Pseudoscalar Quadrature Representation

for Real-Valued Signals

Elias, M.

2025-10-29

10 Wege zu i

Die Größe i erscheint in vielen Bereichen der Mathematik und Signalverarbeitung als „Rotationseinheit“. Obwohl häufig nur als Zahl mit $i^2 = -1$ eingeführt, hat i zahlreiche Realisierungen mit jeweils klarer Bedeutung:

1. **Algebraische Erweiterung**
   $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+1),\ i := [x],\ i^2 = -1.$
   Praxis: komplexe Zahlen = reelle Polynome modulo $x^2 + 1$.

2. **90°-Rotation als Matrix**
   $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J^2 = -I.$
   Praxis: „mal i“ = Rotation um 90°.

3. **Matrix-Exponential**
   $\left(I + \frac{\pi}{2n}J\right)^n \to e^{(\pi/2)J} = J.$
   Praxis: viele kleine Rotationen ergeben eine 90°-Drehung.

4. **Eigenwerte der 90°-Drehung**
   $\det(\lambda I - R(\pi/2)) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i.$
   Praxis: komplexe Eigenwerte = Rotationsachse.

5. **Euler auf dem Einheitskreis**
   $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,\ \theta = \pi/2 \implies i.$
   Praxis: Rotation via Multiplikation.

6. **Oszillator-Differentialgleichung**
   $u'' + u = 0 \Rightarrow z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i.$
   Praxis: reine Zeitrotation = Sinus/Oszillator.

7. **Reelle Potenzreihen**
   $e^{ix} = \sum_{k\geq 0} \frac{(ix)^k}{k!} = \cos x + i\sin x.$
   Praxis: i entsteht durch alternierende Vorzeichen.

8. **Geometrische Algebra (Pseudoskalar)**
   $I = e_1e_2,\ I^2 = -1 \Rightarrow i \leftrightarrow I.$
   Praxis: „Imaginär“ = orientiertes Flächenelement.

9. **Hilbert-Transformation**
   $\widehat{Hf}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\,\hat{f}(\xi),\ H^2 = -I.$
   Praxis: 90°-Phasenverschiebung in DSP.

