

Домашни по ТМ

Мартин Георгиев

$$\backslash \{u \sim u\} /$$

Задача 1. (ZF) Функция f се нарича *двуместна*, ако $\text{Rel}(\text{Dom}(f))$. Както обикновено, $f(x, y)$ означава $f(\langle x, y \rangle)$. Множество M се нарича *затворено относно двуместна функция f* , ако всеки път, когато $x_1, x_2 \in M$, следва $f(x_1, x_2) \in M$. Нека W е непразно множество и $f : \mathcal{P}(\bigcup W) \times \mathcal{P}(\bigcup W) \rightarrow \mathcal{P}(\bigcup W)$.

1. Да се докаже, че съществува единствено множество V със свойствата: $W \subseteq V$, V е затворено относно f и всеки път, когато $W \subseteq V'$ и V' е затворено относно f , следва $V \subseteq V'$. Това множество V ще наричаме *породено от W и f* ; означаваме го с W_f .

Решение:

Нека разгледаме множеството $A \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup W))$ от затворени относно f надмножества на W :

$$A = \{x \mid x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup W)) \ \& \ W \subseteq x \ \& \ \forall y \forall z [y \in x \ \& \ z \in x \Rightarrow f(y, z) \in x]\}$$

Твърдим, че $\bigcap A$ е точно множеството V от условието.

Доказателство:

Нека първо забележим, че A не е празно, понеже $\mathcal{P}(\bigcup W) \in A$. Оттук следва, че и $\bigcap A$ не е празно. Твърдим, че също така е изпълнено $W \subseteq \bigcap A$.

Доказателство:

Нека $x \in W$. От това, че W е подмножество на всеки елемент на A , можем да заключим, че $\forall y [y \in A \Rightarrow x \in y]$, тоест $x \in \bigcap A$. □

Твърдим, че освен това $\bigcap A$ е затворено относно f .

Доказателство:

Нека допуснем, че това не е така, тоест съществуват $x_1, x_2 \in \bigcap A$, за които $f(x_1, x_2) \notin \bigcap A$. Нека $x_3 = f(x_1, x_2)$ и нека B е такава, че $B \in A$ & $x_3 \notin B$. Тъй като $\bigcap A \subseteq B$, то $x_1, x_2 \in B$, откъдето B няма да е затворено, понеже $f(x_1, x_2) = x_3 \notin B$. Щом B не е затворено то със сигурност не принадлежи на A . Така получихме, че B едновременно принадлежи и не принадлежи на A , което е противоречие. □

Накрая остава да съобразим, че тъй като всяко затворено относно f надмножество V' на W е надмножество на $\bigcap A$, V е минимално по включване. □

2. Да се докаже, че $X \in W_\cup$ точно тогава, когато съществува такова крайно и непразно $W_0 \subseteq W$, че $X = \bigcup W_0$.

Решение:

(\Rightarrow) Нека C е множеството от тези X , за които горното е изпълнено:

$$C = \{x \mid x \in W_\cup \ \& \ \text{съществува крайно и непразно множество } W_0 \subseteq W, \text{ такова, че } x = \bigcup W_0\}$$

Лесно се забелязва, че W е подмножество на C , тъй като $\forall x \in W : x = \bigcup \{x\}$.

Твърдим, че освен това C е затворено относно \cup .

Доказателство:

Да допуснем, че C не е затворено. Нека $x_1, x_2 \in C$ и $x_1 \cup x_2 \notin C$. Нека $x_3 = x_1 \cup x_2$. Лесно се забелязва, че щом W_\cup е затворено, то $x_3 \in W_\cup$. От друга страна $x_1, x_2 \in C$, откъдето $x_1 = \bigcup W_1$ & $x_2 = \bigcup W_2$ за някакви крайни непразни подмножества W_1, W_2 на W .

Нека сега разгледаме множеството $W_0 = W_1 \cup W_2$. Ясно е, че то е крайно и непразно подмножество на W . Остава да забележим, че x_3 е точно множеството $\bigcup W_0$, тоест $x_3 \in C$, което е в противоречие с изведеното $x_3 \notin C$. □

И така, получихме, че C е затворено относно \cup подмножество на W_\cup . Тъй като W_\cup е породено от W и \cup и $W \subseteq C$, последното влече, че $C = W_\cup$. □

(\Leftarrow) Ще докажем обратната посока, с индукция по мощността на W_0 :

База: $\overline{\overline{W_0}} = 1$

Нека w е такова, че $W_0 = \{w\}$. Тогава $X = \bigcup W_0 = w$, откъдето $X \in W_\cup$, понеже $w \in W_0 \subseteq W \subseteq W_\cup$.

Индукционна стъпка: $\overline{\overline{W_0}} = k + 1$

Нека W' е произволно непразно строго подмножество на W_0 . По индукционно предположение и, тъй като $\overline{\overline{W'}} < k + 1$ и $\overline{\overline{W_0 \setminus W'}} < k + 1$, то $\bigcup W' \in W_\cup$ и $\bigcup (W_0 \setminus W') \in W_\cup$ откъдето от затвореността на W_\cup следва, че:

$$X = \bigcup W_0 = \bigcup W' \cup \bigcup (W_0 \setminus W') \in W_\cup$$
□

3. Да се докаже, че $W_{\cup\cap} = W_{\cap\cup}$.

Решение:

Нека първо забележим, че $X \in W_{\cap}$ точно тогава, когато съществува такова крайно и непразно $W_0 \subseteq W$, такова че $X = \bigcap W_0$. Доказателството на това твърдение е аналогично на доказателството в предната подточка. В сила е следното:

$$\begin{array}{l} X \in W_{\cup\cap} \iff X = (x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k) \text{ за } x_1, x_2, \dots, x_k \in W_\cup \text{ & } k \neq 0. \\ Y \in W_\cup \iff Y = (y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_l) \text{ за } y_1, y_2, \dots, y_l \in W \text{ & } l \neq 0. \\ \hline \Rightarrow X \in W_{\cup\cap} \iff X = ((y_{1,1} \cup y_{1,2} \cup \dots \cup y_{1,l_1}) \cap \dots \cap (y_{k,1} \cup y_{k,2} \cup \dots \cup y_{k,l_k})) \text{ за } y_{i,j} \in W, k \neq 0, l_i \neq 0. \end{array}$$

И следното:

$$\begin{array}{l} X \in W_{\cap\cup} \iff X = (x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k) \text{ за } x_1, x_2, \dots, x_k \in W_{\cap} \text{ & } k \neq 0. \\ Y \in W_{\cap} \iff Y = (y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_l) \text{ за } y_1, y_2, \dots, y_l \in W \text{ & } l \neq 0. \\ \hline \Rightarrow X \in W_{\cap\cup} \iff X = ((y_{1,1} \cap y_{1,2} \cap \dots \cap y_{1,l_1}) \cup \dots \cup (y_{k,1} \cap y_{k,2} \cap \dots \cap y_{k,l_k})) \text{ за } y_{i,j} \in W, k \neq 0, l_i \neq 0. \end{array}$$

Накрая остава да забележим, че новополучените условия за принадлежност към $W_{\cup\cap}$ и $W_{\cap\cup}$ са еквивалентни, заради дистрибутивния закон над операциите \cap и \cup . По точно, всяко множество от вида:

$$(y_{1,1} \cup y_{1,2} \cup \dots \cup y_{1,l_1}) \cap \dots \cap (y_{k,1} \cup y_{k,2} \cup \dots \cup y_{k,l_k})$$

може да се представи в алтернативен вид:

$$(y_{1,1} \cap y_{2,1} \cap \dots \cap y_{k,1}) \cup \dots \cup (y_{1,l_1} \cap y_{2,l_2} \cap \dots \cap y_{k,l_k})$$

и обратно. □

Задача 2. (ZF) Нека I и J са непразни множества, $\{I_j\}_{j \in J}$ е J -индексирана фамилия от непразни множества, като $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Нека

$$K = \{L \mid L \in \mathcal{P}(I) \text{ & } (\forall j \in J)(L \cap I_j \neq \emptyset)\}$$

Да се докаже, че за всяка I -индексирана фамилия от множества $\{A_i\}_{i \in I}$ са в сила равенствата:

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} A_i = \bigcap_{L \in K} \bigcup_{i \in L} A_i,$$

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i = \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i$$

Решение:

Първо ще докажем, че:

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} A_i \subseteq \bigcap_{L \in K} \bigcup_{i \in L} A_i$$

Доказателство:

Нека $x \in \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} A_i$ и нека вземем $k \in J$, такова че $x \in \bigcap_{i \in I_k} A_i$. Тогава:

$$\forall i \in I_k [x \in A_i] \quad (1)$$

Нека L е произволен елемент на K и нека $y \in L \cap I_k$. От (1) $x \in A_y$. Освен това знаем, че $y \in L$, откъдето $x \in \bigcup_{i \in L} A_i$.

Щом $x \in \bigcup_{i \in L} A_i$ за произволно $L \in K$, то $x \in \bigcap_{L \in K} \bigcup_{i \in L} A_i$.

□

В обратната посока, ще докажем, че:

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} A_i \supseteq \bigcap_{L \in K} \bigcup_{i \in L} A_i$$

Доказателство:

Нека $x \in \bigcap_{L \in K} \bigcup_{i \in L} A_i$. Да допуснем, че $x \notin \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} A_i$ тоест $\forall j \in J [x \notin \bigcap_{i \in I_j} A_i]$ тоест $\forall j \in J \exists k \in I_j [x \notin A_k]$.

