie uciekają i odbiegają - w zależności od kierunku.
3. Punkt $(x_0, y_0) = (1.0, 1.0)$ - od razu możemy zauważyć, że jest to ponownie punkt siodłowy, jako że ponownie punkty z niego uciekają i przybiegają.
4. Punkt $(x_0, y_0) = (-4.0, 1.0)$ - ostatni węzeł siodłowy - zachowanie szybkości zmian jest podobne do punkty $(1.0, 1.0)$.



Rysunek 5: Portret fazowy wraz z izoklinami zerowego wzrostu i zaznaczonymi \star punktami stałymi

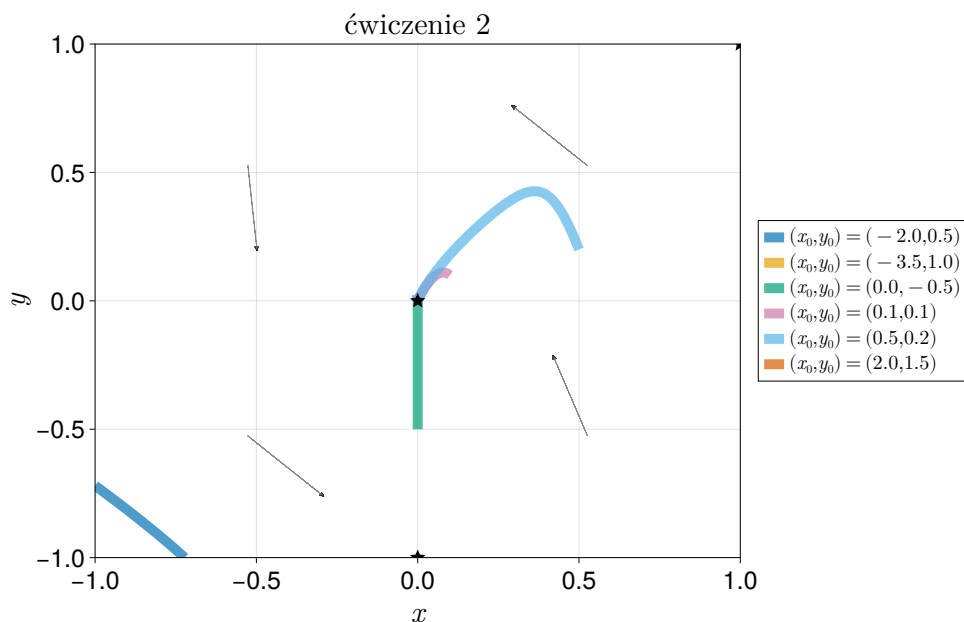
2.3 Rozwiązania równania

Korzystając z biblioteki GSL z algorytmem rk8pd rozwiązaliśmy równanie (13). Na rysunku 6 zapisaliśmy rozwiązania dla niektórych warunków początkowych. Na rysunku 7 przybliżone zostały rozwiązanie w okolicy punktu stałego $(0.0, 0.0)$.



Rysunek 6: Rozwiązania równania dla kilku warunków początkowych $(x_0, y_0) = (-2.0, 0.5)$, $(-3.5, 1.0)$, $(0.0, -0.5)$, $(0.1, 0.1)$, $(0.5, 0.2)$, $(2.0, 1.5)$

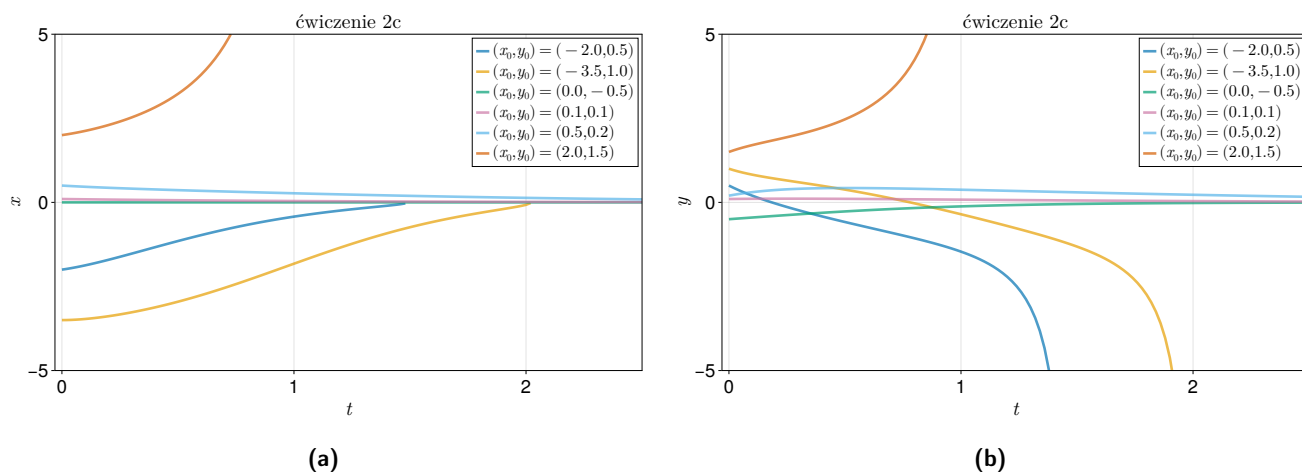
Możemy zauważyć, że w pobliżu punktu stabilnego, trajektorie zbiegają się do $(0.0, 0.0)$. W przypadku okolicy punktu $(2.0, 1.5)$ - możemy zauważyć *uciekanie* od tego punktu - analogicznie w przypadkach punktów $(-3.5, 1.0)$, $(-2.0, 0.5)$.



Rysunek 7: Przybliżenie rozwiązań przy warunkach $\rightarrow (0.0, 0.0)$

2.3.1 Wykresy $x(t)$, $y(t)$

Ostatecznie zapisaaliśmy na osobnych wykresach zależności $x(t)$, $y(t)$ - rys. 8. Wyraźnie zauważamy że dla obu wykresów



Rysunek 8: Rozwiązania **(a)** $x(t)$; **(b)** $y(t)$ dla różnych warunków początkowych

funkcje zbiegają do $x = 0$ (rys. 8a) lub $y = 0$ (rys. 8b). Zauważmy na rysunku 8b gdy x_0 nie jest w pobliżu 0.0 - nie zbiega ta krzywa $y(t)$ do zera - jak pozostałe, tylko odbiegają od innych punktów (węzłów siodłowych).