- [P3908 数列之异或 - 洛谷 | 计算机科学教育新生态 (luogu.com.cn)]

  Problem：

  求 $\oplus_{i=1}^{n} i$，即从 1 到 n 所有整数的异或和，$n \le 10^{18}$。

  Solution：

  多异或一个 0，不会对答案产生影响，于是所求转化为 $\oplus_{i=0}^{n} i$。

  考虑对这个式子每两个数分为一组，即 $\forall x \ge 0$，我们取 $2x, 2x+1$，写出它们的二进制表示，注意到只有最低位不同，所以 $2x \oplus (2x+1) = 1$。

  计算共有多少个组，即需要异或多少个 1，此外如果 n 无法被划入分组中就单独计算到答案中。

  时间复杂度 $O(1)$。

```
#include<bits/stdc++.h>

#define ll long long

using namespace std;

int main()
{
//	freopen("1.in","r",stdin);
//	freopen("1.out","w",stdout);

	ll n;
	scanf("%lld",&n);

	ll ans=0;
	if(n%2==0)ans^=n;//对n单独计算
	ll cnt=(n+1)/2;
	if(cnt%2==1)ans^=1;//判断组数的奇偶性

	printf("%lld\n",ans);
	return 0;
}
```

- [P4136 谁能赢呢？ - 洛谷 | 计算机科学教育新生态 (luogu.com.cn)]

  Problem：

  给一个 $n \times n$ 的棋盘，一个石头被放在棋盘的左上角 $(1,1)$。他们轮流移动石头。每一回合，选手只能把石头向上，下，左，右四个方向移动一格，并且要求移动到的格子之前不能被访问过。谁不能移动石头了就算输。

  判断先手必胜还是必败，$n \le 10^4$。

  Solution：

  如果 $n \mod 2 = 0$，将棋盘用 1×2 的骨牌铺满，我们称位于同一块骨牌上的两个格点为一对匹配。先手第一步先移动到起点的匹配点上。对于后手的每一步操作，先手都一定能够移动到当前点对应的匹配点上。因此先手必胜。

  如果 $n \mod 2 = 1$，将棋盘除了 $(1,1)$ 的所有点用 1×2 的骨牌铺满，此时无论先手怎么走，后手都一定能够移动到当前点对应的匹配点上。因此后手必胜。

判断 n 的奇偶性即可，时间复杂度 $O(1)$。

```
#include<bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main()
{
//  freopen("1.in","r",stdin);
//  freopen("1.out","w",stdout);

    int n;
    while(1)
    {
        scanf("%d",&n);
        if(n==0)break;
        if(n%2==0)puts("Alice");
        else puts("Bob");
    }

    return 0;
}
```

- [C. OKEA]
- Problem:

  给两个正整数 n, k，现在你要向一个 $n \times k$ 的方阵填数，只能用 $[1, nk]$ 之间的数字，且不重不漏。

  要求对于每一行，$\forall 1 \le l \le r \le k$，满足 $[l, r]$ 之间这些数的平均值是整数。

  可能无解，$n, k \le 500$。

  Solution:

  限制条件等价于：$\forall 1 \le i \le n, 1 \le l \le r \le k, (r - l + 1) \mid \sum_{j=l}^{r} a_{i,j}$。

  如果 $k = 1$，随意放即可。

  如果 $k \ge 2$，考虑所取 $[l, r]$ 区间长度为 2，则这两个数必须同奇偶，由此可知每一行的数应当同奇偶。

  记有 a 行奇数，b 行偶数，$a + b = n$。

  记数集中共有 A 个奇数，B 个偶数，A 和 B 的差不超过 1，且 $A = ka, B = kb$。

  若 $n \mod 2 = 1$，$abs(a - b) \ge 1$，则 $abs(A - B) \ge k$，这与假设相矛盾，因此无解。

  若 $n \mod 2 = 0$，$a = b = \frac{n}{2}$，尝试构造合法解，前 $\frac{n}{2}$ 行依次放所有奇数，后 $\frac{n}{2}$ 行依次放所有偶数。

  检查限制条件是否满足，$[l, r]$ 区间内是一个等差数列：

  若区间长度为奇数，则平均数即为中间的数，是整数。

  若区间长度为偶数，则平均数为中间两个数的平均数，也是整数。

  时间复杂度 $O(nk)$。

```
#include<bits/stdc++.h>

using namespace std;
```

```cpp
void solve()
{
    int n,k;
    scanf("%d %d",&n,&k);

    if(k==1)
    {
        puts("YES");
        for(int i=1;i<=n;++i)printf("%d\n",i);
    }
    else
    {
        if(n%2==1)
        {
            puts("NO");
        }
        else
        {
            puts("YES");
            int c[2]={0,-1};
            for(int i=1;i<=n;++i)
            {
                int t=i%2;
                for(int j=1;j<=k;++j)printf("%d ",c[t]+=2);
                puts("");
            }
        }
    }
}

int main()
{
//  freopen("1.in","r",stdin);
//  freopen("1.out","w",stdout);

    int t;
    scanf("%d",&t);
    while(t--)solve();

    return 0;
}
```

- [P8143 JRKSJ R4 Stirling - 洛谷 | 计算机科学教育新生态 (luogu.com.cn)]()

  Problem:

  对于 $[1,n]$ 的排列 p，定义其“生成图”为：该图有 n 个点，且 $\forall 1 \le i \le n$，无向边 (i,p_i) 存在且仅存在这些边。

  给定 n，求有多少个 $[1,n]$ 的排列满足其生成图恰有偶数个环（自环同样计入）。

  答案对 998244353 取模，$n \le 10^6$。

  Solution:

  如果 $n=1$，只有一种排列，该排列生成图只有一个环，答案为 0。

  如果 $n=2$，考虑对一个排列 A 进行如下操作：交换 A_1 和 A_2，得到排列 B。

我们记一个排列 P 生成图的环的个数为 $\sigma(P)$，下面进行分类讨论：

如果在 A 的生成图中，点 1 和 2 在同一个环内，则这次操作会使环数量增加，$\sigma(B)=\sigma(A)+1$。

如果在 A 的生成图中，点 1 和 2 不在同一个环内，则这次操作会使环数量减少，$\sigma(B)=\sigma(A)-1$。

于是 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 奇偶性相反。

将这种操作看作一种映射关系，则发现这是一个双射，$f:A\to B, f\circ f:A\to A$。

所以恰好可以将排列分成奇偶两类，它们的个数相等，都为 $\frac{n!}{2}$。

时间复杂度 $O(n)$。

```
#include<bits/stdc++.h>

#define ll long long
#define inf 1e18

using namespace std;

const int P=998244353;

int main()
{
//	freopen("1.in","r",stdin);
//	freopen("1.out","w",stdout);

	int n;
	scanf("%d",&n);

	if(n==1)puts("0");
	else
	{
		ll ans=1;
		for(int i=3;i<=n;++i)ans=ans*i%P;
		printf("%lld\n",ans);
	}

	return 0;
}
```