Домашни по ТМ

Мартин Георгиев

$\backslash\{u \smile u\}/$

Задача 1. **(ZF)** Функция f се нарича *двуместна*, ако $\mathrm{Rel}(\mathrm{Dom}(f))$. Както обикновено, $f(x, y)$ означава $f(\langle x, y\rangle)$. Множество M се нарича *затворено относно двуместна функция* f, ако всеки път, когато $x_1, x_2 \in M$, следва $f(x_1, x_2) \in M$. Нека W е непразно множество и $f : \mathcal{P}(\bigcup W) \times \mathcal{P}(\bigcup W) \to \mathcal{P}(\bigcup W)$.

1. Да се докаже, че съществува единствено множество V със свойствата: $W \subseteq V$, V е затворено относно f и всеки път, когато $W \subseteq V'$ и V' е затворено относно f, следва $V \subseteq V'$. Това множество V ще наричаме *породено* от W и f; означаваме го с W_f.

   Решение:

   Нека разгледаме множеството $A \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup W))$ от затворени относно f надмножества на W:

   $$A = \{x \mid x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup W)) \ \& \ W \subseteq x \ \& \ \forall y \forall z\, [y \in x \ \& \ z \in x \Rightarrow f(y, z) \in x]\}$$

   Твърдим, че $\bigcap A$ е точно множеството V от условието.

   Доказателство:

   Нека първо забележим, че A не е празно, понеже $\mathcal{P}(\bigcup W) \in A$. Оттук следва, че и $\bigcap A$ не е празно. Твърдим, че също така е изпълнено $W \subseteq \bigcap A$.

   Доказателство:

   Нека $x \in W$. От това, че W е подмножество на всеки елемент на A, можем да заключим, че $\forall y\, [y \in A \Rightarrow x \in y]$, тоест $x \in \bigcap A$.

   $\square$

   Твърдим, че освен това $\bigcap A$ е затворено относно f.

   Доказателство:

   Нека допуснем, че това не е така, тоест съществуват $x_1, x_2 \in \bigcap A$, за които $f(x_1, x_2) \notin \bigcap A$. Нека $x_3 = f(x_1, x_2)$ и нека B е такова, че $B \in A \ \& \ x_3 \notin B$. Тъй като $\bigcap A \subseteq B$, то $x_1, x_2 \in B$, откъдето B няма да е затровено, понеже $f(x_1, x_2) = x_3 \notin B$. Щом B не е затворено то със сигурност не принадлежи на A. Така получихме, че B едновременно принадлежи и не принадлежи на A, което е противоречие.

   $\square$

   Накрая остава да съобразим, че тъй като всяко затворено относно f надмножество V' на W е надмножество на $\bigcap A$, V е минимално по включване.

   $\square$

2. Да се докаже, че $X \in W_\cup$ точно тогава, когато съществува такова крайно и непразно $W_0 \subseteq W$, че $X = \bigcup W_0$.

   Решение:

   ($\Rightarrow$) Нека C е множеството от тези X, за които горното е изпълнено:

   $$C = \{x \mid x \in W_\cup \ \& \text{ съществува крайно и непразно множество } W_0 \subseteq W\text{, такова, че } x = \bigcup W_0\}$$

   Лесно се забелязва, че W е подмножество на C, тъй като $\forall x \in W : x = \bigcup\{x\}$.

   Твърдим, че освен това C е затворено относно $\cup$.

Доказателство:

Да допуснем, че C не е затворено. Нека $x_1, x_2 \in C$ и $x_1 \cup x_2 \notin C$. Нека $x_3 = x_1 \cup x_2$. Лесно се забелязва, че щом $W_\cup$ е затворено, то $x_3 \in W_\cup$. От друга страна $x_1, x_2 \in C$, откъдето $x_1 = \bigcup W_1$ & $x_2 = \bigcup W_2$ за някакви крайни непразни подмножеста W_1, W_2 на W.

Нека сега разгледаме множеството $W_0 = W_1 \cup W_2$. Ясно е, че то е крайно и непразно подмножество на W. Остава да забележим, че x_3 е точно множеството $\bigcup W_0$, тоест $x_3 \in C$, което е в противоречие с изведеното $x_3 \notin C$.

□

И така, получихме, че C е затворено относно $\cup$ подмножество на $W_\cup$. Тъй като $W_\cup$ е породено от W и $\cup$ и $W \subseteq C$, последното влече, че $C = W_\cup$.

□

($\Leftarrow$) Ще докажем обратната посока, с индукция по мощността на W_0:

База: $\overline{\overline{W_0}} = 1$

Нека w е такова, че $W_0 = \{w\}$. Тогава $X = \bigcup W_0 = w$, откъдето $X \in W_\cup$, понеже $w \in W_0 \subseteq W \subseteq W_\cup$.

Индукционна стъпка: $\overline{\overline{W_0}} = k + 1$

Нека W' е произволно непразно строго подмножество на W_0. По индукционно предположение и, тъй като $\overline{\overline{W'}} < k+1$ и $\overline{\overline{W_0 \setminus W'}} < k+1$, то $\bigcup W' \in W_\cup$ и $\bigcup(W_0 \setminus W') \in W_\cup$ откъдето от затвореността на $W_\cup$ следва, че:

$$X = \bigcup W_0 = \bigcup W' \cup \bigcup (W_0 \setminus W') \in W_\cup$$

□

3. Да се докаже, че $W_{\cup\cap} = W_{\cap\cup}$.

Решение:

Нека първо забележим, че $X \in W_\cap$ точно тогава, когато съществува такова крайно и непразно $W_0 \subseteq W$, такова че $X = \bigcap W_0$. Доказателството на това твърдение е аналогично на доказателството в предната подточка. В сила е следното:

$$\begin{array}{l} X \in W_{\cup\cap} \iff X = (x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k) \text{ за } x_1, x_2, \dots x_k \in W_\cup \ \& \ k \neq 0. \\ Y \in W_\cup \quad \iff Y = (y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_l) \text{ за } y_1, y_2, \dots y_l \in W \ \& \ l \neq 0. \\ \hline \Rightarrow X \in W_{\cup\cap} \iff X = ((y_{1,1} \cup y_{1,2} \cup \dots \cup y_{1,l_1}) \cap \dots \cap (y_{k,1} \cup y_{k,2} \cup \dots \cup y_{k,l_k})) \text{ за } y_{i,j} \in W, k \neq 0, l_i \neq 0. \end{array}$$

И следното:

$$\begin{array}{l} X \in W_{\cap\cup} \iff X = (x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k) \text{ за } x_1, x_2, \dots x_k \in W_\cap \ \& \ k \neq 0. \\ Y \in W_\cap \quad \iff Y = (y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_l) \text{ за } y_1, y_2, \dots y_l \in W \ \& \ l \neq 0. \\ \hline \Rightarrow X \in W_{\cap\cup} \iff X = ((y_{1,1} \cap y_{1,2} \cap \dots \cap y_{1,l_1}) \cup \dots \cup (y_{k,1} \cap y_{k,2} \cap \dots \cap y_{k,l_k})) \text{ за } y_{i,j} \in W, k \neq 0, l_i \neq 0. \end{array}$$

Накрая остава да забележим, че новополучените условия за принадлежност към $W_{\cup\cap}$ и $W_{\cap\cup}$ са еквивалентни, заради дистрибутивния закон над операциите $\cap$ и $\cup$. По точно, всяко множество от вида:

$$(y_{1,1} \cup y_{1,2} \cup \dots \cup y_{1,l_1}) \cap \dots \cap (y_{k,1} \cup y_{k,2} \cup \dots \cup y_{k,l_k})$$

може да се представи в алтернативен вид:

$$(y_{1,1} \cap y_{2,1} \cap \dots \cap y_{k,1}) \cup \dots \cup (y_{1,l_1} \cap y_{2,l_2} \cap \dots \cap y_{k,l_k})$$

и обратно.

□

Задача 2. (ZF) Нека I и J са непразни множества, $\{I_j\}_{j \in J}$ е J-индексирана фамилия от непразни множества, като $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Нека

$$K = \{L \mid L \in \mathcal{P}(I) \ \& \ (\forall j \in J)(L \cap I_j \neq \varnothing)\}$$

Да се докаже, че за всяка I-индексирана фамилия от множества $\{A_i\}_{i\in I}$ са в сила равенствата:

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} A_i = \bigcap_{L\in K}\bigcup_{i\in L} A_i,$$

$$\bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I_j} A_i = \bigcup_{L\in K}\bigcap_{i\in L} A_i$$

Решение:

Първо ще докажем, че:

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} A_i \subseteq \bigcap_{L\in K}\bigcup_{i\in L} A_i$$

Доказателство:

Нека $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} A_i$ и нека вземем $k \in J$, такова че $x \in \bigcap_{i\in I_k} A_i$. Тогава:

$$\forall i \in I_k\ [x \in A_i] \tag{1}$$

Нека L е произволен елемент на K и нека $y \in L \cap I_k$. От (1) $x \in A_y$. Освен това знаем, че $y \in L$, откъдето $x \in \bigcup_{i\in L} A_i$.

Щом $x \in \bigcup_{i\in L} A_i$ за произволно $L \in K$, то $x \in \bigcap_{L\in K}\bigcup_{i\in L} A_i$.

□

В обратната посока, ще докажем, че:

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} A_i \supseteq \bigcap_{L\in K}\bigcup_{i\in L} A_i$$

Доказателство:

Нека $x \in \bigcap_{L\in K}\bigcup_{i\in L} A_i$. Да допуснем, че $x \notin \bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} A_i$ тоест $\forall j \in J\ [x \notin \bigcap_{i\in I_j} A_i]$ тоест $\forall j \in J\ \exists k \in I_j\ [x \notin A_k]$.

