Ein komplexwertiger Strategieoperator für Robotik: Kohärenz-, Kopplungs- und Orientierungsmerkmale aus Antriebsdaten in Echtzeit

Martha Elias

2025-10-17

Abstract

Wir formulieren einen komplexwertigen Strategieoperator Ξ für mehrgliedrige Roboter, der fensterweise Evidenz aus Antriebs- und Zustandsdaten $(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_{\text{cmd}}, \tau_{\text{meas}})$ bündelt. $\Re\{\Xi\}$ erfasst *Ausführbarkeits*-Evidenz (Kohärenz, Reaktivität, Effizienz, Latenz), $\Im\{\Xi\}$ kodiert *Orientierung/Chiralität* und gerichtete Kopplung. Eine Projektion auf feste Entscheidungsachsen (`execute/guard/stop/pivot`) liefert robuste, ROS-freundliche Kommandos. Wir geben präzise Definitionen, ein evidenzsensitives Gate, kausal verträgliche Surrogate für Phasen, sowie praxisnahe Tuning-Rezepte und Safety-Checks, ohne produktive IP offenzulegen.

1 Systemmodell und Ziel

Für J-gelenkige Roboter seien $q \in \mathbb{R}^J$, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ Zustandsgrößen, $\tau_{\text{cmd}}, \tau_{\text{meas}} \in \mathbb{R}^J$ Kommandos bzw. Mess-/Schätzdrehmomente (inkl. Reibungs-/Kontaktanteilen). Ziel ist ein kompakter Träger Ξ zur robusten Entscheidung *in Echtzeit* zwischen diskreten Aktionen.

Fensterung und Notation. Wir betrachten Fenster der Länge W über Samples $t = 1, \dots, W$ mit Taper $w(t) \geq 0$. Falls nicht anders erwähnt, sei $\sum_t w(t) = 1$. Gelenkgewichte $\alpha_j \geq 0$ mit $\sum_j \alpha_j = 1$.

2 Analytische Phasen und Kohärenz

Für eine reelle Serie $x(t)$ sei das analytische Signal $z_x(t) = x(t) + i\,\mathcal{H}\{x\}(t)$, Phase $\phi_x(t) = \arg z_x(t)$.

Joint-PLV (Bewegungskohärenz).

$$\text{PLV}_v \;=\; \frac{1}{W}\sum_{t=1}^{W}\left|\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\, e^{\,i\phi_{\dot{q},j}(t)}\right| \;\in [0,1]. \tag{1}$$

Paar-PLV und gerichtete Komponente. Für Skalarserien $a(t), b(t)$ und $\Delta\phi(t) = \phi_a(t) - \phi_b(t)$ definieren wir

$$\mathrm{PLV}(a,b) = \left| \frac{\sum_t w(t)\, e^{i\Delta\phi(t)}}{\sum_t w(t)} \right| \in [0,1], \tag{2}$$

$$\mathrm{IAI}(a,b) = \Im \left\{ \frac{\sum_t w(t)\, e^{i\Delta\phi(t)}}{\sum_t w(t)} \right\} \in [-1,1], \tag{3}$$

wobei IAI eine *imaginär-antisymmetrische* (gerichtete) Kopplung liefert.

Gewichtete Korrelation. Mit gewichteten Mittelwerten $\mu_x = \sum_t w(t)x(t)$ gilt

$$\rho_w(x,y) = \frac{\sum_t w(t)\,(x(t)-\mu_x)(y(t)-\mu_y)}{\sqrt{\sum_t w(t)(x(t)-\mu_x)^2}\,\sqrt{\sum_t w(t)(y(t)-\mu_y)^2}} \in [-1,1]. \tag{4}$$

