Inleiding Theoretische Informatica – Equationele Specificaties

Uitwerkingen bij opgaven 3.1, 3.4, 5.1, 5.5, 6.1

Martijn Vermaat (mvermaat@cs.vu.nl)

5 april 2006

Opgave 3.1

(a) Een afleiding in de specificate `Stack-Of-Data` van de vergelijking

`pop(pop(pop(empty))) = empty`

1	`pop(empty) = empty`	[1]
2	`pop(pop(empty)) = pop(empty)`	congr, 1
3	`pop(pop(pop(empty))) = pop(pop(empty))`	congr, 2
4	`pop(pop(empty))) = empty`	trans, 1, 2
5	`pop(pop(pop(empty))) = empty`	trans, 3, 4

(b) Een afleiding in de specificatie `Stack-Of-Data` van de vergelijking

`pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = empty`

1	`pop(push(x, s)) = s`	[3]
2	`pop(push(x, empty)) = empty`	subs, 1
3	`pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = pop(push(x, empty))`	subs, 1
4	`pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = empty`	trans, 3, 2

Opgave 3.4

Om te laten zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is, laten we zien dat $\sim$ transitief, symmetrisch en reflexief is.

Transitiviteit

Stel $t \sim u$ en $u \sim v$, dan is volgens de definitie $E \vdash t = u$ en $E \vdash u = v$. Wegens de regel *transitiviteit* van de afleidbaarheid, is dan ook $E \vdash t = v$. Met de definitie zien we dan weer dat ook $t \sim v$ waar is en dus is $\sim$ transitief.

Symmetrie

Stel $t \sim u$, dan is volgens de definitie $E \vdash t = u$. De afleidingsregel *symmetrie* zegt dat dan ook $E \vdash u = t$ en volgens de definitie zien we dan weer dat ook $u \sim t$. En dus is $\sim$ symmetrisch.

Reflexiviteit

Voor iedere term t geldt volgens de afleidingsregel *reflexiviteit* dat $E \vdash t = t$. Onze definitie zegt dan dat ook $t \sim t$ en dus is $\sim$ reflexief.

Omdat $\sim$ transitief, symmetrisch en reflexief is, is $\sim$ een equivalentierelatie.

Opgave 5.1

De algebra $\mathfrak{P}(V)$ (met V een verzameling) heeft als drager de machtsverzameling van V. De functies worden geïnterpreteerd als

$$\begin{aligned}
\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)} &= V, \\
\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)} &= \{\}, \\
\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(X) &= V - X, \\
\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(X, Y) &= X \cap Y, \\
\texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(X, Y) &= X \cup Y.
\end{aligned}$$

We constateren eerst dat $\mathfrak{P}(V)$ een algebra voor `Booleans` is omdat de functietypes kloppen. Vervolgens laten we zien dat $\mathfrak{P}(V)$ zelfs een model is voor `Booleans` door te laten zien dat alle vergelijkingen (`[B1]` ... `[B5]`) waar zijn in $\mathfrak{P}(V)$.

Laat θ een assignment zijn van elementen uit $\mathcal{P}(V)$ aan de variabelen x en y, volgens

$$\begin{aligned}
&\theta : \{x, y\} \to \mathcal{P}(V), \\
&\theta(x) = X, \\
&\theta(y) = Y.
\end{aligned}$$

We laten nu zien dat voor iedere vergelijking uit `Booleans` de rechter kant identiek is aan de linker kant onder $\bar{\theta}$.

- `[B1] and(true,x) = x`

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{true}, x)) &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{true}), \bar{\theta}(x)) \\
&= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)}, \theta(x)) \\
&= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(V, X) \\
&= V \cap X \\
&= X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(x) &= \theta(x) \\
&= X
\end{aligned}$$

- `[B2] and(false,x) = false`

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{false}, x)) &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{false}), \bar{\theta}(x)) \\
&= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)}, \theta(x)) \\
&= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\{\}, X) \\
&= \{\} \cap X \\
&= \{\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{false}) &= \texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)}\\ &= \{\}\end{aligned}$$

- [B3] `not(true) = false`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not(true)}) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{true}))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)})\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(V)\\ &= V - V\\ &= \{\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{false}) &= \texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)}\\ &= \{\}\end{aligned}$$

- [B4] `not(false) = true`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not(false)}) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{false}))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)})\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\{\})\\ &= V - \{\}\\ &= V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{true}) &= \texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)}\\ &= V\end{aligned}$$

- [B5] `or(x,y) = not(and(not(x),not(y)))`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{or}(x,y)) &= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(x),\bar{\theta}(y))\\ &= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(x),\theta(y))\\ &= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(X,Y)\\ &= X \cup Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not}(\texttt{and}(\texttt{not}(x),\texttt{not}(y)))) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{not}(x),\texttt{not}(y))))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{not}(x)),\bar{\theta}(\texttt{not}(y))))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(x)),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(y))))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(x)),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(y))))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(X),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(Y)))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(V-X,V-Y))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}((V-X)\cap(V-Y))\\ &= V-((V-X)\cap(V-Y))\\ &= X \cup Y\end{aligned}$$

Hiermee hebben we laten zien dat iedere vergelijking in `Booleans` waar is in $\mathfrak{P}(V)$ en dus dat $\mathfrak{P}(V)$ een model is voor de specificatie `Booleans`.