Нека разгледаме множество L от такива индекси k:

$$L = \{k \mid k \in I\ \&\ x \notin A_k\}$$

Наблюдение 1: $x \notin \bigcup_{i\in L} A_i$

Наблюдение 2: $L \in K$. Наистина, $L \in \mathcal{P}(I)$ по дефиниция и освен това за произволно $j \in J$ е изпълнено, че $L \cap I_j \neq \varnothing$, понеже по допускане I_j съдържа елемент k, такъв че $x \notin A_k$.

Щом $L \in K$ и $x \notin \bigcup_{i\in L} A_i$, то $x \notin \bigcap_{L\in K}\bigcup_{i\in L} A_i$. Но това противоречи на избора на x, следователно допускането ни е грешно и $\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} A_i \supseteq \bigcap_{L\in K}\bigcup_{i\in L} A_i$.

□

Нека сега разгледаме второто равенство:

$$\bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I_j} A_i = \bigcup_{L\in K}\bigcap_{i\in L} A_i,$$

Първо ще докажем, че:

$$\bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I_j} A_i \subseteq \bigcup_{L\in K}\bigcap_{i\in L} A_i$$

Доказателство:

Нека $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i$. Тогава:

$$\forall j \in J \; \exists k \in I_j \; [x \in A_k] \tag{2}$$

Нека разгледаме множество L от такива индекси k:

$$L = \{k \mid k \in I \; \& \; x \in A_k\}$$

Наблюдение 1: $x \in \bigcap_{i \in L} A_i$

Наблюдение 2: $L \in K$. Наистина, $L \in \mathcal{P}(I)$ по дефиниция и освен това, като следствие от (2), за произволно $j \in J$ е изпълнено, че $L \cap I_j \neq \varnothing$.

Щом $L \in K$ и $x \in \bigcap_{i \in L} A_i$, то $x \in \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i$.

□

В обратната посока, ще докажем, че:

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i \supseteq \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i$$

Доказателство:

Нека $x \in \bigcup_{L \in K} \bigcap_{i \in L} A_i$ и нека вземем $L \in K$, такова че $x \in \bigcap_{i \in L} A_i$. Нека k е произволен елемент на J. Твърдим, че $x \in \bigcup_{i \in I_k} A_i$. Като свидетел за това можем да вземем множество A_y, където $y \in I_k \cap L$.

Щом $x \in \bigcup_{i \in I_k} A_i$ за произволно $k \in J$, то $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i$.

□

Задача 3. (ZF) Нека $I \neq \varnothing$ и $\{A_i\}_{i \in I}$ е I-индексирана фамилия от множества. Нека $\{I_j\}_{j \in J}$ е J-индексирана фамилия от взаимно чужди и непразни подмножества на I, като $\bigcup_{j \in J} I_j = I$. Да се докаже, че множествата $\prod_{i \in I} A_i$ и $\prod_{j \in J}(\prod_{i \in I_j} A_i)$ са равномощни.

Решение:

Нека функцията $r : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{j \in J}(\prod_{i \in I_j} A_i)$ е дефинирана по следния начин:

$$r(f) = s \text{ за } s(j) = t \text{ за } t(i) = f(i)$$

Ще покажем, че r е инекция:

Доказателство:

Нека $r(f_1) = r(f_2)$ и нека i е произволен елемент на I. Нека вземем $j \in J$ такова, че $i \in I_j$. Ясно е, че тъй като $r(f_1) = r(f_2)$, то $r(f_1)(j) = r(f_2)(j)$. Накрая остава да съобразим, че от дефиницията на r, $f_1(i) = r(f_1)(j)(i) = r(f_2)(j)(i) = f_2(i)$. Така получихме, че за произволно $i \in I$ е в сила $f_1(i) = f_2(i)$, откъдето $f_1 = f_2$.

□

Ще покажем, че r е сюрекция:

Доказателство:

Нека $s \in \prod_{j \in J}(\prod_{i \in I_j} A_i)$. Дефинираме $f \in \prod_{i \in I} A_i$ по следния начин:

$$f(i) = s(j)(i) \text{ за } j \text{ такова, че } i \in I_j$$

Твърдим, че $r(f) = s$. Нека j е произволен елемент на J. Тогава $\forall i \in I_j \; [r(f)(j)(i) = f(i) = s(j)(i)]$, тоест $r(f)(j) = s(j)$. Така получихме, че за произволно $j \in J$ е в сила $r(f)(j) = s(j)$, откъдето $r(f) = s$.

□

Щом r е инекция и сюрекция, то r е биекция, откъдето $\overline{\overline{\prod_{i\in I} A_i}} = \overline{\overline{\prod_{j\in J}(\prod_{i\in I_j} A_i)}}$.

□

Задача 4. (ZF) Нека $I \neq \varnothing$ и $\{A_i\}_{i\in I}$ е I-индексирана фамилия от взаимно чужди множества. Да се докаже, че множествата $\prod_{i\in I}({}^{A_i}B)$ и ${}^{(\bigcup_{i\in I} A_i)}B$ са равномощни.

Решение:

Нека функцията $r : \prod_{i\in I}({}^{A_i}B) \to {}^{(\bigcup_{i\in I} A_i)}B$ е дефинирана по следния начин:

$r(f) = s$ за $s(a) = f(i)(a)$ за i такова, че $a \in A_i$

Ще покажем, че r е инекция:

Доказателство:

Нека $r(f_1) = r(f_2)$ и нека i е произволен елемент на I. Тогава от равенството на $r(f_1)$ и $r(f_2)$ и от дефиницията на r в сила ще бъде: $\forall a \in A_i\ [f_1(i)(a) = r(f_1)(a) = r(f_2)(a) = f_2(i)(a)]$, откъдето $f_1(i) = f_2(i)$. Така получихме, че за произволно $i \in I$ е в сила $f_1(i) = f_2(i)$, откъдето $f_1 = f_2$.

□

Ще покажем, че r е сюрекция:

Доказателство:

Нека $s \in {}^{(\bigcup_{i\in I} A_i)}B$. Дефинираме $f \in \prod_{i\in I}({}^{A_i}B)$ по следния начин:

$f(i) = g$ за $g(a) = s(a)$

Твърдим, че $r(f) = s$. Нека a е произволен елемент на $\bigcup_{i\in I} A_i$ и нека i е такова, че $a \in A_i$. Тогава от дефинициите на r и f ще бъде изпълнено, че $r(f)(a) = f(i)(a) = g(a) = s(a)$. Така получихме, че за произволно $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ е в сила $r(f)(a) = s(a)$, откъдето $r(f) = s$.

□

Щом r е инекция и сюрекция, то r е биекция, откъдето $\overline{\overline{\prod_{i\in I}({}^{A_i}B)}} = \overline{\overline{{}^{(\bigcup_{i\in I} A_i)}B}}$.

□

Задача 5. (ZF) Да се докаже, че за произволно множество A са в сила следните:

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}}$
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}}$

Решение:

Първо ще докажем 1). Нека $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}}$ и нека $f : A \to A \cup \{A\}$ е произволна биекция. Дефинираме функция $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$ по следния начин:

$$g(x) = \begin{cases} \mathcal{P}(A) & \text{, ако } \exists y\ [x = \{y\}\ \&\ f(y) = A] \\ \{f(\bigcup x)\} & \text{, иначе, ако } \exists y\ [x = \{y\}] \\ x & \text{, иначе} \end{cases}$$

Ще докажем, че g е инекция:

Доказателство:

Нека $g(x_1) = g(x_2)$. Разглеждаме четири случая:

1 сл. $g(x_1) = \mathcal{P}(A) = g(x_2)$. Тогава $\exists y_1\ [x_1 = \{y_1\}\ \&\ f(y_1) = A]\ \&\ \exists y_2\ [x_2 = \{y_2\}\ \&\ f(y_2) = A]$. Тъй като f е инекция, последното влече, че $y_1 = y_2$, откъдето $x_1 = x_2$.

2 сл. $g(x_1) \neq \mathcal{P}(A) \neq g(x_2)\ \&\ \exists y_1\ [x_1 = \{y_1\}]\ \&\ \exists y_2\ [x_2 = \{y_2\}]$. Тогава $g(x_1) = \{f(y_1)\}$ и $g(x_2) = \{f(y_2)\}$. Тъй като $g(x_1) = g(x_2)$, последното влече, че $f(y_1) = f(y_2)$, откъдето $y_1 = y_2$ и $x_1 = \{y_1\} = \{y_2\} = x_2$

3 сл. $\exists y_1\ [x_1 = \{y_1\}] \oplus \exists y_2\ [x_2 = \{y_2\}]$. Но това влече, че $\overline{\overline{g(x_1)}} \neq \overline{\overline{g(x_2)}}$, което е невъзможно.

4 сл. $\neg\exists y_1\ [x_1 = \{y_1\}]\ \&\ \neg\exists y_2\ [x_2 = \{y_2\}]$. Тогава $x_1 = g(x_1) = g(x_2) = x_2$.

□

Ще докажем, че g е сюрекция:

Доказателство:

Нека $y \in \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$. Разглеждаме три случая:

1 сл. $y = \mathcal{P}(A)$. Тогава можем да вземем като първообраз на y множество $x \in \mathcal{P}(A)$ от вида $x = \{z\}$, където $z \in A \ \& \ f(z) = \{A\}$.