Oddness/Chiralität (zeitumkehrsensitiv). Mit $x^{\mathrm{rev}}(t) = x(W{+}1{-}t)$, $x_{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}(x + x^{\mathrm{rev}})$, $x_{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}(x - x^{\mathrm{rev}})$, gewichteten Energien $E_{\mathrm{even}}, E_{\mathrm{odd}}$ und symplektischem Fluss relativ zu y:

$$\mathrm{Odd}(x) = \frac{E_{\mathrm{odd}}}{E_{\mathrm{even}} + E_{\mathrm{odd}}} \in [0,1], \tag{5}$$

$$\mathrm{Chi}(x;y) = \frac{\sum_t w(t)\big(x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\big)}{\sum_t w(t)\big(x^2(t) + y^2(t)\big) + \varepsilon} \in [-1,1], \tag{6}$$

$$g_P(x;y) = \mathrm{Odd}(x) \cdot \mathrm{Chi}(x;y). \tag{7}$$

3 Robotikspezifische Merkmale

Aggregierte Skalarserien: $u(t) = \sum_j \alpha_j\, \tau_{\mathrm{cmd},j}(t)$, $\tau_\Sigma(t) = \sum_j \alpha_j\, \tau_{\mathrm{meas},j}(t)$, $\ddot{q}_\Sigma(t) = \sum_j \alpha_j\, \ddot{q}_j(t)$.
(i) Bewegungskohärenz: $f_{\mathrm{coh}} = \mathrm{PLV}_v$ (1).
(ii) Reaktivität (Ursache→Wirkung):

$$f_{\mathrm{react}} = \big|\rho_w\big(u, \ddot{q}_\Sigma\big)\big| \quad \text{(normiert nach (4))}. \tag{8}$$

(iii) Kopplung/Orientierung zwischen Antrieb und Drehmoment:

$$g_{\mathrm{cs}} = \mathrm{IAI}\big(u, \tau_\Sigma\big), \qquad \mathrm{PLV}_{u\tau} = \mathrm{PLV}\big(u, \tau_\Sigma\big). \tag{9}$$

(iv) Energieeffizienz (dimensionskonsistent, geboundet): Sei $\bar{P}$ eine robuste Leistungsskala (z. B. 95. Perzentil von $|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{meas}}^\top \dot{\boldsymbol{q}}|$ im Fenster). Dann

$$f_{\mathrm{eff}} = \tanh\!\left(\frac{\sum_t w(t)\, \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{meas}}^\top(t)\, \dot{\boldsymbol{q}}(t)}{\bar{P} + \varepsilon} \right) \in (-1,1). \tag{10}$$

(v) Latenz-Dämpfung:

$$f_{\mathrm{lat}} = \exp\!\left(-\frac{\tau_{\mathrm{e2e}}}{\tau_{\mathrm{budget}}} \right), \tag{11}$$

wobei τ_{e2e} die Ende-zu-Ende-Latenz (Sensor→Entscheid→Actuation; PTP/TimeSync + Pufferalter) und τ_{budget} aufgabenabhängig ist (z. B. 30–50 ms für compliant, 5–10 ms hochdynamisch).

Beschleunigungsschätzung. Statt roher Differenzen werden Beobachter verwendet (z. B. Savitzky–Golay 3.–5. Ordnung oder Alpha–Beta–Gamma/Kalman mit weißem Rauschmodell), da f_{react} sonst rauschanfällig ist.

Frequenzrichtungs-Backup (optional). Für breitbandige Anregung ist die *Phase Slope Index* (PSI) robust:

$$\mathrm{PSI}(a \to b) = \sum_{f\in\mathcal{B}} \omega_f \, \sin\big(\phi_{ab}(f{+}\Delta f) - \phi_{ab}(f)\big),$$

mit komplexer Kohärenzphase $\phi_{ab}(f)$ und Taskband $\mathcal{B}$. PSI kann g_{cs} ergänzen.

4 Strategieoperator, Gate und Projektion

Feature-Mengen $\mathcal{F}_R = \{f_{\mathrm{coh}}, f_{\mathrm{react}}, f_{\mathrm{eff}}, f_{\mathrm{lat}}, \dots\}$, $\mathcal{F}_I = \{g_{\mathrm{cs}}, g_P, \dots\}$. Mit Gewichten $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$ (lern- oder regelbasiert) definieren wir

$$\Re\{\Xi\} = \sum_i w_i f_i, \quad \Im\{\Xi\} = \sum_j v_j g_j, \quad \Xi = \Re\{\Xi\}{+}i\,\Im\{\Xi\}, \qquad \text{(beide Teile nachträglich in } [-1,1] \text{ skaliert).} \tag{12}$$