Нека разгледаме множество L от такива индекси k :

$$L = \{k \mid k \in I \text{ \& } x \notin A_k\}$$

Наблюдение 1: $x \notin \bigcup_{i \in L} A_i$

Наблюдение 2: $L \in K$. Наистина, $L \in \mathcal{P}(I)$ по дефиниция и освен това за произволно $j \in J$ е изпълнено, че $L \cap I_j \neq \emptyset$, понеже по допускане I_j съдържа елемент k , такъв че $x \notin A_k$.

Щом $L \in K$ и $x \notin \bigcup_{i \in L} A_i$, то $x \notin \bigcap_{L \in K} \bigcup_{i \in L} A_i$. Но това противоречи на избора на x , следователно допускането ни е грешно и $\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} A_i \supseteq \bigcap_{L \in K} \bigcup_{i \in L} A_i$.

□

Нека сега разгледаме второто равенство:

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i = \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i,$$

Първо ще докажем, че:

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i \subseteq \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i$$

Доказателство:

Нека $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i$. Тогава:

$$\forall j \in J \exists k \in I_j [x \in A_k] \quad (2)$$

Нека разгледаме множество L от такива индекси k :

$$L = \{k \mid k \in I \text{ \& } x \in A_k\}$$

Наблюдение 1: $x \in \bigcap_{i \in L} A_i$

Наблюдение 2: $L \in K$. Наистина, $L \in \mathcal{P}(I)$ по дефиниция и освен това, като следствие от (2), за произволно $j \in J$ е изпълнено, че $L \cap I_j \neq \emptyset$.

Щом $L \in K$ и $x \in \bigcap_{i \in L} A_i$, то $x \in \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i$.

□

В обратната посока, ще докажем, че:

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i \supseteq \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i$$

Доказателство:

Нека $x \in \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i$ и нека вземем $L \in K$, такова че $x \in \bigcap_{i \in L} A_i$. Нека k е произволен елемент на J . Твърдим, че $x \in \bigcup_{i \in I_k} A_i$. Като свидетел за това можем да вземем множество A_y , където $y \in I_k \cap L$.

Щом $x \in \bigcup_{i \in I_k} A_i$ за произволно $k \in J$, то $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i$.

□

Задача 3. (ZF) Нека $I \neq \emptyset$ и $\{A_i\}_{i \in I}$ е I -индексирана фамилия от множества. Нека $\{I_j\}_{j \in J}$ е J -индексирана фамилия от взаимно чужди и непразни подмножества на I , като $\bigcup_{j \in J} I_j = I$. Да се докаже, че множествата $\prod_{i \in I} A_i$ и $\prod_{j \in J} (\prod_{i \in I_j} A_i)$ са равномощни.

Решение:

Нека функцията $r : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{j \in J} (\prod_{i \in I_j} A_i)$ е дефинирана по следния начин:

$$r(f) = s \text{ за } s(j) = t \text{ за } t(i) = f(i)$$

Ще покажем, че r е инекция:

Доказателство:

Нека $r(f_1) = r(f_2)$ и нека i е произволен елемент на I . Нека вземем $j \in J$ такова, че $i \in I_j$. Ясно е, че тъй като $r(f_1) = r(f_2)$, то $r(f_1)(j) = r(f_2)(j)$. Накрая остава да съобразим, че от дефиницията на r , $f_1(i) = r(f_1)(j)(i) = r(f_2)(j)(i) = f_2(i)$. Така получихме, че за произволно $i \in I$ е в сила $f_1(i) = f_2(i)$, откъдето $f_1 = f_2$.

□

Ще покажем, че r е сюрекция:

Доказателство:

Нека $s \in \prod_{j \in J} (\prod_{i \in I_j} A_i)$. Дефинираме $f \in \prod_{i \in I} A_i$ по следния начин:

$$f(i) = s(j)(i) \text{ за } j \text{ такова, че } i \in I_j$$

Твърдим, че $r(f) = s$. Нека j е произволен елемент на J . Тогава $\forall i \in I_j [r(f)(j)(i) = f(i) = s(j)(i)]$, тоест $r(f)(j) = s(j)$. Така получихме, че за произволно $j \in J$ е в сила $r(f)(j) = s(j)$, откъдето $r(f) = s$.

□

Щом r е инекция и сюрекция, то r е биекция, откъдето $\overline{\overline{\prod_{i \in I} A_i}} = \overline{\overline{\prod_{j \in J} (\prod_{i \in I_j} A_i)}}$. □

Задача 4. (ZF) Нека $I \neq \emptyset$ и $\{A_i\}_{i \in I}$ е I -индексирана фамилия от взаимно чужди множества. Да се докаже, че множествата $\prod_{i \in I} (A_i B)$ и $(\bigcup_{i \in I} A_i) B$ са равномошни.

Решение:

Нека функцията $r : \prod_{i \in I} (A_i B) \rightarrow (\bigcup_{i \in I} A_i) B$ е дефинирана по следния начин:

$$r(f) = s \text{ за } s(a) = f(i)(a) \text{ за } i \text{ такова, че } a \in A_i$$

Ще покажем, че r е инекция:

Доказателство:

Нека $r(f_1) = r(f_2)$ и нека i е произволен елемент на I . Тогава от равенството на $r(f_1)$ и $r(f_2)$ и от дефиницията на r в сила ще бъде: $\forall a \in A_i [f_1(i)(a) = r(f_1)(a) = r(f_2)(a) = f_2(i)(a)]$, откъдето $f_1(i) = f_2(i)$. Така получихме, че за произволно $i \in I$ е в сила $f_1(i) = f_2(i)$, откъдето $f_1 = f_2$. □

Ще покажем, че r е сюрекция:

Доказателство:

Нека $s \in (\bigcup_{i \in I} A_i) B$. Дефинираме $f \in \prod_{i \in I} (A_i B)$ по следния начин:

$$f(i) = g \text{ за } g(a) = s(a)$$

Твърдим, че $r(f) = s$. Нека a е произволен елемент на $\bigcup_{i \in I} A_i$ и нека i е такова, че $a \in A_i$. Тогава от дефинициите на r и f ще бъде изпълнено, че $r(f)(a) = f(i)(a) = g(a) = s(a)$. Така получихме, че за произволно $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ е в сила $r(f)(a) = s(a)$, откъдето $r(f) = s$. □

Щом r е инекция и сюрекция, то r е биекция, откъдето $\overline{\overline{\prod_{i \in I} (A_i B)}} = \overline{\overline{(\bigcup_{i \in I} A_i) B}}$. □

Задача 5. (ZF) Да се докаже, че за произволно множество A са в сила следните:

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}}$
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}}$

Решение:

Първо ще докажем 1). Нека $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}}$ и нека $f : A \rightarrow A \cup \{A\}$ е произволна биекция. Дефинираме функцията $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$ по следния начин:

$$g(x) = \begin{cases} \mathcal{P}(A) & , \text{ ако } \exists y [x = \{y\} \text{ \& } f(y) = A] \\ \{f(\bigcup x)\} & , \text{ иначе, ако } \exists y [x = \{y\}] \\ x & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Ще докажем, че g е инекция:

Доказателство:

Нека $g(x_1) = g(x_2)$. Разглеждаме четири случая:

- 1 сл. $g(x_1) = \mathcal{P}(A) = g(x_2)$. Тогава $\exists y_1 [x_1 = \{y_1\} \text{ \& } f(y_1) = A] \text{ \& } \exists y_2 [x_2 = \{y_2\} \text{ \& } f(y_2) = A]$. Тъй като f е инекция, последното влече, че $y_1 = y_2$, откъдето $x_1 = x_2$.
- 2 сл. $g(x_1) \neq \mathcal{P}(A) \neq g(x_2) \text{ \& } \exists y_1 [x_1 = \{y_1\}] \text{ \& } \exists y_2 [x_2 = \{y_2\}]$. Тогава $g(x_1) = \{f(y_1)\}$ и $g(x_2) = \{f(y_2)\}$. Тъй като $g(x_1) = g(x_2)$, последното влече, че $f(y_1) = f(y_2)$, откъдето $y_1 = y_2$ и $x_1 = \{y_1\} = \{y_2\} = x_2$.
- 3 сл. $\exists y_1 [x_1 = \{y_1\}] \oplus \exists y_2 [x_2 = \{y_2\}]$. Но това влече, че $\overline{\overline{g(x_1)}} \neq \overline{\overline{g(x_2)}}$, което е невъзможно.
- 4 сл. $\neg \exists y_1 [x_1 = \{y_1\}] \text{ \& } \neg \exists y_2 [x_2 = \{y_2\}]$. Тогава $x_1 = g(x_1) = g(x_2) = x_2$. □

Ще докажем, че g е сюрекция:

Доказателство:

Нека $y \in \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$. Разглеждаме три случая:

- 1 сл. $y = \mathcal{P}(A)$. Тогава можем да вземем като първообраз на y множество $x \in \mathcal{P}(A)$ от вида $x = \{z\}$, където $z \in A$ & $f(z) = \{A\}$.
- 2 сл. $y \in \mathcal{P}(A)$ & $\exists z [y = \{z\}]$ Нека $s = f^{-1}(z)$. Тогава $g(\{s\}) = \{f(\bigcup\{s\})\} = \{f(s)\} = \{z\} = y$.
- 3 сл. $y \in \mathcal{P}(A)$ & $\neg \exists z [y = \{z\}]$. Тогава $g(y) = y$.