2 сл. $y \in \mathcal{P}(A) \ \& \ \exists z\ [y = \{z\}]$ Нека $s = f^{-1}(z)$. Тогава $g(\{s\}) = \{f(\bigcup\{s\})\} = \{f(s)\} = \{z\} = y$.

3 сл. $y \in \mathcal{P}(A) \ \& \ \neg\exists z\ [y = \{z\}]$. Тогава $g(y) = y$.

□

Щом g е инекция и сюрекция, то g е биекция, откъдето $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}}$.

□

Сега ще докажем 2). Нека $c = f^{-1}(A)$. Дефинираме функция $h : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ по следния начин:

$$h(x) = \langle y, z\rangle \text{ за } y = \{f[a] \mid a \in x \ \& \ c \notin a\} \ \& \ z = \{f[a \setminus \{c\}] \mid a \in x \ \& \ c \in a\}$$

Ще докажем, че h е инекция:

Доказателство:

Нека $h(x_1) = \langle y, z\rangle = h(x_2)$. Тогава:

$$\{f[a] \mid a \in x_1 \ \& \ c \notin a\} = y = \{f[a] \mid a \in x_2 \ \& \ c \notin a\}$$

$$\{f[a \setminus \{c\}] \mid a \in x_1 \ \& \ c \in a\} = z = \{f[a \setminus \{c\}] \mid a \in x_2 \ \& \ c \in a\}$$

Нека b е произволно множество. Разглеждаме два случая:

1 сл. $c \notin b$. Тогава:

$$b \in x_1 \iff f[b] \in y \iff b \in x_2$$

2 сл. $c \in b$. Тогава:

$$b \in x_1 \iff f[b \setminus \{c\}] \in z \iff b \in x_2$$

Така от аксиомата за обемност $x_1 = x_2$.

□

Ще докажем, че h е сюрекция:

Доказателство:

Нека $\langle y, z\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Дефинираме множество първообраз x по следния начин:

$$x = \underbrace{\{f^{-1}[b] \mid b \in y\}}_{M} \uplus \underbrace{\{f^{-1}[b] \cup \{c\} \mid b \in z\}}_{N}$$

Отсега отбелязваме, че M и N са чужди множества, тъй като $\forall x\ [x \in M \Rightarrow c \notin x]\ \&\ [x \in N \Rightarrow c \in x]$. Нека $h(x) = \langle y', z'\rangle$. В сила е следното:

$$\begin{aligned} b \in y &\iff f^{-1}[b] \in x && \text{// от } f^{-1}[b] \notin N \text{ и дефиницията на } x \\ &\iff f[f^{-1}[b]] \in y' && \text{// от } c \notin f^{-1}[b] \text{ и дефиницията на } h \\ &\iff b \in y' \end{aligned}$$

По същия начин:

$$\begin{aligned} b \in z &\iff f^{-1}[b] \cup \{c\} \in x && \text{// от } f^{-1}[b] \cup \{c\} \notin M \text{ и дефиницията на } x \\ &\iff f[(f^{-1}[b] \cup \{c\}) \setminus \{c\}] \in z' && \text{// от } c \in f^{-1}[b] \cup \{c\} \text{ и дефиницията на } h \\ &\iff f[f^{-1}[b]] \in z' && \text{// от } c \notin f^{-1}[b] \\ &\iff b \in z' \end{aligned}$$

Така получихме, че $h(x) = \langle y, z\rangle$, откъдето $\forall \langle y, z\rangle\ \exists x\ [h(x) = \langle y, z\rangle]$.

□

Щом h е инекция и сюрекция, то h е биекция, откъдето $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}}$.

□

Задача 6. (ZF) Нека A е множество, за което е в сила $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}}$. Да се докаже, че всеки път, когато B е множество и $f : \mathcal{P}(A) \cup B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ множествата B и $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ са равномощни.

Решение:

Нека първо съобразим, че щом f е биекция от $\mathcal{P}(A) \cup B$ към $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, то рестрикцията $f \restriction_B$ е инекция от B към $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Ще покажем, че съществува инекция и в обратната посока.

Нека $h : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A) \cup B$ е произволна биекция[†] и нека Y е следното множество:

$$Y = \{y \mid y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))\ \&\ \forall x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))\ [h(x, y) \notin \mathcal{P}(A)]\}$$

Ще докажем, че $Y \neq \varnothing$:

[†]Знаем, че такава биекция съществува, понеже $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}}$ от 5-та задача и $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup B}}$ от условието.

Доказателство:

Нека допуснем, че $Y = \varnothing$. Тогава:

$$\forall y\,\exists x\ [h(x,y) \in \mathcal{P}(A)] \tag{3}$$

Ще покажем, че последното е невъзможно, като построим сюрективна фунцкия от $\mathcal{P}(A)$ към $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Нека $r : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ е дефинирана по следния начин:

$$r(z) = y \text{ за } h(x,y) = z$$

Твърдим, че r е сюрекция.

Доказателство:

Нека допуснем противното и нека вземем $y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ такова, че:

$$\forall z \in \mathcal{P}(A)\ [r(z) \neq y]. \tag{4}$$

От (3) съществува $x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ такова, че $h(x,y) \in \mathcal{P}(A)$. Нека вземем $z = h(x,y)$. Така, от дефиницията на r, $r(z) = y$, което е противоречие с (4).

$\square$

Получихме, че съществува сюрекция от $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, което противоречи с теоремата на Кантор. Така първоначалното ни допускане е грешно, тоест $Y \neq \varnothing$.

$\square$

Нека сега вземем y да е произволен елемент на Y. Дефинираме функция $s : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \to B$ по следния начин:

$$s(x) = h(x,y)$$

Да забележим, че s е добре-дефинирана, тъй като от $y \in Y$ следва, че $\forall x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))\ [h(x,y) \in B]$. Освен това s е инекция поради инективността на h.

Накрая остава да съобразим, че щом съществува инекция от B към $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ и щом съществува инекция от $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ към B, то от теоремата на Кантор-Шрьодер-Бернщайн, B и $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ са равномощни.

$\square$

Задача 7. (ZF) А. Линейно наредено множество $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ е *представено като сума на I-индексираната фамилия* $\{A_i\}_{i \in I}$, ако:

- $(\forall i \in I)(A_i \neq \varnothing)$
- $(\forall i \in I)(\forall j \in I)(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$
- $(\forall i \in I)(\forall j \in I)(i \neq j \Rightarrow (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y)\ \vee\ (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(y < x))$

1. Нека $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество, представено като сума на I-индексирана фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$. Бинарната релация $\prec$ е дефинирана с равенството:

$$\prec = \{z \mid (\exists i \in I)(\exists j \in I)(z = \langle i, j \rangle)\ \&\ (\exists x \in A_i)(\exists y \in A_j)(x < y)\}$$

Да се докаже, че $\langle I, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество. За тази наредба $\preceq$ се казва, че е *породена от представянето на A като сума на I-индексираната фамилия* $\{A_i\}_{i \in I}$.

Решение:

Първо да забележим, че $\preceq$ е рефлексивна в I поради факта, че $\preceq$ е рефлексивно затваряне на $\prec$.
За да докажем, че $\langle I, \preceq \rangle$ е силно антисиметрична и транзитивна ще използваме следното наблюдение:

Наблюдение 1:

$$(\forall i, j \in I)[i \preceq j\ \&\ i \neq j \iff (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y)\ \&\ i \neq j]$$

Доказателство:

Нека $i, j \in I$. Тогава:

$$\begin{aligned}
i \preceq j \;\&\; i \neq j &\iff (\exists x \in A_i)(\exists y \in A_j)(x < y) \;\&\; i \neq j && \text{// от дефиницията на } \prec \\
&\iff (\exists x \in A_i)(\exists y \in A_j)(x < y)) \;\&\; i \neq j \;\& \\
&\quad\; ((\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \lor \\
&\quad\; (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(y < x)) && \text{// от } A \text{ - представено като сума на} \\
& && \text{// } I\text{-индексирана фамилия } \{A_i\}_{i \in I} \\
&\iff (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y)) \;\&\; i \neq j && \text{// от } A_i \neq \varnothing \neq A_j
\end{aligned}$$

□

Ще докажем, че $\preceq$ е силно антисиметрична:

Доказателство:

Нека $i, j \in I$. Тогава:

$$\begin{aligned}
i \preceq j \;\&\; i \neq j &\iff (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \;\&\; i \neq j && \text{// от \textbf{Наблюдение 1}} \\
&\iff \neg(\exists x \in A_j)(\exists y \in A_i)(x < y) \;\&\; i \neq j \\
&\iff j \npreceq i \;\&\; i \neq j && \text{// от дефиницията на } \prec
\end{aligned}$$

□

Ще докажем, че $\preceq$ е транзитивна.

Доказателство:

Нека $i, j, k \in I$ са такива, че $i \preceq j \;\&\; j \preceq k$. Ако $i = j$, то имаме, че $i = j \preceq k$. По подобен начин, ако $j = k$, то $i \preceq j = k$. Ако $i = k$, то от рефлексивността на $\preceq$ ще бъде изпълнено $i \preceq i = k$. В случая, когато $i \neq j \neq k \neq i$ по **Наблюдение 1** ще бъдат в сила:

- $(\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y)$
- $(\forall y \in A_j)(\forall z \in A_k)(y < z)$

От транзитивна на релацията $<$ и $A_j \neq \varnothing$ горните две влекат $(\forall x \in A_i)(\forall z \in A_k)(x < z)$, откъдето отново от **Наблюдение 1** следва, че $i \preceq k$.

□

Щом $\preceq$ е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна, то $\preceq$ е линейна наредба и $\langle I, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество.