Evidenz-Gate (log-additiv, weniger brittle). Setze $f^{+}_{\mathrm{react}} = \max(0, f_{\mathrm{react}})$ und

$$G' = \lambda_1 \log(\mathrm{PLV}_v + \varepsilon) + \lambda_2 \log(\mathrm{PLV}_{u\tau} + \varepsilon) + \lambda_3 \log(f^{+}_{\mathrm{react}} + \varepsilon), \qquad \tilde{G} = \tanh(\kappa G') \in (0,1), \tag{13}$$

mit $\lambda_k > 0$, $\kappa \in [1,5]$. Eine *sanfte Rotationsanreicherung* dreht Ξ in Richtung des Kopplungsvorzeichens,

$$\tilde{\Xi} = \Xi\,\exp\Big(i\,\beta\,\tilde{G}\,\mathrm{sign}(g_{\mathrm{cs}})\Big), \qquad \beta \in \big[0, \tfrac{\pi}{12}\big]. \tag{14}$$

Projektion auf Entscheidungsachsen. Mit $\theta_k \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ und Mapping $0{=}$`execute`, $\pi/2{=}$`guard`, $\pi{=}$`stop`, $3\pi/2{=}$`pivot`:

$$u_k = \Re\{\tilde{\Xi}\,e^{-i\theta_k}\}, \qquad p_k = \frac{\exp(u_k/T_{\mathrm{eff}})}{\sum_\ell \exp(u_\ell/T_{\mathrm{eff}})}, \tag{15}$$

$$T_{\mathrm{eff}} = \max\big(T_{\min},\, T_0\,(1 - \gamma\,\tanh|\tilde{\Xi}|)\big), \quad \gamma{\in}\,[0,1],\ T_{\min}{>}0 \tag{16}$$

(*selbstvertrauensbasierte Absenkung* der Softmax-Temperatur bei großem $|\tilde{\Xi}|$). Alternativ: $s_k = \tanh(\alpha|\tilde{\Xi}|)\,\mathrm{sign}(u_k)$.

5 Kausales Quadratur-Surrogat (redigiert)

Offline wird $\mathcal{H}\{\cdot\}$ (FFT-Hilbert) verwendet. Für Echtzeit nutzen wir ein *kausales* Surrogat $\mathcal{Q}\{\cdot\}$ mit Eigenschaften $\langle x, \mathcal{Q}\{x\}\rangle \approx 0$, $\mathcal{Q}\{\mathcal{Q}\{x\}\} \approx -x$, LTI mit endlicher Gruppenlaufzeit Δ. Konstruktion/Parameter von $\mathcal{Q}$ werden nicht offengelegt. Die entstehende Verzögerung Δ wird in der Zustandsmaschine kompensiert (Zeitstempel, FIFO-Alter).

6 Safety, Hysterese und Zustandsmaschine

Safety first: Aktion `execute` nur wenn Prädikat $\mathcal{S}$ wahr ist (Drehmoment/Leistung/Geschwindigkeit unter Limits, keine Grenzlagen/Fehler). Flattern wird über Mindesthaltezeit und Evidenzkriterium verhindert: $\max_k p_k - \max_{\ell\neq k} p_\ell > \delta$ ($\delta \approx 0.15$) und Hold $\geq$ 100ms.

7 Streaming, Komplexität und Echtzeit

Alle Kennzahlen sind $\mathcal{O}(JW)$ pro Fenster (Schrittweite S). FFT-Hilbert $\mathcal{O}(W \log W)$. Typische Praxis: W=256…512, S=32…64, Hann, Abtastrate 500 to 1000 Hz (Antriebe) $\Rightarrow$ Gesamtlatenz $\approx$ 30-60 ms inkl. Filter.