□

Щом g е инекция и сюрекция, то g е биекция, откъдето $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}}$.

□

Сега ще докажем 2). Нека $c = f^{-1}(A)$. Дефинираме функцията $h : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ по следния начин:

$$h(x) = \langle y, z \rangle \text{ за } y = \{f[a] \mid a \in x \text{ \& } c \notin a\} \text{ \& } z = \{f[a \setminus \{c\}] \mid a \in x \text{ \& } c \in a\}$$

Ще докажем, че h е инекция:

Доказателство:

Нека $h(x_1) = \langle y, z \rangle = h(x_2)$. Тогава:

$$\{f[a] \mid a \in x_1 \text{ \& } c \notin a\} = y = \{f[a] \mid a \in x_2 \text{ \& } c \notin a\}$$

$$\{f[a \setminus \{c\}] \mid a \in x_1 \text{ \& } c \in a\} = z = \{f[a \setminus \{c\}] \mid a \in x_2 \text{ \& } c \in a\}$$

Нека b е произволно множество. Разглеждаме два случая:

- 1 сл. $c \notin b$. Тогава:

$$b \in x_1 \iff f[b] \in y \iff b \in x_2$$

- 2 сл. $c \in b$. Тогава:

$$b \in x_1 \iff f[b \setminus \{c\}] \in z \iff b \in x_2$$

Така от аксиомата за обемност $x_1 = x_2$.

□

Ще докажем, че h е сюрекция:

Доказателство:

Нека $\langle y, z \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Дефинираме множество първообраз x по следния начин:

$$x = \underbrace{\{f^{-1}[b] \mid b \in y\}}_M \uplus \underbrace{\{f^{-1}[b] \cup \{c\} \mid b \in z\}}_N$$

Отсега отбелязваме, че M и N са чужди множества, тъй като $\forall x [x \in M \Rightarrow c \notin x] \ \& \ [x \in N \Rightarrow c \in x]$. Нека $h(x) = \langle y', z' \rangle$. В сила е следното:

$$\begin{aligned} b \in y &\iff f^{-1}[b] \in x && // \text{от } f^{-1}[b] \notin N \text{ и дефиницията на } x \\ &\iff f[f^{-1}[b]] \in y' && // \text{от } c \notin f^{-1}[b] \text{ и дефиницията на } h \\ &\iff b \in y' \end{aligned}$$

По същия начин:

$$\begin{aligned} b \in z &\iff f^{-1}[b] \cup \{c\} \in x && // \text{от } f^{-1}[b] \cup \{c\} \notin M \text{ и дефиницията на } x \\ &\iff f[(f^{-1}[b] \cup \{c\}) \setminus \{c\}] \in z' && // \text{от } c \in f^{-1}[b] \cup \{c\} \text{ и дефиницията на } h \\ &\iff f[f^{-1}[b]] \in z' && // \text{от } c \notin f^{-1}[b] \\ &\iff b \in z' \end{aligned}$$

Така получихме, че $h(x) = \langle y, z \rangle$, откъдето $\forall \langle y, z \rangle \exists x [h(x) = \langle y, z \rangle]$. □

Щом h е инекция и сюрекция, то h е биекция, откъдето $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}}$. □

Задача 6. (ZF) Нека A е множество, за което е в сила $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}}$. Да се докаже, че всеки път, когато B е множество и $f : \mathcal{P}(A) \cup B \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ множествата B и $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ са равномощни.

Решение:

Нека първо съобразим, че щом f е биекция от $\mathcal{P}(A) \cup B$ към $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, то рестрикцията $f \upharpoonright_B$ е инекция от B към $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Ще покажем, че съществува инекция и в обратната посока.

Нека $h : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \rightarrow \mathcal{P}(A) \cup B$ е произволна биекция[†] и нека Y е следното множество:

$$Y = \{y \mid y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \ \& \ \forall x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) [h(x, y) \notin \mathcal{P}(A)]\}$$

Ще докажем, че $Y \neq \emptyset$:

[†]Знаем, че такава биекция съществува, понеже $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}}$ от 5-та задача и $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup B}}$ от условието.

Доказателство:

Нека допуснем, че $Y = \emptyset$. Тогава:

$$\forall y \exists x [h(x, y) \in \mathcal{P}(A)] \quad (3)$$

Ще покажем, че последното е невъзможно, като построим сюрективна функция от $\mathcal{P}(A)$ към $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Нека $r : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ е дефинирана по следния начин:

$$r(z) = y \text{ за } h(x, y) = z$$

Твърдим, че r е сюрекция.

Доказателство:

Нека допуснем противното и нека вземем $y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ такова, че:

$$\forall z \in \mathcal{P}(A) [r(z) \neq y]. \quad (4)$$

От (3) съществува $x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ такова, че $h(x, y) \in \mathcal{P}(A)$. Нека вземем $z = h(x, y)$. Така, от дефиницията на r , $r(z) = y$, което е противоречие с (4). □

Получихме, че съществува сюрекция от $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, което противоречи с теоремата на Кантор. Така първоначалното ни допускане е грешно, тоест $Y \neq \emptyset$. □

Нека сега вземем y да е произволен елемент на Y . Дефинираме функцията $s : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \rightarrow B$ по следния начин:

$$s(x) = h(x, y)$$

Да забележим, че s е добре-дефинирана, тъй като от $y \in Y$ следва, че $\forall x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) [h(x, y) \in B]$. Освен това s е инекция поради инективността на h .

Накрая остава да съобразим, че щом съществува инекция от B към $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ и щом съществува инекция от $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ към B , то от теоремата на Кантор-Шрьодер-Бернщайн, B и $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ са равномощни. □

Задача 7. (ZF) А. Линейно наредено множество $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ е представено като сума на I -индексираната фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$, ако:

- $(\forall i \in I)(A_i \neq \emptyset)$
- $(\forall i \in I)(\forall j \in I)(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$
- $(\forall i \in I)(\forall j \in I)(i \neq j \Rightarrow (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \vee (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(y < x))$

1. Нека $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество, представено като сума на I -индексирана фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$. Бинарната релация $<$ е дефинирана с равенството:

$$< = \{z \mid (\exists i \in I)(\exists j \in I)(z = \langle i, j \rangle) \ \& \ (\exists x \in A_i)(\exists y \in A_j)(x < y)\}$$

Да се докаже, че $\langle I, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество. За тази наредба \preceq се казва, че е породена от представянето на A като сума на I -индексираната фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$.

Решение:

Първо да забележим, че \preceq е рефлексивна в I поради факта, че \preceq е рефлексивно затваряне на $<$.

За да докажем, че $\langle I, \preceq \rangle$ е силно антисиметрична и транзитивна ще използваме следното наблюдение:

Наблюдение 1:

$$(\forall i, j \in I)[i \preceq j \ \& \ i \neq j \iff (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \ \& \ i \neq j]$$

Доказателство:

Нека $i, j \in I$. Тогава:

$$\begin{aligned}
 i \preceq j \ \& \ i \neq j &\iff (\exists x \in A_i)(\exists y \in A_j)(x < y) \ \& \ i \neq j && // \text{от дефиницията на } \prec \\
 &\iff (\exists x \in A_i)(\exists y \in A_j)(x < y) \ \& \ i \neq j \ \& \\
 &\quad ((\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \vee \\
 &\quad (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(y < x)) && // \text{от } A - \text{представено като сума на} \\
 &&& // I\text{-индексирана фамилия } \{A_i\}_{i \in I} \\
 &\iff (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \ \& \ i \neq j && // \text{от } A_i \neq \emptyset \neq A_j
 \end{aligned}$$

□

Ще докажем, че \preceq е силно антисиметрична:

Доказателство:

Нека $i, j \in I$. Тогава:

$$\begin{aligned}
 i \preceq j \ \& \ i \neq j &\iff (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \ \& \ i \neq j && // \text{от Наблюдение 1} \\
 &\iff \neg(\exists x \in A_j)(\exists y \in A_i)(x < y) \ \& \ i \neq j \\
 &\iff j \not\preceq i \ \& \ i \neq j && // \text{от дефиницията на } \prec
 \end{aligned}$$

□

Ще докажем, че \preceq е транзитивна.

Доказателство:

Нека $i, j, k \in I$ са такива, че $i \preceq j$ & $j \preceq k$. Ако $i = j$, то имаме, че $i = j \preceq k$. По подобен начин, ако $j = k$, то $i \preceq j = k$. Ако $i = k$, то от рефлексивността на \preceq ще бъде изпълнено $i \preceq i = k$. В случая, когато $i \neq j \neq k \neq i$ по **Наблюдение 1** ще бъдат в сила:

- $(\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y)$
- $(\forall y \in A_j)(\forall z \in A_k)(y < z)$

От транзитивна на релацията $<$ и $A_j \neq \emptyset$ горните две влекат $(\forall x \in A_i)(\forall z \in A_k)(x < z)$, откъдето отново от **Наблюдение 1** следва, че $i \preceq k$.

□

Щом \preceq е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна, то \preceq е линейна наредба и $\langle I, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество.

□

Б. Нека $C = \langle C, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество.

C се нарича *гъсто*, ако има поне два различни елемента и:

$$(\forall x \in C)(\forall y \in C)(x < y \Rightarrow (\exists z \in C)(x < z \ \& \ z < y))$$

C се нарича *разредено*, ако всеки път, когато $B \subseteq C$, $\langle B, \preceq \cap (B \times B) \rangle$ не е гъсто.

