FS510 - METODO MONTECARLO

Simulazione di eventi

di Maria Teresa Graziano

Partiamo da un evento semplice:

Le pile di sabbia

Definizione del modello

Automi cellulari (CA)

Il modello di una pila di sabbia usa una struttura di automi cellulari.

Un automa cellulare (CA) è un **sistema dinamico discreto** che ha la capacità di descrivere un **sistema dinamico continuo**.
L'idea che sta alla base dei CA è quella della simulazione attraverso l'interazione delle celle seguendo semplici regole.
I CA non servono per descrivere un sistema complesso con equazioni complesse ma per lasciare che la complessità emerga dall'interazione di semplici elementi che seguono semplici regole.

Come si usano?

Un CA è composto da pochi semplici elementi:

- la cella
- il reticolo
- il vicinato
- le regole

Consideriamo un reticolo 1-D composto da N celle, ognuna collegata ai suoi immediati vicini di destra e di sinistra.
Con questo reticolo vogliamo discretizzare la variabile a valori reali S_j^n, dove j identifica il nodo sul reticolo e n denota l'iterazione temporale.

Meccanismo di forzatura

Ad ogni iterazione temporale n, un piccolo incremento s viene aggiunto alla variabile S ad un nodo j selezionato casualmente.

$$S_j^{n+1} = S_j^n + s$$

con $j \in [0, N-1]$, $s \in [0, \varepsilon]$ estratti casualmente da una distribuzione uniforme tra gli intervalli dati.

Calcolo della pendenza

Poichè ad ogni iterazione la variabile S cresce possiamo calcolare la pendenza associata a ciascuna coppia nodale $(j, j+1)$.

$$z_j^n = |S_{j+1}^n - S_j^n|$$

con $j = 0, ..., N-2$.
Se questa pendenza supera la soglia critica preimpostata Z_c allora la coppia nodale è considerata instabile.

Regola di ridistribuzione

$$S_j^{n+1} = S_j^n + \frac{1}{2}(\bar{S} - S_j^n)$$

$$S_{j+1}^{n+1} = S_{j+1}^n + \frac{1}{2}(\bar{S} - S_{j+1}^n)$$

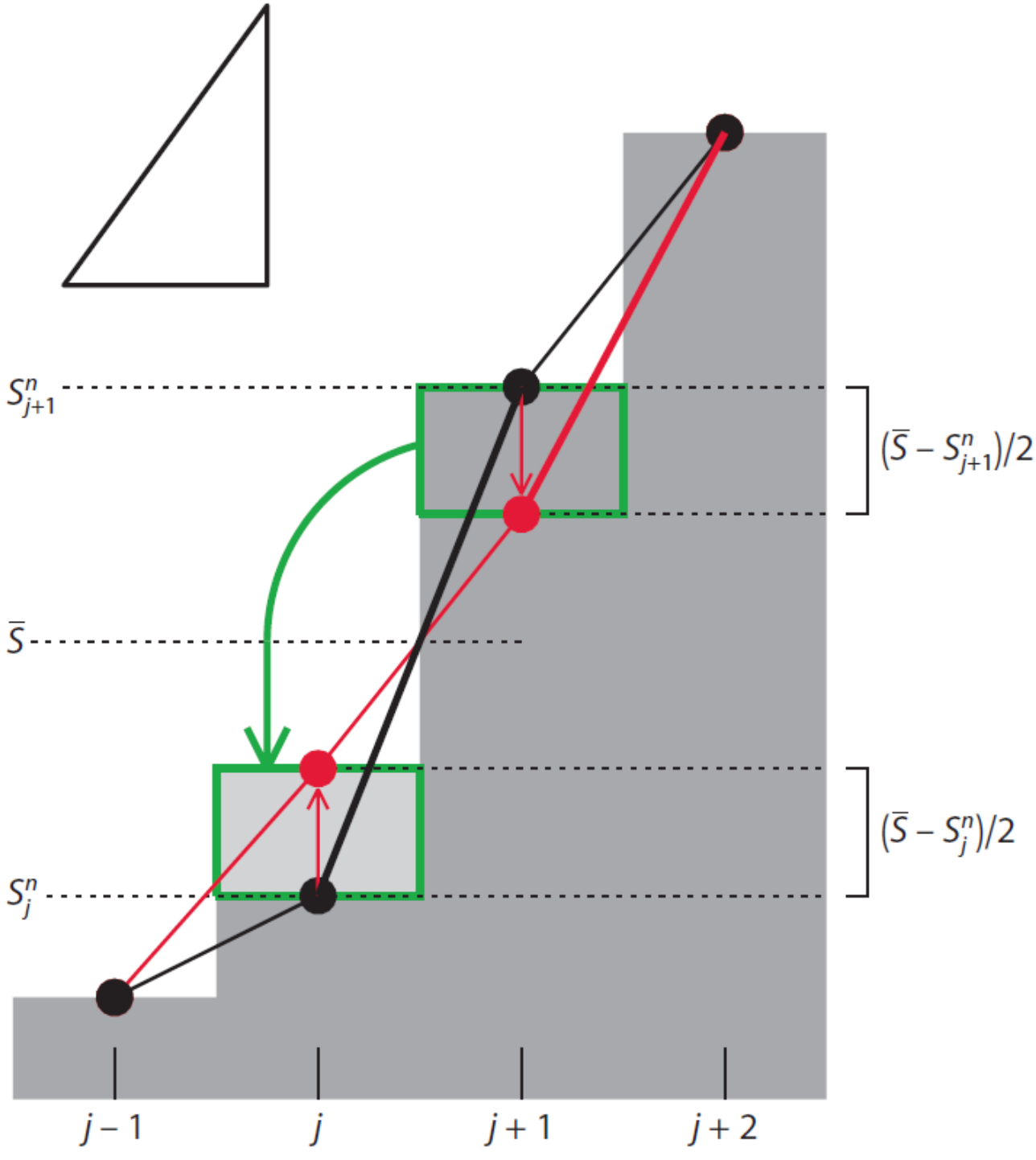
dove

$$\bar{S} = \frac{1}{2}(S_{j+1}^n + S_j^n)$$

Questa regola è conservativa, poichè vale:

$$S_j^{n+1} + S_{j+1}^{n+1} = S_j^n + S_{j+1}^n$$

e la quantità spostata è $\delta S_j^n = z_j^n/4$.
Ad ogni iterazione rimuoviamo la quantità accumulata all'ultimo nodo $S_{N-1}^n = 0$.


S^n_{j+1}
$\bar{S}$
S^n_j
$(\bar{S} - S^n_{j+1})/2$
$(\bar{S} - S^n_j)/2$
$j-1$
j
$j+1$
$j+2$

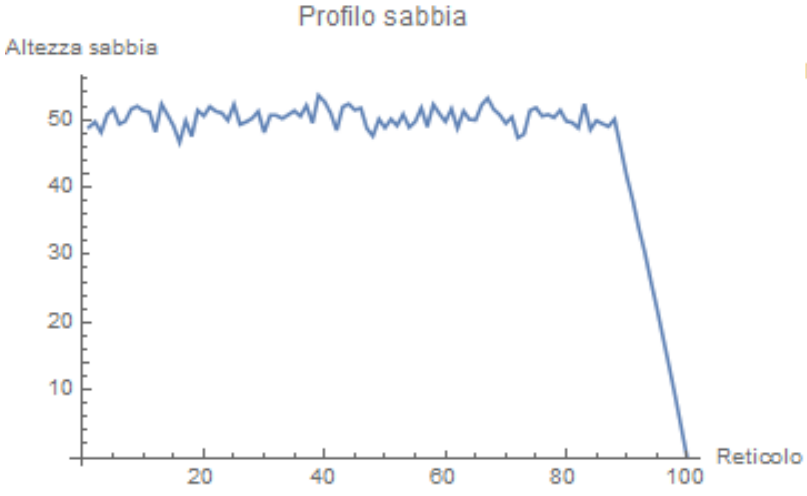
Implementazione e simulazione rappresentativa

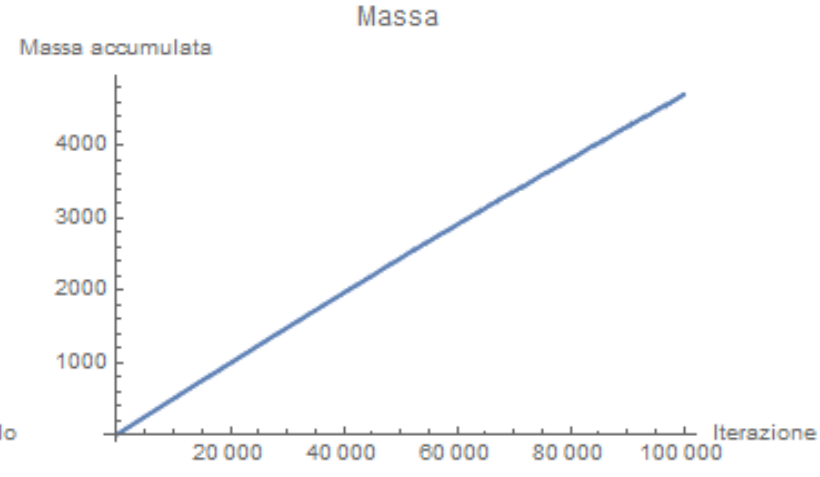
Dati iniziali

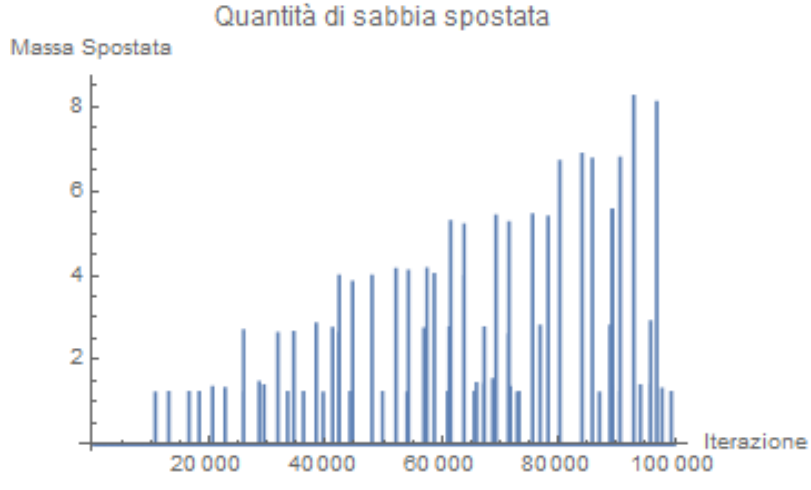
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N=100
E=0.1
critical_slope=5
n_iter=100000

sand=np.zeros(N)
tsav=np.zeros(n_iter)
mass=np.zeros(n_iter)
```

Implementazione del modello

```
for iterate in range(0,n_iter):
        move=np.zeros(N)
        for j in range(0,N-1):
                slope=abs(sand[j+1]-sand[j])
                if slope >= critical_slope:
                        avrg=(sand[j]+sand[j+1])/2
                        move[j]+=(avrg-sand[j])/2
                        move[j+1]+=(avrg-sand[j+1])/2
                        tsav[iterate]+=slope/4

        if tsav[iterate]>0:
                sand+=move
        else:
                j=np.random.randint(0,N-1)
                sand[j]+=np.random.uniform(0,E)

        sand[N-1]=0
        mass[iterate]=np.sum(sand)
```

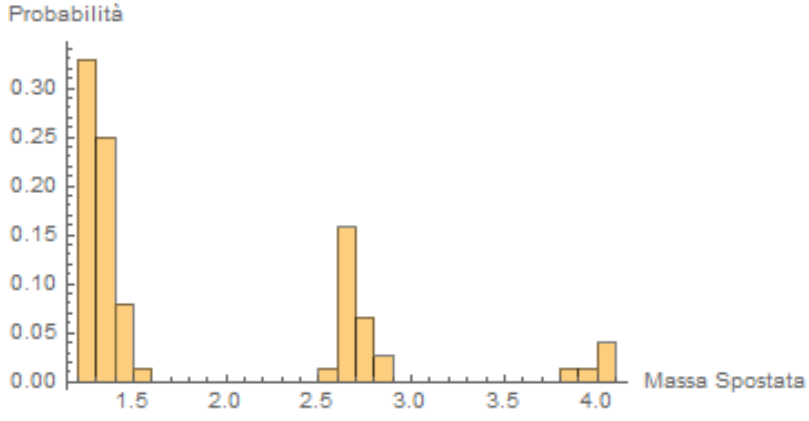

Profilo sabbia
Altezza sabbia
50
40
30
20
10
20
40
60
80
100
Reticolo


Massa
Massa accumulata
4000
3000
2000
1000
20 000
40 000
60 000
80 000
100 000
Iterazione

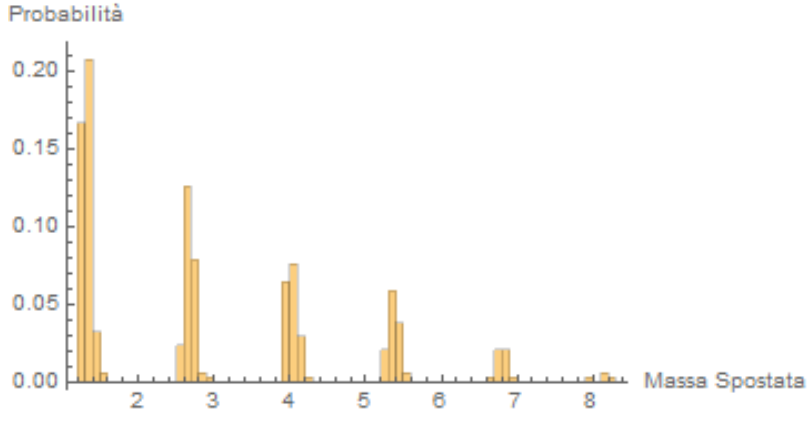

Quantità di sabbia spostata
Massa Spostata
8
6
4
2
20 000
40 000
60 000
80 000
100 000
Iterazione

Visualizzazione dei valori della massa spostata

Valori tra 1 e $5 * 10^4$ iterazioni:



Valori tra $5 * 10^4$ e 10^5 iterazioni:



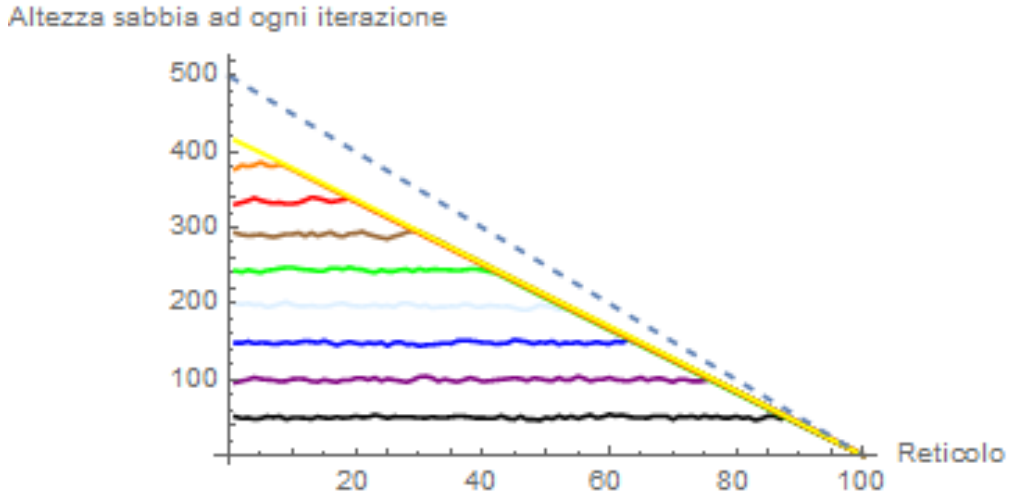
Studio dell'angolo di riposo

Verifichiamo che la pendenza della pila nello stato statisticamente stazionario è minore della pendenza critica data.
Questo è dovuto al meccanismo di forzatura che porta all'instabilità di una coppia nodale prima che questa ha raggiunto la pendenza critica.

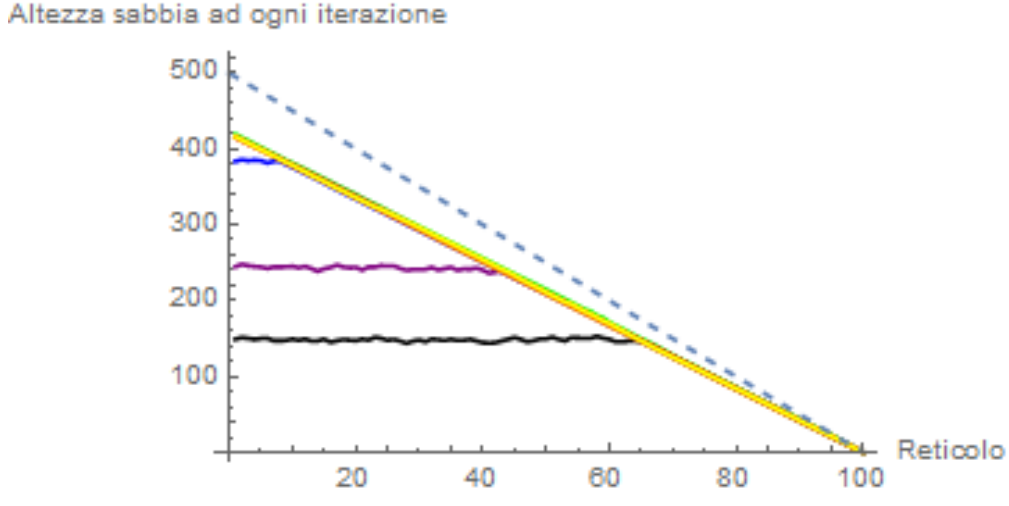
```
r=9
matrix=np.zeros((r,N))

for i in range(1,r+1):
        sand=np.zeros(N)
        tsav=np.zeros(i*(10**5))
        mass=np.zeros(i*(10**5))
```

