Uitwerkingen van opgaven 6 a en d

bij paragraaf 5.2 van Huth&Ryan

(a) We moeten laten zien dat $\models \Box(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi)$ geldt. Dat wil zeggen, dat deze formule waar is in iedere wereld in ieder model. We bekijken daarvoor een willekeurige wereld x in een willekeurig model $\mathcal{M} = (W, R, L)$.

Volgens definitie 5.4 geldt $\mathcal{M}, x \Vdash \Box(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi)$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}, x \Vdash \Box(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \Vdash (\Box\phi \wedge \Box\psi)$. We beschouwen beide richtingen:

$\Rightarrow$ Wegens $\mathcal{M}, x \Vdash \Box(\phi \wedge \psi)$ geldt $\mathcal{M}, y \Vdash \phi \wedge \psi$ voor alle werelden $y \in W$ met $R(x, y)$ (naar de betekenis van $\Box$, zie steeds definitie 5.4). De betekenis van conjunctie zegt ons dat dan ook $\mathcal{M}, y \Vdash \phi$ voor alle $y \in W$ met $R(x, y)$ en $\mathcal{M}, y \Vdash \psi$ voor alle $y \in W$ met $R(x, y)$. Dit geeft samen $\mathcal{M}, x \Vdash \Box\phi$ en $\mathcal{M}, x \Vdash \Box\psi$ en dus $\mathcal{M}, x \Vdash (\Box\phi \wedge \Box\psi)$.

$\Leftarrow$ Gegeven is nu dat $\mathcal{M}, x \Vdash (\Box\phi \wedge \Box\psi)$ en dus hebben we $\mathcal{M}, x \Vdash \Box\phi$ en $\mathcal{M}, x \Vdash \Box\psi$ volgens de betekenis van conjunctie. Maar dan geldt ook dat $\mathcal{M}, y \Vdash \phi$ voor alle werelden $y \in W$ met $R(x, y)$ en $\mathcal{M}, y \Vdash \psi$ voor alle werelden $y \in W$ met $R(x, y)$. Samen geeft dat $\mathcal{M}, y \Vdash \phi \wedge \psi$ voor alle $y \in W$ met $R(x, y)$ en dat maakt precies dat $\mathcal{M}, x \Vdash \Box(\phi \wedge \psi)$.

(b) We moeten laten zien dat $\Diamond \perp \leftrightarrow \perp$ geldig is, dus dat dezelfde werelden $\Diamond \perp$ en $\perp$ waar maken. Op de eerste plaats is er geen enkele wereld die $\perp$ waar maakt (zie wederom steeds definitie 5.4). Kijken we naar $\Diamond \perp$, dan zien we dat deze formule waar gemaakt wordt door precies de werelden van waaruit een wereld toegankelijk is die $\perp$ waar maakt. Zoals al opgemerkt bestaat een dergelijke wereld niet, dus is er ook geen enkele wereld die $\Diamond \perp$ waar maakt. Hieruit volgt dat $\Diamond \perp \leftrightarrow \perp$ geldig is.