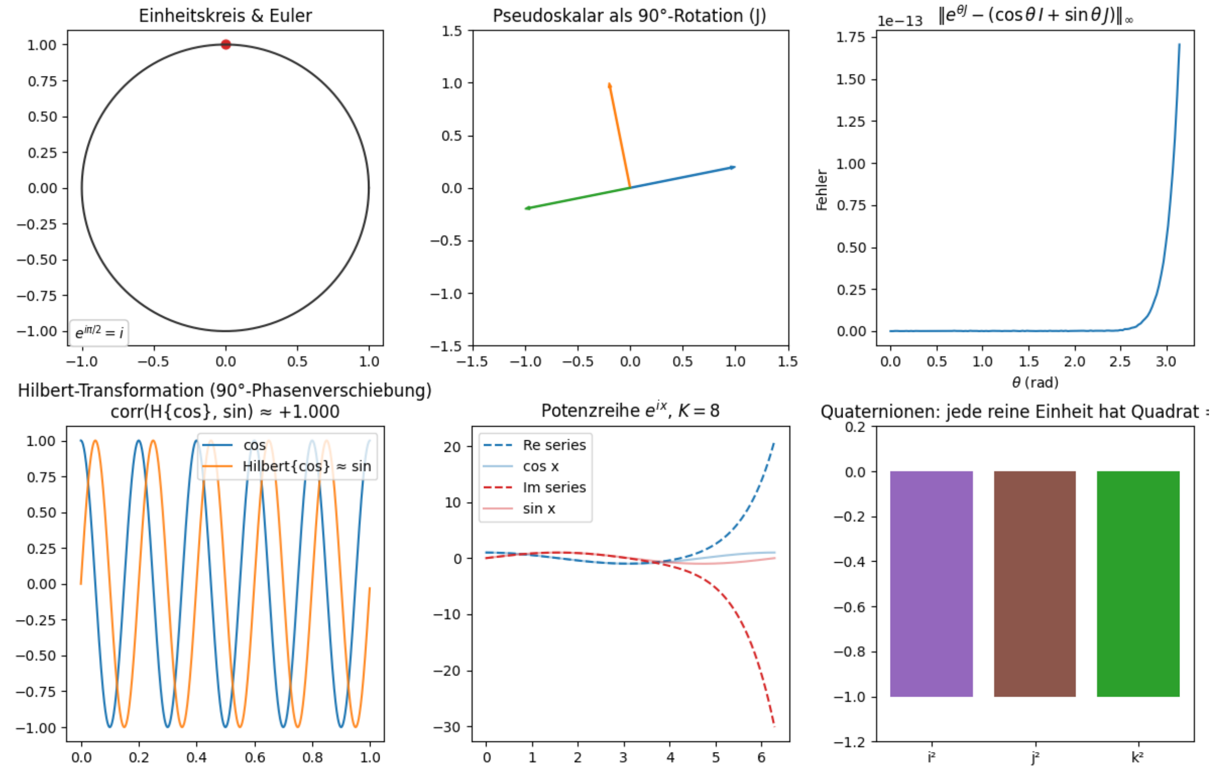

Abbildung 1: *Zehn Wege zu i: (a) Einheitskreis und Euler $e^{i\theta}$; (b) Pseudoskalar/Rotator J mit $J^2 = -I$; (c) Identität $e^{\theta J} = \cos\theta\, I + \sin\theta\, J$; (d) Hilbert-Transformation (90° Phasenverschiebung); (e) Trunkierte Potenzreihe von e^{ix} vs. $\cos x, \sin x$; (f) Quaternionen: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.*

10. **Quaternionen**
    In $\mathbb{H}$: jede Einheit u mit $u^2 = -1$ ist eine mögliche „i"-Achse.
    Praxis: komplexe Ebene = spezielle 2D-Scheibe der Quaternionen.

Hinweis zum „Drehmoment":
Bei $\theta = \pi/4$ gilt $\sin\theta = \cos\theta$: gleicher Real/Imag-Anteil.
Für $\theta \to \pi/2$ führt $e^{i\theta} \to i$: *sanfte* 90°-Rotation (Singularitäten nur in tan, nicht in $e^{i\theta}$).

Zusammenfassung

Anstatt den imaginären Anteil eines „komplexen" Signals mit der reinen Zahl i (und damit implizit $i^2 = -1$) zu modellieren, schlagen wir vor, den Pseudoskalar $\boldsymbol{I}$ der ebenen Geometrie zu verwenden. In der 2D-Geometric-Algebra gilt $\boldsymbol{I}^2 = -1$ aus orientierter Flächengeometrie (nicht aus mystischer Zahlenarithmetik). Damit wird der „Imaginärteil" zu einer gerichteten Flächen- bzw. Orientierungsgröße. Wir konstruieren ein fensterweises Maß

$$\boxed{\mathcal{H} \;=\; H^\star \;+\; \boldsymbol{I}\,\kappa\,P^\dagger}$$

aus einer *normierten Entropie* $H^\star = H_{\mathrm{real}}/\log K \in [0,1]$ und einem *pseudoskalaren Phasenterm* $P^\dagger \in [-1,1]$, der Oddness, Chiralität und statistische Evidenz vereint. Entscheidungen erfolgen auf der Polarabbildung $(H^\star, \kappa P^\dagger) \mapsto (r, \theta)$ statt einer unskalierten linearen Summe.

1 Geometrischer Hintergrund

In der euklidischen Ebene seien Basisvektoren e_1, e_2 mit $e_1^2 = e_2^2 = 1$ und $e_1 e_2 = -e_2 e_1$. Der Pseudoskalar $\boldsymbol{I} := e_1 e_2$ repräsentiert eine orientierte Fläche, und damit folgt geometrisch

$$\boldsymbol{I}^2 = (e_1 e_2)^2 = -e_1^2 e_2^2 = -1.$$

Das „-1" entsteht hier aus Orientierung, nicht aus reiner Zahlendefinition [1–3].

2 Fensterbasierte Zerlegung und Normierung

Für ein reelles Fenster $x = \{x_k\}_{k=0}^{W-1}$ definieren wir:

$$\begin{aligned} x_k^{\text{rev}} &= x_{W-1-k}, \\ x_k^{\text{even}} &= \frac{1}{2}(x_k + x_k^{\text{rev}}), \\ x_k^{\text{odd}} &= \frac{1}{2}(x_k - x_k^{\text{rev}}). \end{aligned}$$

Mit Gewichten w_k:

$$E_{\text{tot}} = \sum_k w_k x_k^2, \qquad E_{\text{odd}} = \sum_k w_k (x_k^{\text{odd}})^2,$$

und damit die *Oddness-Rate*

$$O = \frac{E_{\text{odd}}}{E_{\text{tot}} + \varepsilon} \in [0,1].$$

Zur Entropie verwenden wir die *normierte Shannon-Entropie*

$$H^\star = \frac{-\sum_i p_i \log p_i}{\log K} \in [0,1],$$

wobei K die Anzahl der Bins bzw. Zustände ist. Alternativ sind robuste Schätzer (kNN- oder Spektralentropie) zu bevorzugen.