```
    for iterate in range(0,i*(10**5)):
        move=np.zeros(N)
        for j in range(0,N-1):
            slope=abs(sand[j+1]-sand[j])

            if slope >= critical_slope:
                avrg=(sand[j]+sand[j+1])/2
                move[j]+=(avrg-sand[j])/2
                move[j+1]+=(avrg-sand[j+1])/2
                tsav[iterate]+=slope/4

        if tsav[iterate]>0:
            sand+=move
        else:
            j=np.random.randint(0,N-1)
            sand[j]+=np.random.uniform(0,E)

        sand[N-1]=0
        mass[iterate]=np.sum(sand)

    for j in range(0,N-1):
        matrix[i-1][j]=sand[j]
```

Con array sand inizialmente nullo, o caricato uniformemente ad un'altezza fissa:



Con array sand inizialmente già all'angolo di riposo:

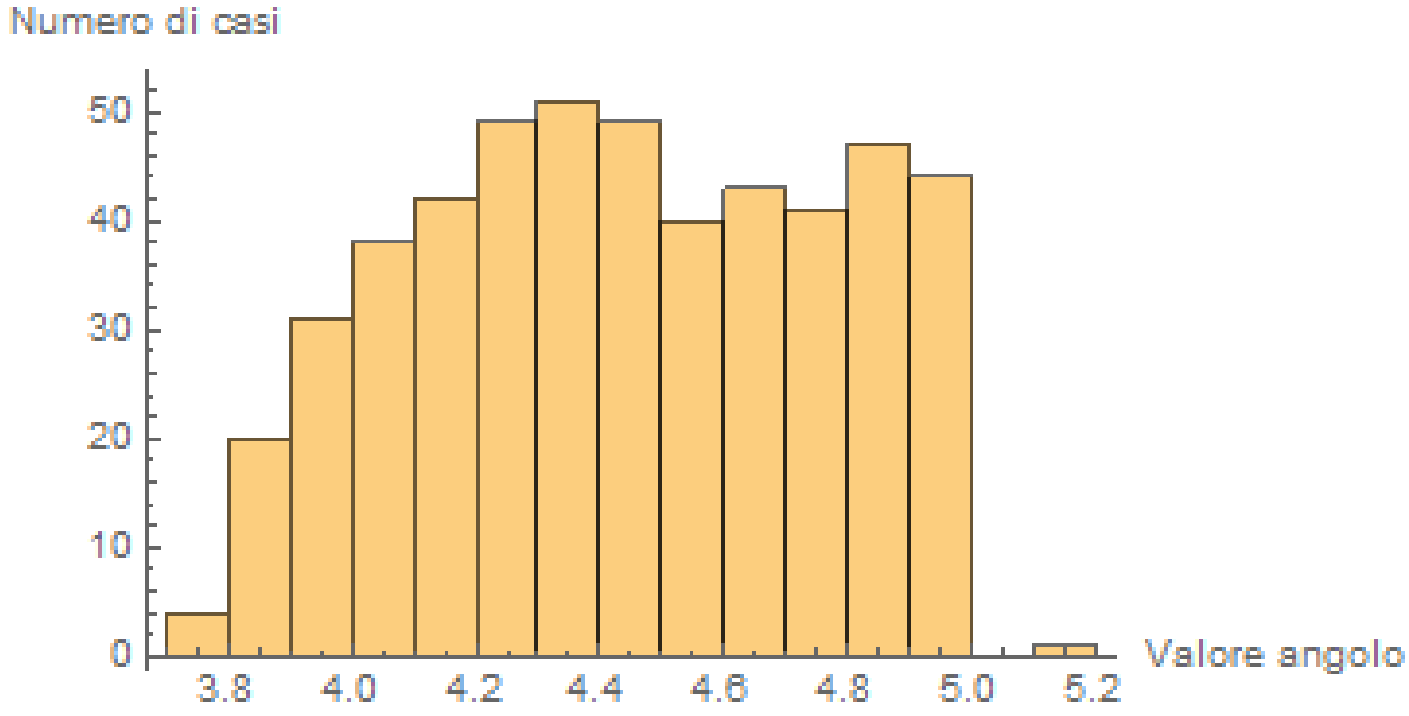


Quindi possiamo concludere che il sistema si stabilizza a una pendenza media minore di Z_c e che si avvicina a Z_c sono nel limite $\varepsilon \to 0$, indipendentemente dalle condizioni iniziali.

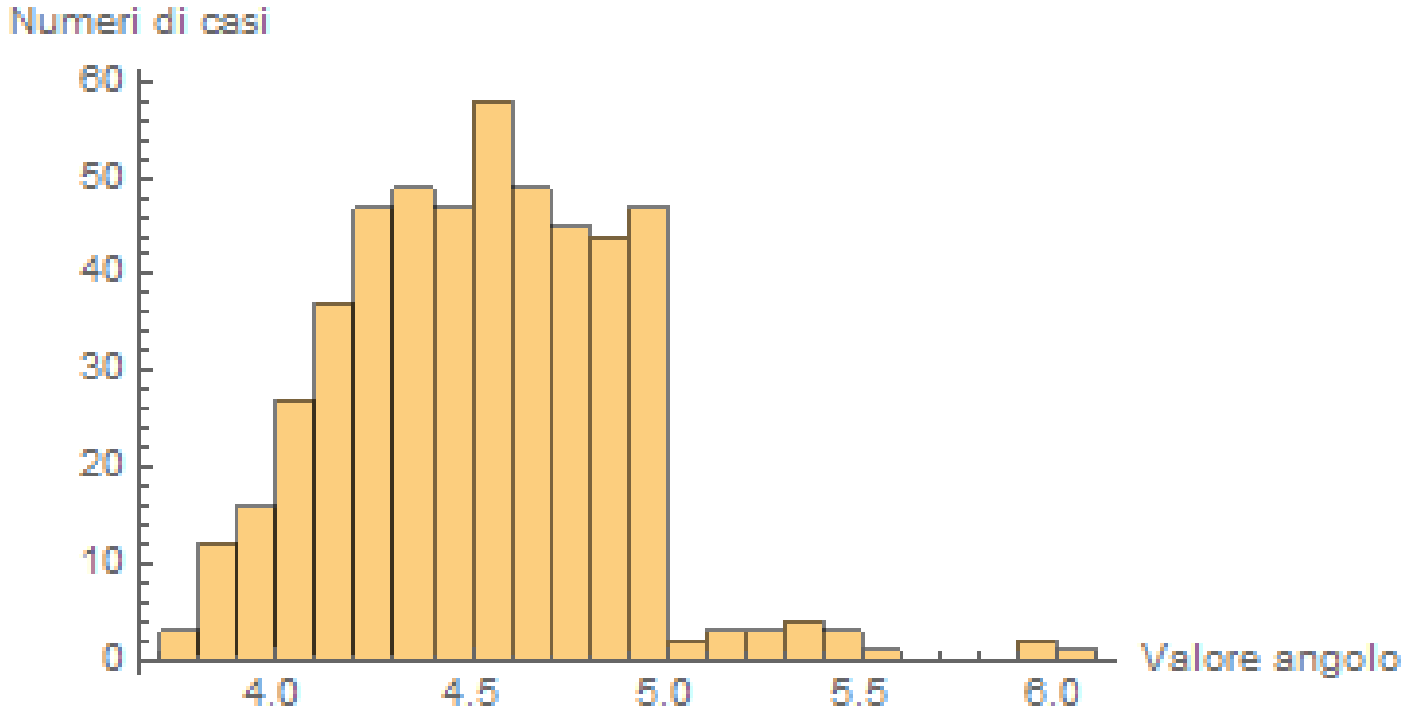
```
repliche=500
slopeArray=np.zeros(repliche)

for i in range(0,repliche):
    sand=np.zeros(N)
    tsav=np.zeros(n_iter)
    r=0
    a=0
    for iterate in range(0,n_iter):
        move=np.zeros(N)
        if a==1:
            for j in range(0,N-1):
                slope=abs(sand[j+1]-sand[j])
                if slope >= critical_slope:
                    avrg=(sand[j]+sand[j+1])/2
                    move[j]+=(avrg-sand[j])/2
                    move[j+1]+=(avrg-sand[j+1])/2
                    tsav[iterate]+=slope/4
```

```
        else:
            for j in range(r-1,r+2):
                if j==-1 or j==N-1 or j==N:
                    break
                else:
                    slope=abs(sand[j+1]-sand[j])
                    if slope >= critical_slope:
                        avrg=(sand[j]+sand[j+1])/2
                        move[j]+=(avrg-sand[j])/2
                        move[j+1]+=(avrg-sand[j+1])/2
                        tsav[iterate]+=slope/4

        if tsav[iterate]>0:
            sand+=move
            a=1
        else:
            j=np.random.randint(0,N-1)
            sand[j]+=np.random.uniform(0,E)
            r=j
            a=0