2. Да се докаже, че всяко линейно наредено множество $\mathcal{A} = \langle A, \preceq \rangle$ е разредено или може да се представи като сума на такава I -индексирана фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$, така че всяко едно от множествата $\langle A_i, \preceq \cap (A_i \times A_i) \rangle$ е разредено и $\langle I, \preceq \rangle$ е гъсто, където \preceq е породената от това представяне наредба.

Решение:

Нека $\mathcal{A} = \langle A, \preceq \rangle$ е произволно неразредено линейно наредено множество. Ще докажем, че \mathcal{A} може да се представи като сума на I -индексирана фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$, така че всяко едно от множествата $\langle A_i, \preceq \cap (A_i \times A_i) \rangle$ е разредено и $\langle I, \preceq \rangle$ е гъсто, където \preceq е породената от това представяне наредба.

Първо нека си дефинираме няколко помощни множества и нотации:

$$\text{interval}(x, y) := \{z \mid z \in A \ \& \ (x \leq z \leq y \vee y \leq z \leq x)\}$$

$$\text{dense}(B) \iff \overline{B} \geq 2 \ \& \ (\forall x \in B)(\forall y \in B)(x < y \Rightarrow (\exists z \in B)(x < z < y))$$

$$\text{diluted}(B) \iff (\forall D \subseteq B)(\neg \text{dense}(D))$$

$$\sim := \{\langle x, y \rangle \in A^2 \mid \text{diluted}(\text{interval}(x, y))\}$$

Твърдим, че \sim е релация на еквивалентност.
Ще докажем, че \sim е рефлексивна.

Доказателство:

Нека $x \in A$. Не е трудно да се съобрази, че $\text{interval}(x, x) = \{x\}$, откъдето $\text{diluted}(\text{interval}(x, x))$ и $\langle x, x \rangle \in \sim$. □

Ще докажем, че \sim е симетрична.

Доказателство:

Нека $\langle x, y \rangle \in \sim$. Тогава $\text{diluted}(\text{interval}(x, y))$, и, тъй като $\text{interval}(x, y) = \text{interval}(y, x)$, то в сила ще бъде и $\text{diluted}(\text{interval}(y, x))$, откъдето $\langle y, x \rangle \in \sim$. □

За да докажем, че \sim е транзитивна, ще ползваме следните наблюдения:

Наблюдение 2:

$$(\forall x, y, z \in A)[\text{interval}(x, z) \subseteq \text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z)]$$

Доказателство:

Нека $x, y, z \in A$, $a \in \text{interval}(x, z)$ и нека БОО $x < z$. Тогава $x \leq a \leq z$. Разглеждаме два случая:

1 сл. $a \leq y$. Тогава $x \leq a \leq y$, откъдето $a \in \text{interval}(x, y) \subseteq \text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z)$.

2 сл. $a > y$. Тогава $y \leq a \leq z$, откъдето $a \in \text{interval}(y, z) \subseteq \text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z)$. □

Наблюдение 3:

$$(\forall x \subseteq A)[\text{diluted}(x) \Rightarrow (\forall y \subseteq x)[\text{diluted}(y)]]$$

Доказателство:

Нека $x \subseteq A$, $\text{diluted}(x)$, $y \subseteq x$ и нека $a \subseteq y$. Тогава $a \subseteq x$, откъдето $\neg \text{dense}(a)$. □

Сега ще докажем, че \sim е транзитивна.

Доказателство:

Нека $x, y, z \in A$ са такива, че $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \sim$. Тогава $\text{diluted}(\text{interval}(x, y))$ и $\text{diluted}(\text{interval}(y, z))$. Ще докажем, че $\text{diluted}(\text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z))$. Да допуснем противното. Нека вземем a такова, че $a \subseteq \text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z)$ & $\text{dense}(a)$. Нека БОО^a $\overline{a \cap \text{interval}(x, y)} \geq 2$. Тогава от $\text{dense}(a)$ и дефиницията на interval ще бъде изпълнено:

$$(\forall v \in a \cap \text{interval}(x, y))(\forall u \in a \cap \text{interval}(x, y))(v < u \Rightarrow (\exists w \in a \cap \text{interval}(x, y))^6(v < w < u))$$

откъдето $\text{dense}(a \cap \text{interval}(x, y))$. Но ние знаем, че $a \cap \text{interval}(x, y) \subseteq \text{interval}(x, y)$, противоречие с $\text{diluted}(\text{interval}(x, y))$.

Така показваме, че $\text{diluted}(\text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z))$. Щом това е изпълнено, то от **Наблюдения 2 и 3** $\text{diluted}(\text{interval}(x, z))$, откъдето $\langle x, z \rangle \in \sim$. □

^aЛесно може да се съобрази, че всяко гъсто множество има поне 3 елемента, откъдето сечението на a с един от интервалите трябва да съдържа поне 2 елемента.

⁶ $w \in a$ от $\text{dense}(a)$, а $w \in \text{interval}(x, y)$ (от $x \leq v < w < u \leq y$)

Щом \sim е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то \sim е релация на еквивалентност.

Нека сега вземем I да е множеството от класове на еквивалентност на \sim и нека за $i \in I$ дефинираме A_i като елементите на класа i :

$$A_i := \{x \mid x \in i\}$$

Твърдим, че с текущите дефиниции, \mathcal{A} е представено като сума на I -индексираната фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$. Лесно се вижда, че първите три условия за това са изпълнени, понеже $\{A_i\}_{i \in I}$ е разбиране на A (от \sim - релация на еквивалентност). Ще докажем, че последното условие:

$$(\forall i \in I)(\forall j \in I)(i \neq j \Rightarrow (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \vee (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(y < x))$$

също е в сила.

Доказателство:

Нека допуснем противното, тоест нека:

$$(\exists i \in I)(\exists j \in I)(i \neq j \& ((\exists x \in A_i)(\exists y \in A_j)(x \leq y) \& (\exists x' \in A_i)(\exists y' \in A_j)(y' \leq x')))$$

Нека вземем $i, j \in I$, $x, x' \in A_i$ и $y, y' \in A_j$ такива, че $i \neq j$ и $x \leq y$ & $x' \geq y'$. Разглеждаме два случая:

- 1 сл. $x' \geq y$. Тогава $\text{interval}(x, y) \subseteq \text{interval}(x, x')$. От **Наблюдение 3** това влече, че $y \in A_i$, откъдето $i = j$, противоречие.
- 2 сл. $x' < y$. Тогава $\text{interval}(x', y) \subseteq \text{interval}(y, y')$. От **Наблюдение 3** това влече, че $x' \in A_j$, откъдето $i = j$, противоречие.

□

Ще покажем, че също така $\forall i \in I$ ($\text{diluted}(A_i)$).

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека $i \in I$ и $C \subseteq A_i$ са такива, че $\text{dense}(C)$ и нека x и y са два различни елемента на C . Тогава $\text{dense}(\text{interval}(x, y) \cap C)$, но в същото време $\text{diluted}(\text{interval}(x, y))$ от $x, y \in A_i$. Противоречие.

□

Накрая ще покажем, че $\langle I, \preceq \rangle$ е гъсто.

Доказателство:

Нека $i, j \in I$ са такива, че $i \prec j$ и $i \neq j$ и нека a е произволен елемент на A_i и b е произволен елемент на A_j , като БОО нека $a < b$. Тъй като $i \neq j$, то $\neg \text{diluted}(\text{interval}(a, b))$, тоест:

$$(\exists C \subseteq \text{interval}(a, b))(\text{dense}(C))$$

Нека c е произволен некраен елемент на C и нека $k \in I$ е такава, че $c \in A_k$. Тогава $i \prec k$ & $i \neq k$. Наистина, като свидетели за $i \prec k$ можем да вземем a и c , понеже $a < c$, а $i \neq k$, тъй като $\neg \text{diluted}(\text{interval}(a, c))$.

По подобен начин може да се покаже, че $k \prec j$ & $k \neq j$.

Така $k \in I$ е такава, че $i \prec k \prec j$ и $i \neq k \neq j$, откъдето $\langle I, \preceq \rangle$ е гъсто.

□

□

Задача 8. (ZF) Нека \mathcal{S} е непразно подмножество на $\mathcal{P}(A)$, което има следните две свойства:

1. $A \in \mathcal{S}$
2. \mathcal{S} е затворено относно произволни непразни сечения, т.е. всеки път, когато $\mathcal{X} \neq \emptyset$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$, е в сила $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{S}$, и $A \in \mathcal{S}$. Да се докаже, че всяка монотонна функция $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ има неподвижна точка.

Решение:

Ще имитираме теоремата на Тарски. Нека си дефинираме X да е следното множество:

$$X = \{x \mid x \in \mathcal{S} \& h(x) \subseteq x\}$$

Да забележим, че $A \in \mathcal{S}$ & $h(A) \subseteq A$, откъдето $A \in X$, тоест X не е празно.

Нека сега разгледаме множеството $X' = \bigcap X$. От второто свойство на множеството \mathcal{S} , то е в \mathcal{S} .

Твърдим, че освен това X' е неподвижна точка на h .

Доказателство:

Първо ще докажем, че $h(X') \subseteq X'$.

Доказателство:

Нека Y е произволен елемент на X . Тогава от h -монотонна и от $X' = \bigcap X \subseteq Y$ ще бъде в сила следното:

$$h(X') \subseteq h(Y) \subseteq Y$$

Така получаваме, че $h(X')$ е подмножество на всеки елемент на X , откъдето $h(X')$ е подмножество на $\bigcap X = X'$. □

Сега ще докажем, че $X' \subseteq h(X')$.