3 Chiralität und Evidenzgewichtung

Die gerichtete Phase berechnen wir aus der Hilbert-Quadraturkomponente y:

$$C = \frac{\sum_k w_k (x_k \Delta y_k - y_k \Delta x_k)}{\sum_k w_k (x_k^2 + y_k^2) + \varepsilon} \in [-1,1].$$

Um Randartefakte und Nichtstationarität zu vermeiden:

- Detrending und z-Normierung pro Fenster (Median/MAD),
- Taper (Hann oder DPSS) mit Overlap $\geq 50\%$,
- Spiegel-Padding $\geq 2W$,
- FIR-Hilbert-Filter (mind. 129 Taps) statt FFT-Hilbert.

Zur Signifikanzabschätzung der Orientierung:

$$\hat{\theta}_k = \arg(x_k + i y_k), \quad R = \left| \frac{1}{W} \sum_k e^{i(\hat{\theta}_k - \bar{\theta})} \right|,$$

mit Rayleigh- oder V-Test p_C. Wir definieren ein Evidenz-Gate

$$s_C = \sigma(-\beta \Phi^{-1}(1 - p_C)), \qquad P^\dagger = s_C \cdot (O \cdot C),$$

womit der pseudoskalare Term nur bei signifikanter Chiralität wirksam wird.

4 „Komplexe" Größe ohne Zahlen-i

Das vollständige Maß lautet:

$$\boxed{\mathcal{H} = H^\star + \boldsymbol{I}\,\kappa\,P^\dagger}$$

mit κ als Skalenfaktor für den pseudoskalaren Kanal. Die Polarform (r, θ) mit

$$r = \sqrt{(H^\star)^2 + (\kappa P^\dagger)^2}, \quad \theta = \operatorname{atan2}(\kappa P^\dagger, H^\star)$$

stellt die gemeinsame Entropie–Chiralitäts-Struktur im normierten Raum dar.

Transformationseigenschaften:

- Parität: $H^\star$ bleibt invariant, $P^\dagger \to -P^\dagger$.
- Skalierungsinvarianz durch Normierung in O, C und $H^\star$.

5 Anwendungsfelder

- **Audio:** $H^\star$ = Lautstärkeentropie, $P^\dagger$ = Groove-Richtung.
- **EEG:** $H^\star$ = Aktivierungsentropie, $P^\dagger$ = lateralisierte Oszillation.
- **Finanzen:** $H^\star$ = Risikomaß, $P^\dagger$ = Trend-Chiralität.
  Sampling auf Event-Time, Pre-Averaging zur Microstructure-Dämpfung, Lead/Lag-Analyse gegen Realized Volatilität (RV).
- **Prozesse:** $H^\star$ = Unordnung, $P^\dagger$ = gerichtete Kausalität.

6 Interpretation in geometrischer Algebra

Die Darstellung $\mathcal{H} = H^\star + \boldsymbol{I}\,\kappa\,P^\dagger$ ist formal äquivalent zur komplexen Notation, doch $\boldsymbol{I}$ besitzt eine geometrische Bedeutung: es ist das orientierte Flächenelement (Parity-odd), während $H^\star$ eine Parity-even-Skalareigenschaft ist. Das „Imaginäre" wird damit ein reales geometrisches Objekt.

7 Fazit

Mit der Normierung $H^\star = H_{\text{real}}/\log K$, robusten Entropie- und Chiralitätsschätzern, Evidenz-Gating und FIR-basierter Hilbert-Verarbeitung wird das Modell skalenfest, stabil und domänenübergreifend einsetzbar. Das Pseudoskalar-Konzept ersetzt nicht i, sondern gibt ihm eine geometrisch-physikalische Bedeutung.

Literatur

[1] D. Hestenes, *Space–Time Algebra*, Gordon and Breach, 1966.

[2] C. Doran und A. Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge University Press, 2003.

[3] L. Dorst, D. Fontijne und S. Mann, *Geometric Algebra for Computer Science*, Morgan Kaufmann, 2009.

[4] A. V. Oppenheim und R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3. Auflage, Pearson, 2009.

[5] C. E. Shannon, „A Mathematical Theory of Communication", *Bell System Technical Journal*, Bd. 27, 1948.

Author: Martha Elias
DOI: 10.5281/zenodo.17475177
Version: v1.0 (October 2025)

`marthaelias [at] protonmail [dot] com`