Uitwerking van extra opgave

bij volledigheid van predikatenlogica

Bewijs dat een verzameling formules $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ een model heeft ("consistent" of "satisfiable" is), precies dan als het niet mogelijk is er $\perp$ uit af te leiden. Dus:

$$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \text{ consistent} \quad \Leftrightarrow \quad \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \nvdash \perp$$

Bewijs. $\Rightarrow$: Laat $\mathcal{M}$ een model zijn voor $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. We weten dat $\mathcal{M} \not\models \perp$ ($\perp$ is in geen enkel model waar) en dus dat $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \not\models \perp$ ($\mathcal{M}$ is een tegenmodel).

Hier uit volgt dat $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \nvdash \perp$ (correctheidsstelling).

$\Leftarrow$: (Bewijs uit het ongerijmde.) Stel er is geen $\mathcal{M}$ met $\mathcal{M} \models \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Dan $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \perp$ (een tegenmodel zou $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ waar moeten maken) en dus $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \perp$ (volledigheidsstelling). Tegenspraak.

We concluderen dat $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ wel een model heeft.

$\square$