Доказателство:

Тъй като $h(X') \subseteq X'$, то от h -монотонна имаме, че: $h(h(X')) \subseteq h(X')$, откъдето $h(X') \in X$. Но $X' = \bigcap X$, следователно $X' \subseteq h(X')$. □

Щом $h(X') \subseteq X'$ и $X' \subseteq h(X')$, то $X' = h(X')$, откъдето X' е неподвижна точка на h . □

За 9-та и 10-та задача ще използваме следните три леми:

Лема 1

За всяко линейно наредено множество $\langle A, \leq \rangle$ е в сила:

$$\forall a, b \in A [seg(a) \subseteq seg(b) \vee seg(b) \subseteq seg(a)]$$

Доказателство:

Нека a и b са произволни елементи на A . Тогава:

$$\forall c \in seg(a) [c < a]$$

$$\forall c \in seg(b) [c < b]$$

Разглеждаме два случая:

1 сл. $a < b$. Тогава $\forall c \in seg(a) [c < a \ \& \ a < b]$, тоест $\forall c \in seg(a) [c < b]$, откъдето $seg(a) \subseteq seg(b)$.

2 сл. $b < a$. Тогава $\forall c \in seg(b) [c < b \ \& \ b < a]$, тоест $\forall c \in seg(b) [c < a]$, откъдето $seg(b) \subseteq seg(a)$. □

Лема 2

Нека $\langle A, \leq \rangle$ е непразно линейно наредено множество и нека X е такова, че:

- $X \neq \emptyset$
- $(\forall y \in X)(\exists x \in A)(y = seg(x))$
- $(\exists x)(\bigcap X = seg(x))$

Тогава $\bigcap X \in X$.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека X е множество изпълняващо условията на лемата, нека x е такава, че $\bigcap X = \text{seg}(x)$ и нека $\bigcap X \notin X$. Разглеждаме два случая:

1 сл. $\forall a \in X [\text{seg}(x) \subsetneq a]$. Тогава $\forall a \in X [x \in a]$, тоест $x \in \bigcap X = \text{seg}(x)$. Противоречие.

2 сл. $\exists a \in X [a \subsetneq \text{seg}(x)]$. Тогава $a \subsetneq \text{seg}(x) = \bigcap X \subseteq a$. Противоречие.

От **Лема 1** тези 2 случая са изчерпателни. Така допускането ни се оказа грешно, откъдето $\bigcap X \in X$. \square

Лема 3

Нека $\langle A, \leq \rangle$ е непразно линейно наредено множество, нека y е непразно подмножество на A нека X е следното множество:

$$X = \{a \mid a \in \mathcal{P}(A) \ \& \ \exists b [b \in y \ \& \ a = \text{seg}(b)]\}$$

и нека $\bigcap X = \text{seg}(x) \in X$. Тогава y има най-малък елемент x .

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека $x' \in y$ е такава, че $x' < x$. Тогава $x' \in \text{seg}(x) = \bigcap X \subseteq \text{seg}(x')$. Противоречие с $x' \notin \text{seg}(x')$. \square

Задача 9. (ZF) Нека $\langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество. Нека функцията $\pi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ е определена чрез:

$$\pi(X) = \{y \in A \mid \text{seg}(y) \subseteq X\}$$

Покажете, че π е монотонна и, че ако A^* е най-малката неподвижна точка на π , то за всяко $x \in A$

$$x \in A^* \iff \langle \text{seg}(x), \leq \cap (\text{seg}(x) \times \text{seg}(x)) \rangle \text{ е добре наредено множество.}$$

Решение:

Първо ще направим няколко наблюдения.

Наблюдение 1: За всяко подмножество X на A , $\pi(X)$ е начален сегмент на A .

Доказателство:

Нека $X \in \mathcal{P}(A)$, $a \in \pi(X)$ и нека $b \in A$ е такава, че $b < a$. Тогава $\text{seg}(a) \subseteq X$ и $b \in \text{seg}(a)$, откъдето $\text{seg}(b) \subseteq \text{seg}(a) \subseteq X$, следователно $b \in \pi(X)$. \square

Наблюдение 2: $\forall x \in A [A^* \neq \text{seg}(x)]$.

Доказателство:

Да допуснем, че съществува $x \in A$ такава, че $A^* = \text{seg}(x)$ и нека фиксираме това x . Тогава от дефиницията на π , $x \in \pi(A^*) = A^* = \text{seg}(x)$. Противоречие. \square

Наблюдение 3: За всеки собствен начален сегмент X на A^* е изпълнено $\exists x \in A [X = \text{seg}(x)]$.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека X е собствен начален сегмент на A^* , за който $\forall x \in A [X \neq \text{seg}(x)]$. Тогава $\pi(X) = X$.

Доказателство:

(\Rightarrow) Нека $x \in \pi(X)$. Тогава $\text{seg}(x) \subseteq X$. Тъй като X е начален сегмент и $X \neq \text{seg}(x)$, последното влече, че $x \in \pi(X)$.

(\Leftarrow) Нека сега $x \in X$. От това, че X е начален сегмент имаме, че $\text{seg}(x) \subseteq X$, откъдето $x \in \pi(X)$. \square

Така получихме, че $X \subsetneq A^*$ е неподвижна точка. Противоречие с дефиницията на A^* . \square

(\Rightarrow) Нека сега вземем x да е произволен елемент на A^* и нека вземем y да е произволно непразно подмножество на $\text{seg}(x)$. Ще докажем, че y има най-малък елемент относно \leq . За целта си дефинираме следното множество:

$$X = \{a \mid a \in \mathcal{P}(\text{seg}(x)) \ \& \ \exists b [b \in y \ \& \ a = \text{seg}(b)]\}$$

Тъй като X е множество от собствени начални сегменти на A^* , то $\bigcap X$ е собствен начален сегмент на A^* , откъдето по **Наблюдение 3** ($\exists a \in A)(\bigcap X = \text{seg}(a)$). Така по **Лема 2** и **Лема 3** y има най-малък елемент a . □

(\Leftarrow) Нека сега $\langle \text{seg}(x), \leq \cap (\text{seg}(x) \times \text{seg}(x)) \rangle$ е добре наредено множество. Да допуснем, че $x \notin A^*$. Така от A^* - начален сегмент, следва че $A^* \subsetneq \text{seg}(x)$.

Нека сега разгледаме множеството $\text{seg}(x) \setminus A^* \subseteq \text{seg}(x)$. Тъй като $\langle \text{seg}(x), \leq \cap (\text{seg}(x) \times \text{seg}(x)) \rangle$ е добре наредено множество, то $\text{seg}(x) \setminus A^*$ има най-малък елемент z . Това обаче би означавало, че $A^* = \text{seg}(z)$, противоречие с **Наблюдение 2**.

Така допускането ни се оказва грешно, откъдето $x \in A^*$. □

Задача 10. (ZF) Нека $\langle A, R \rangle$ е линейно наредено множество. Нека всеки път, когато ω е начален сегмент на $\langle A, R \rangle$, е в сила $\omega = A$ или $(\exists x \in A)(\omega = \text{seg}(x))$. Докажете, че $\langle A, R \rangle$ е добре наредено множество.

Решение:

Нека вземем y да е произволно непразно подмножество на A . Ще докажем, че y има най-малък елемент относно R . За целта си дефинираме следното множество:

$$X = \{a \mid a \in \mathcal{P}(A) \ \& \ \exists b [b \in y \ \& \ a = \text{seg}(b)]\}$$

Да забележим, че X не е празно, тъй като за произволен елемент b на y е изпълнено, че $\text{seg}(b) \in X$. Освен това $\bigcap X$ е начален сегмент на A , тъй като сечението на начални сегменти е начален сегмент.

Щом $\bigcap X$ е начален сегмент на A , то от условието на задачата имаме две възможности:

1 сл. $\bigcap X = A$. Този случай е невъзможен, тъй като $\forall x \in A [A \not\subseteq \text{seg}(x)]$.

2 сл. $\bigcap X = \text{seg}(x)$ за някакво $x \in A$. Тогава директно по **Лема 2** и **Лема 3**, x е най-малкият елемент на y относно R .

Покажахме, че произволно подмножество на A има най-малък елемент относно R , следователно $\langle A, R \rangle$ е добре наредено множество. □

Задача 11. (ZF) Нека $A \neq \emptyset$ и $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ е функция на избора за A . Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

$$1. \ \forall x \forall y (x, y \in \text{Dom}(f) \Rightarrow f(x \cup y) = f(\{f(x), f(y)\}))$$

$$2. \ \text{съществува такава добра наредба } \leq \text{ в } A, \text{ че за всяко непразно подмножество } y \text{ на } A \text{ е в сила } f(y) = \min_{\leq} y.$$

Решение:

(\Rightarrow) Нека първо приемем, че $\forall x \forall y (x, y \in \text{Dom}(f) \Rightarrow f(x \cup y) = f(\{f(x), f(y)\}))$ Дефинираме си релацията \leq по следния начин:

$$\leq := \{(a, b) \mid (a, b) \in A^2 \ \& \ f(\{a, b\}) = a\}$$

Ясно е, че \leq е рефлексивна, тъй като $(\forall a \in A)(f(\{a, a\}) = f(\{a\}) = a)$.