□

Б. Нека $\mathcal{C} = \langle C, \leq \rangle$ е линейно наредено множество.
$\mathcal{C}$ се нарича *гъсто*, ако има поне два различни елемента и:

$$(\forall x \in C)(\forall y \in C)(x < y \Rightarrow (\exists z \in C)(x < z \;\&\; z < y))$$

$\mathcal{C}$ се нарича *разредено*, ако всеки път, когато $B \subseteq C$, $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle$ не е гъсто.

2. Да се докаже, че всяко линейно наредено множество $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ е разредено или може да се представи като сума на такава I-индексирана фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$, така че всяко едно от множествата $\langle A_i, \leq \cap (A_i \times A_i) \rangle$ е разредено и $\langle I, \preceq \rangle$ е гъсто, където $\preceq$ е породената от това представяне наредба.

Решение:

Нека $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ е произволно неразредено линейно наредено множество. Ще докажем, че $\mathcal{A}$ може да се представи като сума на I-индексирана фамилия $\{A_i\}_{i \in I}$, така че всяко едно от множествата $\langle A_i, \leq \cap (A_i \times A_i) \rangle$ е разредено и $\langle I, \preceq \rangle$ е гъсто, където $\preceq$ е породената от това представяне наредба.

Първо нека си дефинираме няколко помощни множества и нотации:

$$\text{interval}(x, y) \coloneqq \{z \mid z \in A \;\&\; (x \leq z \leq y \;\lor\; y \leq z \leq x)\}$$

$$\text{dense}(B) \iff \overline{\overline{B}} \geq 2 \;\&\; (\forall x \in B)(\forall y \in B)(x < y \Rightarrow (\exists z \in B)(x < z < y))$$

$$\text{diluted}(B) \iff (\forall D \subseteq B)(\neg\,\text{dense}(D))$$
$$\sim \coloneqq \{\langle x, y\rangle \in A^2 \mid \text{diluted}(\text{interval}(x, y))\}$$

Твърдим, че $\sim$ е релация на еквивалентност.
Ще докажем, че $\sim$ е рефлексивна.

Доказателство:

Нека $x \in A$. Не е трудно да се съборази, че $\text{interval}(x, x) = \{x\}$, откъдето $\text{diluted}(\text{interval}(x, x))$ и $\langle x, x\rangle \in\sim$. □

Ще докажем, че $\sim$ е симетрична.

Доказателство:

Нека $\langle x, y\rangle \in \sim$. Тогава $\text{diluted}(\text{interval}(x, y))$, и, тъй като $\text{interval}(x, y) = \text{interval}(y, x)$, то в сила ще бъде и $\text{diluted}(\text{interval}(y, x))$, откъдето $\langle y, x\rangle \in \sim$. □

За да докажем, че $\sim$ е транзитивна, ще ползваме следните наблюдения:

Наблюдение 2:

$$(\forall x, y, z \in A)[\text{interval}(x, z) \subseteq \text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z)]$$

Доказателство:

Нека $x, y, z \in A$, $a \in \text{interval}(x, z)$ и нека БОО $x < z$. Тогава $x \leq a \leq z$. Разглеждаме два случая:

1 сл. $a \leq y$. Тогава $x \leq a \leq y$, откъдето $a \in \text{interval}(x, y) \subseteq \text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z)$.

2 сл. $a > y$. Тогава $y \leq a \leq z$, откъдето $a \in \text{interval}(y, z) \subseteq \text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z)$.

□

Наблюдение 3:

$$(\forall x \subseteq A)[\text{diluted}(x) \Rightarrow (\forall y \subseteq x)[\text{diluted}(y)]$$

Доказателство:

Нека $x \subseteq A$, $\text{diluted}(x)$, $y \subseteq x$ и нека $a \subseteq y$. Тогава $a \subseteq x$, откъдето $\neg\,\text{dense}(a)$. □

Сега ще докажем, че $\sim$ е транзитивна.

Доказателство:

Нека $x, y, z \in A$ са такива, че $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \sim$. Тогава $\text{diluted}(\text{interval}(x, y))$ и $\text{diluted}(\text{interval}(y, z))$. Ще докажем, че $\text{diluted}(\text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z))$. Да допуснем противното. Нека вземем a такова, че $a \subseteq \text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z)$ & $\text{dense}(a)$. Нека БОО[a] $\overline{\overline{a \cap \text{interval}(x, y)}} \geq 2$. Тогава от $\text{dense}(a)$ и дефиницията на interval ще бъде изпълнено:

$$(\forall v \in a \cap \text{interval}(x, y))(\forall u \in a \cap \text{interval}(x, y))(v < u \Rightarrow (\exists w \in a \cap \text{interval}(x, y)^{б})(v < w < u))$$

откъдето $\text{dense}(a \cap \text{interval}(x, y))$. Но ние знаем, че $a \cap \text{interval}(x, y) \subseteq \text{interval}(x, y)$, противоречие с $\text{diluted}(\text{interval}(x, y))$.

Така показахме, че $\text{diluted}(\text{interval}(x, y) \cup \text{interval}(y, z))$. Щом това е изпълнено, то от **Наблюдения 2 и 3** $\text{diluted}(\text{interval}(x, z))$, откъдето $\langle x, z\rangle \in \sim$. □

[a] Лесно може да се съобрази, че всяко гъсто множество има поне 3 елемента, откъдето сечението на a с един от интервалите трябва да съдържа поне 2 елемента.

[б] $w \in a$ от $\text{dense}(a)$, а $w \in \text{interval}(x, y)$ (от $x \leq v < w < u \leq y$)

Щом $\sim$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то $\sim$ е релация на еквивалентност.

Нека сега вземем I да е множеството от класовете на еквивалентност на $\sim$ и нека за $i \in I$ дефинираме A_i като елементите на класа i:

$$A_i \coloneqq \{x \mid x \in i\}$$

Твърдим, че с текущите дефиниции, $\mathcal{A}$ е представено като сума на I-индексираната фамилия $\{A_i\}_{i\in I}$. Лесно се вижда, че първите три условия за това са изпълнени, понеже $\{A_i\}_{i\in I}$ е разбиране на A (от $\sim$ - релация на еквивалентност). Ще докажем, че последното условие:

$$(\forall i \in I)(\forall j \in I)(i \neq j \Rightarrow (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x < y) \ \vee \ (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(y < x))$$

също е в сила.

Доказателство:

Нека допуснем противното, тоест нека:

$$(\exists i \in I)(\exists j \in I)(i \neq j \ \& \ ((\exists x \in A_i)(\exists y \in A_j)(x \leq y) \ \& \ (\exists x' \in A_i)(\exists y' \in A_j)(y' \leq x')))$$

Нека вземем $i, j \in I$, $x, x' \in A_i$ и $y, y' \in A_j$ такива, че $i \neq j$ и $x \leq y \ \& \ x' \geq y'$. Разглеждаме два случая:

1 сл. $x' \geq y$. Тогава $\text{interval}(x, y) \subseteq \text{interval}(x, x')$. От **Наблюдение 3** това влече, че $y \in A_i$, откъдето $i = j$, противоречие.

2 сл. $x' < y$. Тогава $\text{interval}(x', y) \subseteq \text{interval}(y, y')$. От **Наблюдение 3** това влече, че $x' \in A_j$, откъдето $i = j$, противоречие.

□

Ще покажем, че също така $\forall i \in I$ $(\text{diluted}(A_i))$.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека $i \in I$ и $C \subseteq A_i$ са такива, че $\text{dense}(C)$ и нека x и y са два различни елемента на C. Тогава $\text{dense}(\text{interval}(x, y) \cap C)$, но в същото време $\text{diluted}(\text{interval}(x, y))$ от $x, y \in A_i$. Противоречие.

□

Накрая ще покажем, че $\langle I, \preceq \rangle$ е гъсто.

Доказателство:

Нека $i, j \in I$ са такива, че $i \prec j$ и $i \neq j$ и нека a е произволен елемент на A_i и b е произволен елемент на A_j, като БОО нека $a < b$. Тъй като $i \neq j$, то $\neg\,\text{diluted}(\text{interval}(a, b))$, тоест:

$$(\exists C \subseteq \text{interval}(a, b))(\text{dense}(C))$$

Нека c е произволен некраен елемент на C и нека $k \in I$ е такова, че $c \in A_k$. Тогава $i \prec k \ \& \ i \neq k$. Наистина, като свидетели за $i \prec k$ можем да вземем a и c, понеже $a < c$, а $i \neq k$, тъй като $\neg\,\text{diluted}(\text{interval}(a, c))$.
По подобен начин може да се покаже, че $k \prec j \ \& \ k \neq j$.
Така $k \in I$ е такова, че $i \prec k \prec j$ и $i \neq k \neq j$, откъдето $\langle I, \preceq \rangle$ е гъсто.

□

□

Задача 8. (ZF) Нека $\mathcal{S}$ е непразно подмножество на $\mathcal{P}(A)$, което има следните две свойства:

1. $A \in \mathcal{S}$
2. $\mathcal{S}$ е затворено относно произволни непразни сечения, т.е. всеки път, когато $\mathcal{X} \neq \varnothing$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$, е в сила $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{S}$, и $A \in \mathcal{S}$. Да се докаже, че всяка монотонна функция $h : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ има неподвижна точка.

