

Półprzewodnikowe kropki kwantowe

Stany jednoelektronowe

Alina Mreńca-Kolasińska

3 lipca 2021, ostatnia aktualizacja 29 lutego 2024

Plan

1 Podstawowe informacje o kursie

2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach

- Sposoby wytwarzania
- Metody pomiarowe

3 Metody obliczeniowe

- Metoda różnicowa
- Metoda Galerkina
- Metoda czasu urojonego
- Jednostki atomowe
- Laboratorium

4 Blokada Coulomba

Warunki zaliczenia kursu

Fragment z syllabusa:

Na każdych zajęciach laboratoryjnych wykonywany jest oddzielný projekt, którego realizacja polega na numerycznej implementacji zadań określonych przez prowadzącego. Z każdych zajęć można zdobyć 100 pkt. Zadania wykonywane są kolejno, a każde z nich oceniane jest na określoną liczbę punktów zadaną przez prowadzącego. Raport z zajęć wraz z wynikami i opisem należy przesłać do prowadzącego zajęcia maksymalnie do 7 dni od zajęć, których dotyczy.

Niedopuszczalne jest kopiowanie fragmentów lub całego kodu źródłowego programu od innych osób. Osoby, u których prowadzący stwierdzi **ZNACZĄCE podobieństwo kodów źródłowych lub raportów** otrzymują 0 punktów z danych zajęć.

Po zakończeniu semestru, wszystkie punkty są sumowane, a wynik dzielony przez maksymalną liczbę punktów możliwą do zdobycia (=100 pkt. x liczba zajęć) – uzyskany wynik procentowy jest przeliczany na ocenę zgodnie z regulaminem studiów AGH.

Osoby, które nie uzyskały zaliczenia w terminie podstawowym oraz nie opuściły z przyczyn nieusprawiedliwionych więcej niż 2 zajęć laboratoryjnych mogą przystąpić do dwóch terminów poprawkowych w formie odpowiedzi ustnej oraz wykonania projektów obejmujących metody numeryczne omawiane podczas wykładu i ćwiczeń laboratoryjnych.

Zakres kursu - symulacje komputerowe oraz wstęp teoretyczny do fizyki urządzeń nano i mezoskopowych

- Kropki kwantowe.
- Druty kwantowe.
- Pierścienie kwantowe.
- Wstęp do teorii transportu elektronowego w układach nanoskopowych .
- Transport elektronowy w zewnętrznym polu magnetycznym, efekty orbitalne.
- Podstawy spintroniki, oddziaływanie spin-orbita, tranzystor spinowy. Symulacje transportu elektronowego zależnego od spinu.
- Transport przez złącza metal/nadprzewodnik. Odbicie Andreeva, skośne odbicie Andreeva.
- Wstęp do nadprzewodników i izolatorów topologicznych. Stany Majorany w nanodrutach półprzewodnikowych.
- Wstęp do materiałów 2D – dichalkogenki metali przejściowych i grafen, symulacje widma i transportu w nanostrukturach opartych na materiałach 2D.

Literatura

- ***Computational Nanoscience, Applications for Molecules, Clusters, and Solids***, Kalman Varga, Joseph A. Driscoll, Cambridge University Press
- ***Transport in Nanostructures***, D.K. Ferry, S.M. Goodnick, J. Bird, Cambridge University Press
- ***Electronic transport in mesoscopic system systems***, S. Datta, Cambridge University Press
- ***Electrical Transport in Nanoscale Systems, M. DiVentra***, Cambridge University Press
- ***Quantum Transport, Introduction to Nanoscience***, Y. V. Nazarov, J. M. Blanter, Cambridge University Press

Plan

1 Podstawowe informacje o kursie

2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach

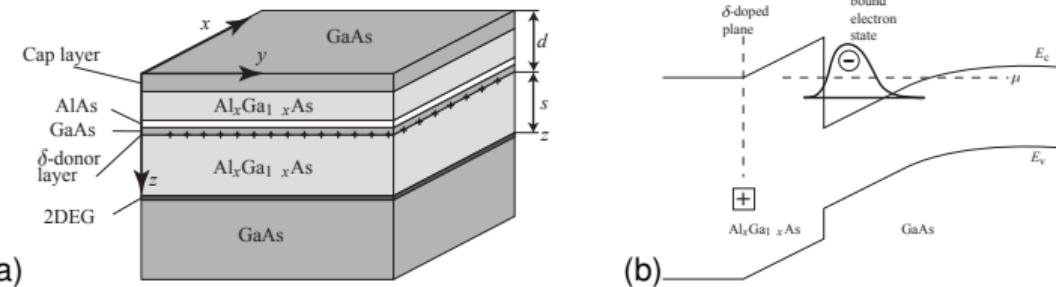
- Sposoby wytwarzania
- Metody pomiarowe

3 Metody obliczeniowe

- Metoda różnicowa
- Metoda Galerkina
- Metoda czasu urojonego
- Jednostki atomowe
- Laboratorium

4 Blokada Coulomba

Dwuwymiarowy gaz elektronowy



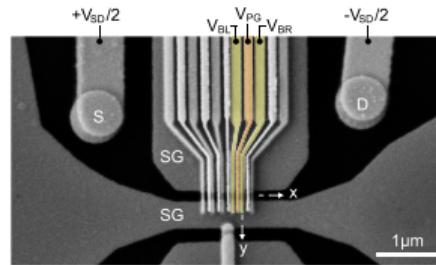
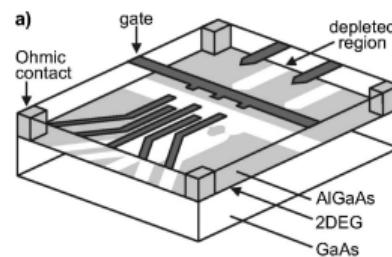
Powstawanie 2DEG. (a) Heterostruktura GaAs/AlGaAs. (b) Dno pasma przewodnictwa w heterostrukturze.¹

- „ δ -donor layer” – warstwa domieszek (tu donorów). (np. atom Si jest donorem w GaAs)
- Złącze między półprzewodnikiem o większej (tu $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$) a mniejszej przerwie energetycznej (tu GaAs).
- Energetycznie korzystne dla elektronów z donorów, by przejść do materiału o mniejszej przerwie.
- Zjonizowane donory – dodatnio naładowane.
- Przyciąganie między elektronami a donorami trzyma elektryny blisko złącza. Uwięzienie elektronów.

¹T. Ihn, Semiconductor Nanostructures, Oxford University Press Inc., New York

Kropki kwantowe

Struktura, która pełni rolę kontenera ładunku i może zawierać 1 lub więcej elektronów. Mają rozmiary od nm do kilku μm . Mają wiele własności przypominających atom, stąd nazwa sztuczny atom.



Kropki zdefiniowane elektrostycznie w: 2DEG², dwuwarstwowym grafeniu³.

²Rev. Mod. Phys. 79, 1217 (2007)

³Nano Lett. 20, 10, 7709 (2020)

Plan

1 Podstawowe informacje o kursie

2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach

- Sposoby wytwarzania
- Metody pomiarowe

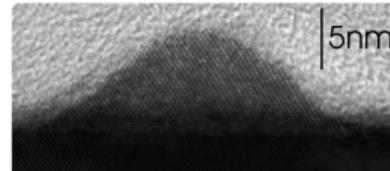
3 Metody obliczeniowe

- Metoda różnicowa
- Metoda Galerkina
- Metoda czasu urojonego
- Jednostki atomowe
- Laboratorium

4 Blokada Coulomba

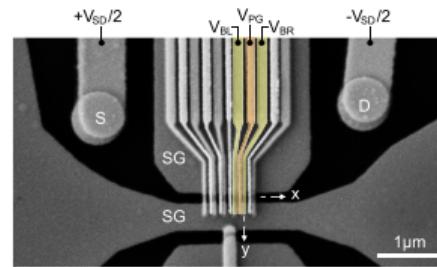
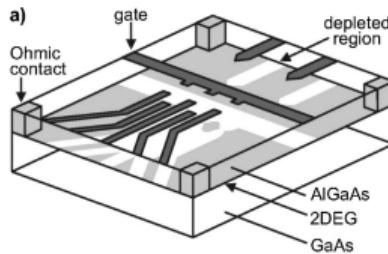
Sposoby wytwarzania

- Samozorganizowane⁴



Obraz z transmisyjnego mikroskopu elektronowego pojedynczej kropki kwantowej InAs na podłożu GaAs.

- Zdefiniowane elektrostatycznie (gate-defined), np. w 2DEG, grafenie,



Kropki zdefiniowane elektrostatycznie w: 2DEG⁵, dwuwarstwowym grafeniu⁶.

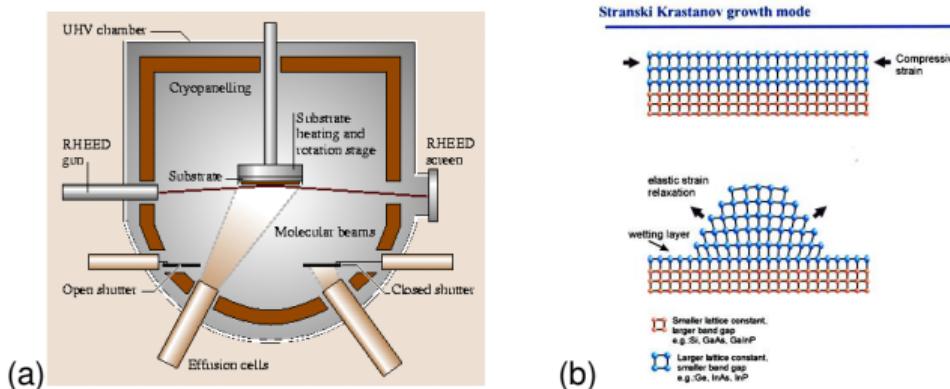
⁴B. J. Riel, American Journal of Physics 76, 750 (2008).

⁵Rev. Mod. Phys. 79, 1217 (2007)

⁶Nano Lett. 20, 10, 7709 (2020)

Samozorganizowane kropki kwantowe

- Epitaksja z wiązek molekularnych (molecular beam epitaxy, MBE) – osadzenie warstw półprzewodnika w wysokiej próżni.
- Wzrost samozorganizowany: wzrost półprzewodnika o większej stałej sieci niż podłoże (np. InAs na podłożu GaAs)
 - InAs podlega silnym naprężeniom ze względu na różnicę stałych sieci.
 - Pierwsza warstwa InAs - tzw. warstwa zwilżająca (wetting layer).
 - Kolejne warstwy pod wpływem naprżeń formują wyspy o rozmiarach 5-20 nm.



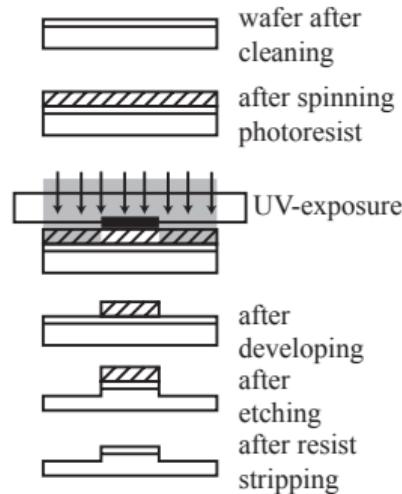
(a) Epitaksja z wiązek molekularnych⁷. (b) Wzrost Stransky'ego-Krastanova⁸.