Opgave 5.5

Om te laten zien dat een bepaalde vergelijking niet afleidbaar is uit een specificatie kunnen we een tegenmodel construeren. Dit is een model voor de specificatie waarin de gegeven vergelijking niet waar is. Volgens de correctheidsstelling is deze vergelijking dan ook niet afleidbaar uit de specificatie.

We volgen de hint op die bij de opgave gegeven wordt. We beschouwen de algebra $\mathfrak{M}$ voor de specificatie `NatBool` met drager A en interpretaties als we gewend zijn, behalve voor interpretaties hier onder gedefiniëerd.

$$\begin{aligned} A_{\texttt{nat}} &= \{\omega, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ A_{\texttt{bool}} &= \{T, F\} \end{aligned}$$

Voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ definiëren we interpretaties als volgt.

$$\begin{aligned}
\texttt{0}_{\mathfrak{M}} &= 0 \\
\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(n) &= n + 1 \\
\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= \omega \\
\texttt{add}_{\mathfrak{M}}(m, n) &= m + n \\
\texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega, n) &= \omega \\
\texttt{add}_{\mathfrak{M}}(n, \omega) &= \omega \\
\texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega, \omega) &= \omega \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(m, n) &= m * n \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, 0) &= 0 \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, n+1) &= \omega \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(n, \omega) &= \omega \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, \omega) &= \omega \\
\texttt{even}_{\mathfrak{M}}(n) &= \begin{cases} T & \text{als } n \text{ even is} \\ F & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases} \\
\texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= T \\
\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(n) &= \begin{cases} F & \text{als } n \text{ even is} \\ T & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases} \\
\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= T
\end{aligned}$$

We hebben dus een algebra geconstrueerd waarin we een extra element toegevoegd hebben dat 'zowel even als oneven' is. Om alle vergelijkingen nog waar te maken was er wat puzzelwerk nodig (je kunt ω opvatten als nuldeler voor zowel optelling als vermeningvuldiging als je er iets in wilt zien).

Nu moeten we laten zien dat $\mathfrak{M}$ een model is voor de specificatie `NatBool`. We laten de vergelijkingen `[B1]` ... `[B5]` voor wat ze zijn; onze toevoeging van ω heeft hier geen invloed op. Van de overige vergelijkingen uit `NatBool` laten we voor `[A1]`, `[M2]` en `[E2]` zien dat ze waar zijn in $\mathfrak{M}$, de rest gaat op vergelijkbare wijze.

Laat nu θ een assignment zijn van elementen uit A aan de variabelen x en y. We stellen dat $\theta(x) = a$ en $\theta(y) = b$.

- `[A1] add(x,0) = x`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(x, \texttt{0})) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x), \bar{\theta}(\texttt{0})) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\theta(x), 0_{\mathfrak{M}}) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(a, 0) \\ &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(x) &= \theta(x) \\ &= a\end{aligned}$$

- `[M2] mul(x,succ(y)) = add(mul(x,y),x)`

  We schrijven eerst de linkerkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x), \bar{\theta}(\texttt{succ}(y))) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\theta(x), \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(y))) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\theta(y))) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(b))\end{aligned}$$

  We onderscheiden nu verschillende gevallen voor a en b.

  - Wanneer $a = b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, \omega) \\ &= \omega\end{aligned}$$

  - Wanneer $a, b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, b + 1) \\ &= a * (b + 1)\end{aligned}$$

  - Wanneer $a = \omega$ en $b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, b + 1) \\ &= \omega\end{aligned}$$

  - Wanneer $a \in \mathbb{N}$ en $b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, \omega) \\ &= \omega\end{aligned}$$

En vervolgens schrijven we de rechterkant uit.

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\texttt{mul}(x,y),x)) \\
&= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x),\bar{\theta}(y)),\bar{\theta}(x)) \\
&= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\theta(x),\theta(y)),\theta(x)) \\
&= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,b),a)
\end{aligned}$$

We onderscheiden nu weer dezelfde gevallen voor a en b.

- Wanneer $a = b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,\omega),\omega) \\
&= \omega
\end{aligned}$$

- Wanneer $a, b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,b),a) \\
&= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(a * b, a) \\
&= (a * b) + a \\
&= a * (b + 1)
\end{aligned}$$

- Wanneer $a = \omega$ en $b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,b),\omega) \\
&= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\ldots,\omega) \\
&= \omega
\end{aligned}$$

- Wanneer $a \in \mathbb{N}$ en $b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,\omega),a) \\
&= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega,a) \\
&= \omega
\end{aligned}$$

- `[E2] even(succ(x)) = odd(x)`

  We schrijven weer eerst de linkerkant uit.

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\texttt{succ}(x))) \\
&= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)))) \\
&= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)))) \\
&= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(a))
\end{aligned}$$

We onderscheiden twee gevallen voor a.