        sand[N-1]=0

    slopeArray[i]=sand[N-2]
```

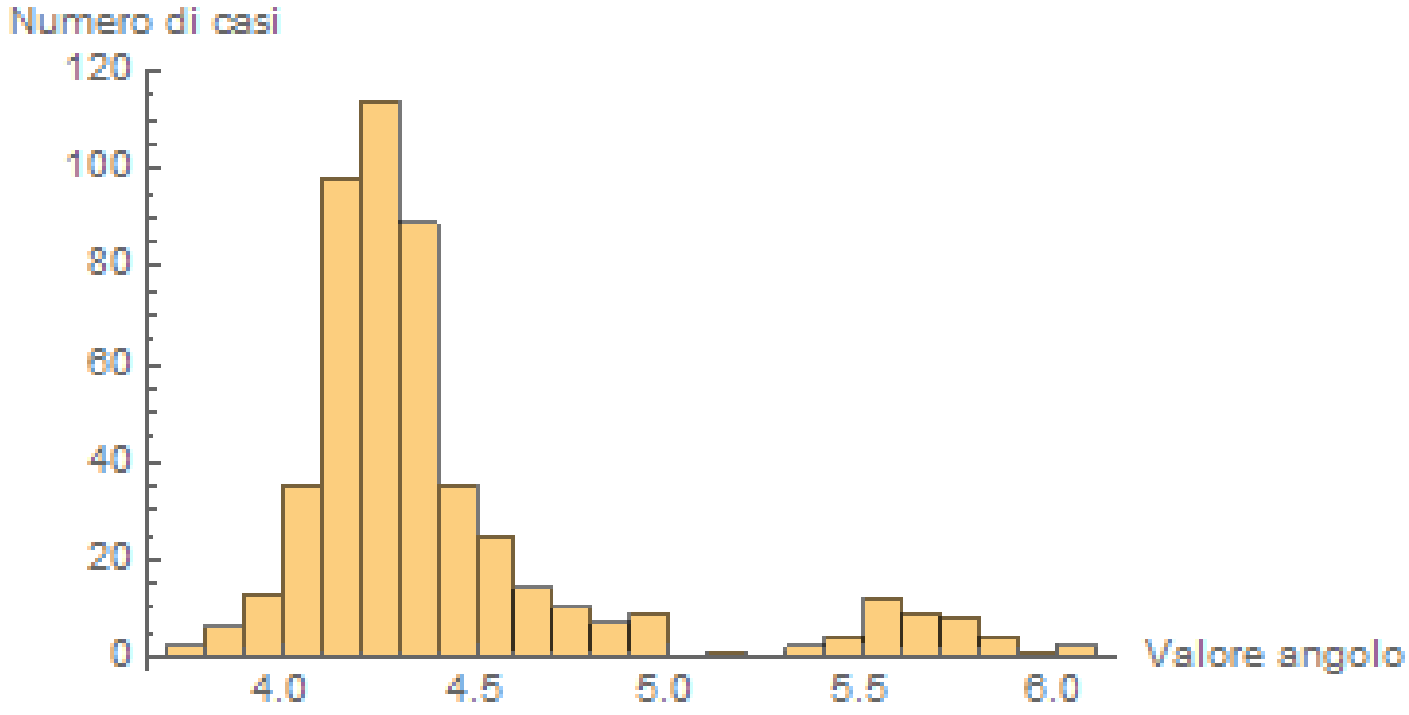
Per E=0.01 e 500 repliche:



Per E=0.1 e 500 repliche:

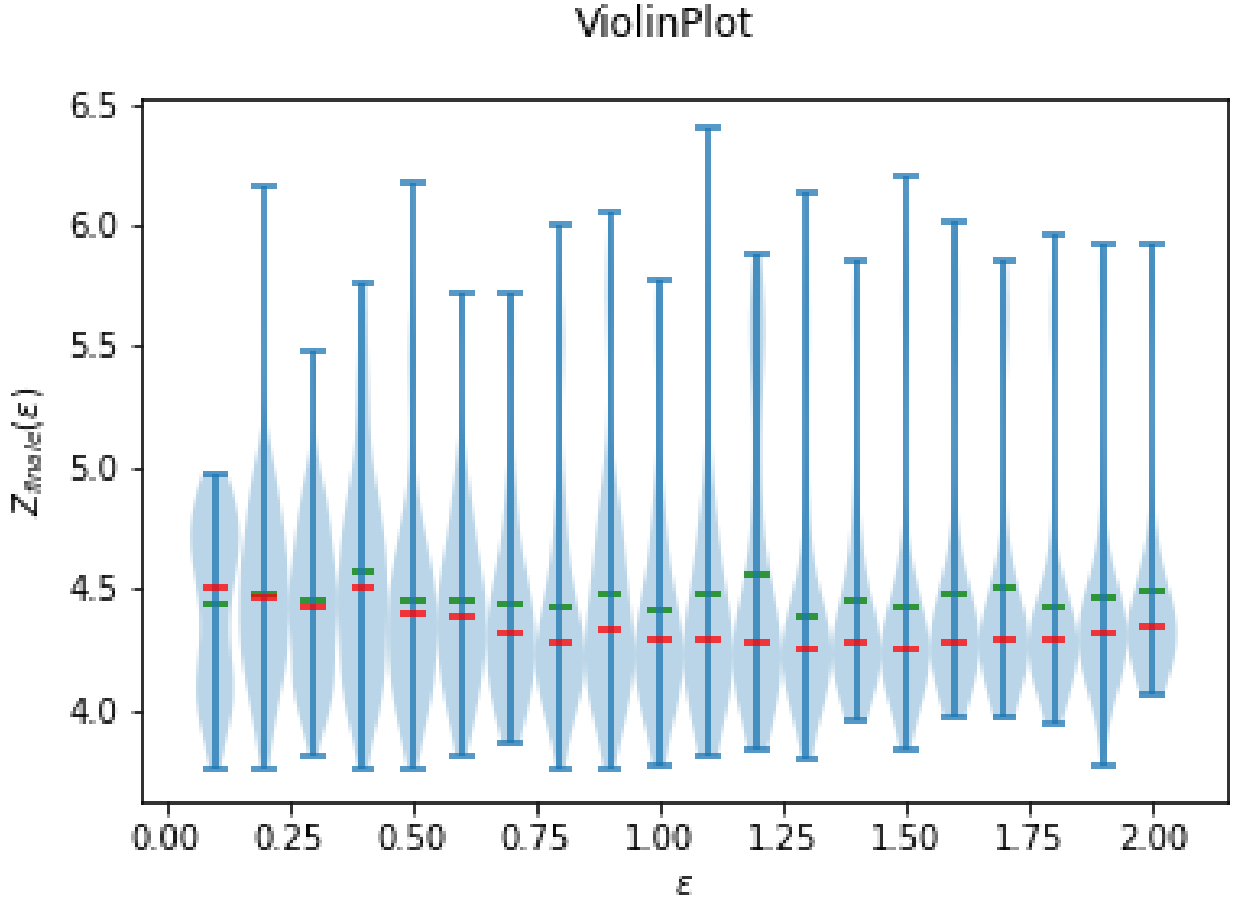


Per E=1 e 500 repliche:



Studio della distribuzione dell'angolo di riposo per diversi valori di ε e $Z_c = 5$.

In rosso è segnata la mediana, in verde la media.



Studiamo la massa e la massa spostata

- Massa: la quantità totale di sabbia nella pila ad ogni iterazione n

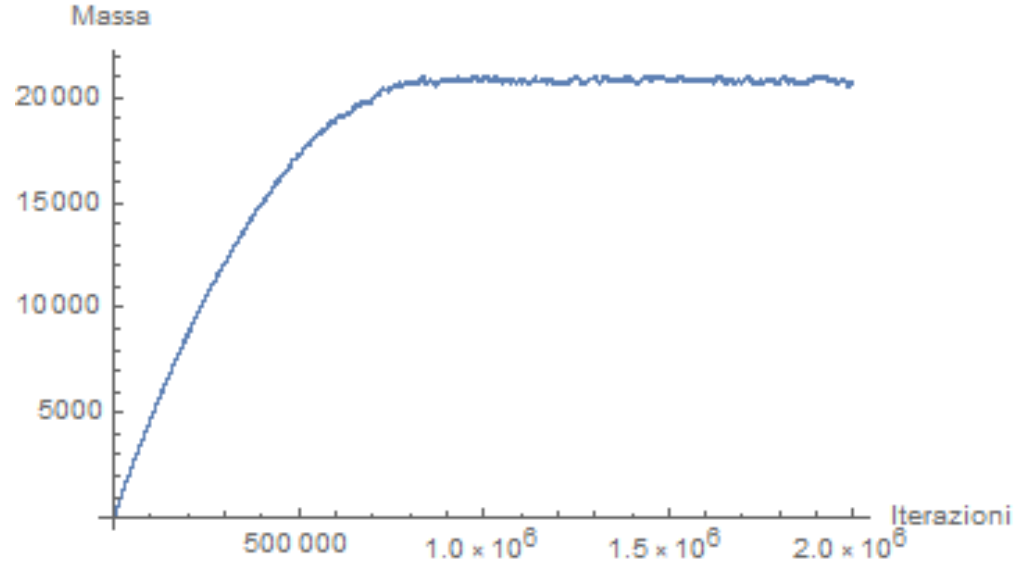
$$M^n = \sum_{j=0}^{N-1} S_j^n$$

- Massa spostata: somma della quantità di massa spostata ad ogni iterazione n nel corso di una valanga.

$$\Delta M^n = \sum_{j=0}^{N-2} \delta S_j^n$$

dove δS_j^n è la quantità spostata.

Grafico della massa generato su $2 * 10^6$ iterazioni:



Zoom su valori tra $16 * 10^5$ e $16.2 * 10^5$:

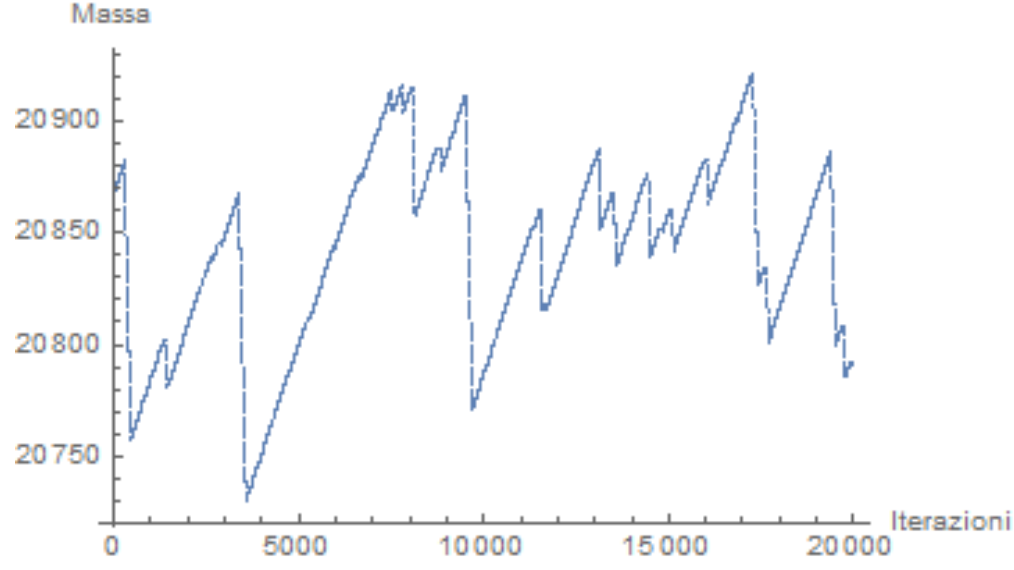
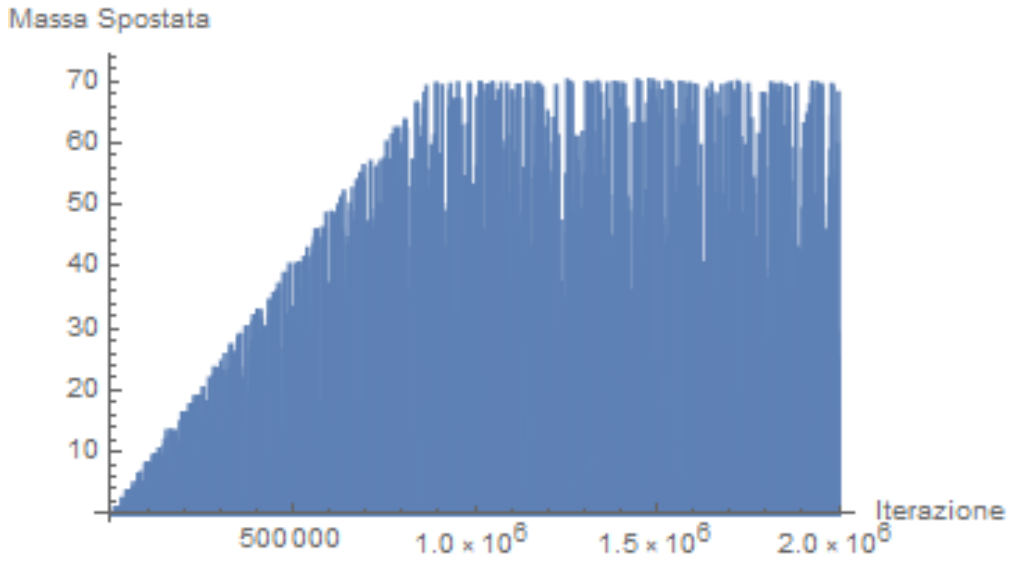
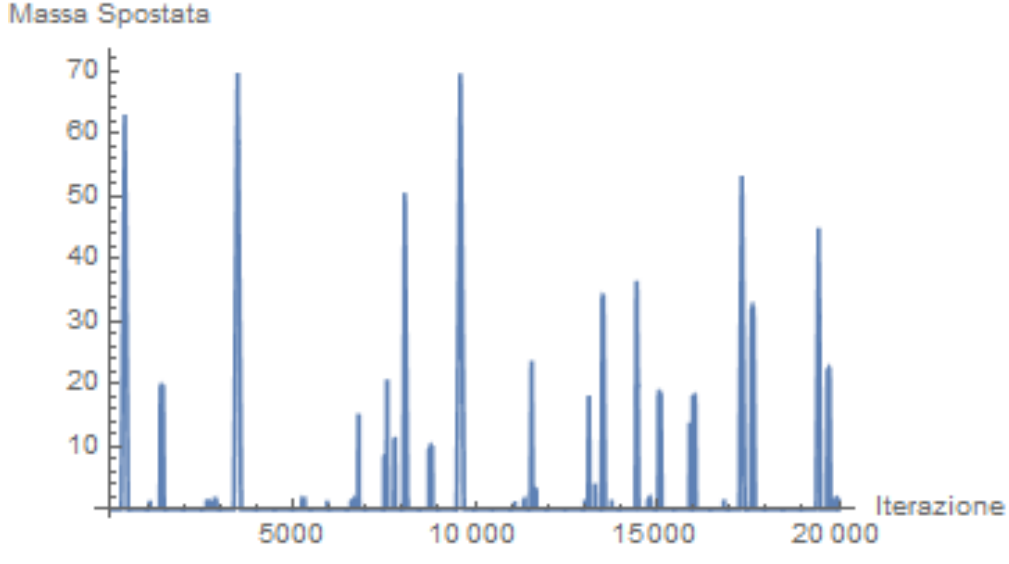


Grafico della massa spostata generato su $2 * 10^6$ iterazioni:



Zoom su valori tra $16 * 10^5$ e $16.2 * 10^5$:



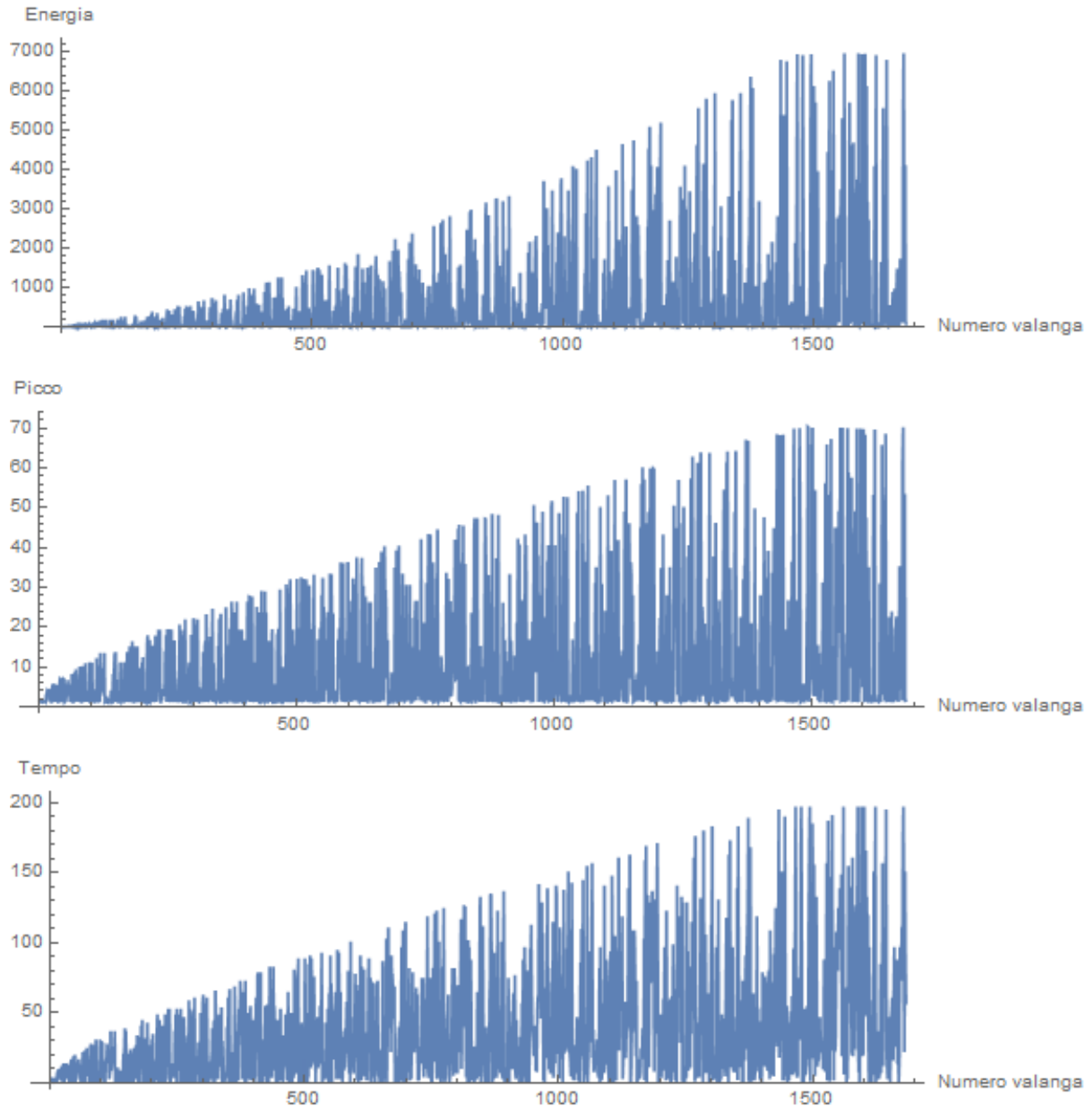
Misuriamo le valanghe

Le valanghe sono diverse in dimensione e forma.
Definiamo tre quantità globali che caratterizzano ciascuna valanga:

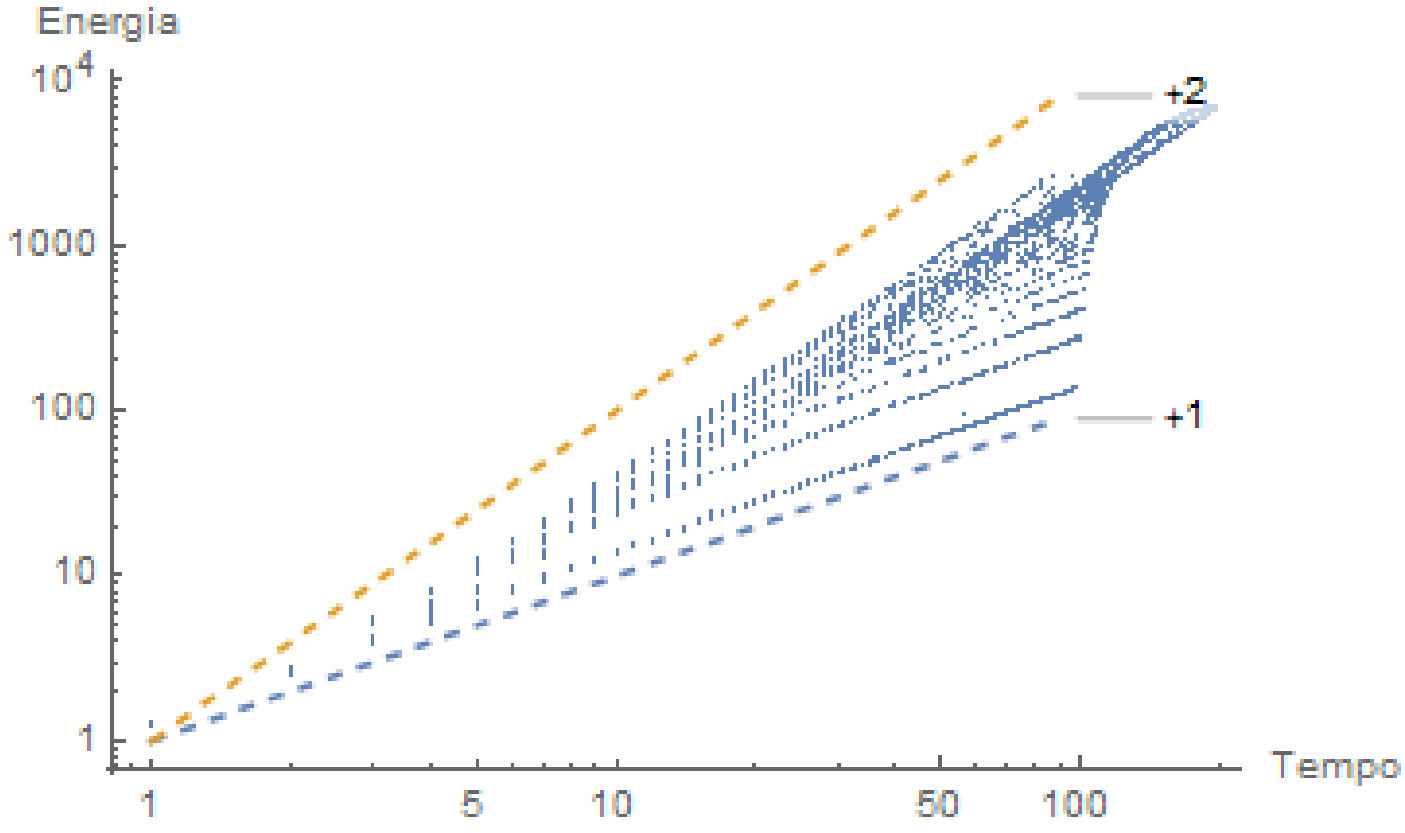
- Energia delle valanghe E: la somma di tutte le masse spostate ΔM^n per tutta la durata di una valanga;
- Picco della valanga P: il più grande valore ΔM^n prodotto nel corso della valanga;
- Durata della valanga T: il numero di iterazioni intercorse tra l'innesco di una valanga e l'ultimo locale ridistribuito.

Queste tre quantità possono essere facilmente estratte dalla serie temporale della massa spostata.