⁷Epitaxial Crystal Growth: Methods and Materials. Springer Handbooks. Springer, Boston, MA. (2006)

⁸S. Panyakeow (April 11th 2011). IntechOpen, DOI: 10.5772/15990. Available from: <https://www.intechopen.com/chapters/15008>

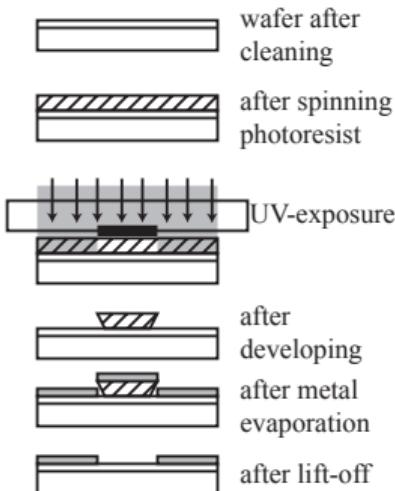
Nano-układy formowane w półprzewodnikach: Fotolitografia

- Wzór przenoszony jest na nanostrukturę przy pomocy maski
- Na oczyszczone podłoże nanoszony jest fotorezyst
- Do próbki przykładana jest maska, następnie fotorezyst naświetlony pominiowaniem UV
- Wywołanie – developing
 - Pozytywowy fotorezyst: naświetlona część fotorezystu jest rozpuszczana odpowiednim środkiem chemicznym, odsłaniając powierzchnię półprzewodnika
 - Negatywowy fotorezyst: usunięcie nienawiązującej części
- Trawienie odsłoniętego podłoż (lub nanoszenie dodatkowych warstw np. metalu)
- Usunięcie pozostałego fotorezystu



Fotolitografia bramek

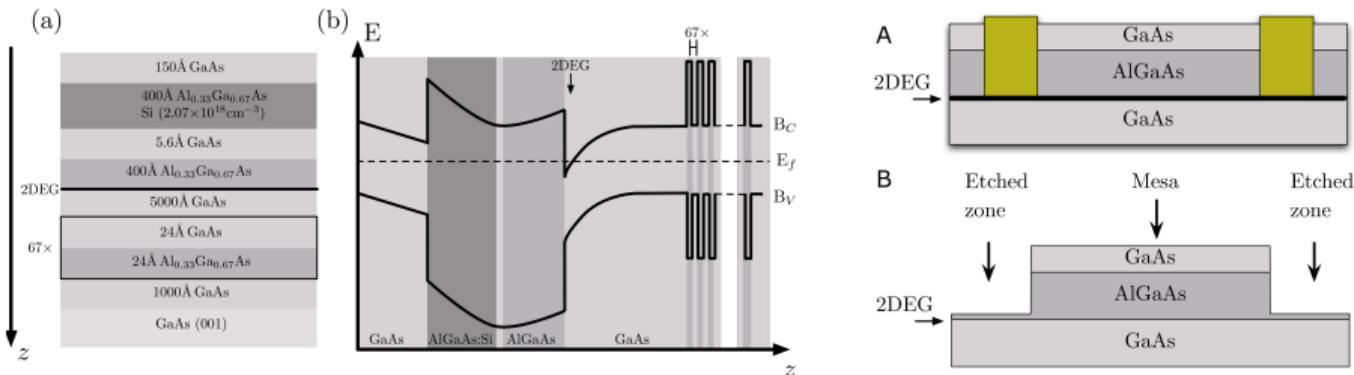
- Technika wytwarzania elektrod metalowych, tzw. lift-off
- Kroki podobne jak na poprzednim slajdzie
- Po usunięciu niepotrzebnych części fotorezystu, na próbce nanoszony metal
- Brzeg fotorezystu ma wcięty przekrój – dzięki temu warstwa metalu może być nieciągła
- Cienka próbka metalu na pozostałym fotorezyście zostaje później wraz z nim usunięta



Elektronolitografia (electron beam lithography, EBL)

- Naświetlanie wiązką elektronów zamiast światła UV
 - Rozdzielcość fotolitografii dochodzi do 100 nm, a dla wiązki elektronów 10 nm
- Często używany jest rezyst: PMMA, poli(metakrylan metylu)
- Wiązka np. z mikroskopu elektronowego
- Dokładna kontrola pozycji wiązki; maska nie jest konieczna
 - Trawiony obszar określony w programie typu CAD
- Pozytywowe lub negatywowe rezysty:
 - Pozytywowy rezyst: wiązka elektronów niszczy wiązania; naświetlony rezyst jest bardziej rozpuszczalny
 - Negatywowy rezyst: wiązka elektronów wytwarza silne wiązania i powoduje niższą rozpuszczalność

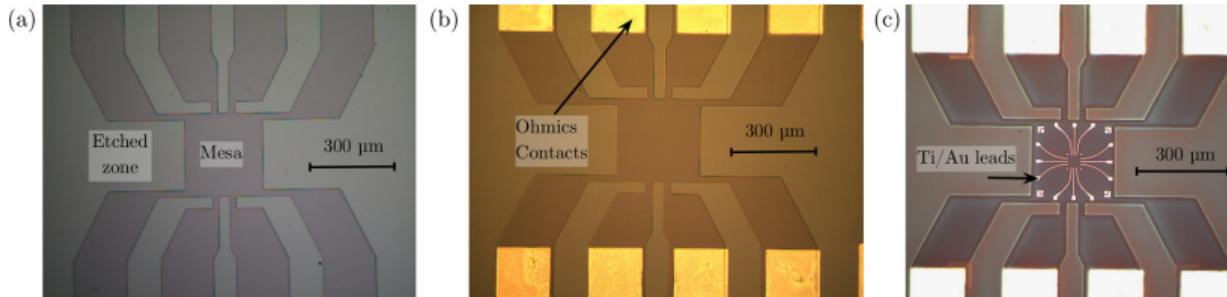
Przykład wytwarzania elektrostatycznych kropkow kwantowych⁹



- 2DEG zdefiniowany w heterostrukturze GaAs / AlGaAs
 - heterostruktura wytworzona metodą MBE – epitaksji z wiązek molekularnych
 - 2DEG uwięziony na złączu między AlGaAs a GaAs
- Próbka jest wytrawiona, aby elektrony mogły przepływać tylko w określonych obszarach
 - Fotolitografia: naświetlany obszar poza maską, usunięcie naświetlonego rezystu.
 - Wytrawienie odsłoniętego obszaru. Pozostały obszar tworzy tzw. mesę
 - Pominiecie tego kroku spowodowałoby spięcie między kontaktami (zob. następny slajd)

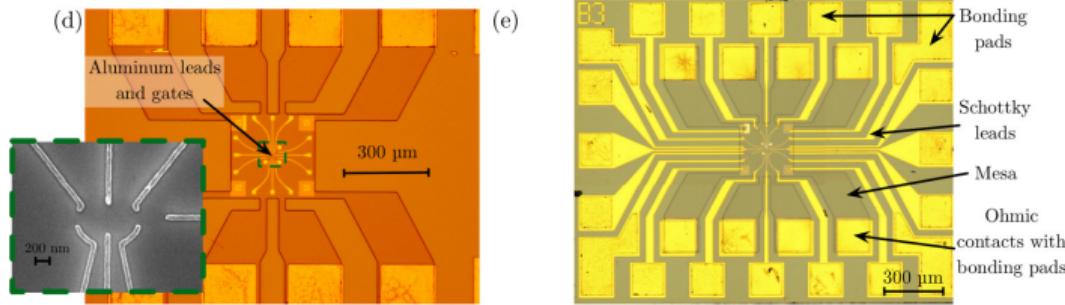
⁹Bureau-Oxton, C., Camirand Lemyre, J., Pioro-Ladrière, M. Nanofabrication of Gate-defined GaAs/AlGaAs Lateral Quantum Dots., J. Vis. Exp. (81), e50581, (2013).

Przykład wytwarzania elektrostatycznych kropk kwantowych, c.d.



- Mesa wytworzona fotolitograficznie **Rys. (a)**
- Kontakty wytworzone metodą lift-off **Rys. (b)**
- Metalowe kanaly (leads) wytworzone metodą EBL **Rys. (c)**
 - Trawienie wiązką elektronów z mikroskopu elektronowego (scanning electron microscope, SEM)
 - Kształt trawnionego obszaru jest zaprojektowany komputerowo

Przykład wytwarzania elektrostatycznych kropk kwantowych, c.d.



- Wytworzenie bramek definiujących kropki kwantowe **Rys. (d)**
 - Ten krok również jest wykonany metodą EBL
- Wykonanie kanałów i połączeń (bonding pad) metodą EBL **Rys. (e)**
 - Wcześniej utworzone bramki mogą być w ten sposób podłączone do źródła napięcia lub obwodu

Plan

1 Podstawowe informacje o kursie

2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach

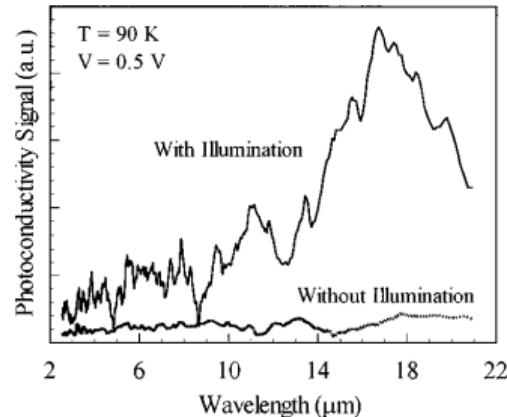
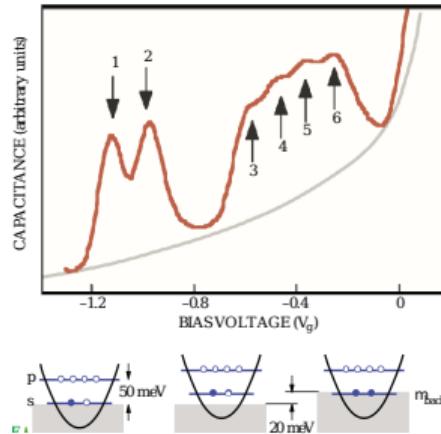
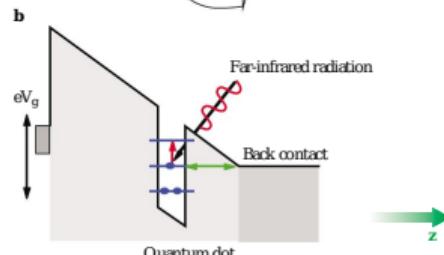
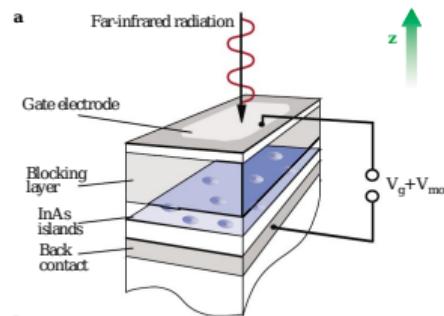
- Sposoby wytwarzania
- Metody pomiarowe

3 Metody obliczeniowe

- Metoda różnicowa
- Metoda Galerkina
- Metoda czasu urojonego
- Jednostki atomowe
- Laboratorium

4 Blokada Coulomba

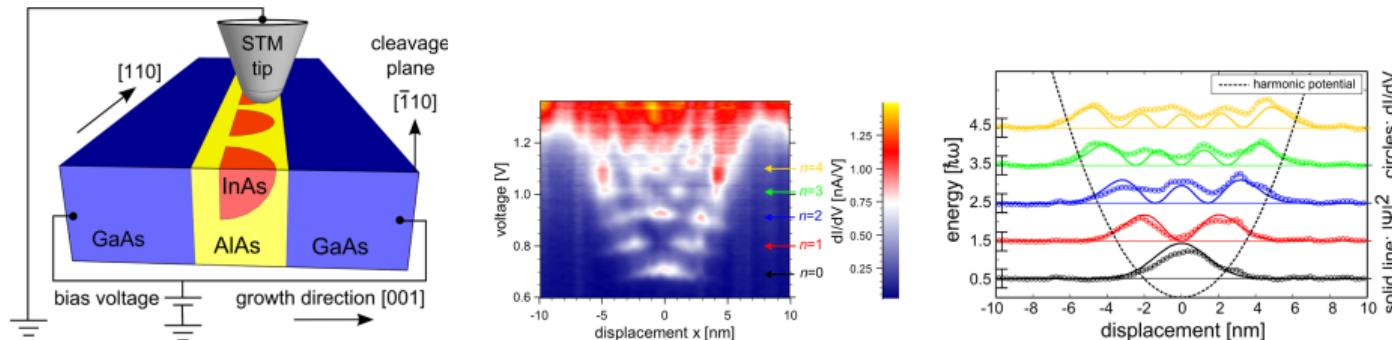
Samoorganizowane kropki kwantowe – spektroskopia



Spektroskopia pojemnościowa i spektroskopia absorpcji w podczerwieni (FIR, far-infrared).¹⁰

¹⁰ Phys. Today 54, 46 (2001), Appl. Phys. Lett. 72, 2020 (1998)

Samozorganizowane kropki kwantowe – spektroskopia tunelowa

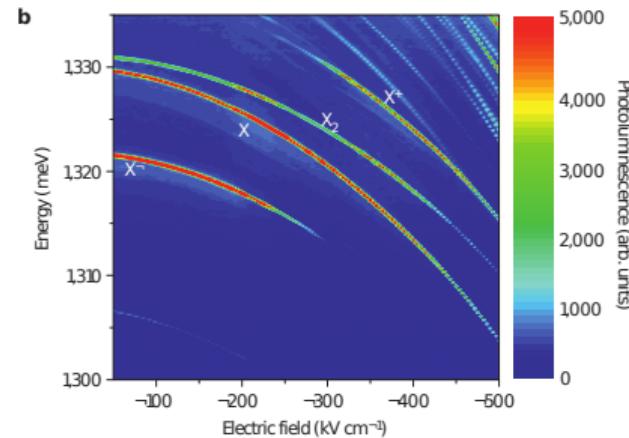
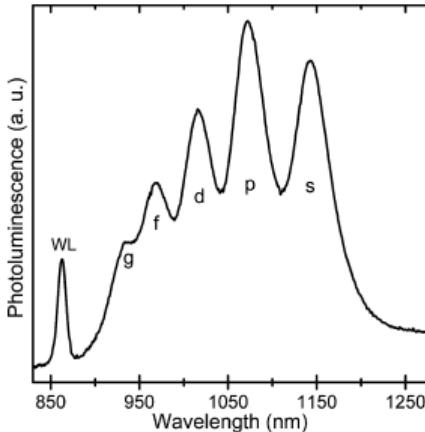
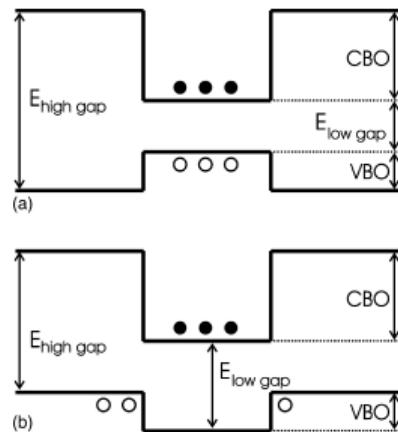


Skaningowa spektroskopia tunelowa (STS, scanning tunneling spectroscopy)¹¹.