Решение:

Ще имитираме теоремата на Тарски. Нека си дефинираме X да е следното множество:

$$X = \{x \mid x \in \mathcal{S} \ \& \ h(x) \subseteq x\}$$

Да забележим, че $A \in \mathcal{S} \ \& \ h(A) \subseteq A$, откъдето $A \in X$, тоест X не е празно.
Нека сега разгледаме множеството $X' = \bigcap X$. От второто свойство на множеството $\mathcal{S}$, то е в $\mathcal{S}$.
Твърдим, че освен това X' е неподвижна точка на h.

Доказателство:

Първо ще докажем, че $h(X') \subseteq X'$.

Доказателство:

Нека Y е произволен елемент на X. Тогава от h-монотонна и от $X' = \bigcap X \subseteq Y$ ще бъде в сила следното:

$$h(X') \subseteq h(Y) \subseteq Y$$

Така полуаваме, че $h(X')$ е подмножество на всеки елемент на X, откъдето $h(X')$ е подмножество на $\bigcap X = X'$.

□

Сега ще докажем, че $X' \subseteq h(X')$.

Доказателство:

Тъй като $h(X') \subseteq X'$, то от h-монотонна имаме, че: $h(h(X')) \subseteq h(X')$, откъдето $h(X') \in X$. Но $X' = \bigcap X$, следователно $X' \subseteq h(X')$.

□

Щом $h(X') \subseteq X'$ и $X' \subseteq h(X')$, то $X' = h(X')$, откъдето X' е неподвижна точка на h.

□

За 9-та и 10-та задача ще използваме следните три леми:

Лема 1

За всяко линейно наредено множество $\langle A, \leq \rangle$ е в сила:

$$\forall a, b \in A \; [seg(a) \subseteq seg(b) \;\vee\; seg(b) \subseteq seg(a)]$$

Доказателство:

Нека a и b са произволни елементи на A. Тогава:

$$\forall c \in seg(a) \; [c < a]$$

$$\forall c \in seg(b) \; [c < b]$$

Разглеждаме два случая:

1 сл. $a < b$. Тогава $\forall c \in seg(a) \; [c < a \;\&\; a < b]$, тоест $\forall c \in seg(a) \; [c < b]$, откъдето $seg(a) \subseteq seg(b)$.

2 сл. $b < a$. Тогава $\forall c \in seg(b) \; [c < b \;\&\; b < a]$, тоест $\forall c \in seg(b) \; [c < a]$, откъдето $seg(b) \subseteq seg(a)$.

□

Лема 2

Нека $\langle A, \leq \rangle$ е непразно линейно наредено множество и нека X е такова, че:

- $X \neq \varnothing$
- $(\forall y \in X)(\exists x \in A)(y = seg(x))$
- $(\exists x)(\bigcap X = seg(x))$

Тогава $\bigcap X \in X$.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека X е множество изпълняващо условията на лемата, нека x е такова, че $\bigcap X = seg(x)$ и нека $\bigcap X \notin X$. Разглеждаме два случая:

1 сл. $\forall a \in X\ [seg(x) \subsetneq a]$. Тогава $\forall a \in X\ [x \in a]$, тоест $x \in \bigcap X = seg(x)$. Противоречие.

2 сл. $\exists a \in X\ [a \subsetneq seg(x)]$. Тогава $a \subsetneq seg(x) = \bigcap X \subseteq a$. Противоречие.

От **Лема 1** тези 2 случая са изчерпателни. Така допускането ни се оказа грешно, откъдето $\bigcap X \in X$.

$\square$

Лема 3

Нека $\langle A, \leq \rangle$ е непразно линейно наредено множество, нека y е непразно подмножество на A нека X е следното множество:

$$X = \{a \mid a \in \mathcal{P}(A)\ \&\ \exists b\ [b \in y\ \&\ a = seg(b)]\}$$

и нека $\bigcap X = seg(x) \in X$. Тогава y има най-малък елемент x.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека $x' \in y$ е такова, че $x' < x$. Тогава $x' \in seg(x) = \bigcap X \subseteq seg(x')$. Противоречие с $x' \notin seg(x')$.

$\square$

Задача 9. **(ZF)** Нека $\langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество. Нека функцията $\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е определена чрез:

$$\pi(X) = \{y \in A \mid seg(y) \subseteq X\}$$

Покажете, че π е монотонна и, че ако A^* е най-малката неподвижна точка на π, то за всяко $x \in A$

$$x \in A^* \iff \langle seg(x), \leq \cap (seg(x) \times seg(x)) \rangle \text{ е добре наредено множество.}$$

Решение:

Първо ще направим няколко наблюдения.

Наблюдение 1: За всяко подмножество X на A, $\pi(X)$ е начален сегмент на A.

Доказателство:

Нека $X \in \mathcal{P}(A)$, $a \in \pi(X)$ и нека $b \in A$ е такова, че $b < a$. Тогава $seg(a) \subseteq X$ и $b \in seg(a)$, откъдето $seg(b) \subseteq seg(a) \subseteq X$, следователно $b \in \pi(X)$.

$\square$

Наблюдение 2: $\forall x \in A\ [A^* \neq seg(x)]$.

Доказателство:

Да допуснем, че съществува $x \in A$ такова, че $A^* = seg(x)$ и нека фиксираме това x. Тогава от дефиницията на π, $x \in \pi(A^*) = A^* = seg(x)$. Противоречие.

$\square$

Наблюдение 3: За всеки собствен начален сегмент X на A^* е изпълнено $\exists x \in A\ [X = seg(x)]$.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека X е собствен начален сегмент на A^*, за който $\forall x \in A\ [X \neq seg(x)]$. Тогава $\pi(X) = X$.

Доказателство:

($\Rightarrow$) Нека $x \in \pi(X)$. Тогава $seg(x) \subseteq X$. Тъй като X е начален сегмент и $X \neq seg(x)$, последното влече, че $x \in \pi(X)$.

($\Leftarrow$) Нека сега $x \in X$. От това, че X е начален сегмент имаме, че $seg(x) \subseteq X$, откъдето $x \in \pi(X)$.

$\square$

Така получихме, че $X \subsetneq A^*$ е неподвижна точка. Противоречие с дефиницията на A^*.

$\square$

($\Rightarrow$) Нека сега вземем x да е произволен елемент на A^* и нека вземем y да е произволно непразно подмножество на $seg(x)$. Ще докажем, че y има най-малък елемент относно $\leq$. За целта си дефинираме следното множество:

$$X = \{a \mid a \in \mathcal{P}(seg(x)) \ \& \ \exists b \ [b \in y \ \& \ a = seg(b)]\}$$

Тъй като X е множество от собствени начални сегменти на A^*, то $\bigcap X$ е собствен начален сегмент на A^*, откъдето по **Наблюдение 3** $(\exists a \in A)(\bigcap X = seg(a))$. Така по **Лема 2** и **Лема 3** y има най-малък елемент a.

□

($\Leftarrow$) Нека сега $\langle seg(x), \leq \cap (seg(x) \times seg(x)) \rangle$ е добре наредено множество. Да допуснем, че $x \notin A^*$. Така от A^* - начален сегмент, следва че $A^* \subsetneq seg(x)$.

Нека сега разгледаме множеството $seg(x) \setminus A^* \subseteq seg(x)$. Тъй като $\langle seg(x), \leq \cap (seg(x) \times seg(x)) \rangle$ е добре наредено множество, то $seg(x) \setminus A^*$ има нак-малък елемент z. Това обаче би означавало, че $A^* = seg(z)$, противоречие с **Наблюдение 2**.

Така допускането ни се оказа грешно, откъдето $x \in A^*$.

□

Задача 10. (ZF) Нека $\langle A, R \rangle$ е линейно наредено множество. Нека всеки път, когато ω е начален сегмент на $\langle A, R \rangle$, е в сила $\omega = A$ или $(\exists x \in A)(\omega = seg(x))$. Докажете, че $\langle A, R \rangle$ е добре наредено множество.

Решение:

Нека вземем y да е произволно непразно подмножество на A. Ще докажем, че y има най-малък елемент относно R. За целта си дефинираме следното множество:

$$X = \{a \mid a \in \mathcal{P}(A) \ \& \ \exists b \ [b \in y \ \& \ a = seg(b)]\}$$

Да забележим, че X не е празно, тъй като за произволен елемент b на y е изпълнено, че $seg(b) \in X$. Освен това $\bigcap X$ е начален сегмент на A, тъй като сечението на начални сегменти е начален сегмент.

Щом $\bigcap X$ е начален сегмент на A, то от условието на задачата имаме две възможности:

1 сл. $\bigcap X = A$. Този случай е невъзможен, тъй като $\forall x \in A \ [A \nsubseteq seg(x)]$.

2 сл. $\bigcap X = seg(x)$ за някакво $x \in A$. Тогава директно по **Лема 2** и **Лема 3**, x е най-малкият елемент на y относно R.

Показахме, че произволно подмножество на A има най-малък елемент относно R, следователно $\langle A, R \rangle$ е добре наредено множество.

□

Задача 11. (ZF) Нека $A \neq \varnothing$ и $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \to A$ е функция на избора за A. Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

1. $\forall x \forall y (x, y \in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow f(x \cup y) = f(\{f(x), f(y)\}))$
2. съществува такава добра наредба $\leq$ в A, че за всяко непразно подмножество y на A е в сила $f(y) = min_{\leq} y$.

Решение:

($\Rightarrow$) Нека първо приемем, че $\forall x \forall y (x, y \in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow f(x \cup y) = f(\{f(x), f(y)\}))$ Дефинираме си релацията $\leq$ по следния начин:

$$\leq := \{(a, b) \mid (a, b) \in A^2 \ \& \ f(\{a, b\}) = a\}$$

Ясно е, че $\leq$ е рефлексивна, тъй като $(\forall a \in A)(f(\{a, a\}) = f(\{a\}) = a)$.