```
def measure_av(n_iter,tsav):
    n_max_av=10000
    e_av=np.zeros(n_max_av)
    p_av=np.zeros(n_max_av)
    t_av=np.zeros(n_max_av)
    n_av,somma,istart,avmax=-1,0,0,0

    for iterate in range(1,n_iter):
        if tsav[iterate]>0 and tsav[iterate-1]==0:
            somma,avmax=0,0
            istart=iterate
            if n_av==n_max_av-1:
                print("troppe valanghe")
                break
            n_av+=1
        somma+=tsav[iterate]
        if tsav[iterate]>avmax:
            avmax=tsav[iterate]
        if tsav[iterate]<=0 and tsav[iterate-1]>0:
            e_av[n_av]=somma
            p_av[n_av]=avmax
            t_av[n_av]=iterate-istart

    return n_av,e_av,p_av,t_av
```


Energia
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
500
1000
1500
Numero valanga
Picco
70
60
50
40
30
20
10
500
1000
1500
Numero valanga
Tempo
200
150
100
50
500
1000
1500
Numero valanga

Correlazione



In questo grafico Log-Log: correlazione tra energia E e durata T nello stato statisticamente stazionario, $E \propto T$ e $E \propto T^2$

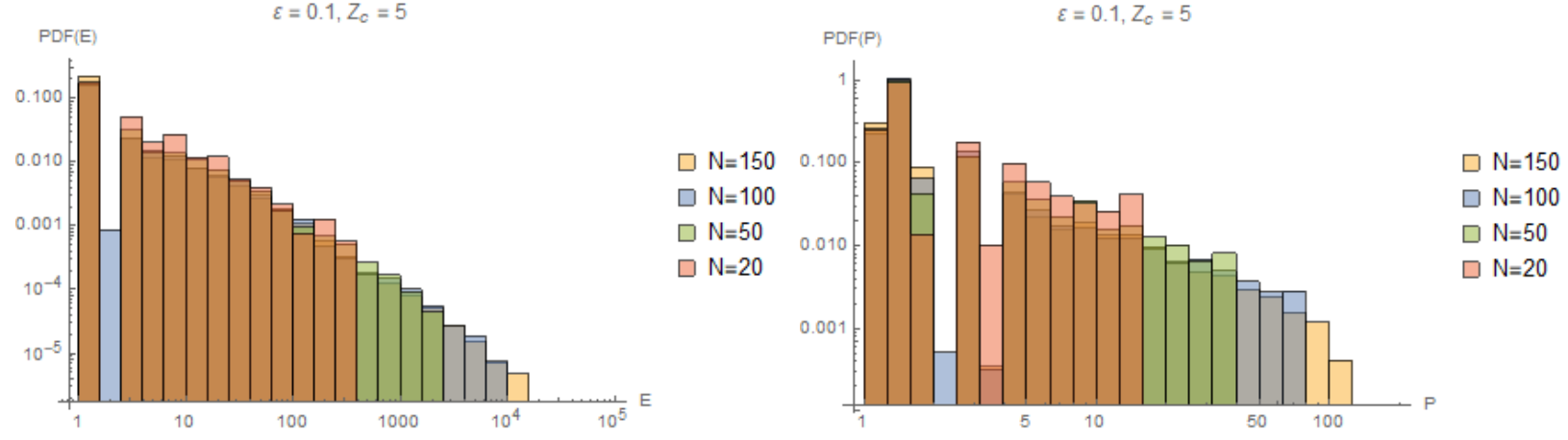
La più piccola quantità di massa spostata che può essere prodotta è

$$\delta S_j^n = Z_c/4 = \delta M_0$$

Se supponiamo che il reticolo si trova ovunque all'angolo di riposo, allora la massa si sposterà verso il basso lungo la pendenza, un nodo ad ogni iterazione, fino a quando non raggiungerà il confine aperto. Quindi se il nodo instabile di partenza si trova a M nodi di distanza dal confine aperto allora avrà durata $T = M$ ed energia $E = M * \delta M_0$ quindi $E = \delta M_0 T$, cioè una relazione lineare.
La relazione quadratica è associata invece a valanghe che si diffondono sia in salita che in discesa, in tutti i nodi nel mezzo si hanno valanghe ripetutamente fino alla stabilizzazione, che avviene una volta terminata la valanga oppure se la massa è evacuata al confine aperto. Quindi il numero dei nodi su cui avvengono valanghe crescono linearmente con T.

PDF (Invarianza di scala)

I **PDF** per E e per P assumono la forma di legge di potenza $f(x) = a * x^b$, con pendenza logaritmica indipendente dalla dimensione del reticolo. Una volta raggiunto lo stato statico stazionario, all'aumentare di N la distribuzione si estende verso destra.

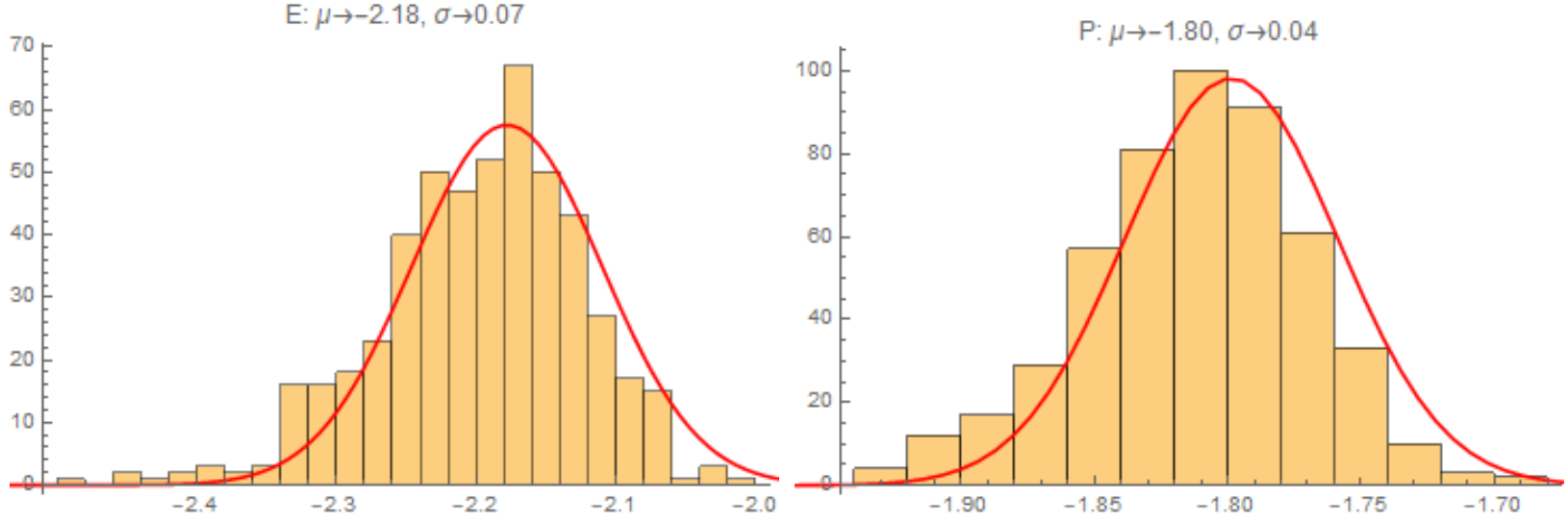


Codice da inserire per il calcolo del valore di b:

```
#pacchetto da importare
from scipy.optimize import curve_fit

#dati inziali
E=0.1, N=50
repliche=500
EnfitArray=np.zeros(repliche)
PfitArray=np.zeros(repliche)

def func(x, a, b):
    return a+x*b

#da inserire nel ciclo
n_av,e_av,p_av,t_av=measure_av(n_iter,tsav)

xdata,ydata=np.histogram(e_av,range=(e_av.min()+1, e_av.max()))
popt, pcov = curve_fit(func, np.log(ydata[1:]),np.log(xdata))
EnfitArray[i]=popt[1]