Ще докажем, че \leq е силно антисиметрична:

Доказателство:

Нека $a, b \in A$. Тогава:

$$\begin{aligned} a < b \ \& \ a \neq b &\iff f(\{a, b\}) = a \ \& \ a \neq b & \quad // \text{от дефиницията на } < \\ &\iff f(\{a, b\}) \neq b \ \& \ a \neq b & \quad // \text{от } f - \text{функция на избора} \\ &\iff b \not\leq a \ \& \ a \neq b & \quad // \text{от дефиницията на } < \end{aligned}$$

□

Ще докажем, че \leq е транзитивна:

Доказателство:

Нека $a, b, c \in A$ са такива, че $a \leq b$ и $b \leq c$. Тогава $f(\{a, b\}) = a$ и $f(\{b, c\}) = b$, откъдето по 1. $f(\{a, b, c\}) = f(\{a, b\} \cup \{b, c\}) = f(\{f(\{a, b\}), f(\{b, c\})\}) = f(\{a, b\}) = a$. Същевременно $f(\{a, b, c\}) = f(\{a, c\} \cup \{b\}) = f(\{f(\{a, c\}), f(\{b\})\}) = f(\{f(\{a, c\}), b\})$. Така $a = f(\{f(a, c), b\})$. От f -функция на избора, последното влече, че $a \in \{f(\{a, c\}), b\}$, откъдето $f(\{a, c\}) = a$ и $a \leq c$. □

Щом \leq е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна, то \leq е линейна наредба

Ще докажем, че освен това \leq е добра наредба.

Нека y е произволно непразно подмножество на A . Твърдим, че y има най-малък елемент $f(y)$.

Доказателство:

Да забележим, че от f - функция на избора следва, че $f(y) \in y$. Нека сега допуснем, че $f(y)$ не е най-малък елемент на y . Тогава $\exists z \in y [z < f(y)]$. Нека си фиксираме такова z . От $z < f(y)$ ще бъде изпълнено, че $f(\{z, f(y)\}) = z$. Но тогава от 1. $f(y) = f(y \cup \{z\}) = f(\{f(y), f(\{z\})\}) = f(\{f(y), z\}) = z$. Противоречие с $z < f(y)$. □

(\Leftarrow) Нека сега съществува такава добра наредба \leq в A , че за всяко непразно подмножество y на A е в сила $f(y) = \min_{\leq} y$ и нека фиксираме тази наредба. Ще докажем, че:

$$\forall x \forall y (x, y \in \text{Dom}(f) \Rightarrow f(x \cup y) = f(\{f(x), f(y)\}))$$

Доказателство:

Нека $x, y \in \text{Dom}(f)$. От 2. $f(x) = \min_{\leq} x$ и $f(y) = \min_{\leq} y$. Нека също така забележим, че минимумът на $x \cup y$ може да е само $f(x)$ или $f(y)$. БОО нека минимумът е $f(x)$. Тогава $f(x \cup y) = \min_{\leq} (x \cup y) = f(x) = f(\{f(x), f(y)\})$. □

Задача 12. (ZF) Нека $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. В $A \times A$ дефинираме бинарната релация \leq^{can} така:

За произволни a_1, a_2, b_1 и b_2 от A , $\langle \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \rangle \in \leq^{can}$ точно тогава, когато:

$$\begin{aligned} & \max_{\leq} \{a_1, b_1\} < \max_{\leq} \{a_2, b_2\} \text{ или} \\ & \max_{\leq} \{a_1, b_1\} = \max_{\leq} \{a_2, b_2\} \ \& \ a_1 < a_2 \text{ или} \\ & \max_{\leq} \{a_1, b_1\} = \max_{\leq} \{a_2, b_2\} \ \& \ a_1 = a_2 \ \& \ b_1 \leq b_2 \end{aligned}$$

Да се докаже, че $\langle A \times A, \leq^{can} \rangle$ е добре наредено множество.

Решение:

Нека X е непразно подмножество на $A \times A$. Ще докажем, че X има най-малък елемент относно дефинираната в условието релация. За целта ще използваме шест функции: $\max, \text{fst}, \text{snd} : A \times A \rightarrow A$; $f, g, h : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, дефинирани по следните начини:

$$\begin{aligned} \max(a, b) &= \max_{\leq} \{a, b\} \\ \text{fst}(a, b) &= a \\ \text{snd}(a, b) &= b \\ f(B) &= \{b \mid b \in B \ \& \ \max(b) = \min_{\leq}(\max[B])\} \\ g(B) &= \{b \mid b \in B \ \& \ \text{fst}(b) = \min_{\leq}(\text{fst}[B])\} \\ h(B) &= \{b \mid b \in B \ \& \ \text{snd}(b) = \min_{\leq}(\text{snd}[B])\} \end{aligned}$$

Нека сега разгледаме множеството $C := h(g(f(X)))$. Да забележим, че от дефинициите на f, g и h и от $X \neq \emptyset$ следва, че то не е празно. Нека тогава $c = \langle c_1, c_2 \rangle$ е произволен елемент на C . Твърдим, че c е най-малкият елемент на X .

Доказателство:

Нека $a = \langle a_1, a_2 \rangle \in X$. Да допуснем, че $a < c$. Тогава е изпълнено едно от трите:

- 1 сл. $\max_{c \in C} \{a_1, a_2\} < \max_{c \in C} \{c_1, c_2\}$. Тогава $c \notin f(X)$, откъдето $c \notin g(f(X))$ и $c \notin h(g(f(X))) = C$. Противоречие с $c \in C$.
- 2 сл. $\max_{c \in C} \{a_1, a_2\} = \max_{c \in C} \{c_1, c_2\}$ & $a_1 < c_1$. Тогава $c \notin g(f(X))$, откъдето $c \notin h(g(f(X))) = C$. Противоречие с $c \in C$.
- 3 сл. $\max_{c \in C} \{a_1, a_2\} = \max_{c \in C} \{c_1, c_2\}$ & $a_1 = c_1$ & $a_2 \leq c_2$. Ако $a_2 < c_2$, то $c \notin h(g(f(X))) = C$. Противоречие с $c \in C$. Така $a_2 = c_2$, откъдето $a = c$. Противоречие с $a < c$.

Така допускането ни се оказа грешно, откъдето $c \leq a$.

□

Покажахме, че произволно подмножество на $A \times A$ има най-малък елемент. Така $A \times A$ е добре наредено.

□

Задача 13. Нека $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество.

1. **(ZF)** Да се докаже, че ако A е добре наредено множество, то няма функция $f : \omega \rightarrow A$, такава че за всяко естествено число n да е в сила $f(n+1) < f(n)$.

Решение:

Нека допуснем противното и нека фиксираме една функция $f : \omega \rightarrow A$ такава, че $\forall n \in \omega [f(n+1) < f(n)]$. Нека също така a е най-малкият елемент на $\text{Rng}(f)$ (тъй като $\text{Rng}(f) \subseteq A$, то от добрата нареденост на \mathcal{A} , ще следва, че такъв елемент съществува). и нека $b \in \omega$ е такова, че $f(b) = a$. Тогава $f(b+1) \in \text{Rng}(f)$ и $f(b+1) < f(b) = a$. Противоречие с избора на a .

□

2. **(ZF)+(DC)** Да се докаже, че ако няма функция $f : \omega \rightarrow A$ удовлетворяваща условието $(\forall n \in \omega)(f(n+1) < f(n))$, то \mathcal{A} е добре наредено множество.

Забележка. **(DC)** е така наречената *аксиома за зависимия избор*, която следва от аксиомата за избора в **(ZF)**:

Всеки път, когато B е непразно множество и R е бинарна релация със свойството $(\forall x \in B)(\exists y \in B)(xRy)$, за произволно $b_0 \in B$ има такава функция $g : \omega \rightarrow B$, че $g(0) = b_0$ и $(\forall n \in \omega)(g(n)Rg(n+1))$.

Решение:

Нека няма функция $f : \omega \rightarrow A$ удовлетворяваща условието $(\forall n \in \omega)(f(n+1) < f(n))$. Да допуснем, че \mathcal{A} не е добре наредено множество. Тогава съществува непразно подмножество на A , което няма най-малък елемент. Нека $B \subseteq A$ е едно такова множество. Тогава:

$$(\forall x \in B)(\exists y \in B)(x > y)$$

От аксиомата за зависимия избор, последното влече, че за произволно $b_0 \in B$ има такава функция $g : \omega \rightarrow B$, че $g(0) = b_0$ и $(\forall n \in \omega)(g(n) > g(n+1))$. Разширявайки кодомейна на g до A , получаваме функция $g' : \omega \rightarrow A$, за която $(\forall n \in \omega)(g'(n+1) < g'(n))$. Противоречие.

Така допускането ни се оказа грешно, откъдето \mathcal{A} е добре наредено множество.

□

Задача 14. Нека A и B са множества. Ще казваме, че $A \leq B$, ако съществува инекция $f : A \rightarrow B$. Ще казваме, че $A \leq^* B$, ако съществува сюрекция $f : B \rightarrow A$. Докажете, че:

1. **(ZF)** За произволни множества $A \neq \emptyset$ и B е в сила: $A \leq B \Rightarrow A \leq^* B$.

Решение:

Нека $f : A \rightarrow B$ е произволна инекция и нека a е произволен елемент на A . Дефинираме функцията $g : B \rightarrow A$ по следния начин:

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & , \text{ ако } b \in \text{Rng}(f) \\ a & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Твърдим, че g е сюрекция.