Ще докажем, че $\leq$ е силно антисиметрична:

Доказателство:

Нека $a, b \in A$. Тогава:

$$\begin{aligned} a < b \ \& \ a \neq b &\iff f(\{a, b\}) = a \ \& \ a \neq b && // \text{ от дефиницията на } < \\ &\iff f(\{a, b\}) \neq b \ \& \ a \neq b && // \text{ от } f \text{ - функция на избора} \\ &\iff b \not< a \ \& \ a \neq b && // \text{ от дефиницията на } < \end{aligned}$$

□

Ще докажем, че $\leq$ е транзитивна:

Доказателство:

Нека $a, b, c \in A$ са такива, че $a \leq b$ и $b \leq c$. Тогава $f(\{a, b\}) = a$ и $f(\{b, c\}) = b$, откъдето по 1. $f(\{a, b, c\}) = f(\{a, b\} \cup \{b, c\}) = f(\{f(\{a, b\}), f(\{b, c\})\}) = f(\{a, b\}) = a$. Същевременно $f(\{a, b, c\}) = f(\{a, c\} \cup \{b\}) = f(\{f(\{a, c\}), f(\{b\})\}) = f(\{f(\{a, c\}), b\})$ Така $a = f(\{f(a, c), b\})$. От f-функция на избора, последното влече, че $a \in \{f(\{a, c\}), b\}$, откъдето $f(\{a, c\}) = a$ и $a \leq c$.

□

Щом $\leq$ е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна, то $\leq$ е линейна наредба
Ще докажем, че освен това $\leq$ е добра наредба.
Нека y е произволно непразно подмножество на A. Твърдим, че y има най-малък елемент $f(y)$.

Доказателство:

Да забележим, че от f - функция на избора следва, че $f(y) \in y$. Нека сега допуснем, че $f(y)$ не е най-малък елемент на y. Тогава $\exists z \in y\ [z < f(y)]$. Нека си фиксираме такова z. От $z < f(y)$ ще бъде изпълнено, че $f(\{z, f(y)\}) = z$. Но тогава от 1. $f(y) = f(y \cup \{z\}) = f(\{f(y), f(\{z\})\}) = f(\{f(y), z\}) = z$. Противоречие с $z < f(y)$.

□

($\Leftarrow$) Нека сега съществува такава добра наредба $\leq$ в A, че за всяко непразно подмножество y на A е в сила $f(y) = min_{\leq} y$ и нека фиксираме тази наредба. Ще докажем, че:

$$\forall x \forall y (x, y \in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow f(x \cup y) = f(\{f(x), f(y)\}))$$

Доказателство:

Нека $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$. От 2. $f(x) = min_{\leq} x$ и $f(y) = min_{\leq} y$. Нека също така забележим, че минимумът на $x \cup y$ може да е само $f(x)$ или $f(y)$. БОО нека минимумът е $f(x)$. Тогава $f(x \cup y) = min_{\leq}(x \cup y) = f(x) = f(\{f(x), f(y)\})$.

□

Задача 12. (ZF) Нека $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. В $A \times A$ дефинираме бинарната релация $\leq^{can}$ така:
За произволни a_1, a_2, b_1 и b_2 от A, $\langle \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \rangle \in \leq^{can}$ точно тогава, когато:

$$\max_{\leq}\{a_1, b_1\} < \max_{\leq}\{a_2, b_2\} \text{ или}$$
$$\max_{\leq}\{a_1, b_1\} = \max_{\leq}\{a_2, b_2\} \ \&\ a_1 < a_2 \text{ или}$$
$$\max_{\leq}\{a_1, b_1\} = \max_{\leq}\{a_2, b_2\} \ \&\ a_1 = a_2 \ \&\ b_1 \leq b_2$$

Да се докаже, че $\langle A \times A, \leq^{can} \rangle$ е добре наредено множество.

Решение:

Нека X е непразно подмножество на $A \times A$. Ще докажем, че X има най-малък елемент относно дефинираната в условието релация. За целта ще използваме шест функции: $\max, \mathrm{fst}, \mathrm{snd} \colon A \times A \to A$; $f, g, h : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, дефинирани по следните начини:

$$\max(a, b) = \max_{\leq}\{a, b\}$$

$$\mathrm{fst}(a, b) = a$$

$$\mathrm{snd}(a, b) = b$$

$$f(B) = \{b \mid b \in B \ \&\ \max(b) = \min_{\leq}(\max[B])\}$$

$$g(B) = \{b \mid b \in B \ \&\ \mathrm{fst}(b) = \min_{\leq}(\mathrm{fst}[B])\}$$

$$h(B) = \{b \mid b \in B \ \&\ \mathrm{snd}(b) = \min_{\leq}(\mathrm{snd}[B])\}$$

Нека сега разгледаме множеството $C := h(g(f(X)))$. Да забележим, че от дефиницциите на f, g и h и от $X \neq \varnothing$ следва, че то не е празно. Нека тогава $c = \langle c_1, c_2 \rangle$ е произволен елемент на C. Твърдим, че c е най-малкият елемент на X.

Доказателство:

Нека $a = \langle a_1, a_2 \rangle \in X$. Да допуснем, че $a < c$ Тогава е изпълнено едно от трите:

1 сл. $\max_{\leq}\{a_1, a_2\} < \max_{\leq}\{c_1, c_2\}$. Тогава $c \notin f(X)$, откъдето $c \notin g(f(X))$ и $c \notin h(g(f(X))) = C$. Противоречие с $c \in C$.

2 сл. $\max_{\leq}\{a_1, a_2\} = \max_{\leq}\{c_1, c_2\}$ & $a_1 < c_1$. Тогава $c \notin g(f(X))$, откъдето $c \notin h(g(f(X))) = C$. Противоречие с $c \in C$.

3 сл. $\max_{\leq}\{a_1, a_2\} = \max_{\leq}\{c_1, c_2\}$ & $a_1 = c_1$ & $a_2 \leq c_2$. Ако $a_2 < c_2$, то $c \notin h(g(f(X))) = C$. Противоречие с $c \in C$. Така $a_2 = c_2$, откъдето $a = c$. Противоречие с $a < c$.

Така допускането ни се оказа грешно, откъдето $c \leq a$.

□

Показахме, че произволно подмножество на $A \times A$ има най-малък елемент. Така $A \times A$ е добре наредено.

□

Задача 13. Нека $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество.

1. **(ZF)** Да се докаже, че ако A е добре наредено множество, то няма функция $f : \omega \to A$, такава че за всяко естествено число n да е в сила $f(n+1) < f(n)$.

   Решение:

   Нека допуснем противното и нека фиксираме една функция $f : \omega \to A$ такава, че $\forall n \in \omega\ [f(n+1) < f(n)]$. Нека също така a е най-малкият елемент на $\mathrm{Rng}(f)$ (тъй като $\mathrm{Rng}(f) \subseteq A$, то от добрата нареденост на $\mathcal{A}$, ще следва, че такъв елемент съществува). и нека $b \in \omega$ е такова, че $f(b) = a$. Тогава $f(b+1) \in \mathrm{Rng}(f)$ и $f(b+1) < f(b) = a$. Противоречие с избора на a.

   □

2. **(ZF)+(DC)** Да се докаже, че ако няма функция $f : \omega \to A$ удовлетворяваща условието $(\forall n \in \omega)(f(n+1) < f(n))$, то $\mathcal{A}$ е добре наредено множество.

   Забележка. (DC) е така наречената *аксиома за зависимия избор*, която следва от аксиомата за избора в **(ZF)**:

   > *Всеки път, когато B е непразно множество и R е бинарна релация със свойството $(\forall x \in B)(\exists y \in B)(xRy)$, за произволно $b_0 \in B$ има такава функция $g : \omega \to B$, че $g(0) = b_0$ и $(\forall n \in \omega)(g(n)Rg(n+1))$.*

   Решение:

   Нека няма функция $f : \omega \to A$ удовлетворяваща условието $(\forall n \in \omega)(f(n+1) < f(n))$. Да допуснем, че $\mathcal{A}$ не е добре наредено множество. Тогава съществува непразно подмножество на A, което няма най-малък елемент. Нека $B \subseteq A$ е едно такова множество. Тогава:

   $$(\forall x \in B)(\exists y \in B)(x > y)$$

   От аксиомата за зависимия избор, последното влече, че за произволно $b_0 \in B$ има такава функция $g : \omega \to B$, че $g(0) = b_0$ и $(\forall n \in \omega)(g(n) > g(n+1))$. Разширявайки кодомейна на g до A, получаваме функция $g' : \omega \to A$, за която $(\forall n \in \omega)(g'(n+1) < g'(n))$. Противоречие.

   Така допускането ни се оказа грешно, откъдето $\mathcal{A}$ е добре наредено множество.

   □

Задача 14. Нека A и B са множества. Ще казваме, че $A \leq B$, ако съществува инекция $f : A \rightarrowtail B$. Ще казваме, че $A \leq^* B$, ако съществува сюрекция $f : B \twoheadrightarrow A$. Докажете, че:

1. **(ZF)** За произволни множества $A \neq \varnothing$ и B е в сила: $A \leq B \Rightarrow A \leq^* B$.

   Решение:

   Нека $f : A \rightarrowtail B$ е произволна инекция и нека a е произволен елемент на A. Дефинираме функцията $g : B \to A$ по следния начин:

   $$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{, ако } b \in \mathrm{Rng}(f) \\ a & \text{, иначе} \end{cases}$$

Твърдим, че g е сюрекция.