- Ostrze skanuje przewodzącą próbkę bezdotykowo; między ostrzem a próbką przyłożone napięcie; przepływ prądu tunelowego.
- Pomiar $\frac{dI}{dV} \propto \rho_S (E_F - eV)$ → pomiar gęstości stanów próbki ρ_S (DOS, density of states)
- STM (skaningowa mikroskopia tunelowa) – pomiar w funkcji położenia.
- STS – pomiar w funkcji energii elektronów (ustalona przez napięcie między próbką a ostrzem).

¹¹Nano Lett. 2013, 13, 8, 3571 (2013)

Samoorganizowane kropki kwantowe – fotoluminescencja



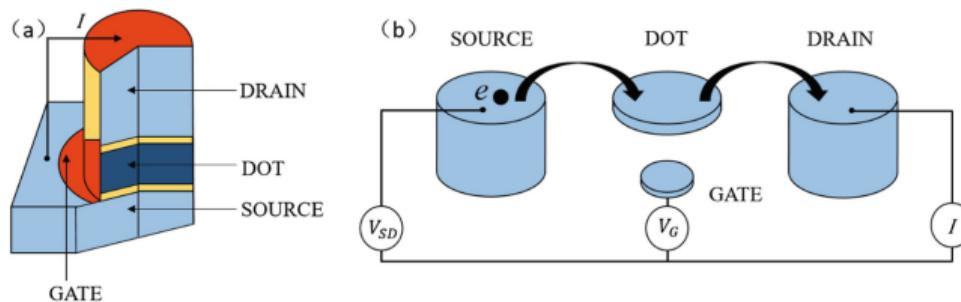
12

- Materiał kropki ma mniejszą przerwę energetyczną niż otaczający → uwieźnięcie elektronów i dziur
- Związany elektron i dziura tworzą ekscyton
- Energia rekombinacji widoczna w pomiarach fotoluminescencji
- Badanie w funkcji pola elektrycznego, magnetycznego, itd.

¹²Am. J. Phys. 76, 750 (2008), Nat. Phys. 6, 947 (2010)

Eletrostatyczne kropki kwantowe

- Pionowa, cylindryczna kropka kwantowa (a)
- Geometria poprzeczna kropki kwantowej (b)



Tunelowanie elektronu źródło → kropka → dren można kontrolować np. przez bramki elektrostatyczne.
Niskie tempo tunelowania → liczba elektronów może zmieniać się pojedynczo¹³.

¹³ Quantum Dot Optoelectronic Devices. Lecture Notes in Nanoscale Science and Technology, vol 27. Springer, 2020.

Plan

1 Podstawowe informacje o kursie

2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach

- Sposoby wytwarzania
- Metody pomiarowe

3 Metody obliczeniowe

- Metoda różnicowa
- Metoda Galerkina
- Metoda czasu urojonego
- Jednostki atomowe
- Laboratorium

4 Blokada Coulomba

Plan

1 Podstawowe informacje o kursie

2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach

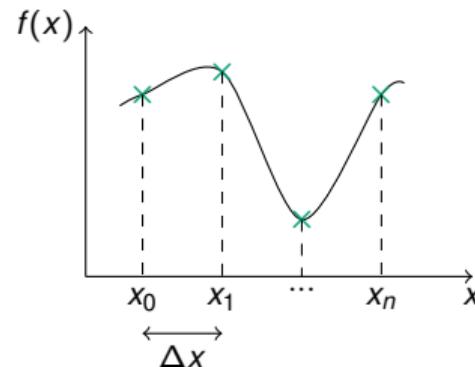
- Sposoby wytwarzania
- Metody pomiarowe

3 Metody obliczeniowe

- Metoda różnicowa
- Metoda Galerkina
- Metoda czasu urojonego
- Jednostki atomowe
- Laboratorium

4 Blokada Coulomba

Metoda różnicowa



- Funkcja jest opisana przez zbiór wartości w dyskretnych punktach
- Pochodną przybliżamy przez iloraz różnicowy

- Iloraz różnicowy w przód

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Iloraz różnicowy wsteczny

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

- Iloraz różnicowy centralny

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Metoda różnicowa

- Rozwinięcie Taylora:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \underbrace{\frac{\Delta x^2}{2} f^{(2)}(\xi)}_{\text{reszta Lagrange'a}}, \quad \xi \in [x, x + \Delta x]$$

- Przybliżenie ilorazem różnicowym dokładne dla funkcji liniowej:

$$f^{(2)}(x) \equiv 0$$

- Otrzymujemy

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Przybliżenie drugiej pochodnej:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2}$$

Metoda różnicowa dla równania Schrödingera

- Równanie Schrödingera niezależne od czasu

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})$$

- Przypadek jednowymiarowy, przybliżenie masy efektywnej

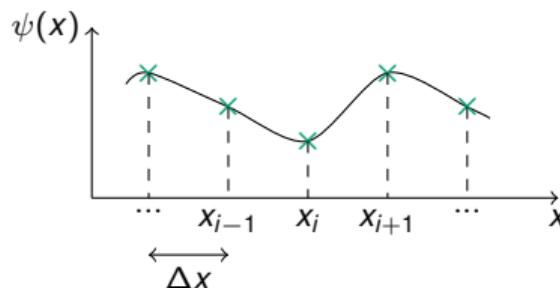
$$\hat{H}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x)$$

- Wersja dyskretna, wartość w $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$:

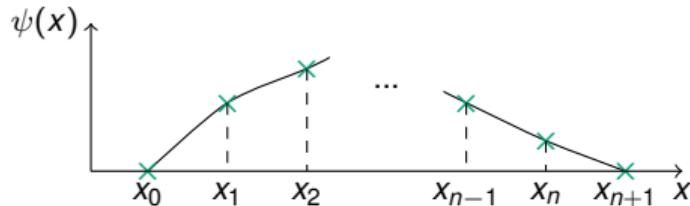
$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\psi(x_i + \Delta x) + \psi(x_i - \Delta x) - 2\psi(x_i)}{\Delta x^2} + V(x_i)\psi(x_i) = E\psi(x_i)$$

- $x_i \pm \Delta x = x_{i \pm 1}$, możemy zapisać

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\psi(x_{i-1}) + \psi(x_{i+1}) - 2\psi(x_i)}{\Delta x^2} + V(x_i)\psi(x_i) = E\psi(x_i)$$



Warunki brzegowe



- Schemat $i = 2, \dots, n - 1$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\psi(x_{i-1}) + \psi(x_{i+1}) - 2\psi(x_i)}{\Delta x^2} + V(x_i)\psi(x_i) = E\psi(x_i)$$

- Lewy brzeg $i = 1, \psi(x_0) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\psi(x_2) - 2\psi(x_1)}{\Delta x^2} + V(x_1)\psi(x_1) = E\psi(x_1)$$

- Prawy brzeg $i = n; \psi(x_{n+1}) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\psi(x_{n-1}) - 2\psi(x_n)}{\Delta x^2} + V(x_n)\psi(x_n) = E\psi(x_n)$$

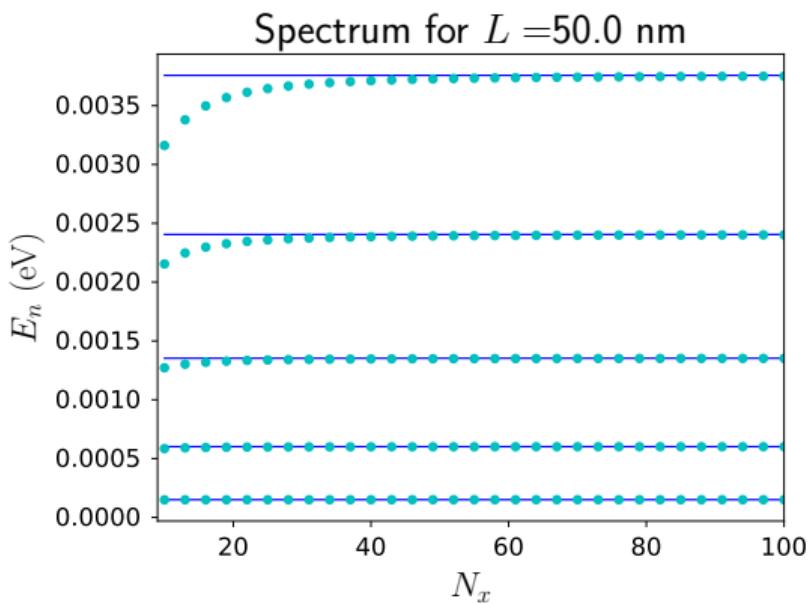
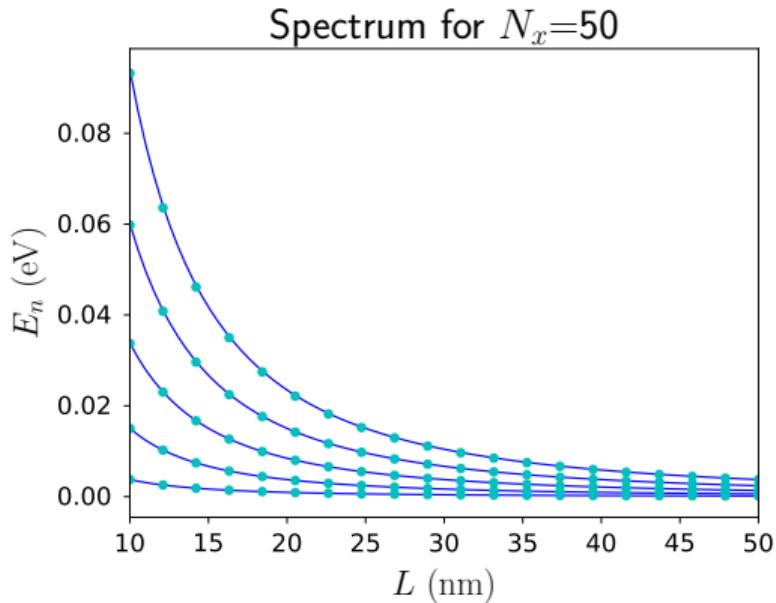
Problem własny macierzy hamiltonianu

- Ozn. $\alpha \equiv \frac{\hbar^2}{2m^*}$
- Możemy zapisać Hamiltonian w postaci macierzy

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2\alpha + V(x_1) & -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 2\alpha + V(x_2) & -\alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha & 2\alpha + V(x_{n-1}) & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha & 2\alpha + V(x_n) \end{pmatrix}.$$

- Funkcja falowa w postaci wektora: $\psi^T = (\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_n))$
- Rozwiążanie problemu własnego (algebraicznego) $\mathbf{H}\psi = E\mathbf{I}\psi$ – biblioteki numeryczne

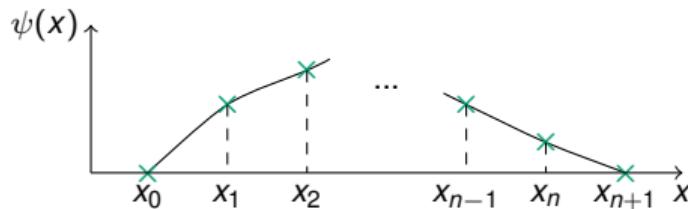
Przykład numeryczny



Linie: Wartości analityczne energii

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m^* L^2}$$

Warunki brzegowe v. 2



- Schemat $i = 1, \dots, n$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\psi(x_{i-1}) + \psi(x_{i+1}) - 2\psi(x_i)}{\Delta x^2} + V(x_i)\psi(x_i) = E\psi(x_i)$$

- Lewy brzeg $i = 0, \psi(x_0) = 0$

- Prawy brzeg $i = n + 1; \psi(x_{n+1}) = 0$

Problem własny macierzy hamiltonianu

- Ozn. $\alpha \equiv \frac{\hbar^2}{2m^*}$
- Mogliśmy zapisać Hamiltonian w postaci macierzy

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha + V(x_1) & -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2\alpha + V(x_2) & -\alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha & 2\alpha + V(x_{n-1}) & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha & 2\alpha + V(x_n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

- Problem własny: $\mathbf{H}\psi = E\mathbf{I}\psi$
- Wyrazy na diagonali wyprodukują wartości własne o dużych wartościach

Metoda różnicowa dla równania Schrödingera 2D

- Hamiltonian

$$\hat{H}\psi(x, y) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} \right] + V(x, y)\psi(x, y)$$

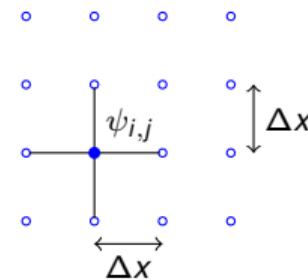
- Wersja dyskretna, suma ilorazów różnicowych w x i y

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\frac{\psi(x_{i+1}, y_j) + \psi(x_{i-1}, y_j) - 2\psi(x_i, y_j)}{\Delta x^2} + \frac{\psi(x_i, y_{j+1}) + \psi(x_i, y_{j-1}) - 2\psi(x_i, y_j)}{\Delta y^2} \right] + V(x_i, y_j)\psi(x_i, y_j)$$

- ozn. $\psi_{i,j} \equiv \psi(x_i, y_j)$, (tu $\Delta x = \Delta y$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{i,j}}{\Delta x^2} + V_{i,j}\psi_{i,j}$$

- Jak to zapisać w postaci macierzy?