xdata,ydata=np.histogram(p_av,range=(p_av.min()+1, p_av.max()))
popt, pcov = curve_fit(func, np.log(ydata[1:]),np.log(xdata))
PfitArray[i]=popt[1]
```

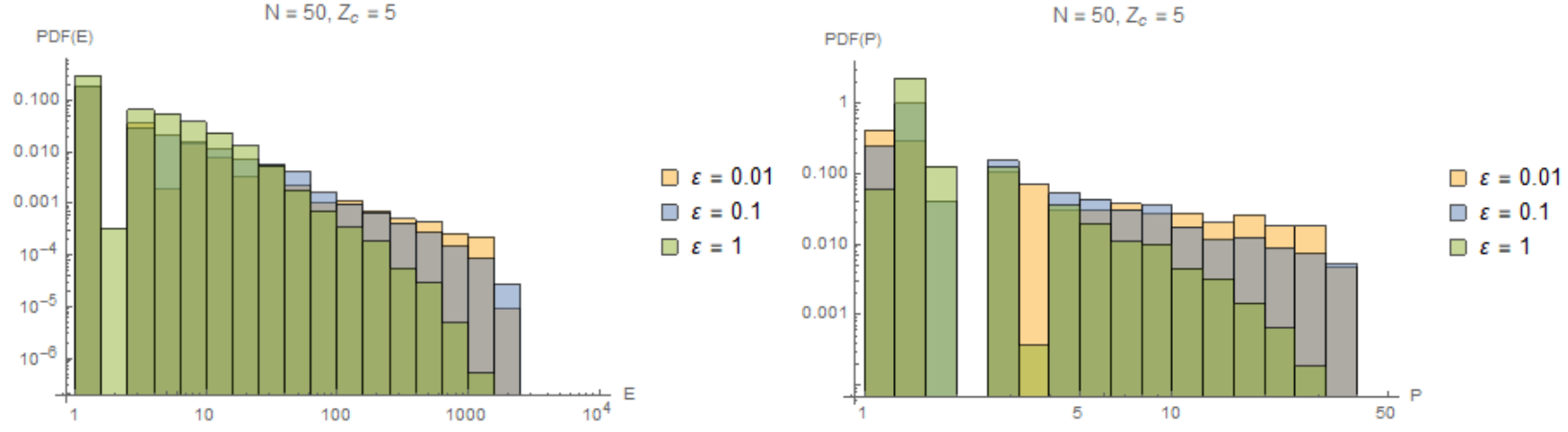
Il valore b più frequente è:

- $b = -2.18$ per la pendenza di E
- $b = -1.80$ per la pendenza di P

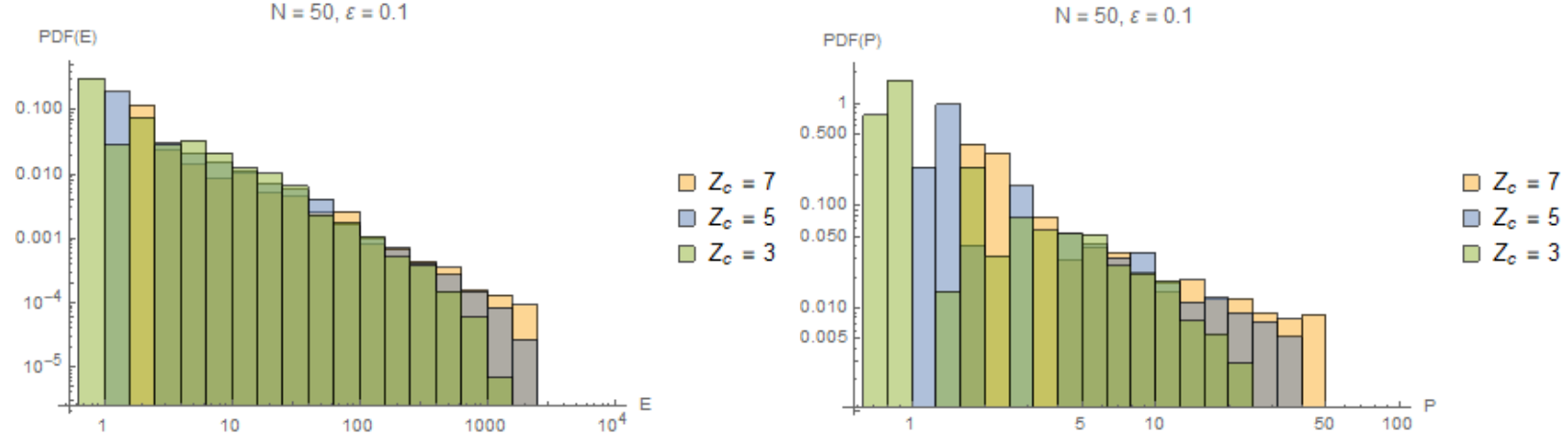


Studio della pendenza al variare di ε e Z_c

Per valori di $N = 50$ e $Z_c = 5$, variando ε:



Per valori di $N = 50$ e $\varepsilon = 0.1$, variando Z_c:



Per raggiungere lo stato statisticamente stazionario il nostro modello utilizza valanghe con invarianza di scala. Poichè molti sistemi si comportano in questo modo, le pile di sabbia sono diventate le icone per il concetto di criticità auto-organizzata.
La criticità qui la troviamo nell'angolo di riposo del mucchio:

- se la pendenza è inferiore all'angolo di riposo, l'aggiunta di sabbia può solo far crescere il mucchio o innescare piccole valanghe, confinate spazialmente.
- se la pendenza globale è superiore all'angolo di riposo, allora sicuramente ci sono valanghe in atto.
- se la pendenza è uguale all'angolo di riposo allora l'aggiunta di sabbia su un unico nodo può o portare a nulla o innescare una valanga lungo tutto il pendio.

Criticità auto-organizzata

E' una teoria che spiega la dinamica dei grandi sistemi interattivi, dalle valanghe, ai terremoti, ai mercati finanziari: tutti evolvono verso uno stato critico in cui anche un piccolo evento può innescare una catastrofe.

Un sistema con criticità auto-organizzata deve essere:

- aperto e dissipativo;
- caricato da forzatura lenta;
- sottoposto a una soglia locale di instabilità. . .
- . . . che ripristina la stabilità attraverso il riadattamento locale.

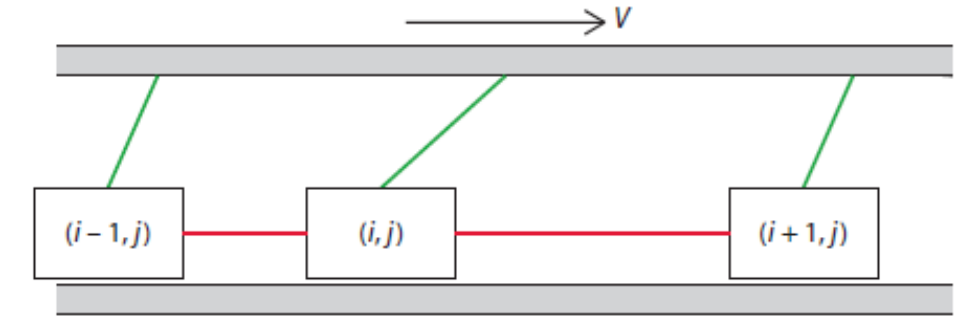
Variazione del modello delle pile di sabbia:

I terremoti

Modello Burridge-Knopoff

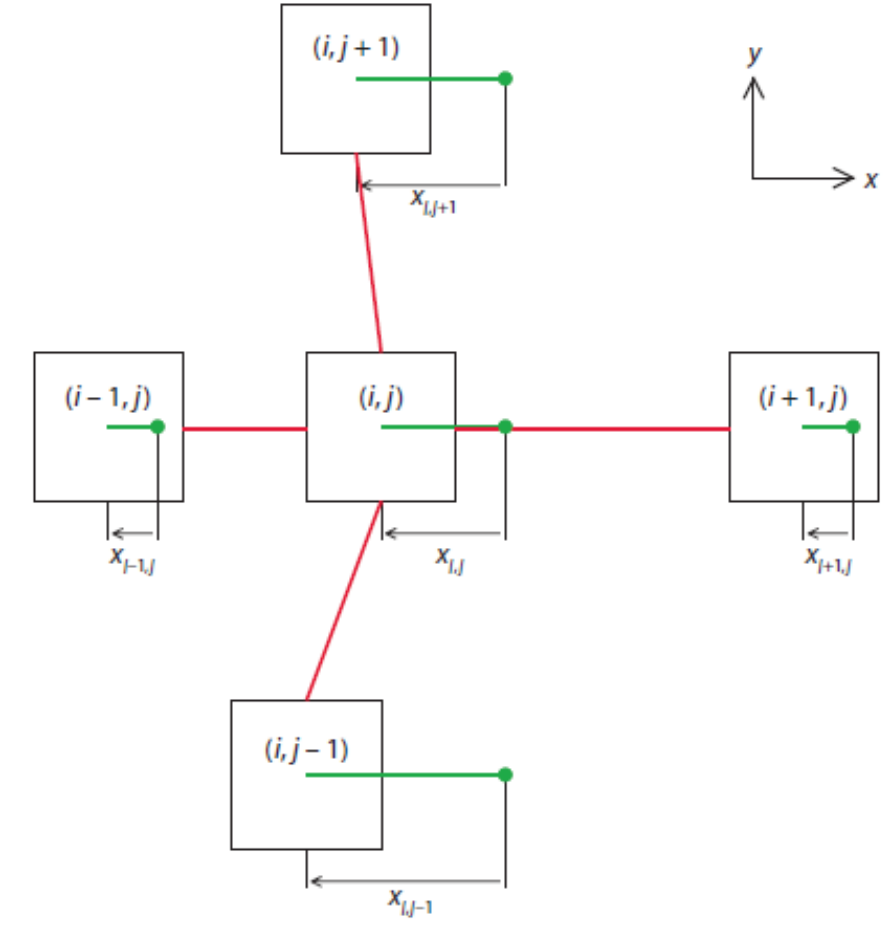
La maggior parte dei terremoti si verifica per lenti movimenti della crosta terrestre e della litosfera. Gli strati della litosfera che lentamente si spostano vengono dette faglie. Quando una faglia ne comprime un'altra vincendo la forza d'attrito, si determina un veloce slittamento con un improvviso rilascio di energia, che fa vibrare la crosta terrestre deteminando il terremoto.

Il **modello BK** è un costrutto meccanico definito come una matrice di blocchi tra due piastre.
Ogni blocco (i, j) è connesso ai suoi 4 vicini, $(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$, tramite una molla con costante K (in rosso), ed è connesso con un'altra molla con costante K_L (in verde) alla piastra superiore, che si muove a velocità costante V, lungo la direzione x.
La piastra inferiore invece è fissa.
Il movimento della piastra superiore allungherà la molla, aumentando così l'intensità della forza, nella componente x, che agisce su ciascun blocco.



Side view

Top view



Forza elastica

Per la legge di Hooke:

$$\vec{F_x} = -K\Delta\vec{x}$$

dove K è la costante della molla e $\Delta x = x_{i,j}$ è lo spostamento.

La componente x della forza totale che agisce sul blocco (i, j) è quindi data da:

$$F^n_{i,j} = K(x^n_{i-1,j} + x^n_{i+1,j} + x^n_{i,j-1} + x^n_{i,j+1} - 4x^n_{i,j}) - K_L x^n_{i,j}$$

Forza di attrito

Sia F_c la forza di attrito tra il blocco e la piastra inferiore:

- se $F_{i,j} \leq F_c$ il blocco è stabile e resta a riposo
- altrimenti scivola

Stabilizzazione

Dopo lo slittamento il blocco raggiunge una posizione di equilibrio dove la forza totale è nulla:

$$F_{i,j}^{n+1} = K(x_{i-1,j}^{n} + x_{i+1,j}^{n} + x_{i,j-1}^{n} + x_{i,j+1}^{n} - 4x_{i,j}^{n+1})$$

$$-K_L x_{i,j}^{n+1} = 0$$

Quindi la variazione della forza totale sul blocco è data da:

$$\delta F_{i,j} = F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^{n} = (4K + K_L)(x_{i,j}^{n} - x_{i,j}^{n+1})$$

$$\delta F_{i,j} = -F_{i,j}^{n}$$

Ridistribuzione

Se lo slittamento è avvenuto solo al blocco (i, j), allora la variazione della forza totale che agisce su un blocco adiacente, ad esempio il blocco $(i+1, j)$, è:

$$\delta F_{i+1,j} = K(x_{i,j}^{n+1} - x_{i,j}^{n})$$

Per il terzo principio della dinamica deve valere:

$$\delta F_{i,j} = \delta F_{i+1,j}$$

e sostituendo otteniamo

$$\delta F_{i+1,j} = \alpha F_{i,j}^{n}$$

dove $\alpha = \frac{K}{4K+K_L}$ è un valore nell'intervallo $[0, \frac{1}{4}]$.

Definizione del modello OFC

Basandoci sul modello di scorrimento di Burridge-Knopoff, il modello di Olami-Feder-Christensen è una semplice variazione del modello delle pile di sabbia che utilizza un reticolo 2-D composto da N x N celle, con 4 vicini: nord, sud, est e ovest.

Con questo reticolo vogliamo discretizzare la variabile a valori reali $F_{i,j}^{n}$, dove (i, j) identifica il blocco sul reticolo e n denota l'iterazione temporale.

Condizione iniziale

$F_{i,j}^{0} = r \; \forall i, j$ e $r \in [0, F_c]$ è estratta casualmente da una distribuzione uniforme nell'intervallo dato.

Meccanismo di forzatura

Ad ogni iterazione temporale n, un piccolo incremento costante, scelto in input, δF viene aggiunto alla variabile F ad ogni blocco del reticolo.

$$F_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^{n} + \delta F \; \forall i, j$$

Valore soglia

Ad ogni iterazione la variabile F aumenta.
Se la forza totale su un blocco (i, j) supera la soglia critica preimpostata F_c

$$F_{i,j}^{n} > F_c$$

allora il blocco è considerato instabile.

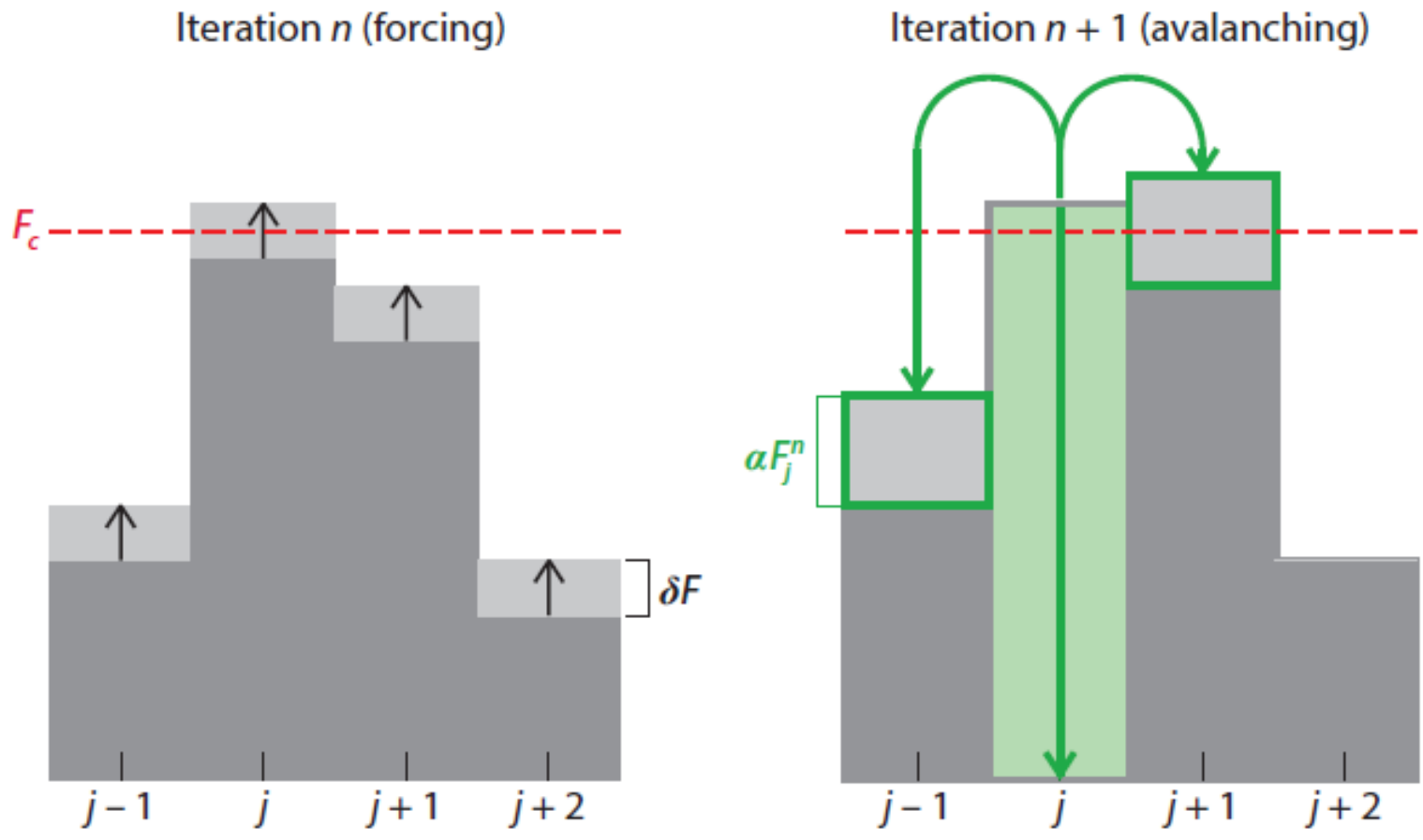
Regola di ridistribuzione

Il blocco a questo punto viene portato a uno stato di forza zero e ridistribuisce la forza ai 4 vicini:

$$F_{i,j}^{n+1} = 0$$

$$F_{nn}^{n+1} = F_{nn}^{n} + \alpha F_{i,j}^{n}$$

dove $nn \equiv [(i+1,j),(i-1,j),(i,j+1),(i,j-1)]$ e $\alpha \in [0, 0.25]$.
Se $\alpha < 0.25$ il modello OFC non è conservativo poichè la forza totale è minore dopo un evento di redistribuzione.


Iteration n (forcing)
Iteration n + 1 (avalanching)
F_c
δF
αF_j^n
j − 1
j
j + 1
j + 2
j − 1
j
j + 1
j + 2

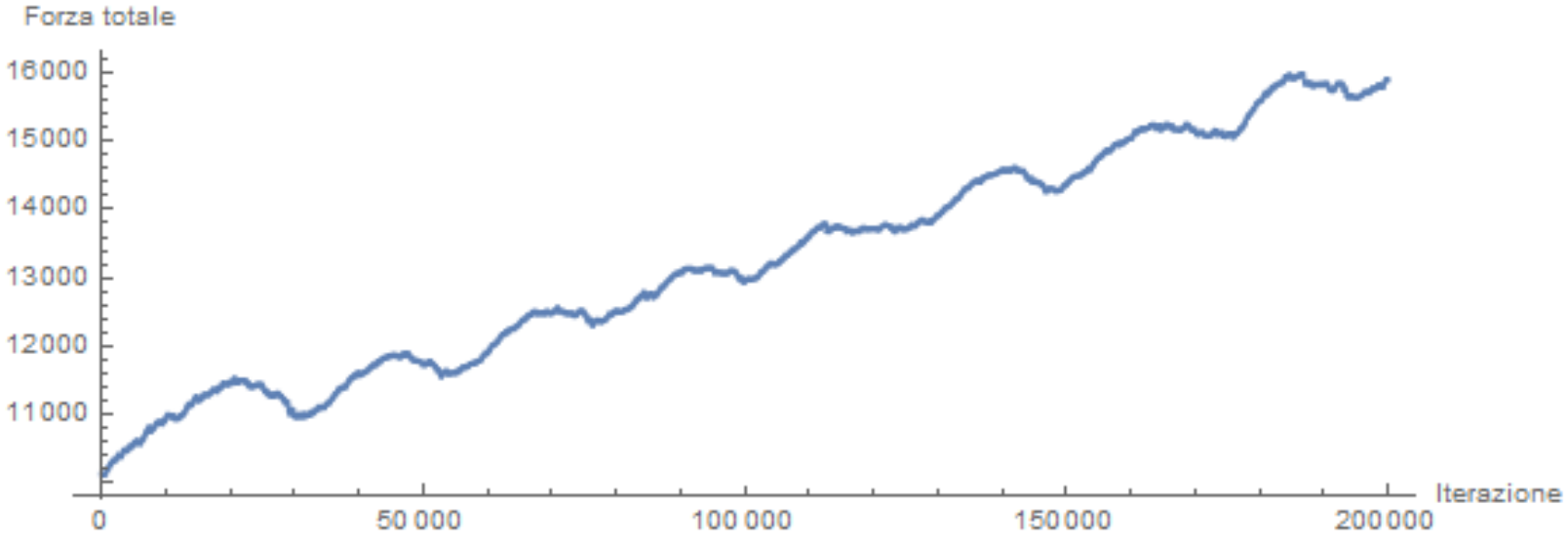
Implementazione e simulazione rappresentativa

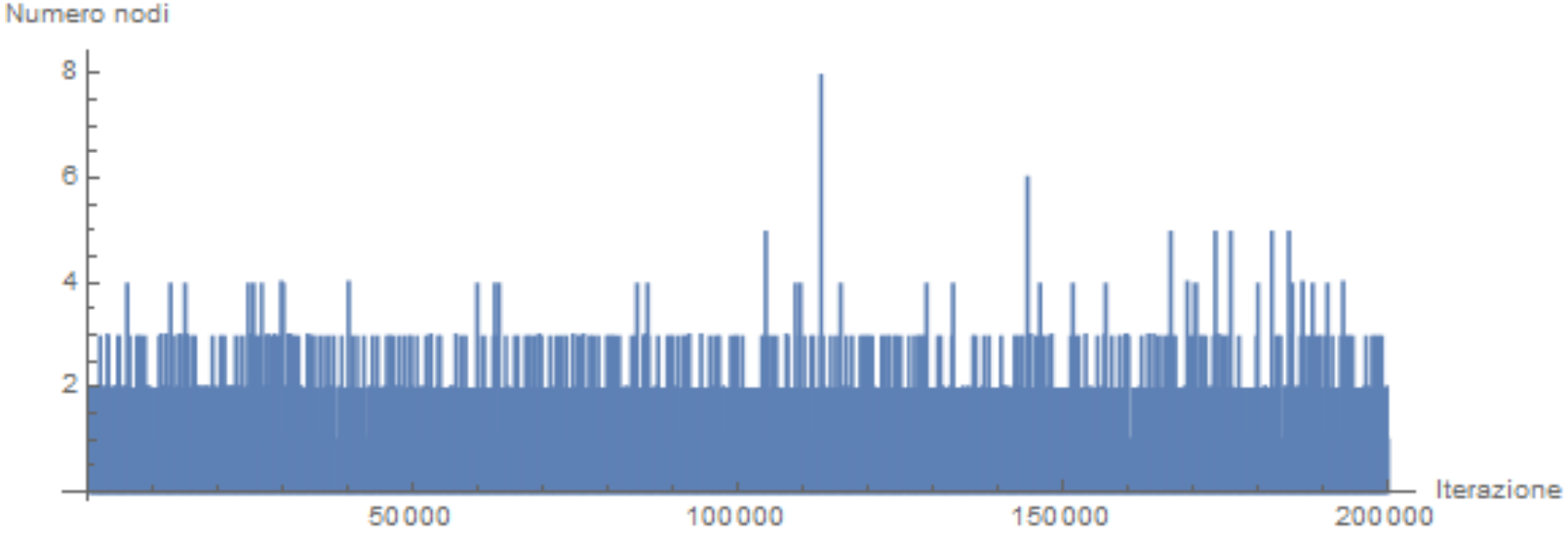
Dati iniziali

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N=64
f_thresh=5.
delta_f=1.e-4
alpha=0.15
n_iter=200000


dx=np.array([-1,0,1,0])
dy=np.array([0,-1,0,1])
force=np.zeros([N+2,N+2])
toppling=np.zeros(n_iter,dtype="int")
totalf=np.zeros(n_iter,dtype="int")
forcediss=np.zeros(n_iter)

for i in range(1,N+1):
    for j in range(1,N+1):
        force[i,j]=f_thresh*(np.random.uniform())
```

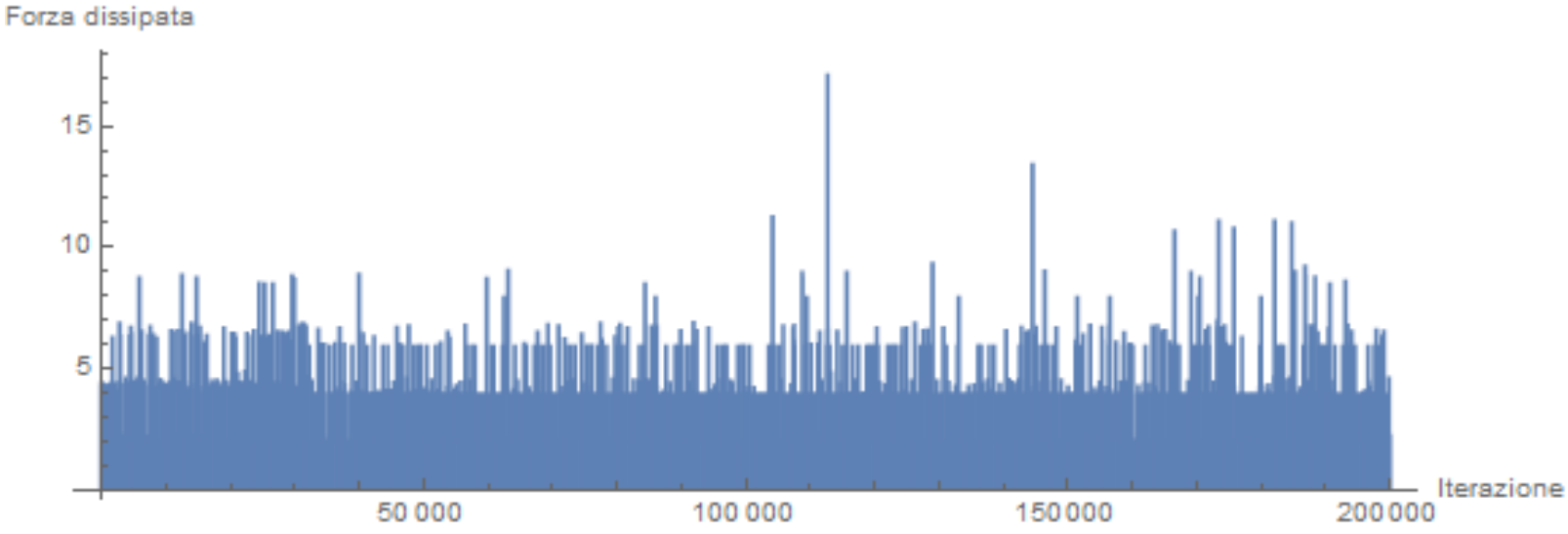
Implementazione del modello

```
for iterate in range(0,n_iter):
    move=np.zeros([N+2,N+2])

    for i in range(1,N+1):
        for j in range(1,N+1):
            if force[i,j]>=f_thresh:
                move[i,j]-=force[i,j]
                move[i+dx[:],j+dy[:]]+=alpha*force[i,j]
                toppling[iterate]+=1
                forcediss[iterate]+=(1-4*alpha)*force[i,j]

    if toppling[iterate]>0:
        force+=move
    else:
        force[:,:]+=delta_f

    totalf[iterate]=force.sum()
```