Доказателство:

Нека $c \in A$. Тогава $g(f(c)) = f^{-1}(f(c)) = c$, тъй като $f(c) \in \mathrm{Rng}(f)$.

$\square$

2. **(ZF)** За произволни множества A и B е в сила: $A \leq^* B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$.

Решение:

Нека $f : B \twoheadrightarrow A$ е произволна сюрекция. Дефинираме функцията $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ по следния начин:

$$g(X) = \{b \mid b \in B \ \&\ f(b) \in X\}$$

Твърдим, че g е инекция.

Доказателство:

Нека $X, X' \in \mathcal{P}(A)$ са такива, че $g(X) = g(X')$. Да допуснем, че $X \neq X'$. Нека БОО вземем $a \in A$ такова, че $a \in X \ \&\ a \notin X'$ и нека b е такова, че $f(b) = a$. Тогава $b \in g(X) \ \&\ b \notin g(X')$, откъдето $g(X) \neq g(X')$. Противоречие.

Така допускането ни се оказа грешно, следователно $X = X'$.

$\square$

3. **(ZF)** За произволни множества A и B, ако B е добре наредимо, то е в сила: $A \leq^* B \Rightarrow A \leq B$.

Решение:

Нека $f : B \twoheadrightarrow A$ е произволна сюрекция и нека $\langle B, \leq \rangle$ е произволна добра наредба. Дефинираме функцията $g : A \to B$ по следния начин:

$$g(a) = min_{\leq}(\{c \mid c \in B \ \&\ f(c) = a\})$$

Твърдим, че g е инекция.

Доказателство:

Нека $a, a' \in A$ са такива, че $g(a) = g(a')$. Тогава от дефиницията на g имаме, че:

$$a = f(g(a)) = f(g(a')) = a'$$

$\square$

4. **(ZFC)** За произволни множества A и B е в сила: $A \leq^* B \Rightarrow A \leq B$.

Решение:

Нека $f : B \twoheadrightarrow A$ е произволна сюрекция и нека $h : \mathcal{P}(B) \setminus \varnothing \to B$ е произволна функция на избора за B. Дефинираме функцията $g : A \to B$ по следния начин:

$$g(a) = h(\{c \mid c \in B \ \&\ f(c) = a\})$$

Твърдим, че g е инекция.

Доказателство:

Нека $a, a' \in A$ са такива, че $g(a) = g(a')$. Тогава от дефиницията на g имаме, че:

$$a = f(g(a)) = f(g(a')) = a'$$

$\square$

Задача 15. **(ZF)** Нека $B \subseteq A$ и $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. Да се докаже, че е в сила точно една от следните две възможности:

1. $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle \cong \langle A, \leq \rangle$.

2. $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle$ е изоморфно със собствен начален сегмент на $\langle A, \leq \rangle$.

Решение:

Първо ще докажем, че 1. и 2. не може да бъдат изпълнени едновременно.

Доказателство:

Да допуснем, че $\langle B, \leq \cap (B \times B)\rangle$ е едновременно изоморфно на $\langle A, \leq\rangle$ и на собствен начален сегмент на $\langle A, \leq\rangle$. Тогава от транзитивността на $\cong$ ще бъде вярно, че $\langle A, \leq\rangle$ е изоморфно на собствен начален сегмент на $\langle A, \leq\rangle$. Нека тогава вземем такова $x \in A$, че φ е изоморфизъм между A и $seg(x)$.[a] Тъй като φ е биекция между A и подмножество на A, то φ е инекция между A и A, откъдето следва, че φ е разширяваща *(expansive)* функция, тоест $\forall x \in A\ [x \leq \varphi(x)]$. В същото време $\varphi(x) \in seg(x)$, тоест $\varphi(x) < x$. Противоречие.

[a] Тъй като $\langle A, \leq\rangle$ е добре наредено множество, то всички собствени начални сегменти на A са от вида $seg(x)$ за $x \in A$.

Сега ще докажем, че винаги е изпълнено 1. или 2. За целта нека разгледаме релацията $f \subseteq B \times A$ дефинирана по следния начин:

$$f = \{\langle b, a\rangle \mid \langle b, a\rangle \in B \times A \ \&\ \langle seg_B(b), \leq \cap (seg_B(b) \times seg_B(b))\rangle \cong \langle seg_A(a), \leq \cap (seg_A(a) \times seg_A(a))\rangle\}$$

Твърдим, че f е функционална релация.

Доказателство:

Нека $\langle b, a_1\rangle, \langle b, a_2\rangle \in f$. Тогава от транзитивността на $\cong$ ще е изпълнено:

$$\langle seg_A(a_1), \leq \cap (seg_A(a_1) \times seg_A(a_1))\rangle \cong \langle seg_A(a_2), \leq \cap (seg_A(a_2) \times seg_A(a_2))\rangle$$

Нека допуснем, че $a_1 < a_2$. Тогава $seg_A(a_1) \subsetneq seg_A(a_2)$, откъдето съществува изоморфизъм между добре наредено множество и негов собствен начален сегмент. Но ние вече доказахме, че това е невъзможно. Така $a_1 \not< a_2$. По същия начин можем да покажем, че $a_1 \not> a_2$, откъдето $a_1 = a_2$ Така:

$$\forall b \in \mathrm{Dom}(f)\, \exists! a \in A\ [\langle seg_B(b), \leq \cap (seg_B(b) \times seg_B(b))\rangle \cong \langle seg_A(a), \leq \cap (seg_A(a) \times seg_A(a))\rangle]$$

откъдето f е функционална релация.

□

Твърдим, че освен това f запазва наредбата и $\mathrm{Dom}(f)$ е начален сегмент на B.

Доказателство:

Нека $b \in \mathrm{Dom}(f)$ и $b' \in B$ са такива, че $b' < b$ и нека $f(b) = a$. Така от дефиницията на f съществува изоморфизъм φ между $seg_B(b)$ и $seg_A(a)$. Тогава $\varphi \upharpoonright seg_B(b')$ е изоморфизъм между $seg_B(b')$ и някакво подмножество на $seg_A(a)$. Твърдим, че това подмножество е собствен начален сегмент на $seg_A(a)$.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека $a_1, a_2 \in seg_A(a)$ са такива, че $b_1 = \varphi^{-1}(a_1)$, $b_2 = \varphi^{-1}(a_2)$, $a_1 > a_2$, $a_1 \in \mathrm{Rng}(\varphi \upharpoonright seg_B(b'))$ и $a_2 \notin \mathrm{Rng}(\varphi \upharpoonright seg_B(b'))$. Тогава $b_2 \geq b' > b_1$. Противоречие с факта, че като изоморфно изображение, φ запазва наредбата.

□

Така получихме, че $\varphi \upharpoonright seg_B(b)$ е изоморфизъм между $seg_B(b')$ и собствен начален сегмент на $seg_A(a)$, откъдето $b' \in \mathrm{Dom}(f)$ и $f(b') < a$.

□

По аналогичен начин може да се докаже, че f^{-1} е запазваща наредбата функционална релация с домейн начален сегмент на A. Взимайки предвид тези съображения, следните четири случая са изчерпателни:

1 сл. $\mathrm{Dom}(f) = B \ \&\ \mathrm{Rng}(f) = A$. Тогава f е свидетел за $\langle B, \leq \cap (B \times B)\rangle \cong \langle A, \leq\rangle$.

2 сл. $\mathrm{Dom}(f) = B \ \&\ \mathrm{Rng}(f) = seg_A(a)$ за $a \in A$. Тогава f е изоморфизъм между $\langle B, \leq \cap (B \times B)\rangle$ и собствен начален сегмент на $\langle A, \leq\rangle$.

3 сл. $\mathrm{Dom}(f) = seg_B(b) \ \&\ \mathrm{Rng}(f) = A$ за $b \in B$. Тогава f^{-1} е запазваща наредбата инекция между A и A, което влече, че f^{-1} е разширяваща тоест $\forall x \in A\ [x \leq f^{-1}(x)]$. В същото време $f^{-1}(b) \in seg_B(b)$, тоест $f^{-1}(b) < b$. Противоречие.

4 сл. $\mathrm{Dom}(f) = seg_B(b) \ \&\ \mathrm{Rng}(f) = seg_A(a)$ за $a \in A$ и $b \in B$. Тогава f е изоморфизъм между $\langle seg_B(b), \leq \cap (seg_B(b) \times seg_B(b))\rangle$ и $\langle seg_A(a), \leq \cap (seg_A(a) \times seg_A(a))\rangle$, откъдето $\langle b, a\rangle \in f$. Противоречие с $\mathrm{Dom}(f) = seg_B(b)$.

$\square$

Задача 16. **(ZF)** Нека x е множество. Тогава x е ординал точно тогава, когато всяко транзитивно собствено подмножество на x е елемент на x.

Решение:

($\Rightarrow$) В едната посока нека x е ординал и нека A е транзитивно собствено подмножество на x. Да разгледаме множеството $A' = x \setminus A$. Тъй като A е собствено подмножество на x, то $A' \neq \varnothing$, откъдето от добрата наредба на x следва, че съществува елемент $y \in A'$, такъв че $y \cap A' = \varnothing$. Нека фиксираме такъв елемент y. Твърдим, че $y = A$.

Доказателство:

($\Rightarrow$) В едната посока, ще докажем, че всеки елемент на y е елемент на A. Нека $a \in y$. От $trans(x)$ това влече, че $a \in x$, Но, тъй като $y \cap A' = \varnothing$, то $a \notin A'$, откъдето $a \in A$.