8 Tuning-Rezept (Praxis)

- **Bänder:** Periodisch $\Rightarrow$ bandbegrenzte Quadratur; sonst Full-Band mit Vorfilter (z. B. Getriebeschwingungen 20–80Hz meiden).
- **Startgewichte:** $\boldsymbol{w} : \{f_{\text{react}}\!:\!0.4,\ f_{\text{coh}}\!:\!0.3,\ f_{\text{eff}}\!:\!0.2,\ f_{\text{lat}}\!:\!0.1\}$; $\boldsymbol{v} : \{\text{IAI}\!:\!0.7,\ g_P\!:\!0.3\}$. Danach bayessche/mission-kostenbasierte Feinjustage.
- **Hysterese:** Hold $\geq$ 100ms, Refraktär $\approx$ 50ms, $\delta \approx 0.15$.
- **Aggregation α_j:** Energetisch oder task-Jacobian-gewichtet, nicht statisch.

9 Implementierungsfallen (und Gegenmittel)

- **Zeitsync:** Hardware-Timestamps/TimeReference; keine lokalen Now-Zeiten mischen.
- **Torque-Bias/Friction:** τ_{meas} driftkompensieren (thermisch), sonst treibt g_P.
- **Sättigung/Clipping:** Ereignisse markieren; $f_{\text{eff}}/f_{\text{react}}$ dort ungültig $\Rightarrow$ Gate runter.
- **$\ddot{q}$:** Beobachter statt Finite-Diff; sonst kollabiert $\rho_w(u, \ddot{q}_\Sigma)$.

10 Diagnostik & Reporting (ROS-freundlich)

Publiziere $|\tilde{\Xi}|$, $\arg \tilde{\Xi}$, PLV_v, $\text{PLV}_{u\tau}$, IAI, f_{eff}, f_{react}, $\tilde{G}$, T_{eff}, Aktion, Haltedauer. Offline-Metriken: $\|\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x\}\} + x\|_2/\|x\|_2$, $\text{corr}(x, \mathcal{H}\{x\})$, $\text{corr}(\mathcal{H}\{x\}, \mathcal{Q}\{x\})$, relative L_2-Abweichung, effektive Δ.

11 Testszenarien (robuste Validierung)

- **Backlash/Deadzone-Sweep:** langsame Sinusfahrer, wechselnde Last $\Rightarrow$ Stabilität von IAI/PLV.
- **Stick–Slip/Störmomente:** Rauschsensitivität f_{react}, Gate-Robustheit.
- **Zeitversatz:** $\pm$1–2 Samples Offset zwischen u und $\ddot{q}_\Sigma$ injizieren $\Rightarrow$ Entscheidung darf nicht flippen.
- **Kontakt-Transition:** Ramp-to-contact, variable Impedanz $\Rightarrow$ g_{cs}-Vorzeichenwechsel, Gate runter, `pivot` hoch.

12 Kernformeln (kompakt)

$$
\begin{aligned}
&\text{PLV}_v = \frac{1}{W}\sum_t \Big|\sum_j \alpha_j e^{i\phi_{\dot{q},j}(t)}\Big|, \quad \text{PLV}(u, \tau_\Sigma) = \left|\frac{\sum_t w e^{i(\phi_u - \phi_{\tau_\Sigma})}}{\sum_t w}\right|, \\
&\text{IAI} = \Im\left\{\frac{\sum_t w e^{i(\phi_u - \phi_{\tau_\Sigma})}}{\sum_t w}\right\}, \quad f_{\text{react}} = \big|\rho_w(u, \ddot{q}_\Sigma)\big|, \\
&f_{\text{eff}} = \tanh\!\left(\frac{\sum_t w\, \boldsymbol{\tau}_{\text{meas}}^\top \dot{\boldsymbol{q}}}{\bar{P} + \varepsilon}\right), \quad g_P = \text{Odd}(u) \cdot \text{Chi}(u; \tau_\Sigma), \\
&\Re\{\Xi\} = \sum_i w_i f_i, \quad \Im\{\Xi\} = \sum_j v_j g_j, \quad \tilde{G} = \tanh(\kappa G'), \quad \tilde{\Xi} = \Xi e^{i\beta\tilde{G}\,\text{sign}(g_{\text{cs}})}, \\
&u_k = \Re\{\tilde{\Xi}e^{-i\theta_k}\}, \quad p_k = \frac{e^{u_k/T_{\text{eff}}}}{\sum_\ell e^{u_\ell/T_{\text{eff}}}}, \quad \theta_k \in \{0, \tfrac{\pi}{2}, \pi, \tfrac{3\pi}{2}\}.
\end{aligned}
$$