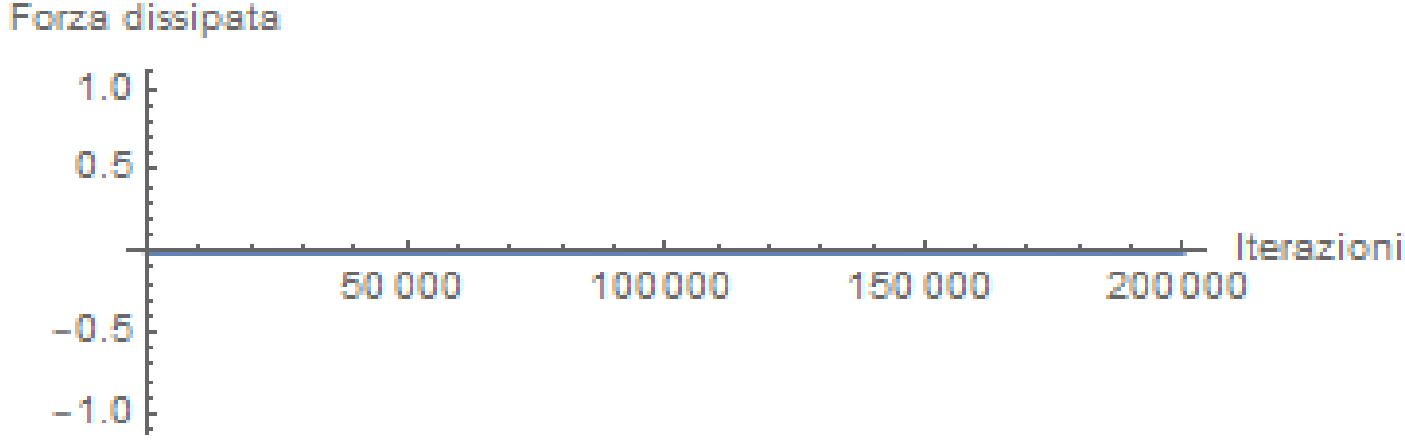

Forza totale
16000
15000
14000
13000
12000
11000
0
50 000
100 000
150 000
200 000
Iterazione


Numero nodi
8
6
4
2
50 000
100 000
150 000
200 000
Iterazione

Se α < 0.25



Se α = 0.25



Comportamento del modello

Dati iniziali

Tengo da parte i valori della forza di 3 blocchi scelti casualmente:

```
forcenode1=np.zeros(n_iter)
forcenode2=np.zeros(n_iter)
forcenode3=np.zeros(n_iter)

iterate=0
forcenode1[iterate]=force[32,32]
forcenode2[iterate]=force[7,14]
forcenode3[iterate]=force[51,43]
```

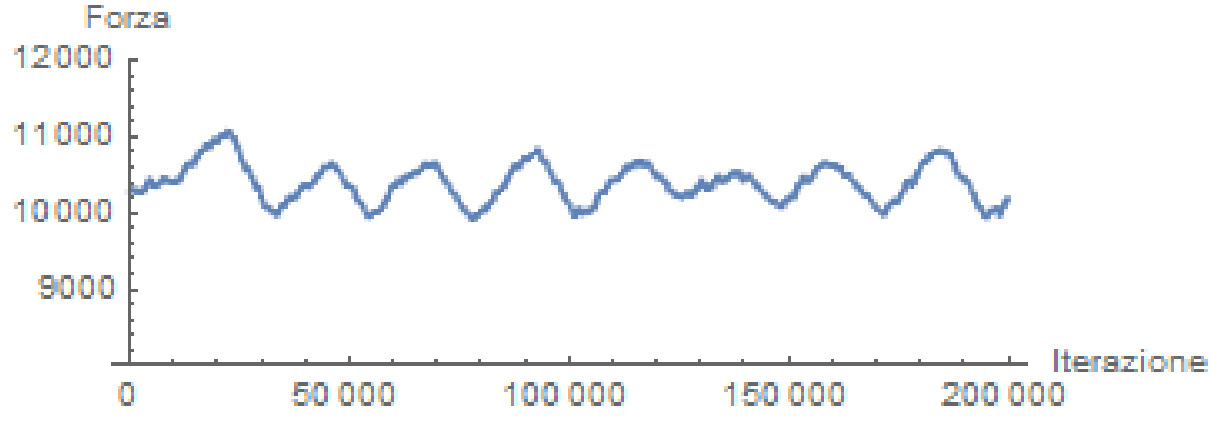
Codice velocizzato

```
while(iterate < n_iter):

    move=np.zeros([N+2,N+2])
    for i in range(1,N+1):
        for j in range(1,N+1):
            if force[i,j]>=f_thresh:
                #alpha=np.random.uniform(0.10,0.20)
                move[i,j]-=force[i,j]
                move[i+dx[:],j+dy[:]]+=alpha*force[i,j]
                toppling[iterate]+=1
                forcediss[iterate]+=(1-4*alpha)*force[i,j]
```

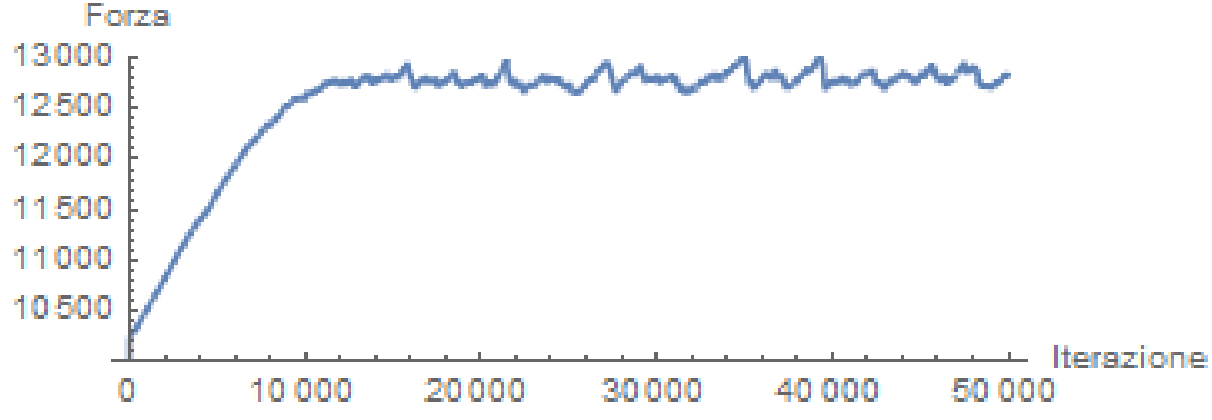
```
    if toppling[iterate]>0:
        force+=move
        iterate=iterate+1
        totalf[iterate]=force[1:-1,1:-1].sum()
        forcenode1[iterate]=force[32,32]
        forcenode2[iterate]=force[7,14]
        forcenode3[iterate]=force[51,43]
    else:
        passi=int((f_thresh-np.amax(force[1:-1,1:-1]))
                                                /delta_f)+1
        for k in range(0,passi):
            force[:,:]+=delta_f

            if iterate+k>=n_iter:
                break
            else:
                forcenode1[iterate+k+1]=force[32,32]
                forcenode2[iterate+k+1]=force[7,14]
                forcenode3[iterate+k+1]=force[51,43]
                totalf[iterate+k+1]=force[1:-1,1:-1].sum()

        iterate=iterate+passi
```

Serie temporale della forza totale nel caso non conservativo e conservativo

Se $\alpha = 0.15$



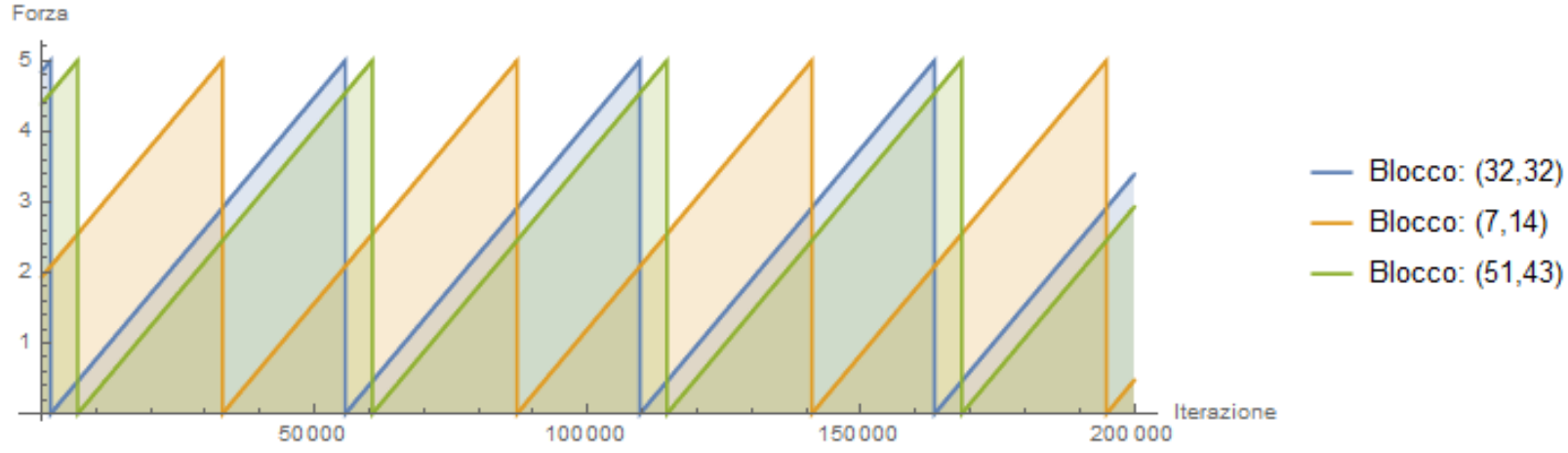
Se $\alpha = 0.25$



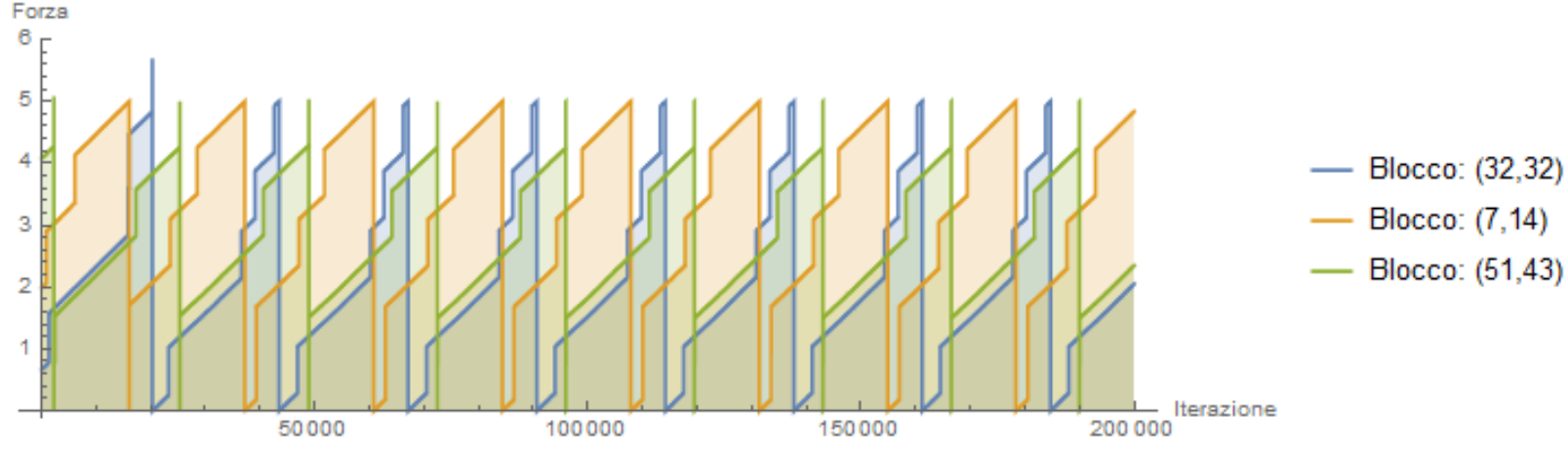
Studio del modello al variare di α

Se α rimane costante, cioè uguale ad ogni scossa, si può notare la periodicità in alcuni intervalli:

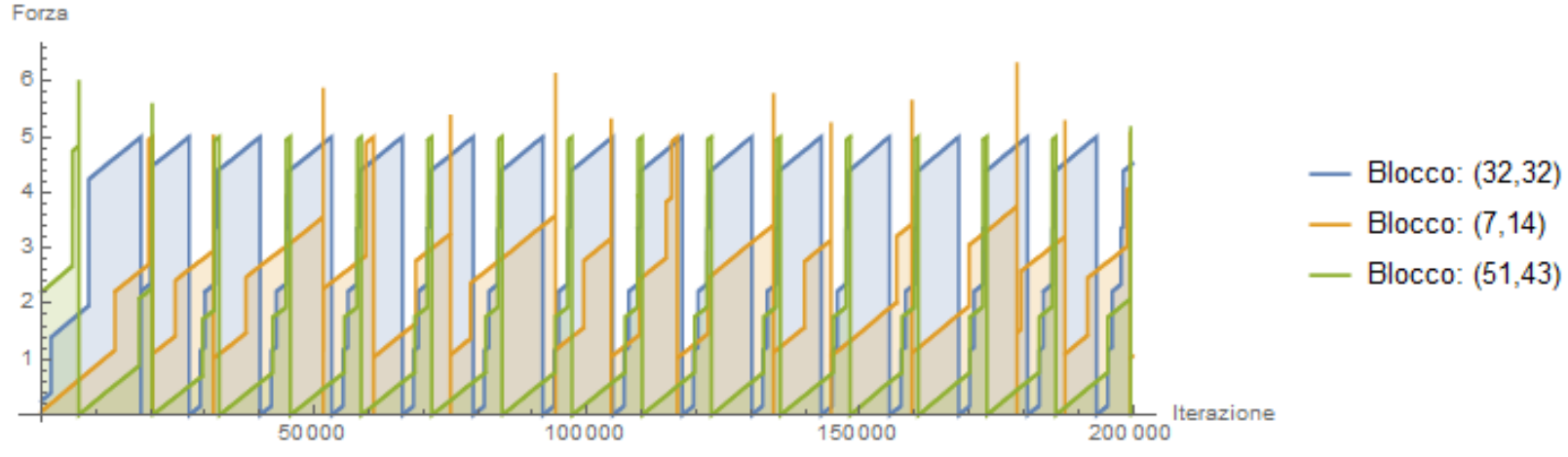
Per $\alpha = 0.$ (completamente periodico)