five-point stencil – 5-punktowy szablon

Metoda różnicowa dla równania Schrödingera 2D

- Jak zapisać w postaci macierzy? Siatka obliczeniowa $N_x \times N_y$
- Indeksy $(i, j) \rightarrow$ zamiana na jeden unikalny indeks
 - Na przykład $n_{i,j} = i \cdot N_y + j$, $i = 0, 1, \dots, N_x - 1$, $j = 0, 1, \dots, N_y - 1$
- Macierz 5-przekątniowa

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4\alpha + V_1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 4\alpha + V_2 & -\alpha & 0 & 0 & -\alpha & \dots & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & -\alpha & 4\alpha + V_{n+1} & & & & \\ 0 & -\alpha & 0 & \dots & 0 & -\alpha & 4\alpha + V_{n+2} & \dots & \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & 0 & -\alpha & 0 \\ & & & & \dots & 4\alpha + V_{n^2-n-1} & -\alpha & \dots & 0 & -\alpha & 0 \\ & & & & \dots & -\alpha & 4\alpha + V_{n^2-n} & \dots & 0 & 0 & -\alpha \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & & -\alpha & 4\alpha + V_{n^2-1} & -\alpha \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & -\alpha & 4\alpha + V_{n^2} \end{pmatrix}$$

- Przykład numerycznych obliczeń – kod

Plan

- 1 Podstawowe informacje o kursie
- 2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach
 - Sposoby wytwarzania
 - Metody pomiarowe
- 3 Metody obliczeniowe
 - Metoda różnicowa
 - **Metoda Galerkina**
 - Metoda czasu urojonego
 - Jednostki atomowe
 - Laboratorium
- 4 Blokada Coulomba

Metoda Galerkina¹⁴

- Równanie Schrödingera

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}) - E\Psi(\mathbf{r}) = 0$$

- Poszukujemy *przybliżonego* rozwiązania przez rozwinięcie w bazie

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(\mathbf{r}) + \varphi_0(\mathbf{r}),$$

- Funkcja analityczna φ_0 wybierana tak, by spełnić warunki brzegowe
- $\varphi_i(\mathbf{r})$ - baza funkcji analitycznych, np. gaussjanów, sinusów, ..., c_i - współczynniki rozwinięcia
- Szacujemy tzw. residuum:
- c_i znajdujemy rozwiązuając układ równań:

$$R(c_1, c_2, \dots, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N c_i (\hat{H} - E) \varphi_i(\mathbf{r}) + (\hat{H} - E) \varphi_0(\mathbf{r})$$

$$(\varphi_j, R) = 0,$$

$$\text{gdzie } (f, g) = \int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r})g(\mathbf{r}) \Rightarrow (\varphi_j, R) = \int d^3\mathbf{r} \varphi_j(\mathbf{r})R(\mathbf{r})$$

¹⁴C.A.J. Fletcher, Computational Galerkin Methods, Springer, New York (1984)

Metoda Galerkina

- Funkcje bazowe często wybierane tak, aby spełniały warunki brzegowe, φ_0 pomijane
 - Często wykorzystywane bazy to np. sin, funkcje Gaussa, ...
- Tzw. słaba forma równania: wykonujemy iloczyn skalarny z funkcjami bazowymi.

$$(\varphi_j, R) =$$

Metoda Galerkina

- Funkcje bazowe często wybierane tak, aby spełniały warunki brzegowe, φ_0 pomijane
 - Często wykorzystywane bazy to np. sin, funkcje Gaussa, ...
- Tzw. słaba forma równania: wykonujemy iloczyn skalarny z funkcjami bazowymi.

$$\begin{aligned}(\varphi_j, R) &= \sum_{i=1}^N (\varphi_j, \hat{H}\varphi_i) c_i - E \sum_{i=1}^N (\varphi_j, \varphi_i) c_i = 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N (\varphi_j, \hat{H}\varphi_i) c_i &= E \sum_{i=1}^N (\varphi_j, \varphi_i) c_i\end{aligned}$$

- Zapis w postaci macierzowej

$$\mathbf{H}\mathbf{c} = E\mathbf{S}\mathbf{c},$$

- Uogólniony problem własny → do diagonalizacji wykorzystamy biblioteki numeryczne
- Elementy macierzy \mathbf{H} , \mathbf{S} często można wyliczyć analitycznie

Metoda Galerkina, przykład bazy gaussowskiej w 1D

- Baza funkcji Gaussa

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{(\alpha_x \pi)^{1/4}} \exp \left[-\frac{(x - x_i)^2}{2\alpha_x} \right] \quad (1)$$

- Elementy macierzy \mathbf{H} i \mathbf{S}

- całki S_{ij}

$$S_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \exp \left[-\frac{(x_i - x_j)^2}{4\alpha_x} \right]$$

- całki H_{ij}

$$H_{ij} = K_{ij} + V_{ij}$$

- Energia kinetyczna K_{ij}

$$K_{ij} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{(x_i - x_j)^2 - 2\alpha_x}{4\alpha_x^2} \right] S_{ij},$$

- Energia potencjalna K_{ij}

$$V_{ij} = \frac{1}{2} m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) V(x) \varphi_j(x) dx$$

Często możliwe obliczenie analityczne. W przeciwnym razie: numerycznie lub rozwinąć jako kombinację gaussjanów

Przykład dla bazy gaussowskiej w 1D

- Potencjał **oscylatora harmonicznego**

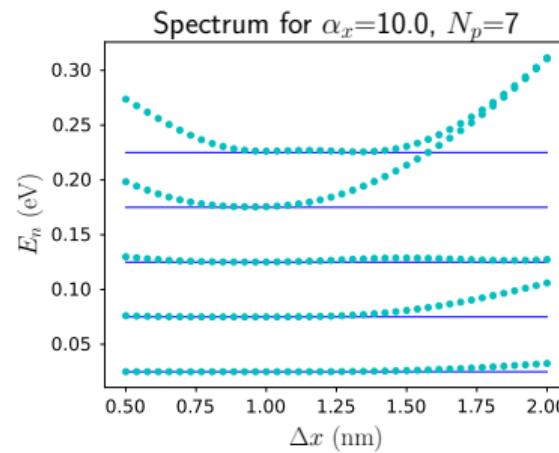
$$V(x) = \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2$$

- Element macierzowy

$$V_{ij} = \frac{1}{2} m^* \omega^2 \frac{2\alpha_x^2 + (x_i + x_j)^2}{4} S_{ij},$$

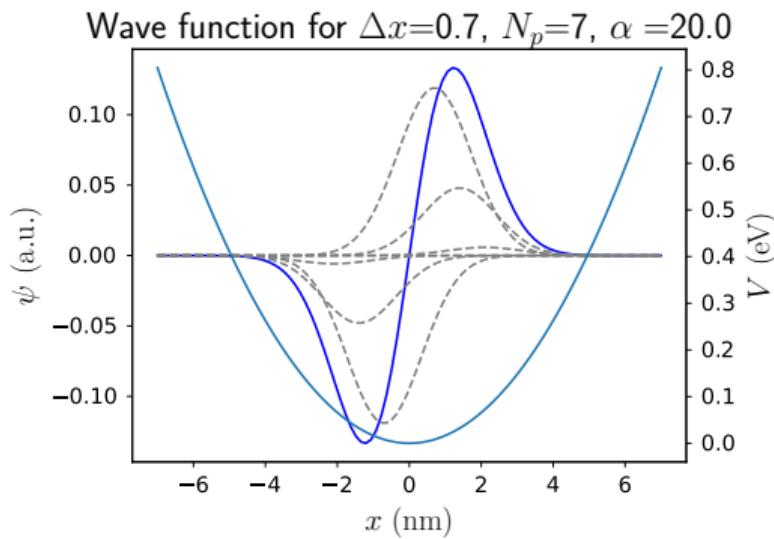
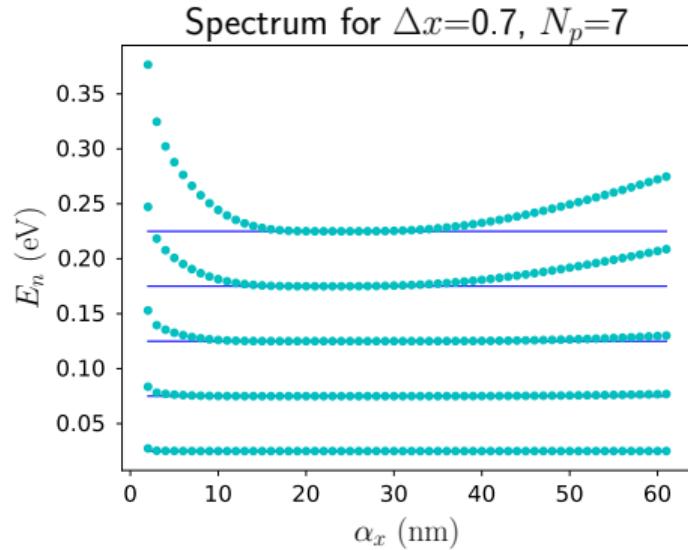
Linie: Wartości analityczne energii

$$E_n = \hbar\omega(n+0.5)$$



Przykład dla bazy gaussowskiej w 1D

$$E_n = \hbar\omega(n + 0.5)$$



Funkcja falowa pierwszego stanu wzbudzonego
oraz funkcje bazowe przemnożone przez współczynniki: $c_i\varphi_i(x)$

Plan

- 1 Podstawowe informacje o kursie
- 2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach
 - Sposoby wytwarzania
 - Metody pomiarowe
- 3 Metody obliczeniowe
 - Metoda różnicowa
 - Metoda Galerkina
 - Metoda czasu urojonego**
 - Jednostki atomowe
 - Laboratorium
- 4 Blokada Coulomba

Metoda czasu urojonego

- Równanie Schrödingera zależne od czasu

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

- Podstawiamy $it = \tau$, po przekształceniu

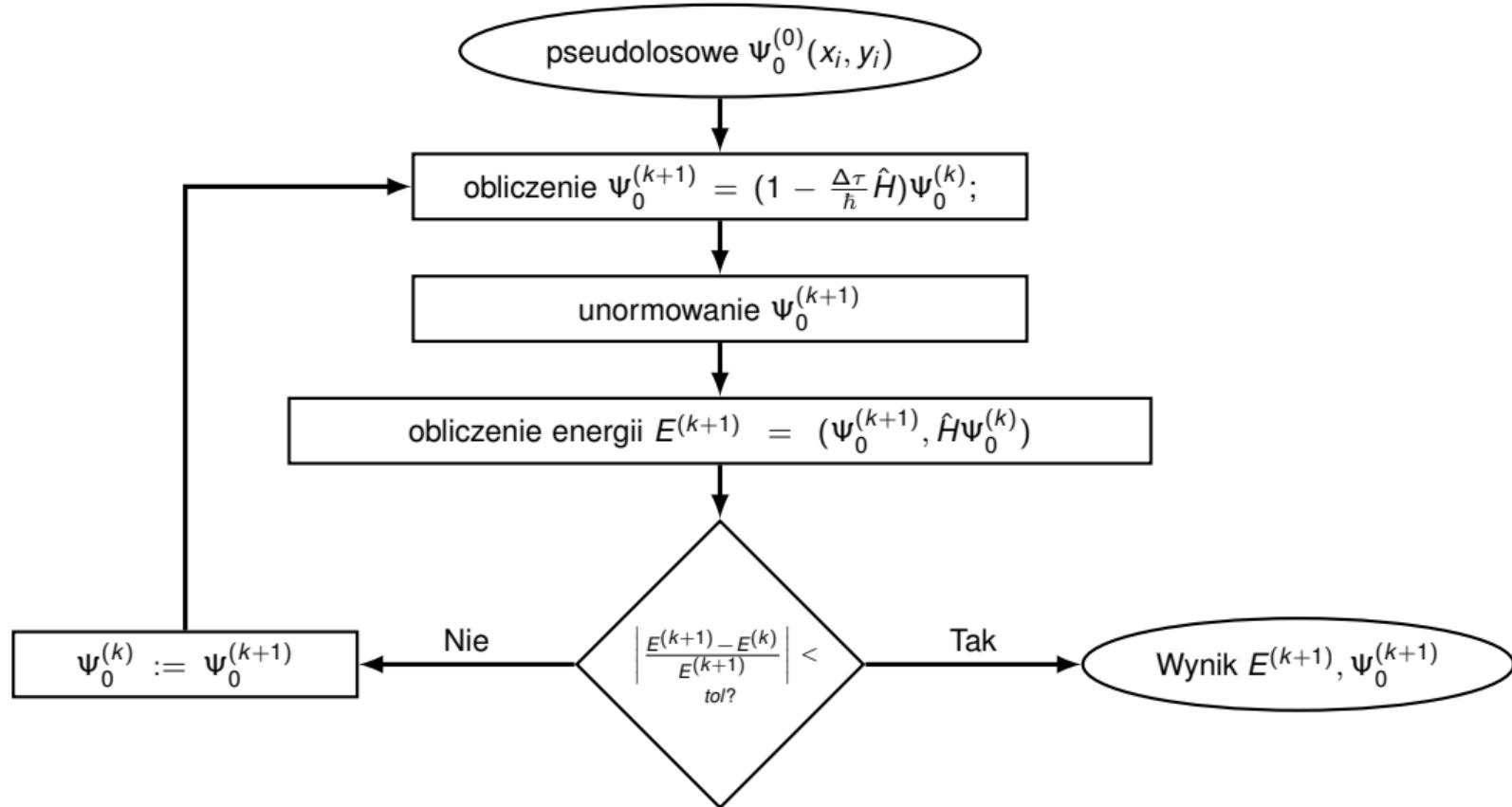
$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\hbar \frac{\partial}{\partial \tau}$$

- Pochodną zastąpimy ilorazem różnicowym. W $t_k = k\Delta t$, dyskretnych „momentach”, oznaczamy $\Psi^{(k)} \equiv \Psi(\mathbf{r}, t_k)$

$$\begin{aligned}-\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi &\approx -\hbar \frac{\Psi^{(k+1)} - \Psi^{(k)}}{\Delta \tau}, \\ \Psi^{(k+1)} &= \left(1 - \frac{\Delta \tau}{\hbar} \hat{H}\right) \Psi^{(k)}\end{aligned}$$

- Wyliczamy $\Psi^{(k+1)}$ iteracyjnie. Uwaga – norma nie jest zachowana! (normujemy ręcznie)

Algorytm – stan podstawowy



Dlaczego ta metoda działa?

