$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Bruker definisjonen av den deriverte

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

her er h et lite steg som vi kan gjøre om til Δx, Δy og Δt avhengig av hva vi deriverer på,

Δx = størrelsen på steget i x-retning
Δy = —"— i y-retning
Δt = —"— med tiden

Derfor vil avstanden i f.eks x-retning være $x_i = i\Delta x$

Siden $u(x,y,t) = u_{ij}^k$

Derfor vil eksempelvis $f'(x)$

$$= \frac{u_{i+1,j}^k - u_{ij}^k}{\Delta x}$$

Derfor kan varmelikningen skrives slik:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{ij}^k}{\Delta t} - \alpha\left(\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta y^2}\right)$$

Det er logisk å ha like lange steg i x og y retning som gjør at vi kan skrive alt som Δx, og slå sammen

$$u_{i,j}^{k+1} = \underbrace{\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}_{\gamma}\left(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{ij}^k\right) + u_{ij}^k$$

$\hookrightarrow$

Denne kan vi bruke til å prøve

Varmeledningen i 2D