

Uitwerking van opgave 14

bij paragraaf 5.3 van Huth&Ryan

Een voorbeeld van een frame met een reflexieve, transitieve, maar niet symmetrische toegankelijkheidsrelatie is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met

$$\begin{aligned} W &= \{x, y\} \\ R &= \{(x, x), (x, y), (y, y)\} \end{aligned}$$

(Teken het frame en controleer de eigenschappen van R !)

We laten zien dat $p \rightarrow \Box\Diamond p$ niet geldig is in \mathcal{F} ¹.

Daartoe kiezen we een labeling L met $L(x) = \{p\}$ en $L(y) = \{\}$ en bekijken we of $x \Vdash p \rightarrow \Box\Diamond p$. We zien dat $x \Vdash p$, maar $x \not\Vdash \Box\Diamond p$. Er is namelijk een wereld y bereikbaar vanuit x met $y \not\Vdash \Diamond p$ (de enige wereld bereikbaar vanuit y maakt p niet waar). Hieruit volgt dat $p \rightarrow \Box\Diamond p$ niet waar is in x en dus niet geldig in \mathcal{F} .

Gevraagd wordt nu of we een labeling op \mathfrak{F} en een wereld in W kunnen vinden zodat deze wereld $p \rightarrow \Box\Diamond p$ waar maakt. We gebruiken dezelfde labeling L als voorheen en bekijken wereld y . Hierin is p niet waar en dus hebben we gemakkelijk $y \Vdash p \rightarrow \Box\Diamond$.

¹We weten dat dit zo moet zijn omdat R niet reflexief is (zie opgave 7 van §5.3).