- Dowolną funkcję falową można przedstawić w bazie stanów własnych hamiltonianu \hat{H} , Ψ_j

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_j c_j \Psi_j(\mathbf{r}) e^{-\frac{iE_j t}{\hbar}} = \sum_j c_j \Psi_j(\mathbf{r}) e^{-\frac{E_j \tau}{\hbar}}$$

- Zakładamy $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{E_0 \tau}{\hbar}} \left(c_0 \Psi_0(\mathbf{r}) + c_1 \Psi_1(\mathbf{r}) e^{-\frac{(E_1 - E_0)\tau}{\hbar}} + c_2 \Psi_2(\mathbf{r}) e^{-\frac{(E_2 - E_0)\tau}{\hbar}} + \dots \right)$$

- W miarę upływu τ , zanikają członki z $E_j - E_0$ w eksponencji.

- **Uwaga** $\Delta\tau$ nie jest dowolne: w 1D rów. S. metoda stabilna, gdy $\tau \leq \frac{\Delta x^2 m}{\hbar}$

- Więcej na temat stabilności w Wykładzie 3.

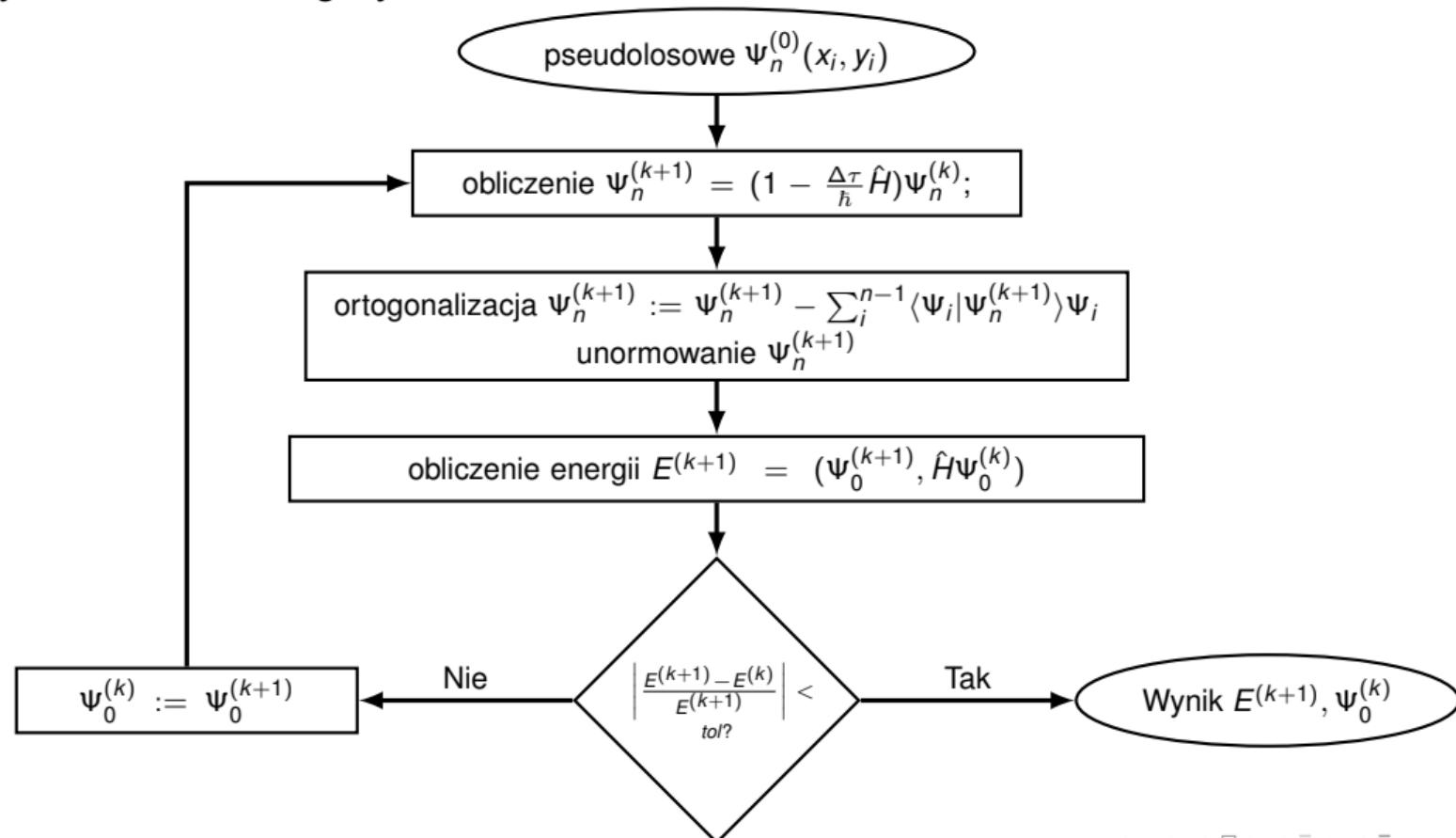
Stany wzbudzone

- Metoda znajduje stan podstawowy; jak wyliczyć stany o wyższych energiach?
- Na przykład przez ortogonalizację Gramma-Schmidta
- W każdej iteracji „usuwamy składowe równoległe” do poprzednio wyliczonych niższych stanów ψ_i
 - Wzór znany z MMF

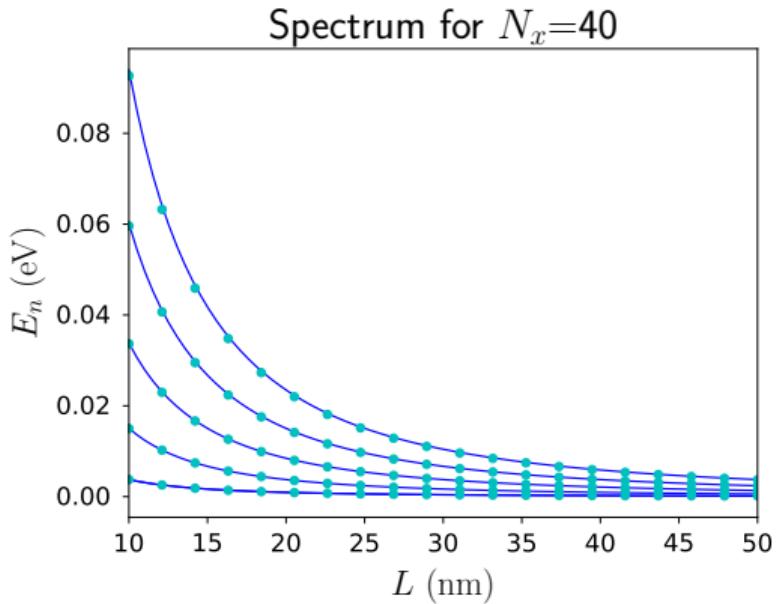
$$\Psi_n^{(k+1)} := \Psi_n^{(k+1)} - \sum_i^{n-1} \langle \Psi_i | \Psi_n^{(k+1)} \rangle \Psi_i \quad (2)$$

- Poniżej zmodyfikowany algorytm

Stany wzbudzone – algorytm

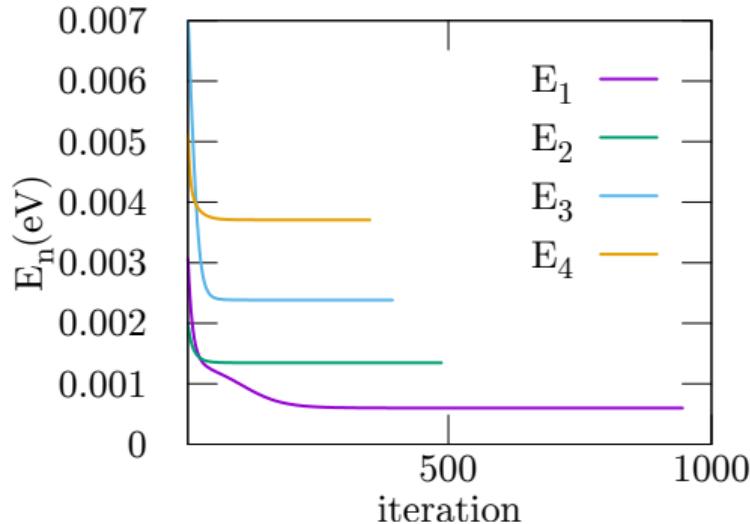


Przykład – nieskończona studnia 1D



Linie: Wartości analityczne energii

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m^* L^2}$$



Plan

- 1 Podstawowe informacje o kursie
- 2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach
 - Sposoby wytwarzania
 - Metody pomiarowe
- 3 **Metody obliczeniowe**
 - Metoda różnicowa
 - Metoda Galerkina
 - Metoda czasu urojonego
 - **Jednostki atomowe**
 - Laboratorium
- 4 Blokada Coulomba

Jednostki atomowe

- Następujące stałe fizyczne są przyjęte za jednostkowe:

- Zredukowana stała Plancka $\hbar = 1$ (w jednostkach SI $1.054571817 \dots \times 10^{-34}$ Js)
- Ładunek elementarny $e = 1$ (w jednostkach SI $1.602176634 \times 10^{-19}$ C)
- Promień Bohra $a_0 = 1$ (w jednostkach SI $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_e e^2) = 5.29177210903(80) \times 10^{-11}$ m)
- masa elektronu $m_e = 1$ (w jednostkach SI $m_e = 9.1093837015(28) \times 10^{-31}$ kg)

- Inne przydatne jednostki

- Jednostka energii: hartree $Ha = \hbar^2/(m_e a_0^2) = 27.211386245988(53)$ eV
- Czas $\hbar^2/Ha = 2.4188843265857(47) \times 10^{-17}$ s
- Pole elektryczne $Ha/(ea_0) = 5.14220674763(78) \times 10^{-11}$ m

Hamiltonian w jednostkach atomowych – przykład

- Równanie Schrödingera niezależne od czasu

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)$$

- $x \rightarrow x' = x/a_0$, stąd $x = a_0 x'$
- $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} = a_0 \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial x'}$
- $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial (x')^2}$

- Po przekształceniach

$$E\psi(x') = -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{\hbar^2}{m^* a_0^2}}_{Ha} \frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial (x')^2} + V(x')\psi(x')$$

$$\frac{1}{Ha} E\psi(x') = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial (x')^2} + \frac{1}{Ha} V(x')\psi(x')$$

Hamiltonian w jednostkach atomowych – przykład

- Równanie Schrödingera niezależne od czasu

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)$$

- Postać w jednostkach atomowych

$$E\psi(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x),$$

gdzie E oraz V są wyrażone w Ha.

- Wygodna postać do obliczeń numerycznych.

