

Uitwerking van opgave 7

bij paragraaf 5.3 van Huth&Ryan

We bewijzen stelling 5.14 voor geval B (symmetrie), dat wil zeggen:

Het schema $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ is geldig in een frame $\mathcal{F} = (W, R)$

\iff

R is symmetrisch

- (a) We bewijzen eerst dat het schema $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ geldig is in een frame als de relatie van het frame symmetrisch is.

We nemen aan dat R symmetrisch is. Neem nu een valuatiefunctie L en een verzameling werelden W zodat $\mathcal{M} = (W, R, L)$ een model is. We laten zien dat $\mathcal{M} \models \phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$.

Kies een willekeurige x uit W en neem aan dat $x \models \phi$. We zien nu dat $y \models \Diamond\phi$ voor iedere y met $R(x, y)$:

Omdat R symmetrisch is, hebben we ook $R(y, x)$. En omdat $x \models \phi$ (onze aanname) volgt hieruit dat $y \models \phi$.

Hieruit volgt $x \models \phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ en omdat x willekeurig is ook $\mathcal{M} \models \phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$.

Merk op dat we niets aangenomen hebben over \mathcal{M} , behalve dat R symmetrisch is. Dus is $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ waar in ieder model op ieder frame met een symmetrische relatie en dus geldig in al deze frames.

- (b) We bewijzen vervolgens dat het schema $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ niet geldig is in een frame als de relatie van het frame niet symmetrisch is.

Neem een willekeurig frame $\mathcal{F} = (W, R)$ dat niet symmetrisch is. Dan zijn er dus twee werelden x en y in W zodat $R(x, y)$ en niet $R(y, x)$ ¹.

We laten nu zien dat $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ niet geldig is in \mathcal{F} . Daartoe kiezen we een valuatiefunctie L zodat $\mathcal{M} = (W, R, L)$ een model is met:

p is waar in wereld x (en nergens anders)

Nu hebben we $x \models p$, maar ook $y \not\models \Diamond p$. Want stel dat $y \models \Diamond p$, dan moet er een wereld z zijn met $R(y, z)$ en $z \models p$. Dit kan echter niet, want de enige wereld waar p waar is is wereld x en we weten dat niet $R(y, x)$.

Hieruit volgt dat we niet voor alle werelden u met $R(x, u)$ $u \models \Diamond p$ hebben en dus $x \not\models \Box\Diamond p$. Samen met $x \models p$ betekent dit dat $x \not\models p \rightarrow \Box\Diamond p$. Dit is een instantie van het schema en dus weten we ook dat $x \not\models \phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$.

Hiermee hebben we laten zien dat er een wereld in een model op \mathcal{F} is waar $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ niet waar is dus dat $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ niet geldig is in \mathcal{F} .

¹Merk op dat dit niet de enige werelden in W en paren in R hoeven te zijn. We weten echter wel dat tenminste x en y bestaan, dat $R(x, y)$ en dat zeker niet $R(y, x)$.