Доказателство:

Нека $c \in A$. Тогава $g(f(c)) = f^{-1}(f(c)) = c$, тъй като $f(c) \in \text{Rng}(f)$.

□

2. (ZF) За произволни множества A и B е в сила: $A \leq^* B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$.

Решение:

Нека $f : B \rightarrow A$ е произволна сюрекция. Дефинираме функцията $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ по следния начин:

$$g(X) = \{b \mid b \in B \text{ \& } f(b) \in X\}$$

Твърдим, че g е инекция.

Доказателство:

Нека $X, X' \in \mathcal{P}(A)$ са такива, че $g(X) = g(X')$. Да допуснем, че $X \neq X'$. Нека БОО вземем $a \in A$ такава, че $a \in X$ \& $a \notin X'$ и нека b е такава, че $f(b) = a$. Тогава $b \in g(X)$ \& $b \notin g(X')$, откъдето $g(X) \neq g(X')$. Противоречие.

Така допускането ни се оказа грешно, следователно $X = X'$.

□

3. (ZF) За произволни множества A и B , ако B е добре наредимо, то е в сила: $A \leq^* B \Rightarrow A \leq B$.

Решение:

Нека $f : B \rightarrow A$ е произволна сюрекция и нека $\langle B, \leq \rangle$ е произволна добра наредба. Дефинираме функцията $g : A \rightarrow B$ по следния начин:

$$g(a) = \min_{\leq}(\{c \mid c \in B \text{ \& } f(c) = a\})$$

Твърдим, че g е инекция.

Доказателство:

Нека $a, a' \in A$ са такива, че $g(a) = g(a')$. Тогава от дефиницията на g имаме, че:

$$a = f(g(a)) = f(g(a')) = a'$$

□

4. (ZFC) За произволни множества A и B е в сила: $A \leq^* B \Rightarrow A \leq B$.

Решение:

Нека $f : B \rightarrow A$ е произволна сюрекция и нека $h : \mathcal{P}(B) \setminus \emptyset \rightarrow B$ е произволна функция на избора за B . Дефинираме функцията $g : A \rightarrow B$ по следния начин:

$$g(a) = h(\{c \mid c \in B \text{ \& } f(c) = a\})$$

Твърдим, че g е инекция.

Доказателство:

Нека $a, a' \in A$ са такива, че $g(a) = g(a')$. Тогава от дефиницията на g имаме, че:

$$a = f(g(a)) = f(g(a')) = a'$$

□

Задача 15. (ZF) Нека $B \subseteq A$ и $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. Да се докаже, че е в сила точно една от следните две възможности:

1. $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle \cong \langle A, \leq \rangle$.
2. $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle$ е изоморфно със собствен начален сегмент на $\langle A, \leq \rangle$.

Решение:

Първо ще докажем, че 1. и 2. не може да бъдат изпълнени едновременно.

Доказателство:

Да допуснем, че $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle$ е едновременно изоморфно на $\langle A, \leq \rangle$ и на собствен начален сегмент на $\langle A, \leq \rangle$. Тогава от транзитивността на \cong ще бъде вярно, че $\langle A, \leq \rangle$ е изоморфно на собствен начален сегмент на $\langle A, \leq \rangle$. Нека тогава вземем такова $x \in A$, че φ е изоморфизъм между A и $\text{seg}(x)$.^a Тъй като φ е биекция между A и подмножество на A , то φ е инекция между A и A , откъдето следва, че φ е разширяваща (*expansive*) функция, тоест $\forall x \in A [x \leq \varphi(x)]$. В същото време $\varphi(x) \in \text{seg}(x)$, тоест $\varphi(x) < x$. Противоречие.

^aТъй като $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество, то всички собствени начални сегменти на A са от вида $\text{seg}(x)$ за $x \in A$.

Сега ще докажем, че винаги е изпълнено 1. или 2. За целта нека разгледаме релацията $f \subseteq B \times A$ дефинирана по следния начин:

$$f = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle b, a \rangle \in B \times A \text{ \& } \langle \text{seg}_B(b), \leq \cap (\text{seg}_B(b) \times \text{seg}_B(b)) \rangle \cong \langle \text{seg}_A(a), \leq \cap (\text{seg}_A(a) \times \text{seg}_A(a)) \rangle \}$$

Твърдим, че f е функционална релация.

Доказателство:

Нека $\langle b, a_1 \rangle, \langle b, a_2 \rangle \in f$. Тогава от транзитивността на \cong ще е изпълнено:

$$\langle \text{seg}_A(a_1), \leq \cap (\text{seg}_A(a_1) \times \text{seg}_A(a_1)) \rangle \cong \langle \text{seg}_A(a_2), \leq \cap (\text{seg}_A(a_2) \times \text{seg}_A(a_2)) \rangle$$

Нека допуснем, че $a_1 < a_2$. Тогава $\text{seg}_A(a_1) \subsetneq \text{seg}_A(a_2)$, откъдето съществува изоморфизъм между добре наредено множество и негов собствен начален сегмент. Но ние вече доказахме, че това е невъзможно. Така $a_1 \not< a_2$. По същия начин можем да покажем, че $a_1 \not> a_2$, откъдето $a_1 = a_2$. Така:

$$\forall b \in \text{Dom}(f) \exists! a \in A [\langle \text{seg}_B(b), \leq \cap (\text{seg}_B(b) \times \text{seg}_B(b)) \rangle \cong \langle \text{seg}_A(a), \leq \cap (\text{seg}_A(a) \times \text{seg}_A(a)) \rangle]$$

откъдето f е функционална релация. □

Твърдим, че освен това f запазва наредбата и $\text{Dom}(f)$ е начален сегмент на B .

Доказателство:

Нека $b \in \text{Dom}(f)$ и $b' \in B$ са такива, че $b' < b$ и нека $f(b) = a$. Така от дефиницията на f съществува изоморфизъм φ между $\text{seg}_B(b)$ и $\text{seg}_A(a)$. Тогава $\varphi \upharpoonright \text{seg}_B(b')$ е изоморфизъм между $\text{seg}_B(b')$ и някакво подмножество на $\text{seg}_A(a)$. Твърдим, че това подмножество е собствен начален сегмент на $\text{seg}_A(a)$.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека $a_1, a_2 \in \text{seg}_A(a)$ са такива, че $b_1 = \varphi^{-1}(a_1)$, $b_2 = \varphi^{-1}(a_2)$, $a_1 > a_2$, $a_1 \in \text{Rng}(\varphi \upharpoonright \text{seg}_B(b'))$ и $a_2 \notin \text{Rng}(\varphi \upharpoonright \text{seg}_B(b'))$. Тогава $b_2 \geq b' > b_1$. Противоречие с факта, че като изоморфно изображение, φ запазва наредбата. □

Така получихме, че $\varphi \upharpoonright \text{seg}_B(b)$ е изоморфизъм между $\text{seg}_B(b)$ и собствен начален сегмент на $\text{seg}_A(a)$, откъдето $b' \in \text{Dom}(f)$ и $f(b') < a$. □

По аналогичен начин може да се докаже, че f^{-1} е запазваща наредбата функционална релация с домейн начален сегмент на A . Взимайки предвид тези съображения, следните четири случая са изчерпателни:

- 1 сл. $\text{Dom}(f) = B$ \& $\text{Rng}(f) = A$. Тогава f е свидетел за $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle \cong \langle A, \leq \rangle$.
- 2 сл. $\text{Dom}(f) = B$ \& $\text{Rng}(f) = \text{seg}_A(a)$ за $a \in A$. Тогава f е изоморфизъм между $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle$ и собствен начален сегмент на $\langle A, \leq \rangle$.
- 3 сл. $\text{Dom}(f) = \text{seg}_B(b)$ \& $\text{Rng}(f) = A$ за $b \in B$. Тогава f^{-1} е запазваща наредбата инекция между A и B , което влече, че f^{-1} е разширяваща тоест $\forall x \in A [x \leq f^{-1}(x)]$. В същото време $f^{-1}(b) \in \text{seg}_B(b)$, тоест $f^{-1}(b) < b$. Противоречие.
- 4 сл. $\text{Dom}(f) = \text{seg}_B(b)$ \& $\text{Rng}(f) = \text{seg}_A(a)$ за $a \in A$ и $b \in B$. Тогава f е изоморфизъм между $\langle \text{seg}_B(b), \leq \cap (\text{seg}_B(b) \times \text{seg}_B(b)) \rangle$ и $\langle \text{seg}_A(a), \leq \cap (\text{seg}_A(a) \times \text{seg}_A(a)) \rangle$, откъдето $\langle b, a \rangle \in f$. Противоречие с $\text{Dom}(f) = \text{seg}_B(b)$.

□

Задача 16. (ZF) Нека x е множество. Тогава x е ординал точно тогава, когато всяко транзитивно собствено подмножество на x е елемент на x .

Решение:

(\Rightarrow) В едната посока нека x е ординал и нека A е транзитивно собствено подмножество на x . Да разгледаме множеството $A' = x \setminus A$. Тъй като A е собствено подмножество на x , то $A' \neq \emptyset$, откъдето от добрата наредба на x следва, че съществува елемент $y \in A'$, такъв че $y \cap A' = \emptyset$. Нека фиксираме такъв елемент y . Твърдим, че $y = A$.

Доказателство:

(\Rightarrow) В едната посока, ще докажем, че всеки елемент на y е елемент на A . Нека $a \in y$. От $trans(x)$ това влече, че $a \in x$. Но, тъй като $y \cap A' = \emptyset$, то $a \notin A'$, откъдето $a \in A$.