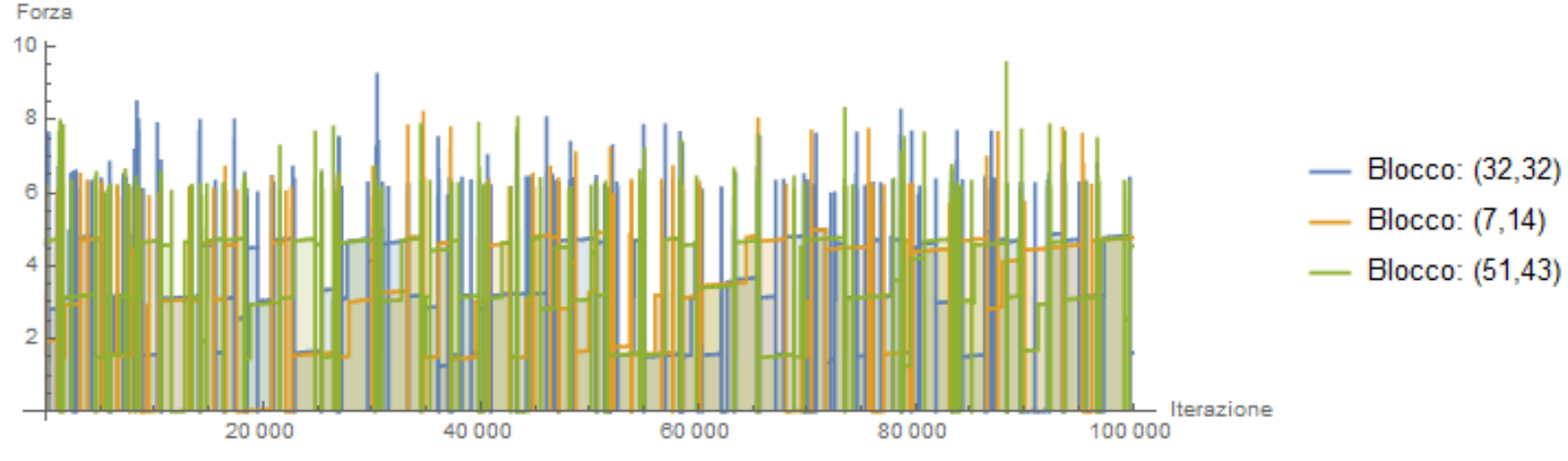
Per $\alpha = 0.15$



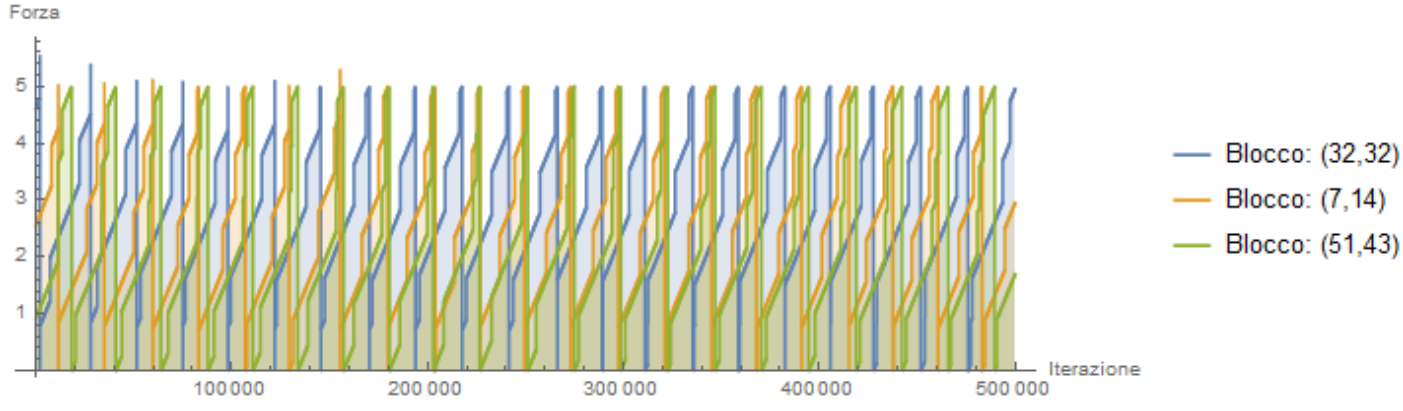
Per $\alpha = 0.2$



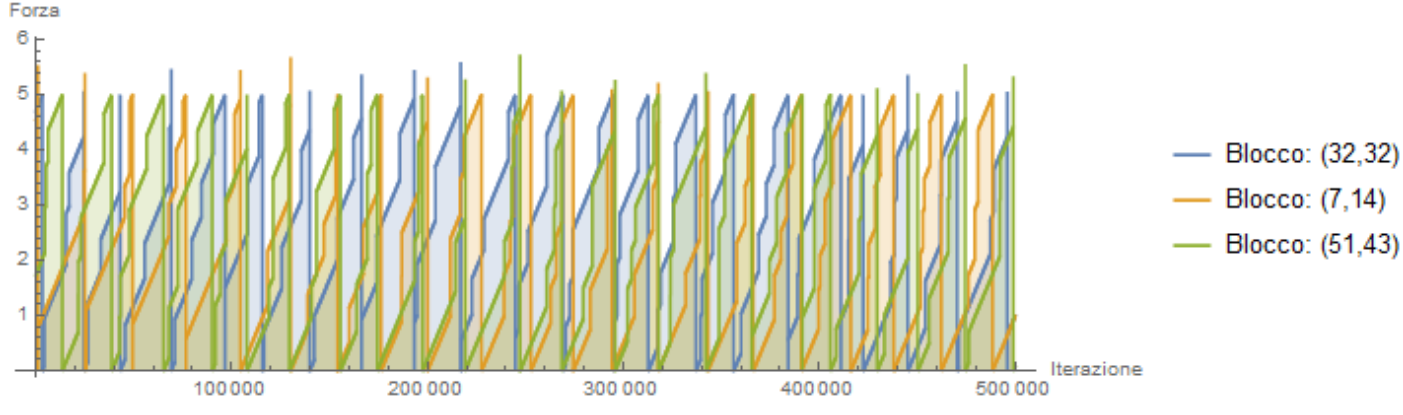
Per $\alpha = 0.25$ (non periodico)



Se α è una variabile casuale estratta da una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0.14, 0.16]$ si mantiene ancora la quasi-periodicità:



Se α è estratta dall'intervallo $[0.10, 0.20]$ allora vediamo che la quasi-periodicità si perde:



Perchè si produce un comportamento periodico per alcuni intervalli, pur partendo da una configurazione iniziale del tutto casuale?

Tutto questo è dovuto a un fenomeno di sincronizzazione causato dalla regola di ridistribuzione.

Supponiamo che $F_c = 1$ per semplificare i calcoli.
Se consideriamo due nodi vicini e supponiamo che abbiano valore della forza:

$$F^n_{(1)} = \bar{F} + \Delta$$

$$F^n_{(2)} = \bar{F} - \Delta$$

Allora la differenza

$$|F^n_{(1)} - F^n_{(2)}| = 2\Delta$$

Ora supponiamo che i due blocchi tremano simultaneamente quindi otteniamo, dalle regole del modello:

$$F_{(1)} = F_{(2)} = 0$$

e per la ridistribuzione:

$$F_{(1)}^{n+1} = \alpha(\bar{F} - \Delta)$$

$$F_{(2)}^{n+1} = \alpha(\bar{F} + \Delta)$$

Ora la differenza è diminuita di un fattore α

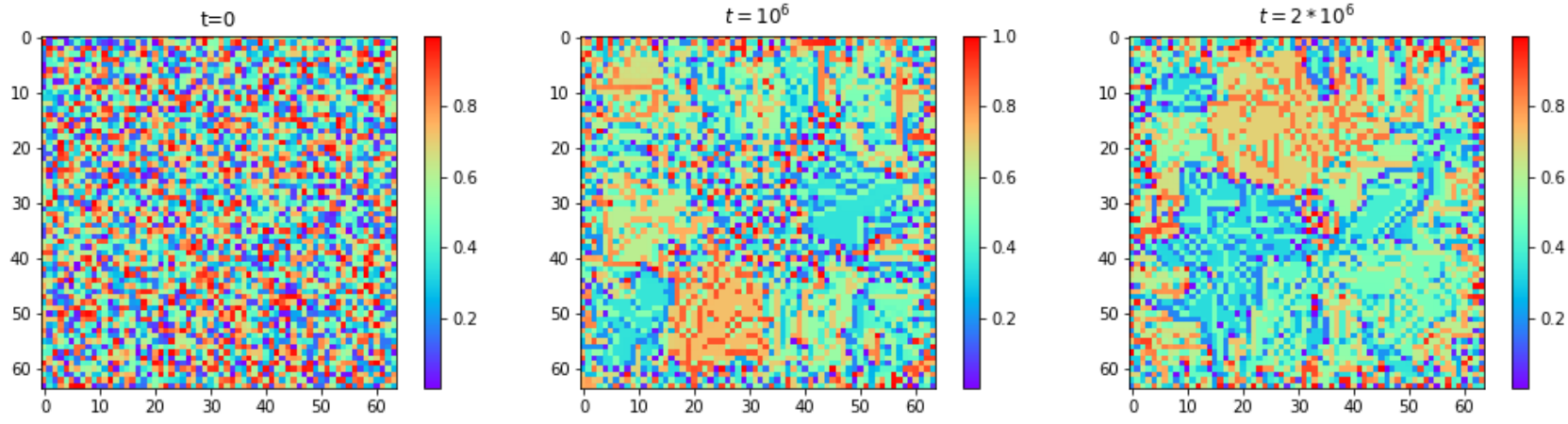
$$|F_{(1)}^{n+1} - F_{(2)}^{n+1}| = 2\alpha\Delta$$

Continuando, una volta sincronizzati, cioè $F_{(1)}^{n} = F_{(2)}^{n}$ con $\Delta = 0$, le regole del modello li manterrà tali.

Solo un nodo esterno può distruggere la sincronia.

Costruzione di domini, nei quali molti nodi hanno lo stesso valore o condividono uno stesso piccolo insieme di valori.

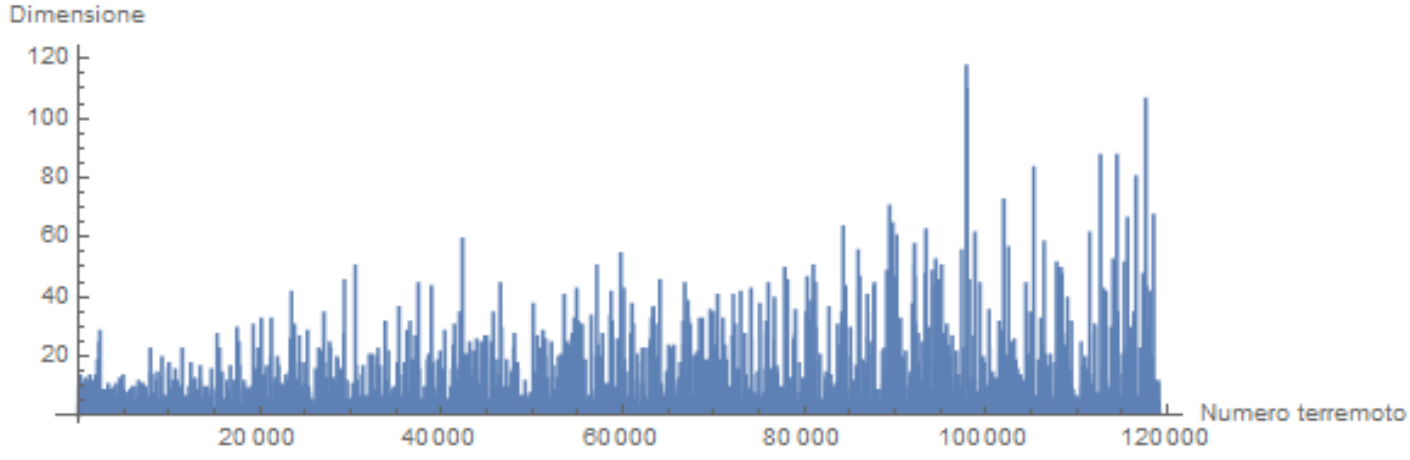
Per $\alpha = 0.15$



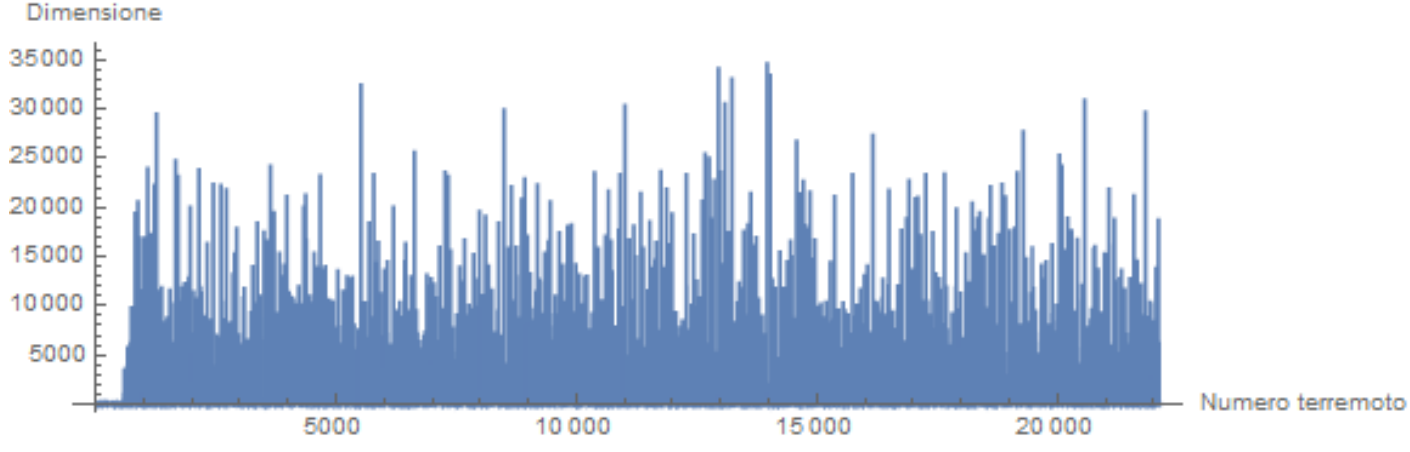
Caratteristiche delle scosse

```
def dettagli_terremoto(n_iter,toppling):

    n_max_av=100000
    t_av=np.zeros(n_max_av)
    istart,n_av,nodi=0,-1,0
    noditot=np.zeros(n_max_av)

    for iterate in range(1,n_iter):
        if toppling[iterate]>0 and toppling[iterate-1]==0:
            nodi=0
            istart=iterate
            if n_av==n_max_av-1:
                print("troppi terremoti")
                break
            n_av+=1
        nodi+=toppling[iterate]
        if toppling[iterate]<=0 and toppling[iterate-1]>0:
            t_av[n_av]=iterate-istart
            noditot[n_av]=nodi

    return n_av,t_av,noditot
```