($\Leftarrow$) В обратната посока, ще докажем, че всеки елемент на A е елемент на y. Нека $a \in A$. Тогава като следствие от добрата нареденост на x има три възможности: $a \in y$, $y \in a$ или $a = y$. Ако $y \in a$, то $y \in A$ от $trans(A)$. Но $y \in A'$, откъдето този случай е невъзможен. Ако $a = y$, то отново y е едновременно в A и A', което е невъзможно. Така единственият възможен случай е $a \in y$.

Показахме, че $y \subseteq A$ и $A \subseteq y$, следователно $y = A$.

$\square$

Накрая остава да съобразим, че $A = y \in A' \subseteq x$, откъдето $A \in x$.

$\square$

($\Leftarrow$) В обратната посока. Нека всяко транзитивно подмножество на x е елемент на x и нека α е най-малкият ординал, който не е елемент на x. Тъй като всеки елемент β на α е ординал, който е по-малък от α, то x ще съдържа всеки елемент на α, тоест $\alpha \subseteq x$. Разглеждаме два случая:

1. $\alpha \subsetneq x$ Тогава α е транзитивно подмножество на x, откъдето от условието $\alpha \in x$. Противоречие с избора на α.
2. $\alpha = x$. Тогава x е ординал.

$\square$

Задача 17. **(ZFC)** Нека $\langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество, което няма най-голям елемент. За едно множество $X \subseteq A$, се казва, че е кофинално с A, ако:

$$(\forall a \in A)(\exists x \in X)(a \leq x)$$

Докажете, че съществува $B \subseteq A$, което е кофинално с A и $\langle B, \leq \rangle$ е добре наредено множество.

Решение:

Нека $h : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \to A$ е произволна функция на избора, нека $*$ е такова множество, че $* \notin A$, нека $r : \mathcal{P}(A) \to A \cup \{*\}$ е дефинирана като $r := h \cup \langle \varnothing, * \rangle$ и нека G е операцията определена от следното свойство:

$$\varphi(x, y) := y = r(\{b \mid b \in A \ \& \ \forall c \in \mathrm{Rng}(x) \cap A \ [c < b]\})$$

Тогава от теоремата за трансфинитна рекурсия, съществува определима операция F такава, че:

$$(\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)]$$

Нека α е произволен ординал.
Твърдим, че ако $* \notin \mathrm{Rng}(F \restriction \alpha)$ (тоест, ако $\mathrm{Rng}(F \restriction \alpha) \subseteq A$), то $(F \restriction \alpha)$ е инективна.

Доказателство:

Забележка. За компактност на записа в рамките на доказателството ще бележим $(F \restriction \alpha)$ с f.

Нека $x_1, x_2 \in \alpha$ са такива, че $f(x_1) = f(x_2)$. Да допуснем, че $x_1 < x_2$. Тогава:

$$\begin{aligned}
f(x_2) &= G(F \restriction x_2) && // \text{ от дефиницията на } F \\
&= r(\{b \mid b \in A \ \& \ \forall c \in \mathrm{Rng}(F \restriction x_2) \cap A \ [c < b]\}) && // \text{ от дефиницията на } G \\
&= r(\{b \mid b \in A \ \& \ \forall c \in \mathrm{Rng}(F \restriction x_2) \ [c < b]\}) && // \text{ от } \mathrm{Rng}(F \restriction x_2) \subseteq \mathrm{Rng}(F \restriction \alpha) \subseteq A \\
&= h(\{b \mid b \in A \ \& \ \forall c \in \mathrm{Rng}(F \restriction x_2) \ [c < b]\}) && // \text{ от } f(x_2) \in \mathrm{Rng}(f) \not\ni *
\end{aligned}$$

Тъй като $f(x_1) \in \mathrm{Rng}(F \restriction x_2)$ и $\forall c \in \mathrm{Rng}(F \restriction x_2) \ [f(x_2) > c]$, то $f(x_1) < f(x_2)$. Противоречие с $f(x_1) = f(x_2)$. Така $x_1 \not< x_2$. По аналогичен начин може да се докаже, че $x_1 \not> x_2$, откъдето $x_1 = x_2$.

Щом за произволни $x_1, x_2 \in \alpha$, $f(x_1) = f(x_2)$ влече, че $x_1 = x_2$, то f е инекция.

$\square$

Твърдим, че освен това ако $* \notin \operatorname{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$, то $(F \upharpoonright \alpha)$ запазва наредбата на α.

Доказателство:

В доказателството на предишното твърдение изведохме, че за произволни $x_1, x_2 \in \alpha$, $x_1 < x_2$ влече, че $f(x_1) < f(x_2)$.

□

Твърдим, че също така съществува ординал α, за който $F(\alpha) = *$.

Доказателство:

Нека β е произволен ординал, за който $\overline{\overline{\beta}} > \overline{\overline{A}}$. Ако допуснем, че $*$ не е образ на никой ординал, то от първото твърдение, $F \upharpoonright \beta$ ще е инективна функция от β в A. Така $\overline{\overline{\beta}} > \overline{\overline{A}}$ & $\overline{\overline{\beta}} \leq \overline{\overline{A}}$. Противоречие.

□

Нека сега вземем α да е най-малкият ординал, за който $F(\alpha) = *$. Така от свойствата на ординалите ще бъде изпълнено, че:

$$(\forall \beta)(F(\beta) = * \iff \beta \geq \alpha)$$

Нека $B := \operatorname{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$. Да забележим, че B е подмножество на A, тъй като $* \notin \operatorname{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$.
Твърдим, че освен това B е кофинално с A.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека $a \in A$ е такова, че $\forall b \in B\ (a > b)$. Тогава $\{b \mid b \in A \;\&\; \forall c \in B\ [c < b]\} \neq \varnothing$, откъдето $r(\{b \mid b \in A \;\&\; \forall c \in B\ [c < b]\}) = h(\{b \mid b \in A \;\&\; \forall c \in B\ [c < b]\}) \neq *$. Но тогава $F(\alpha) \neq *$. Противоречие.

□

Накрая остава да съобразим, че тъй като $F \upharpoonright \alpha$ е запазваща наредбата биекция между α и B, и тъй като като ординал α е добре наредено множество, то B също е добре наредено множество.

□

Задача 18. (ZF) За произволно множество A от реални числа и за произволно реално число r с $r + A$ означаваме множеството

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \;\&\; (\exists y \in A)(x = r + y)\}.$$

Нека A е най-много изброимо множество от реални числа. Да се докаже, че има такова реално число r, че $A \cap (r + A) = \varnothing$.

Решение:

Нека фиксираме една инекция от f от A в ω. Ще извършим няколко наблюдения:

Наблюдение 1: A е добре наредимо множество.

Доказателство:

Нека $\leq$ е релация над A дефинирана по следния начин:

$$\leq = \{\langle a, b\rangle \mid \langle a, b\rangle \in A \times A \;\&\; f(a) \leq f(b)\}$$

С тази дефиниция добрата нареденост на $\langle A, \leq\rangle$ следва директно от добрата нареденост на ω.

□

Отсега нататък нека си фиксираме една добра наредба $\leq_A$ над A.

Наблюдение 2: $A \times A$ е най-много изброимо.

Доказателство:

Тъй като ω^2 е изброимо, ще бъде достатъчно да покажем съществуването на инекция от $A \times A$ в ω^2. Дефинираме $g : A \times A \to \omega^2$ по следния начин:

$$g(a, b) = \langle f(a), f(b)\rangle$$

Инективността на g следва директно от инективността на f.

□

Наблюдение 3: $A \times A$ е добре наредимо множество. (директно следствие от **Задача 12**).
Отсега нататък нека си фиксираме една добре наредба $\leq_{A\times A}$ над $A \times A$.
Да разгледаме множеството S от разликите на елементи в A:

$$S = \{r \mid r \in \mathbb{R} \ \& \ \exists \langle s, t\rangle \in A \times A \ [s - t = r]\}$$

Твърдим, че също като $A \times A$, S е най-много изброимо.

Доказателство:

Нека функцията $h : S \to A \times A$ е дефинирана по следния начин:

$$h(r) = \langle a, b\rangle \text{ за } \langle a, b\rangle = min_{\leq}\{\langle c, d\rangle \mid \langle c, d\rangle \in A \times A \ \& \ |c - d| = r\}$$

Ще докажем, че h е инекция:

Доказателство:

Нека $\langle a_1, b_1\rangle = h(r_1) = h(r_2) = \langle a_2, b_2\rangle$. Ако $r_1 \neq r_2$, то от дефиницията на h имаме, че $a_1 - b_1 = r_1 \neq r_2 = a_2 - b_2$, откъдето $\langle a_1, b_1\rangle \neq \langle a_2, b_2\rangle$. Противоречие. Така $r_1 = r_2$.

$\square$

Накрая, от транзитивността на $\leq$, щом $\overline{\overline{S}} \leq \overline{\overline{A \times A}}$ и $\overline{\overline{A \times A}} \leq \overline{\overline{\omega}}$, то $\overline{\overline{S}} \leq \overline{\overline{\omega}}$

$\square$

Щом S е най-много изброимо множество от реални числа, то съществува реално число, което не е в S. Нека r е едно такова число. Твъдим, че $A \cap (r + A) = \varnothing$.

Доказателство:

Да допуснем противното. Нека $s \in A \cap (r + A)$. От дефиницията на $r + A$ последното влече, че $(s - r) \in A$. Тогава за $\langle s, s - r\rangle \in A \times A$ е изпълнено, че $s - (s - r) = r$, откъдето $r \in S$. Противоречие с $r \notin S$.

$\square$

$\square$