(\Leftarrow) В обратната посока, ще докажем, че всеки елемент на A е елемент на y . Нека $a \in A$. Тогава като следствие от добрата нареденост на x има три възможности: $a \in y$, $y \in a$ или $a = y$. Ако $y \in a$, то $y \in A$ от $trans(A)$. Но $y \in A'$, откъдето този случай е невъзможен. Ако $a = y$, то отново y е едновременно в A и A' , което е невъзможно. Така единственият възможен случай е $a \in y$.

Покажахме, че $y \subseteq A$ и $A \subseteq y$, следователно $y = A$.

□

Накрая остава да съобразим, че $A = y \in A' \subseteq x$, откъдето $A \in x$.

□

(\Leftarrow) В обратната посока. Нека всяко транзитивно подмножество на x е елемент на x и нека α е най-малкият ординал, който не е елемент на x . Тъй като всеки елемент β на α е ординал, който е по-малък от α , то x ще съдържа всеки елемент на α , тоест $\alpha \subseteq x$. Разглеждаме два случая:

1. $\alpha \subsetneq x$ Тогава α е транзитивно подмножество на x , откъдето от условието $\alpha \in x$. Противоречие с избора на α .
2. $\alpha = x$. Тогава x е ординал.

□

Задача 17. (ZFC) Нека $\langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество, което няма най-голям елемент. За едно множество $X \subseteq A$, се казва, че е кофинално с A , ако:

$$(\forall a \in A)(\exists x \in X)(a \leq x)$$

Докажете, че съществува $B \subseteq A$, което е кофинално с A и $\langle B, \leq \rangle$ е добре наредено множество.

Решение:

Нека $h : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ е произволна функция на избора, нека $*$ е такова множество, че $* \notin A$, нека $r : \mathcal{P}(A) \rightarrow A \cup \{*\}$ е дефинирана като $r := h \cup \{\emptyset, *\}$ и нека G е операцията определена от следното свойство:

$$\varphi(x, y) := y = r(\{b \mid b \in A \ \& \ \forall c \in \text{Rng}(x) \cap A [c < b]\})$$

Тогава от теоремата за трансфинитна рекурсия, съществува определима операция F такава, че:

$$(\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)]$$

Нека α е произволен ординал.

Твърдим, че ако $* \notin \text{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$ (тоест, ако $\text{Rng}(F \upharpoonright \alpha) \subseteq A$), то $(F \upharpoonright \alpha)$ е инективна.

Доказателство:

Забележка. За компактност на записа в рамките на доказателството ще бележим $(F \upharpoonright \alpha)$ с f .

Нека $x_1, x_2 \in \alpha$ са такива, че $f(x_1) = f(x_2)$. Да допуснем, че $x_1 < x_2$. Тогава:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= G(F \upharpoonright x_2) && // \text{от дефиницията на } F \\ &= r(\{b \mid b \in A \ \& \ \forall c \in \text{Rng}(F \upharpoonright x_2) \cap A [c < b]\}) && // \text{от дефиницията на } G \\ &= r(\{b \mid b \in A \ \& \ \forall c \in \text{Rng}(F \upharpoonright x_2) [c < b]\}) && // \text{от } \text{Rng}(F \upharpoonright x_2) \subseteq \text{Rng}(F \upharpoonright \alpha) \subseteq A \\ &= h(\{b \mid b \in A \ \& \ \forall c \in \text{Rng}(F \upharpoonright x_2) [c < b]\}) && // \text{от } f(x_2) \in \text{Rng}(f) \neq * \end{aligned}$$

Тъй като $f(x_1) \in \text{Rng}(F \upharpoonright x_2)$ и $\forall c \in \text{Rng}(F \upharpoonright x_2) [f(x_2) > c]$, то $f(x_1) < f(x_2)$. Противоречие с $f(x_1) = f(x_2)$. Така $x_1 \not< x_2$. По аналогичен начин може да се докаже, че $x_1 \not> x_2$, откъдето $x_1 = x_2$.

Щом за произволни $x_1, x_2 \in \alpha$, $f(x_1) = f(x_2)$ влече, че $x_1 = x_2$, то f е инекция.

□

Твърдим, че освен това ако $*$ $\notin \text{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$, то $(F \upharpoonright \alpha)$ запазва наредбата на α .

Доказателство:

В доказателството на предишното твърдение изведохме, че за произволни $x_1, x_2 \in \alpha$, $x_1 < x_2$ влече, че $f(x_1) < f(x_2)$. □

Твърдим, че също така съществува ординал α , за който $F(\alpha) = *$.

Доказателство:

Нека β е произволен ординал, за който $\bar{\beta} > \bar{A}$. Ако допуснем, че $*$ не е образ на никой ординал, то от първото твърдение, $F \upharpoonright \beta$ ще е инективна функция от β в A . Така $\bar{\beta} > \bar{A}$ & $\bar{\beta} \leq \bar{A}$. Противоречие. □

Нека сега вземем α да е най-малкият ординал, за който $F(\alpha) = *$. Така от свойствата на ординалите ще бъде изпълнено, че:

$$(\forall \beta)(F(\beta) = * \iff \beta \geq \alpha)$$

Нека $B := \text{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$. Да забележим, че B е подмножество на A , тъй като $*$ $\notin \text{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$.

Твърдим, че освен това B е кофинално с A .

Доказателство:

Да допуснем обратното. Нека $a \in A$ е такова, че $\forall b \in B (a > b)$. Тогава $\{b \mid b \in A \text{ & } \forall c \in B [c < b]\} \neq \emptyset$, откъдето $r(\{b \mid b \in A \text{ & } \forall c \in B [c < b]\}) = h(\{b \mid b \in A \text{ & } \forall c \in B [c < b]\}) \neq *$. Но тогава $F(\alpha) \neq *$. Противоречие. □

Накрая остава да съобразим, че тъй като $F \upharpoonright \alpha$ е запазваща наредбата биекция между α и B , и тъй като като ординал α е добре наредено множество, то B също е добре наредено множество. □

Задача 18. (ZF) За произволно множество A от реални числа и за произволно реално число r с $r + A$ означаваме множеството

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ & } (\exists y \in A)(x = r + y)\}.$$

Нека A е най-много изброимо множество от реални числа. Да се докаже, че има такова реално число r , че $A \cap (r + A) = \emptyset$.

Решение:

Нека фиксираме една инекция от f от A в ω . Ще извършим няколко наблюдения:

Наблюдение 1: A е добре наредимо множество.

Доказателство:

Нека \leq е релация над A дефинирана по следния начин:

$$\leq = \{\langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in A \times A \text{ & } f(a) \leq f(b)\}$$

С тази дефиниция добрата нареденост на $\langle A, \leq \rangle$ следва директно от добрата нареденост на ω . □

Отсега нататък нека си фиксираме една добра наредба \leq_A над A .

Наблюдение 2: $A \times A$ е най-много изброимо.

Доказателство:

Тъй като ω^2 е изброимо, ще бъде достатъчно да покажем съществуването на инекция от $A \times A$ в ω^2 . Дефинираме $g : A \times A \rightarrow \omega^2$ по следния начин:

$$g(a, b) = \langle f(a), f(b) \rangle$$

Инективността на g следва директно от инективността на f . □

Наблюдение 3: $A \times A$ е добре наредимо множество. (директно следствие от **Задача 12**).

Отсега нататък нека си фиксираме една добре наредба $\leq_{A \times A}$ над $A \times A$.

Да разгледаме множеството S от разликите на елементи в A :

$$S = \{r \mid r \in \mathbb{R} \ \& \ \exists \langle s, t \rangle \in A \times A \ [s - t = r]\}$$

Твърдим, че също като $A \times A$, S е най-много изброимо.

Доказателство:

Нека функцията $h : S \rightarrow A \times A$ е дефинирана по следния начин:

$$h(r) = \langle a, b \rangle \text{ за } \langle a, b \rangle = \min_{\leq} \{ \langle c, d \rangle \mid \langle c, d \rangle \in A \times A \ \& \ |c - d| = r \}$$

Ще докажем, че h е инекция:

Доказателство:

Нека $\langle a_1, b_1 \rangle = h(r_1) = h(r_2) = \langle a_2, b_2 \rangle$. Ако $r_1 \neq r_2$, то от дефиницията на h имаме, че $a_1 - b_1 = r_1 \neq r_2 = a_2 - b_2$, откъдето $\langle a_1, b_1 \rangle \neq \langle a_2, b_2 \rangle$. Противоречие. Така $r_1 = r_2$. □

Накрая, от транзитивността на \leq , щом $\overline{\overline{S}} \leq \overline{\overline{A \times A}}$ и $\overline{\overline{A \times A}} \leq \overline{\overline{\omega}}$, то $\overline{\overline{S}} \leq \overline{\overline{\omega}}$ □

Щом S е най-много изброимо множество от реални числа, то съществува реално число, което не е в S . Нека r е едно такова число. Твърдим, че $A \cap (r + A) = \emptyset$.

Доказателство:

Да допуснем обратното. Нека $s \in A \cap (r + A)$. От дефиницията на $r + A$ последното влече, че $(s - r) \in A$. Тогава за $\langle s, s - r \rangle \in A \times A$ е изпълнено, че $s - (s - r) = r$, откъдето $r \in S$. Противоречие с $r \notin S$. □

□