- Po zakończeniu obliczeń wracamy do jednostek SI przez pomnożenie: E (eV) = E (Ha) · 27.211... eV,
 x (nm) = x (a_0) · 0.0529... nm

Plan

1 Podstawowe informacje o kursie

2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach

- Sposoby wytwarzania
- Metody pomiarowe

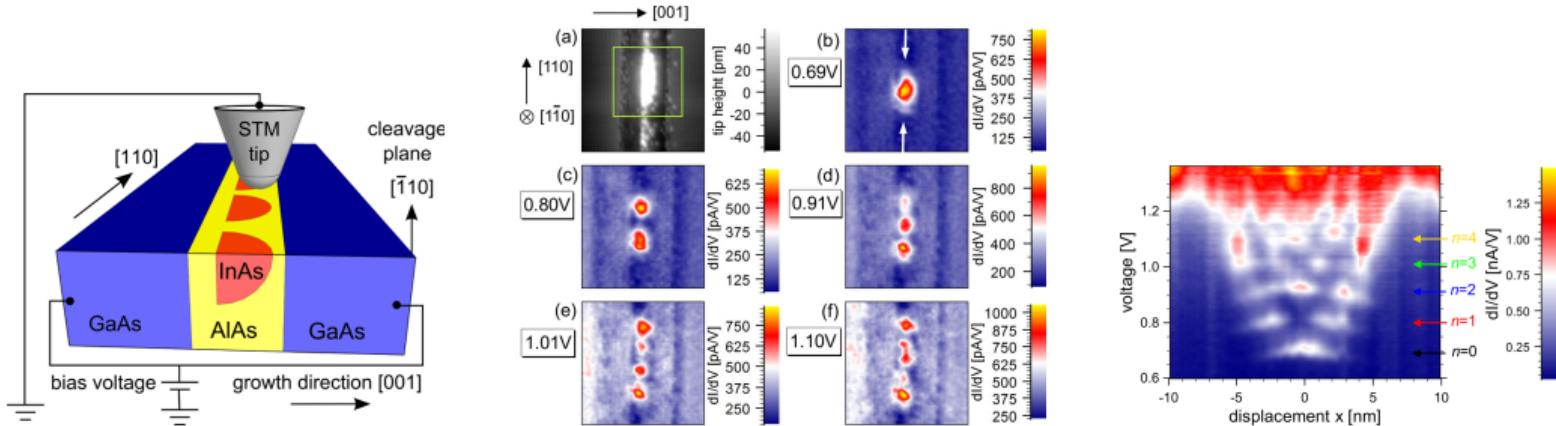
3 Metody obliczeniowe

- Metoda różnicowa
- Metoda Galerkina
- Metoda czasu urojonego
- Jednostki atomowe
- Laboratorium

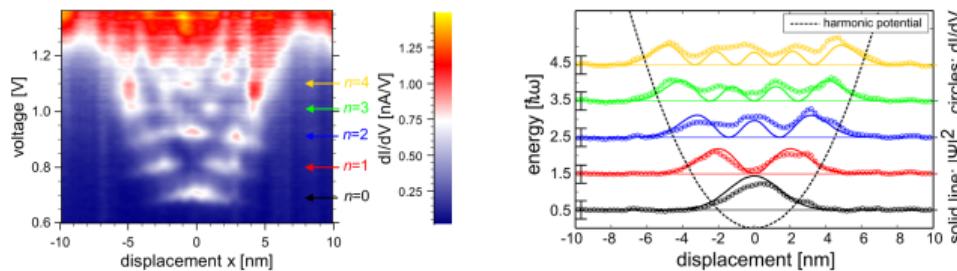
4 Blokada Coulomba

Laboratorium: Symulacja eksperymentu

Nano Lett. 2013, 13, 8, 3571 (2013)



- Pomiar STS (skaningowa spektroskopia tunelowa)
- Samozorganizowane kropki kwantowe. Silne uwięzienie w kierunku wzrostu $z \rightarrow$ wysoka energia stanów wzbudzonych w z .
- Kropka przecięta w kierunku $\bar{1}10 \rightarrow$ wyższa energia wzbudzenia w y niż w x .
- Efektywnie spektrum jak dla 1D potencjału oscylatorowa harmonicznego.



- 2-wymiarowy oscylator harmoniczny (anizotropowy $\rightarrow \omega_x \neq \omega_y$)

- Hamiltonian:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m^* (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)$$

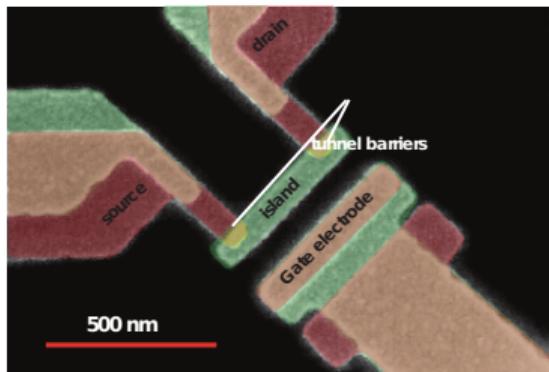
- masa efektywna $m^* = 0.24$, choć dla materiału kropki (InAs) $m_{InAs}^* = 0.026$, ale QD osadzone w AlAs (masa anizotropowa: $m_t^* = 0.22$, $m_l^* = 0.97$)
- Zbadamy, jakie może być uwięzienie w kierunku y (wartości ω_y), aby układ był quasi 1D.

Plan

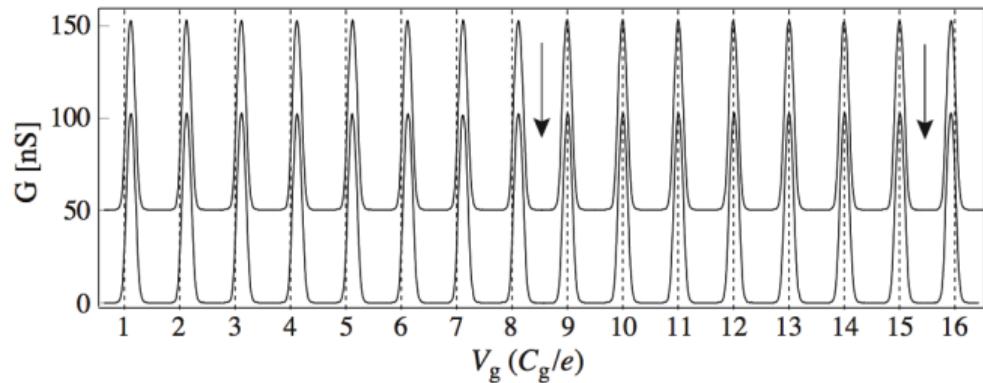
- 1 Podstawowe informacje o kursie
- 2 Kropki kwantowe w półprzewodnikach
 - Sposoby wytwarzania
 - Metody pomiarowe
- 3 Metody obliczeniowe
 - Metoda różnicowa
 - Metoda Galerkina
 - Metoda czasu urojonego
 - Jednostki atomowe
 - Laboratorium
- 4 Blokada Coulomba

Blokada Coulomba

(a)

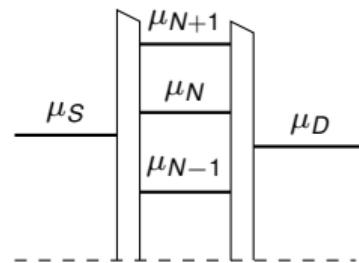


<http://www.drecam.cea.fr/drecam/spec/Pres/QuantronQsite/gallery/SET.htm>



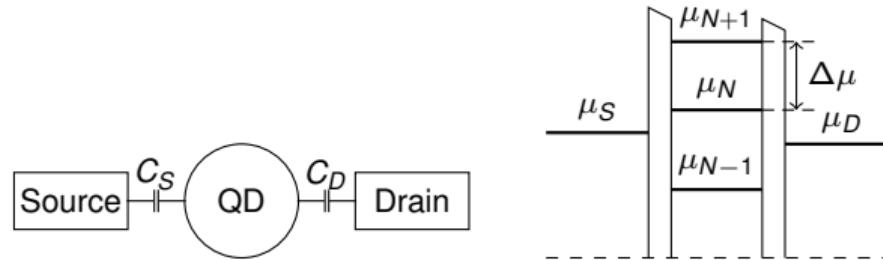
Blokada Coulomba

- Definiujemy μ_N – potencjał elektrochemiczny dodania N -tego elektronu do kropki zawierającej $N - 1$ elektronów
 - zakładamy, że przed i po dodaniu elektronu układ jest w stanie podstawowym
- $\mu_N = E_N^{(0)} - E_{N-1}^{(0)}$
- $E_N^{(0)}$ – energia stanu podstawowego dla kropki zawierającej N elektronów
- Możliwe są także przejścia między stanami wzbudzonymi, np. ze stanu $E_{N-1}^{(n)}$ do $E_N^{(m)}$
- Zjawisko jest często przedstawiane przy pomocy schematów ukazujących dozwolone stany w kropce i potencjał chemiczny kontaktów
 - μ_S – potencjał chemiczny źródła, μ_D – drenu



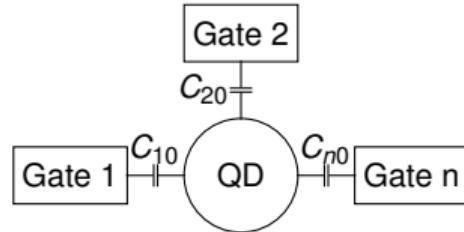
Wyjaśnienie jakościowe

- Kropka kwantowa słabo sprzężona z elektrodami poprzez tzw. bariery tunelowe



- Koszt energetyczny wymagany do dodania elektronu do kropki: $\Delta\mu = \frac{e^2}{C_\Sigma}$
- Dodanie elektronu powodowałoby wzrost energii całkowitej układu \Rightarrow Zabronione.
- Dopiero gdy elektron opuści kropkę, kolejny może na nią się dostać.
- Prąd nie płynie, chyba że energia jest dostarczona przez zmianę potencjału kropki.
- \Rightarrow Blokada Coulomba.

Blokada Coulomba



- Istnieje możliwość kontrolowania stanów w kropce kwantowej za pomocą potencjałów przykładanych do bramek umieszczonych w pobliżu kropki kwantowej.
- Między kropką a elektrodami sprzężenie pojemnościowe (pojemności $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$)
- Potencjał na i -tej elektrodzie V_i , potencjał na kropce oznaczmy V
- Obliczymy energię całkowitą kropki
- oraz energię potrzebną do naładowania kropki dodatkowym elektronem

Blokada Coulomba

- Ładunek wyindukowany na kropce przez elektrody ($C_S = C_{10}, C_D = C_{20}$)

$$Q = C_{10}(V_1 - V) + C_{20}(V_2 - V) + C_{30}(V_3 - V)$$

Zapis w postaci sumy; $n = 3$ elektrod

$$Q = \sum_{j=1}^n C_{j0}(V_j - V)$$

- Całkowity ładunek na kropce $q = Q + Q_0$,

- Q_0 ładunek kropki przy zerowym napięciu na bramkach (np. przy domieszkowaniu półprzewodnika)

$$q - Q_0 = \sum_{j=1}^n C_{j0} V_j - \sum_{j=1}^n C_{j0} V$$

- Potencjał kropki w obecności elektrod; ozn. $C_\Sigma = -\sum_{j=1}^n C_{j0}$

$$V(q) = \frac{1}{C_\Sigma} \left(q - Q_0 - \sum_{j=1}^n C_{j0} V_j \right)$$

Kropki metaliczne

- Energia potrzebna do naładowania kropki N elektronami (przy stałych napięciach V_i)

$$E(N) = U(N) = \int_{Q_0}^{Q_0 - |e|N} V(q) dq = \frac{e^2 N^2}{2C_\Sigma} + |e|N \sum_{j=1}^n \frac{C_{j0}}{C_\Sigma} V_j$$

- Energia potrzebna do dodania N -tego elektronu

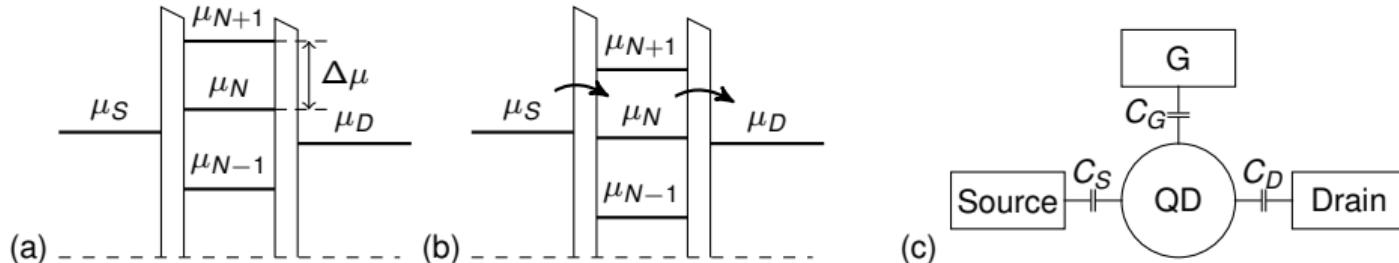
$$\mu_N = E(N) - E(N-1) = \frac{e^2}{C_\Sigma} \left(N - \frac{1}{2} \right) + \frac{|e|}{C_\Sigma} \sum_{j=1}^n C_{j0} V_j$$

- Zatem dla $V_j = 0$ - nie przykładamy żadnych potencjałów do bramek źródła i drenu ($V_{SD} = 0$)

$$\Delta\mu = \mu_N - \mu_{N-1} = \frac{e^2}{C_\Sigma}$$

powstaje rodzaj przerwy energetycznej. Transport przez kropkę kwantową wymaga pokonania bariery energetycznej - blokada Coulomba.

