

Uitwerking van extra opgave bij volledigheid van predikatenlogica

Bewijs dat een verzameling formules $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ een model heeft (“consistent” of “satisfiable” is), precies dan als het niet mogelijk is er \perp uit af te leiden. Dus:

$$\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \text{ consistent} \quad \Leftrightarrow \quad \phi_1, \dots, \phi_n \not\vdash \perp$$

Bewijs. \Rightarrow : Laat \mathcal{M} een model zijn voor $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. We weten dat $\mathcal{M} \not\models \perp$ (\perp is in geen enkel model waar) en dus dat $\phi_1, \dots, \phi_n \not\models \perp$ (\mathcal{M} is een tegenmodel).

Hier uit volgt dat $\phi_1, \dots, \phi_n \not\vdash \perp$ (correctheidsstelling).

\Leftarrow : (Bewijs uit het ongerijmde.) Stel er is geen \mathcal{M} met $\mathcal{M} \models \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Dan $\phi_1, \dots, \phi_n \models \perp$ (een tegenmodel zou $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ waar moeten maken) en dus $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \perp$ (volledigheidsstelling). Tegenspraak.

We concluderen dat $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ wel een model heeft.

□