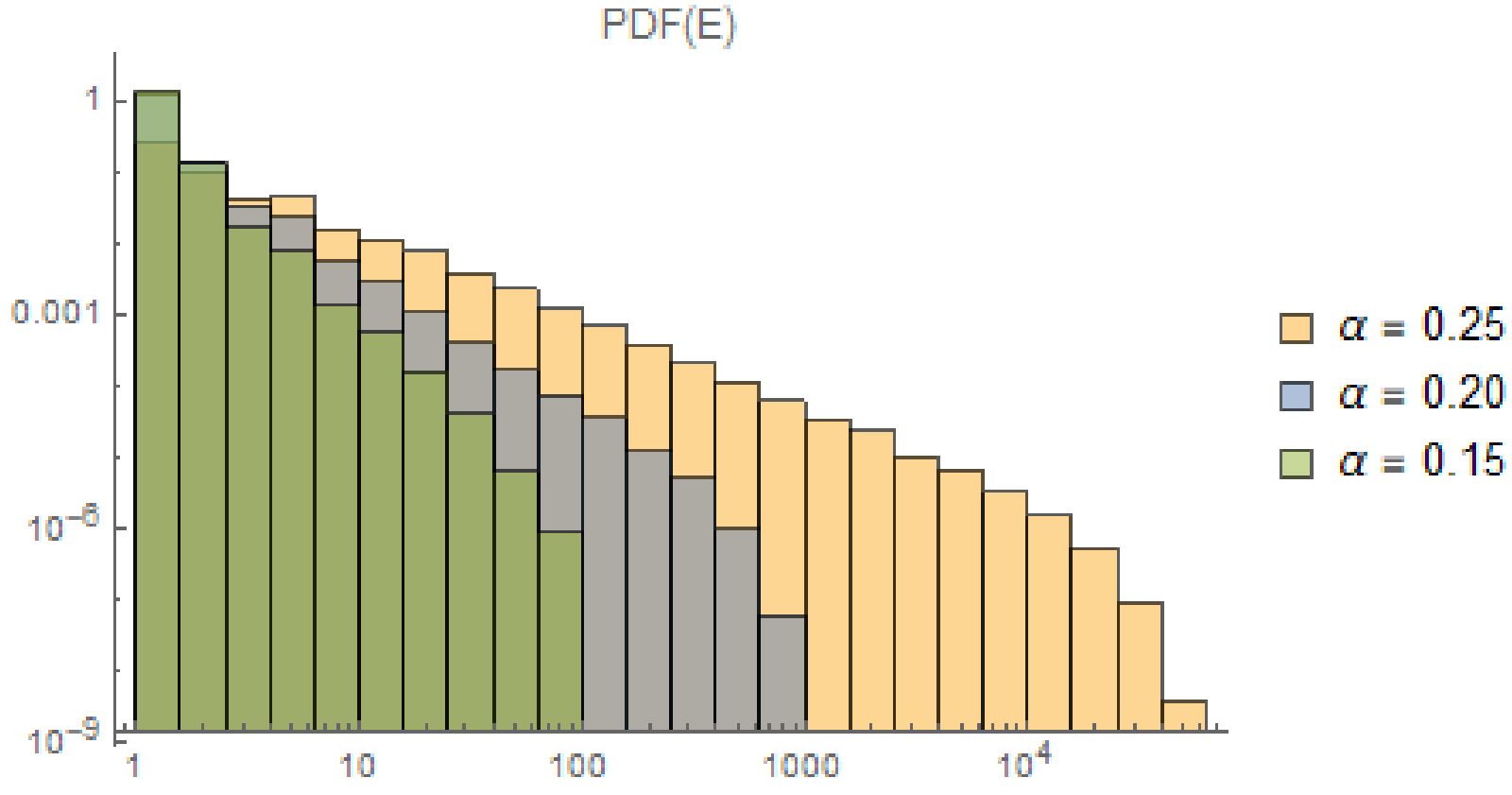
Per $\alpha = 0.15$



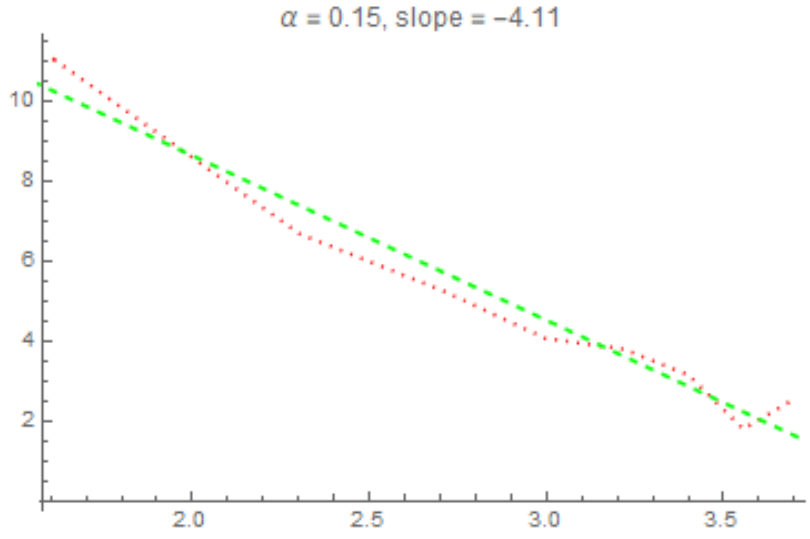
Per $\alpha = 0.25$

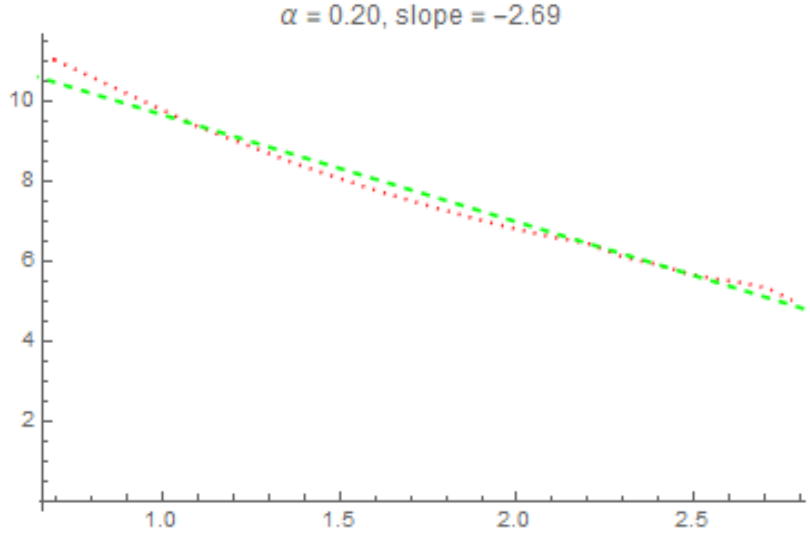


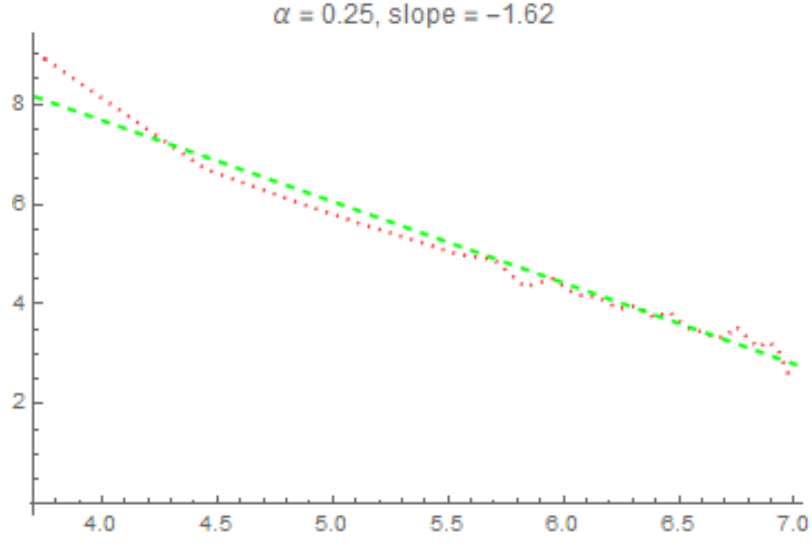
I **PDF** per E, la misura della dimensione di una scossa, cioè il numero totale di blocchi coinvolti, assume la forma di legge di potenza $f(x) = a * x^b$, con pendenza logaritmica dipendente dal valore di α.



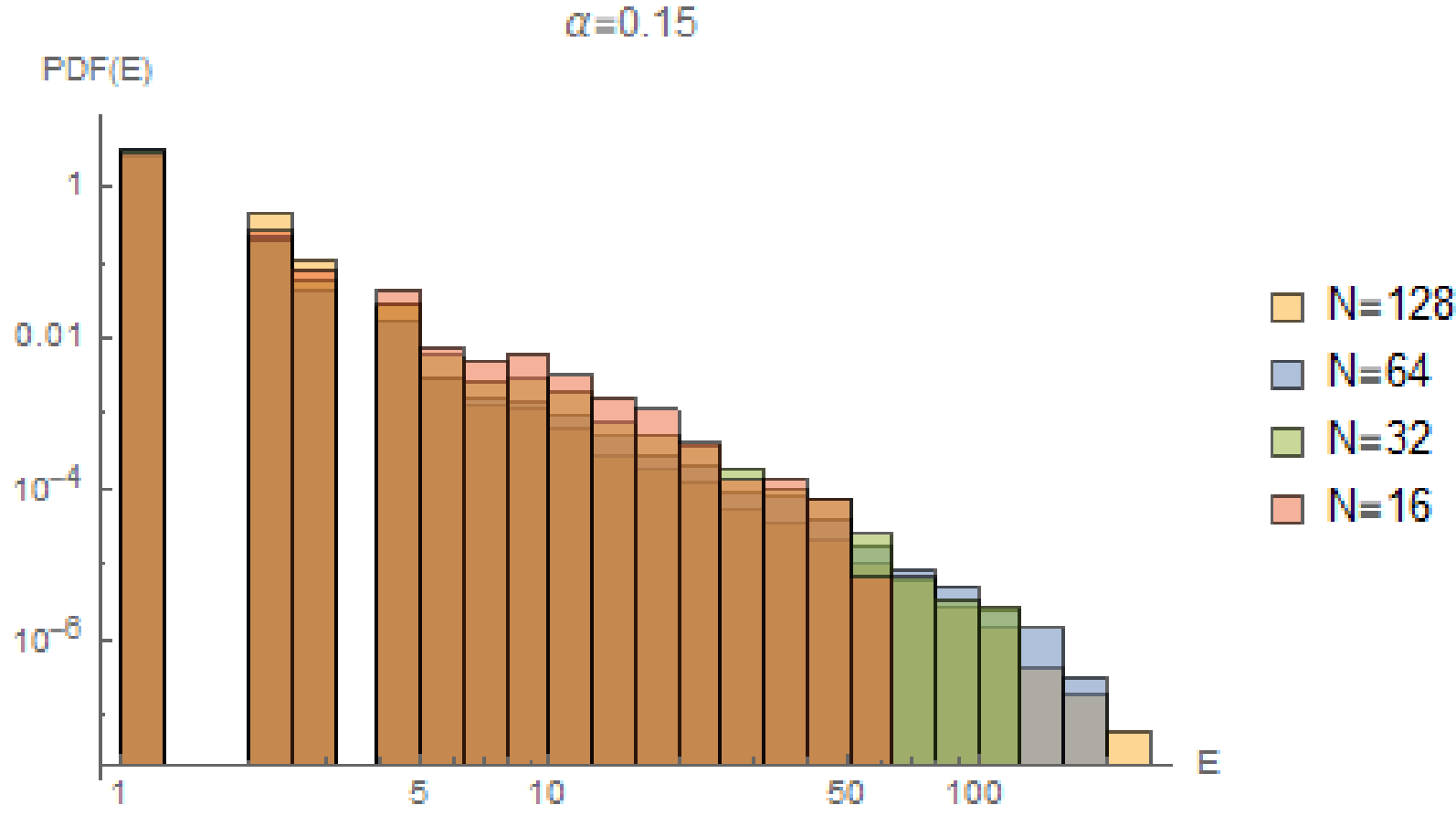
Fit della pendenza logaritmica







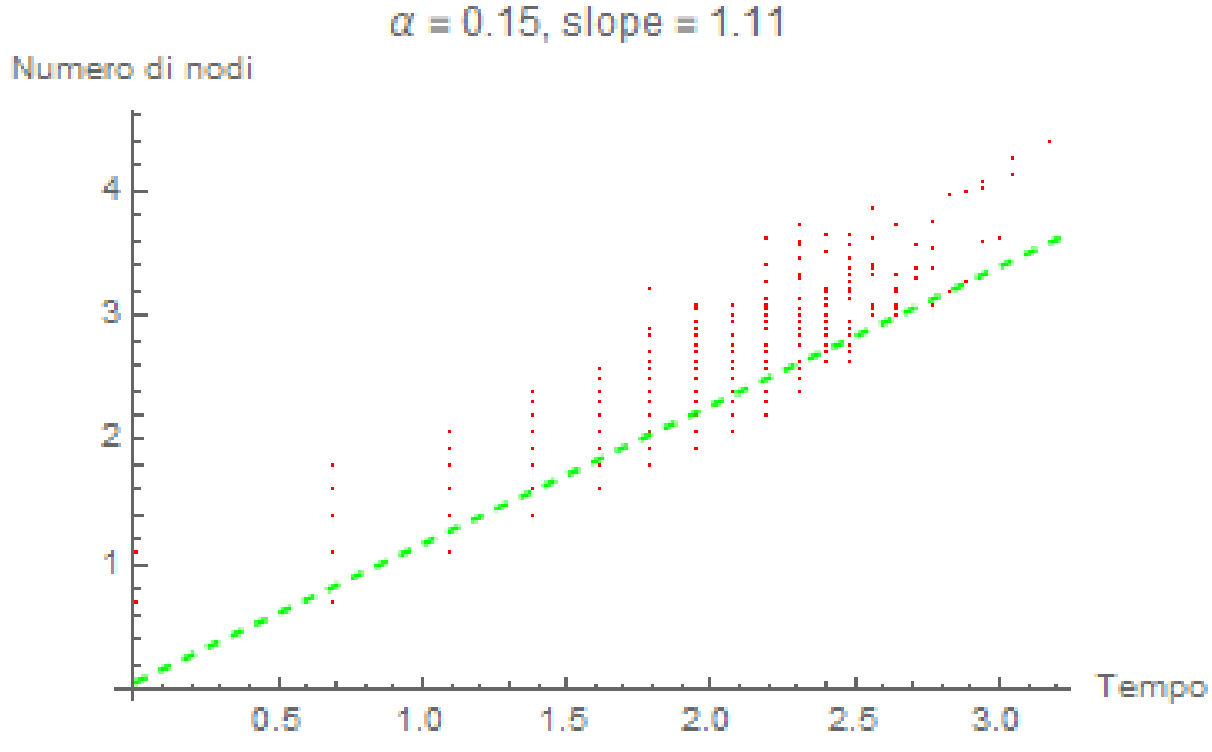
Se invece manteniamo α costante a 0.15 e calcoliamo la *PDF* al variare della dimensione del reticolo, notiamo che anche in questo caso abbiamo un invarianza di scala, proprio come nel modello delle pile di sabbia.



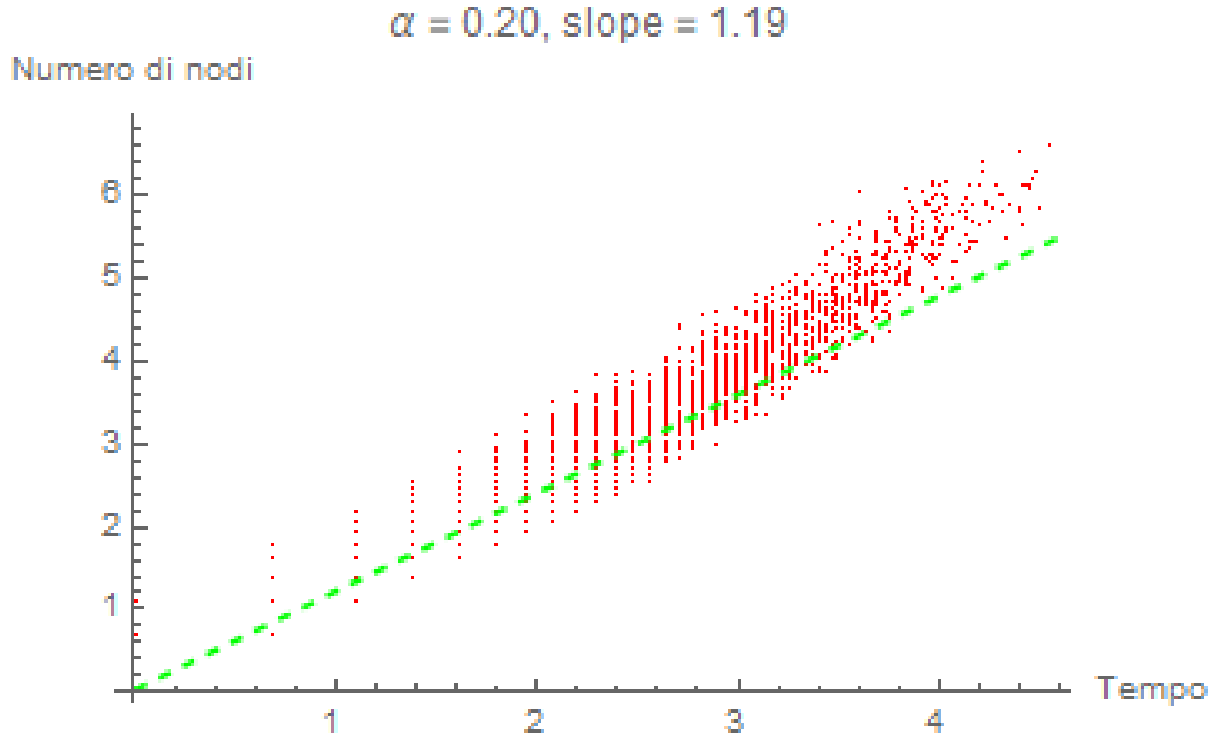
Correlazione tra dimensione e durata delle scosse

Grafici di tipo Log-Log: $E \propto T^{slope}$

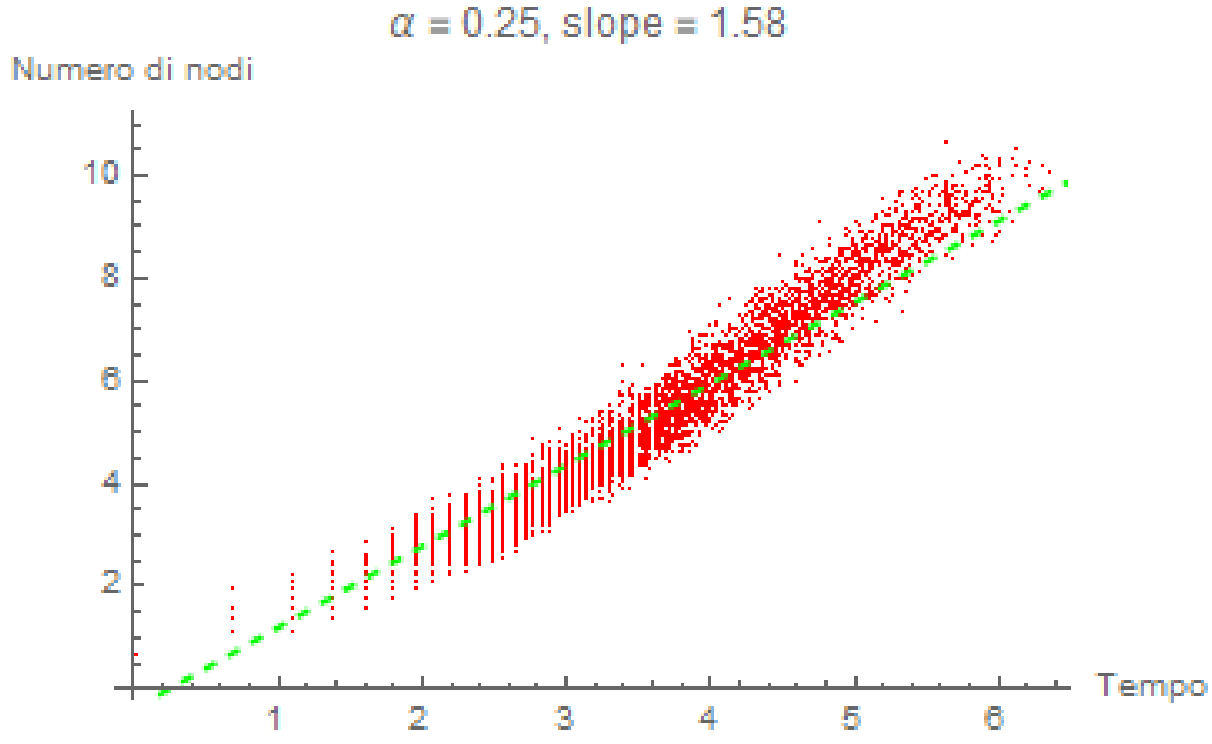
Per $\alpha = 0.15$, indice di correlazione = 0.904601



Per $\alpha = 0.20$, indice di correlazione = 0.889106



Per $\alpha = 0.25$, indice di correlazione = 0.863459



In questo caso per raggiungere lo stato statisticamente stazionario, la media di influsso (= $\delta F * N^2$) è uguale alla media di deflusso (= $(1 - 4\alpha)F_{i,j} * n$ con n numero di nodi instabili).

$$\Downarrow$$

- Bassi livelli di dissipazione, richiedono terremoti più estesi.
- Alti livelli di dissipazione richiedono terremoti meno estesi.