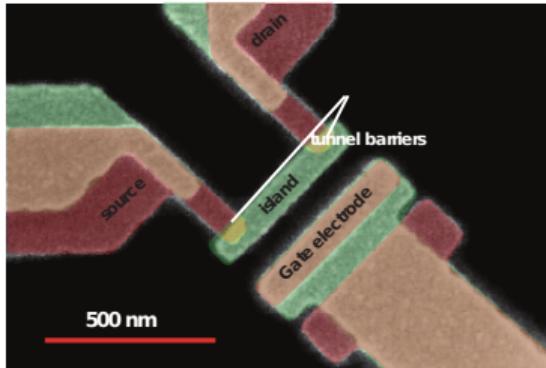
Blokada Coulomba



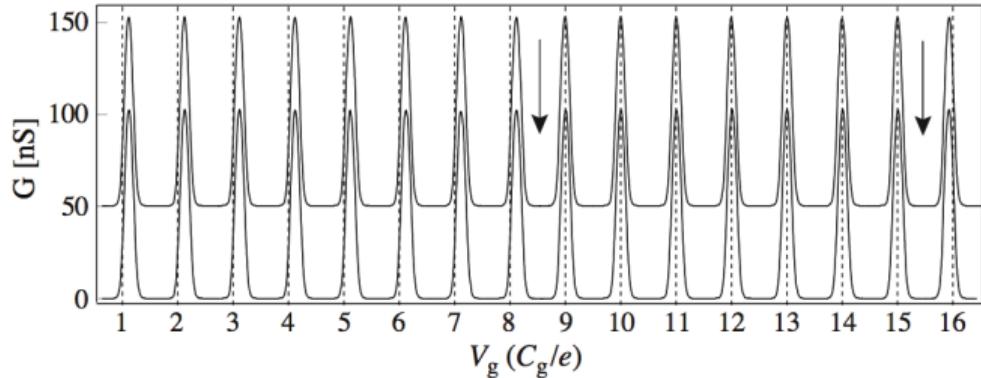
- Przypadek małych napięć bramka-dren $\mu_S \geq \mu_D$, $-|e|V_{bias} = \mu_S - \mu_D$ i niskich temperatur: $eV_{bias}, k_B T \ll e^2/C_\Sigma$
- Blokada Coulomba: $\mu_N > \mu_S$, $\mu_{N-1} < \mu_D$, liczba elektronów w kropce $N - 1 = \text{const}$, **Rys. (a)**
- $\mu_S \geq \mu_D$, $\mu_D = \mu_N$: przepływ prądu, liczba elektronów fluktuje między N a $N - 1$, **Rys. (b)**

Kropki metaliczne

(a)



<http://www-drecam.cea.fr/drecam/spec/Pres/Quantronics/gallery/SET.htm>



- Istnieje istotna różnica pomiędzy kropkami metalicznymi i półprzewodnikowymi. W półprzewodnikowych kropkach kwantowych blokada przepływu prądu wynika również z kwantyzacji stanów energetycznych na skutek efektu rozmiarowego.

Półprzewodnikowa kropka kwantowa

- Całkowita energia kropki: uwzględniamy energie uwięzienia elektronu w kropce

$$E(N) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i + U(N) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i + \frac{e^2 N^2}{2C_\Sigma} + |e|N \sum_{j=1}^n \frac{C_{j0}}{C_\Sigma} V_j$$

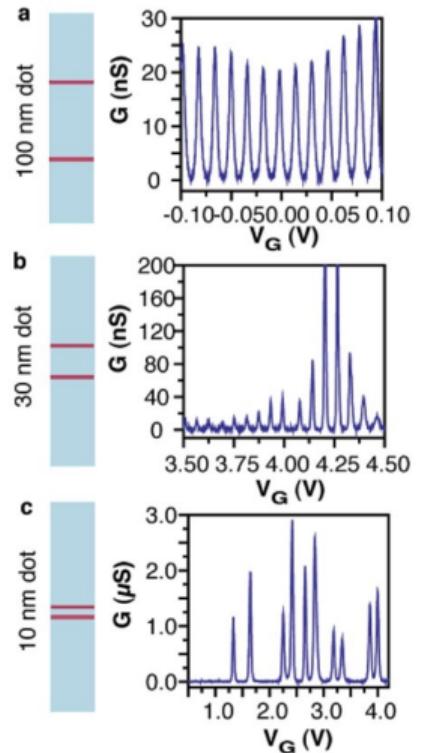
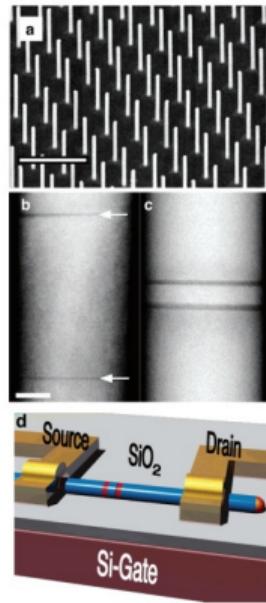
- Energia potrzebna do dodania N -tego elektronu

$$\mu_N = E(N) - E(N-1) = \epsilon_N + \frac{e^2}{C_\Sigma} \left(N - \frac{1}{2} \right) + \frac{|e|}{C_\Sigma} \sum_{j=1}^n C_{j0} V_j$$

- Poza elektrostatyczną blokadą Coulomba mamy blokadę wynikającą z kwantyzacji stanów energetycznych.

Blokada Coulomba

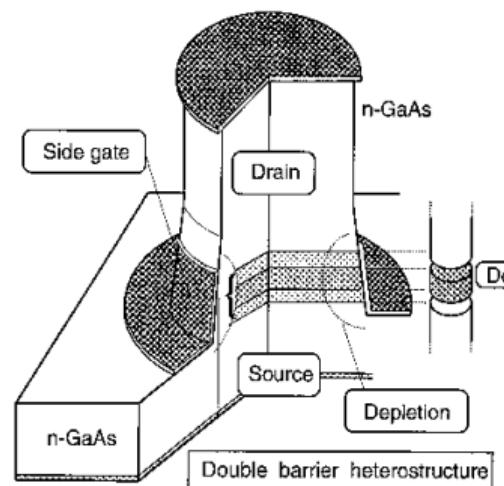
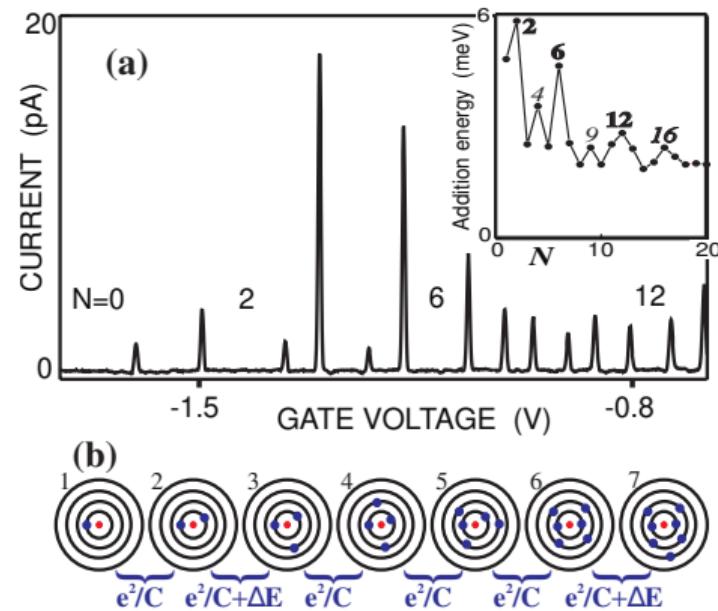
- Dla szerokich kropek kwantowych poziomy kwantyzacji są blisko odległe i nie mają istotnego znaczenia. Na wykresie wyraźnie widać równoodległe piki odpowiadające elektrostatycznej blokadzie Coulomba.
- Dla małych kropek kwantowych poziomy kwantyzacji zaczynają odgrywać istotną rolę. Na wykresie wyraźnie widać piki których odległości określone są elektrostatyczną blokadą Coulomba oraz efektem kwantyzacji energii.



^aNano Lett. 4, 1621 (2004)

Blokada Coulomba - pionowa kropka kwantowa

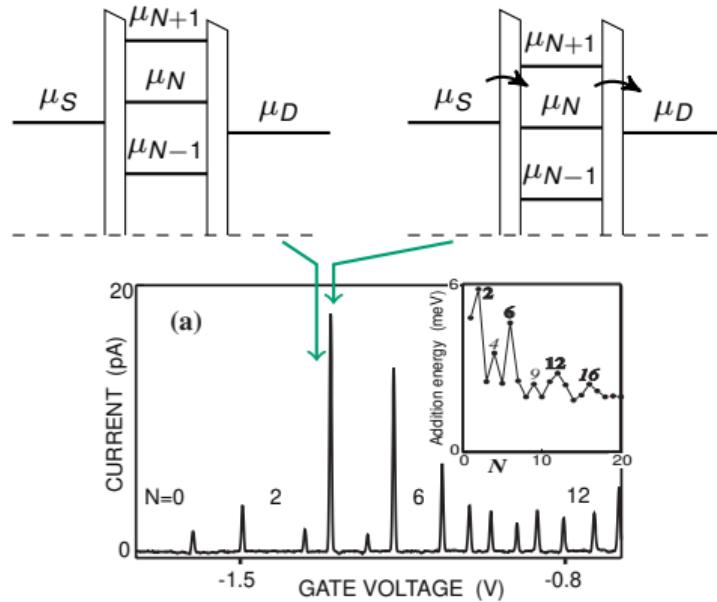
- Bardzo wyraźnie widoczne efekty orbitalne



15

Blokada Coulomba

- Napięcie na bramce, przy którym pojawia się pik prądu



Blokada Coulomba

- Definiujemy (ang. *lever arm*) $\alpha_j = -C_{j0}/C_\Sigma$, $\alpha_j > 0$
 - α_j w kropkach kwantowych może zmieniać się z napięciem

$$\mu_N = \epsilon_N + \frac{e^2}{C_\Sigma} \left(N - \frac{1}{2} \right) - |e| \sum_{j=1}^n \alpha_j V_j$$

przypadek napięcia na bramce V_G ($C_{10} \equiv C_G$, $\alpha_G = C_G/C_\Sigma$)

$$\mu_N = \epsilon_N + \frac{e^2}{C_\Sigma} \left(N - \frac{1}{2} \right) - |e| \sum_{j=2}^n \alpha_j V_j - e\alpha_G V_G$$

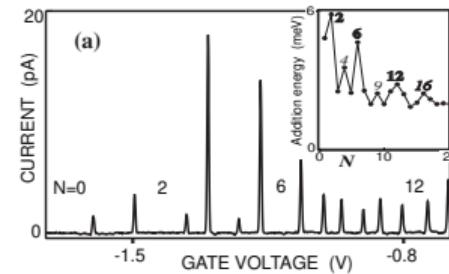
- Przepływ prądu $\mu_S \approx \mu_D \approx \mu_N$
- Napięcie na bramce, przy którym pojawia się pik prądu

$$V_G(N) = \frac{1}{|e|\alpha_G} \left[\epsilon_N + \frac{e^2}{C_\Sigma} \left(N - \frac{1}{2} \right) - |e| \sum_{j=2}^n \alpha_j V_j - \mu_S \right]$$

Blokada Coulomba

- Odstęp między pikami

$$\Delta V_G = V_G(N+1) - V_G(N) = \frac{1}{|e|\alpha_G} \left[\epsilon_{N+1} - \epsilon_N + \frac{e^2}{C_\Sigma} \right]$$



- Odejmując $|e|/(\alpha_G C_\Sigma)$, możliwa rekonstrukcja widma kropki
 - Oszacowanie lever arm α_G np. przez pomiar diamentów Coulomb'a (charakterystyki prądowo-napięciowej)

Diamenty Coulomba, diagram stabilności

- Rozważamy skończone V_{bias}
- Symetryczne napięcie źródło-dren $\mu_S = \mu_0 - |e|V_{bias}/2$, $\mu_D = \mu_0 + |e|V_{bias}/2$,
- Liczba N elektronów w kropce jest niezmienna, gdy:

$-|e|V_{bias} > 0 :$

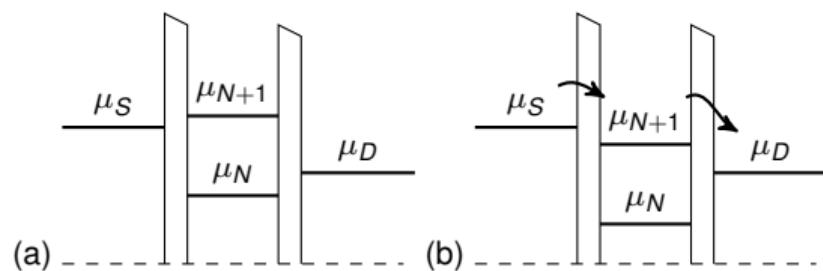
$$\mu_N < \mu_0 + |e|V_{bias}/2$$

$$\mu_{N+1} > \mu_0 - |e|V_{bias}/2$$

$-|e|V_{bias} < 0 :$

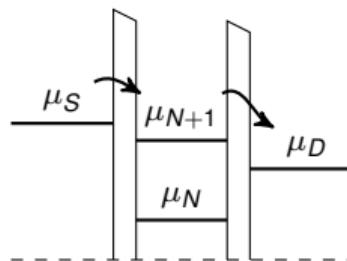
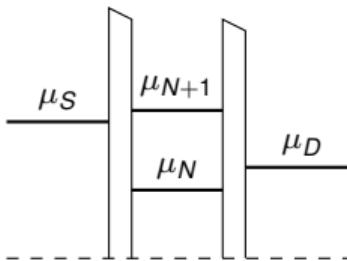
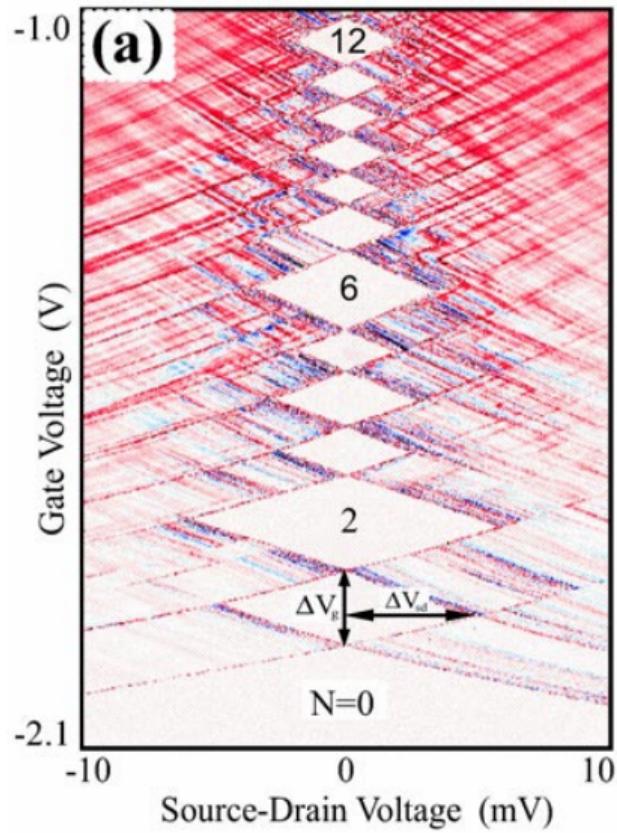
$$\mu_N < \mu_0 - |e|V_{bias}/2$$