13 Fazit

Ξ dient als kompakter „Context-Operator“: $\Re\{\Xi\}$ beantwortet „darf ich ausführen?“, $\Im\{\Xi\}$ „in welcher Orientierung/gerichteten Kopplung?“. Die log-additive Evidenz, die sanfte Rotationsanreicherung und eine explizite Projektion auf Entscheidungsachsen schlagen eine saubere Brücke von der Signal- zur Policy-Ebene — echtzeitfähig, robust, und ohne Offenlegung produktiver Details.

References

[1] M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar: *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2006.

[2] B. Siciliano, O. Khatib (Hrsg.): *Springer Handbook of Robotics*. Springer, 2016.

[3] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths: *Synchronization: A Universal Concept*. Cambridge, 2003.


```
python codez/xi_xi_trigger_test.py --fs 100 --duration 40 --window 256 --step 8 --plot --save out.png

Baseline: dom. Aktion = stop  | Verteilung = {'stop': 469}

================================================================================
Szenario: Orientierungs-Flip (_meas Segment * -1)
================================================================================
Baseline-Aktion      : stop
Ziel-Aktionen        : ['guard', 'pivot', 'stop']
Umschalt-Latenz      : 3 Frames  (~0.240 s)
Recovery nach Ende   : 4 Frames  (~0.320 s)
  p_execute = +0.023
  p_guard   = +0.090
  p_stop    = -0.073
  p_pivot   = -0.040
Gate                 : +0.000
PLV_v                : +0.004
PLV(u,)            : +0.362
||                  : -0.052
IAI (vor→nach)        : -0.004 → -0.182
PASS Redirect?        : True
PASS Recovery?        : True

================================================================================
Szenario: Latenz/Desync (_cmd um 5 Samples verzögert)
================================================================================
Baseline-Aktion      : stop
Ziel-Aktionen        : ['guard', 'stop']
Umschalt-Latenz      : KEIN Wechsel erkannt
Recovery nach Ende   : 0 Frames  (~0.000 s)
  p_execute = n/a
  p_guard   = n/a
  p_stop    = n/a
  p_pivot   = n/a
Gate                 : n/a
PLV_v                : n/a
PLV(u,)            : n/a
||                  : n/a
IAI (vor→nach)        : n/a → +0.303
PASS Redirect?        : False
PASS Recovery?        : True

================================================================================
```

```
Szenario: Kohärenz-Drop (qd Noise-Burst)
================================================================================
Baseline-Aktion      : stop
Ziel-Aktionen        : ['guard', 'pivot']
Umschalt-Latenz      : KEIN Wechsel erkannt
Recovery nach Ende   : 0 Frames  (~0.000 s)
  p_execute = +0.043
  p_guard   = +0.055
  p_stop    = -0.053
  p_pivot   = -0.044
Gate                 : +0.000
PLV_v                : -0.002
PLV(u,)            : +0.190
||                  : -0.185
IAI (vor→nach)        : +0.122 → +0.198
PASS Redirect?        : False
PASS Recovery?        : True

--------------------------------------------------------------------------------
Zusammenfassung (PASS Redirect / PASS Recovery):
A: True / True
B: False / True
C: False / True
--------------------------------------------------------------------------------
```


Note on Terminology
All terms, metaphors, and model names used in this repository (e.g. "Pseudoscalar Score", "Schrödinger Zone", "OddSpin", "MaxwellFlux" etc.) are original to the author. These names are not in the public domain. Any use of these names, terms, or model identifiers — especially for commercial or branding purposes — is prohibited without prior written permission from the author. This restriction applies regardless of whether the underlying code or methods are licensed under open-source terms.

I'd be happy if you like my work: https://buymeacoffee.com/marthafay

Author: Elias, Martha
Version: v1.0 (October 2025)
DOI: 10.5281/zenodo.17379025
marthaelias@protonmail.com