T1（热身题）

如何判断一个数 x（long long 范围内）是否为 2 的幂次？

方法 1:
用 lowbit 找出末尾的 1，再看 x-lowbit 是否为 0，为 0 则说明 x 是 2 的幂次，否则不是。
方法 2：
用 x&(x-1)删去最末尾的 1，看 x&(x-1)是否为 0，为 0 则说明 x 是 2 的幂次，否则不是。

T2

给定一个长度为 n(n 为偶数)的序列，其中有且仅有两个数出现一次，其它的数均出现两次，求这两个数。

这道题的核心还是在异或上，先对 n 个数求异或和，得到待求的两个数的异或和。然后，为了区分这两个数，寻找这两个数的不同点。从这两个数的异或和出发，我们不难发现，这两个数的异或和一定不为 0。因此，这两个数的异或和的二进制表示中一定有一位为 1。我们不妨把这一位称做特征位，并用这个东西来区分所求的两个数。把原序列再扫一遍，对于每个数，根据特征位是否为 1 来分组。不难证明，使用这样的策略，所求的两个数一定会分开到两组，且相同的数字一定会分到同一组。因而，对每个组内求异或和，就可以得到这两个数。
具体的实现：可以用 lowbit 求得一个只有特征位上有 1 的特征数，然后用这个特征数对原序列的 n 个数做按位与运算，并根据特征数分组。把特征数加入到一组时，可以直接与该组之前加入的数做异或运算，这样用两个变量就可以储存两组的结果。(即，定义两个变量并初始化为 0，新加入的数直接与对应的变量做异或运算)

T3

n 个人坐成一个环，每次交换相邻的两个人的位置，使得最终 n 个人的顺序翻转（每个人的相邻位置上的人换位），求最小的交换次数。

HDOJ 圆桌会议 http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1214

我们考虑把环拆成序列，并编号 1,2,3...n ，那么最终要得到的序列就是 n,n-1...1 或 k,k-1...1,n,n-1...k+1 等。
也就相当于把一个长为 n 的序列分为左右两部分，并把他们分别翻转。

我们可以知道要把一个长为 n 的序列完全翻转需要交换相邻两个元素的次数为 n*(n-1)/2。

证明：初始总逆序数为 n*(n-1)/2，每次交换减少或增加一个逆序数。

可以猜到就是尽可能让左右两部分长度相等，此时交换的次数最少。
证明：可以设左半部分长度为 x 并代入上面的公式计算，得到一个一元二次方程。易知这个一元二次方程的解为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。

T4

给定整数 n,m，求斐波那契数列的第 m 项和第 n 项的最大公约数。

[P1306 斐波那契公约数 - 洛谷 | 计算机科学教育新生态 (luogu.com.cn)]

记 f_n 为斐波那契数列的第 n 项，不妨令 $n \le m$

当 $n = m$ 时，显然结果就是 f_n。

当 m > n 时，我们不妨逐个的去看。

1. 当 $m = n+1$ 时，我们可以证明 gcd(f_n，f_{n+1}) = 1，即斐波那契数列的相邻两项互质

证：使用数学归纳法：n = 1 时，上式显然成立。

$n \ge 2$ 时，$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ，gcd(f_{n+1}，f_{n+2}) = gcd(f_{n+1}，$f_{n+1} + f_n$) = gcd(f_n，f_{n+1})（更相减损术）

证毕。

2. 当 $m \ge n+1$ 时，由于 $n = 1$ 时存在的特殊性质，我们可以尝试着去找 f_m 与 f_n 和 f_{n+1} 之间的关系，可列表如下：

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

$$f_{n+3} = 2f_{n+1} + f_n$$

$$f_{n+4} = 3f_{n+1} + 2f_n$$

$$f_{n+5} = 5f_{n+1} + 3f_n$$

$$f_{n+6} = 8f_{n+1} + 5f_n$$

……

通过列表我们可以发现，f_{n+i} 在 f_{n+1} 和 f_n 两项上的系数是符合斐波那契数列的递推式的。由此我们可以得到一个关系式:

$$f_m = f_{m-n} f_{n+1} + f_{m-n-1} f_n$$

通过这个关系式，我们可以将原问题转化为求如下的式子(更相减损术)

$$\gcd(f_n, f_{m-n} f_{n+1})$$

又因为 f_n 与 f_{n+1} 之间互质，去掉 f_{n+1} 对答案没有影响，故进一步转化为

$$\gcd(f_n, f_{m-n})$$

参考辗转相除法，我们就可以将原问题

$$\gcd(f_n, f_m)$$

转化为如下的形式:
（辗转相除会使得两个数最终化成它们的最大公约数，这个点讲题的时候没有提到）

$$f_{\gcd(m,n)}$$

然后，根据题目要求，求出上述数字的后 8 位即可。

T0（这个题本来打算讲一讲的，但是今天比赛太坐牢就算了）

CodeForces - 1174D

[Problem - 1174D - Codeforces]

n ∈ [1,18], x ∈ [1, 2^{18}]。要求构造一个序列，这个序列满足：

1）每个数在 [1, 2^n) 以内

2）每个非空子区间的异或和 $\neq$ x 或 0

求这个序列的最长长度并输出这个序列

这道题的核心在于用异或前缀和来表示所有非空子区间的异或和。
即，对序列做异或前缀和处理得到的一个新的长度为 n 的前缀和序列中，任意两个数进行异或运算得到的值都可以表示一个区间的异或和。这样就把一个区间问题转化成了一个两两运算的问题。

考虑这个区间的异或前缀和，每个非空子区间异或和不等于 x 或 0 $\Rightarrow$ 异或前缀和数组任意两个数异或不等于 x 或 0 $\Rightarrow$ 最多有多少个数，他们两两异或不等于 x
若 a 在这个集合中，那么 a^ x 一定不在集合中

答案：若 x $\geq$ 2^n，对于任意的 a $\in$ [1, 2^n)，a^x 一定不落在这个范围内，所以[1,2 的 n 次方）范围内的每个数都可以作为异或前缀和数组的一个数。

若 x < 2^n，由于构造出的数列每个数都是在 [1, 2^n)范围内，故异或前缀和数组也是在这个范围内。 从 1 到 2^n 遍历一遍，若没有取 i^x 则可以取 i。所有取了的数组成异或前缀和数组即可。