$$\mu_{N+1} > \mu_0 + |e|V_{bias}/2$$

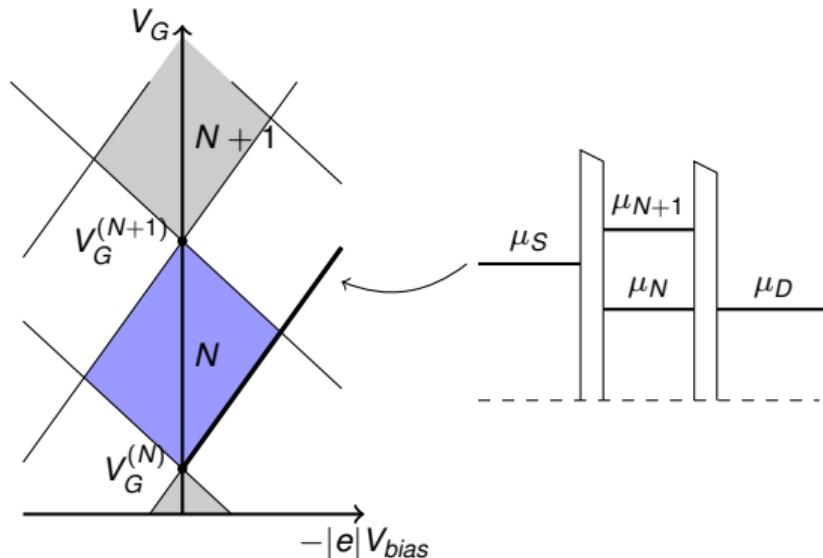


- W przeciwnym przypadku przepływ prądu (Rys. b)

Diamenty Coulomba, diagram stabilności



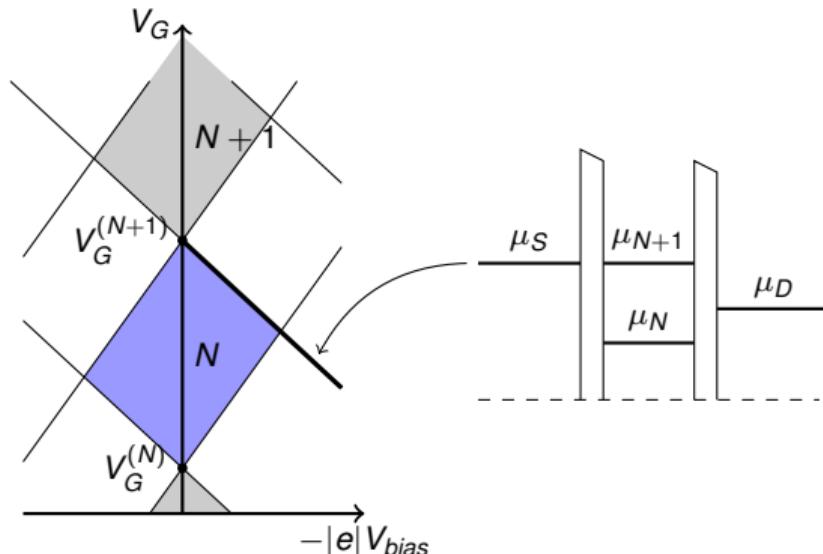
Diamenty Coulomba, diagram stabilności



$$\mu_N = \mu_D$$

- W niebieskim obszarze liczba elektronów $N = \text{const}$
- Dolna linia graniczna odpowiada sytuacji gdy μ_N zrówna się z μ_D

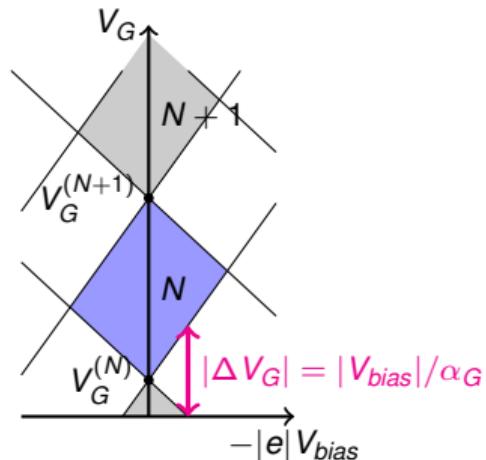
Diamenty Coulomba, diagram stabilności



$$\mu_{N+1} = \mu_S$$

- W niebieskim obszarze liczba elektronów $N = \text{const}$
- Górną linią graniczną odpowiada sytuacji gdy μ_{N+1} zrówna się z μ_S

Diamenty Coulomba, diagram stabilności

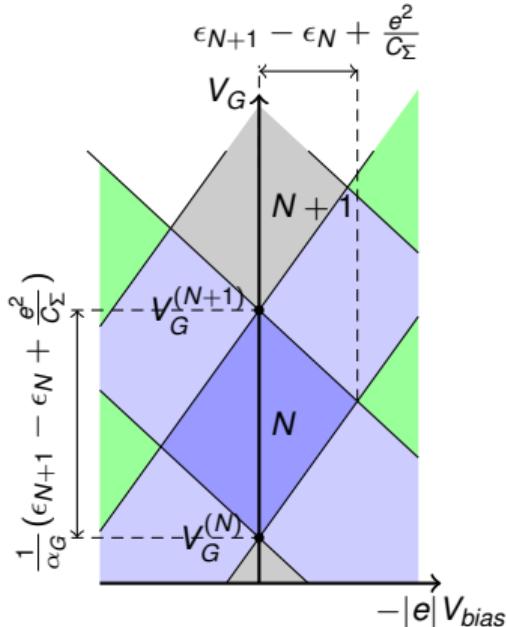
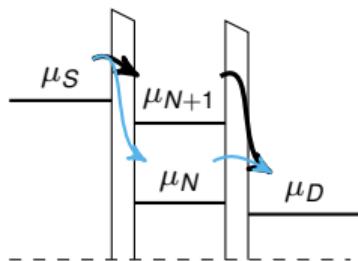


- Z pomiaru $-|e|V_{bias} = \mu_S - \mu_D$ można oszacować *lever arm*:

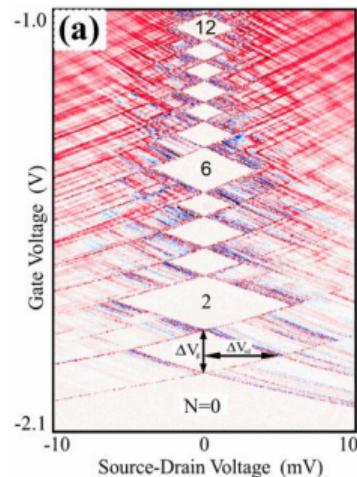
$$\begin{aligned}\mu_S &= \mu_N(V_G^{(0)}) && \text{przy pewnym napięciu } V_G^{(0)} \\ \mu_D &= \mu_N(V_G^{(0)} + \Delta V_G) = \mu_N(V_G^{(0)}) - |e|\alpha_G\Delta V_G && \text{rozwinięcie wokół } V_G = V_G^{(0)} \\ -|e|V_{bias} &= -|e|\alpha_G\Delta V_G\end{aligned}$$

Diamenty Coulomba, diagram stabilności

- Porównanie szerokości diamentu w kierunku V_g i V_{sd} – oszacowanie lever arm α_G
- Stabilna konfiguracja N elektronów – niebieski diament
- Jasnoniebieskie diamenty: „niestabilne”, liczba elektronów fluktuuje (zmiany o 1)
- Zielone diamenty: 2 elektryny mogą tunelować równocześnie:

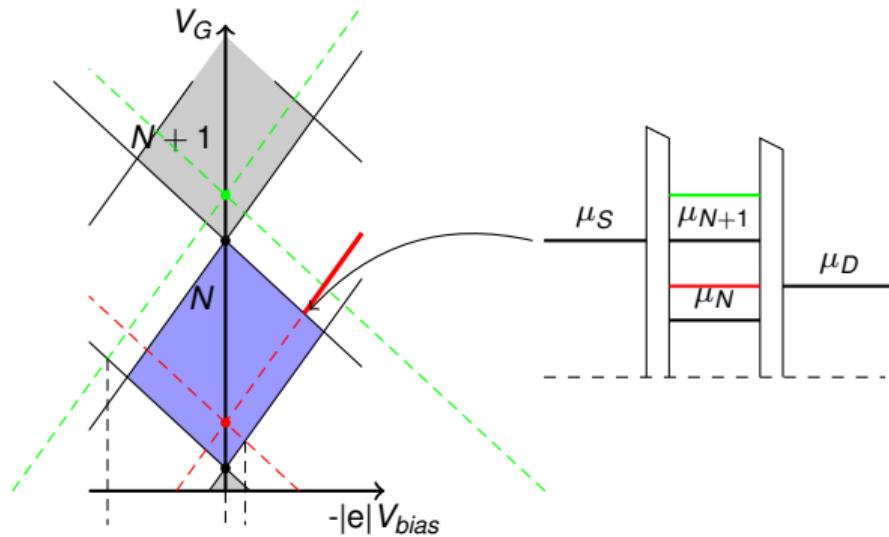


Diamenty Coulomba, diagram stabilności



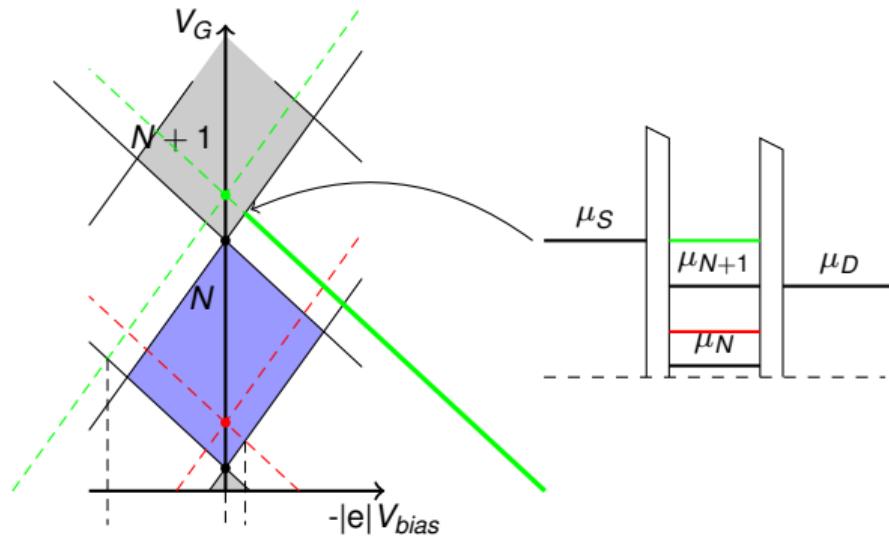
- Typowy pomiar prądu; wykres dI/dV_{bias} (ang. differential conductance)
- Niskie $|dI/dV_{bias}|$ – biały kolor – liczba elektronów w kropce niezmienna
- Pik dI/dV_{bias} występuje gdy liczba elektronów może się zmieniać

Diagram stabilności, stany wzbudzone



- Stany wzbudzone w kropkach – linie równoległe do linii granicznych

Diagram stabilności, stany wzbudzone

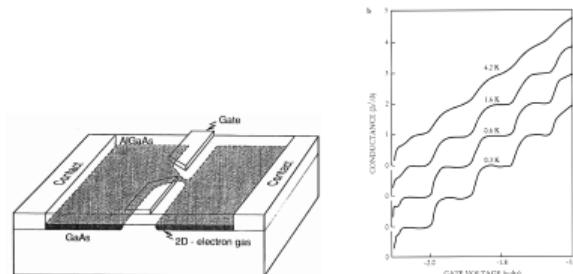


- Stany wzbudzone w kropkach – linie równoległe do linii granicznych

Charge sensing

- W pobliżu QD wytworzony elektrostatycznie **kwantowy kontakt punktowy**

- ang. quantum point contact (QPC)
- Przewodność QPC jest skwantowana co do wielokrotności $2e^2/h$ (tu degeneracja ze względu na spin)
- Pomiędzy plateau, gładkie przejście (tym gładzsze, im wyższa temperatura)
- Więcej szczegółów w wykładzie o transporcie kwantowym.



- Charge sensing: przewodność QPC (na schodku) wrażliwa na elektrostatykę otoczenia

- Zmiany liczby elektronów widoczne jako nagłe zmiany dG_{QPC}/dV
- Nieinwazyjna metoda pomiaru kropek kwantowych