- Wanneer $a \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(a)) \\
&= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(a+1) \\
&= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(a+1) \\
&= \begin{cases} F & \text{als } a \text{ even is} \\ T & \text{als } a \text{ oneven is} \end{cases}
\end{aligned}$$

– Wanneer $a = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

En vervolgens schrijven we de rechterkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a)\end{aligned}$$

We onderscheiden weer twee gevallen voor a.

– Wanneer $a \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a) \\ &= \begin{cases} F & \text{als } a \text{ even is} \\ T & \text{als } a \text{ oneven is}\end{cases}\end{aligned}$$

– Wanneer $a = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

We hebben nu laten zien dat $\mathfrak{M}$ inderdaad een model is voor de specificatie `NatBool`. Nu bekijken we de vergelijking

`even(x) = not(odd(x))`

en zien dat deze niet waar is in $\mathfrak{M}$. Beschouw bijvoorbeeld de assignment θ met $\theta(x) = \omega$. We hebben dan

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(x)) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not}(\texttt{odd}(x))) &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\texttt{odd}(x))) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x))) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\theta(x))) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(T) \\ &= F.\end{aligned}$$

Uit alle vergelijkingen van `NatBool` volgt deze vergelijking dus niet semantisch. Volgens de correctheid van afleidbaarheid, is deze vergelijking dan ook niet afleidbaar in de specificatie `NatBool`.

Opgave 6.1

(a) We hebben bij opgave 5.1 gezien dat iedere verzamelingsalgebra $\mathfrak{P}(V)$ over een verzameling V (als in voorbeeld 4.3) een model is voor de specificatie `Booleans`. Nu beschouwen we de algebra $\mathfrak{P}(F)$ over de verzameling $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ met als drager $\mathcal{P}(F)$.

Wel junk Iedere gesloten term uit `Booleans` wordt in $\mathfrak{P}(F)$ geïnterpreteerd als òfwel heel F, òfwel de lege verzameling $\{\}$. Het bewijs hiervan verloopt via inductie naar de structuur van de term en laten we hier achterwege.

Laten we nu het element $\{2, 4, 5\}$ uit $\mathfrak{P}(F)$ bekijken. Dit is niet F, ook niet $\{\}$ en dus niet de interpretatie van een gesloten term. Hieruit volgt dat $\mathfrak{P}(F)$ junk bevat.

Geen confusion Voor iedere gesloten term t uit `Booleans` geldt dat

$$\vdash t = \texttt{true} \quad \text{of} \quad \vdash t = \texttt{false}. \qquad \text{(volgens voorbeeld 6.3)}$$

Laat nu s en t gesloten termen zijn met $\not\vdash t = s$. Dan moet òfwel $\vdash s = \texttt{true}$ en $\vdash t = \texttt{false}$, òfwel $\vdash s = \texttt{false}$ en $\vdash t = \texttt{true}$. In beide gevallen worden s en t als verschillende elementen van $\mathfrak{P}(F)$ geïnterpreteerd en dus bevat $\mathfrak{P}(F)$ geen confusion.

(b) Laten we nu analoog aan onderdeel **(a)** de verzamelingsalgebra $\mathfrak{P}(\{\})$ over de lege verzameling bekijken met in de drager als enige element $\{\}$.

Geen junk Volgens de definitie van de verzamelingsalgebra interpreteren we nu `true` als $\{\}$. Hieruit volgt direct dat $\mathfrak{P}(\{\})$ geen junk bevat, want het enige element uit de drager is de interpretatie van een gesloten term.

Wel confusion In de algebra $\mathfrak{P}(\{\})$ worden de interpretaties van de termen `true` en `false` geïdentificeerd. Toch is de vergelijking `true` = `false` niet afleidbaar uit de specificatie `Booleans` (bovenstaande algebra $\mathfrak{P}(F)$ is bijvoorbeeld een tegenmodel) en dus bevat $\mathfrak{P}(\{\})$ confusion.

(c) We bekijken de algebra $\mathfrak{B}_3$ voor de specificatie `Booleans` met als drager $\{A, B, C\}$ en interpretaties

$$\begin{aligned} \texttt{true}_{\mathfrak{B}_3} &= B, \\ \texttt{false}_{\mathfrak{B}_3} &= B, \\ \texttt{and}_{\mathfrak{B}_3}(x, y) &= B, \\ \texttt{or}_{\mathfrak{B}_3}(x, y) &= B, \\ \texttt{not}_{\mathfrak{B}_3}(x) &= B. \end{aligned}$$

Dat $\mathfrak{B}_3$ een model is voor `Booleans` mag duidelijk zijn (iedere term evalueert naar B en dus is iedere vergelijking waar).

Wel junk Het is niet moeilijk in te zien dat iedere gesloten term uit `Booleans` wordt in $\mathfrak{B}_3$ geïnterpreteerd als B. Dit betekent dat de elementen A en C niet de interpretatie van een gesloten term zijn en dus dat $\mathfrak{B}_3$ junk bevat.

Wel confusion In de algebra $\mathfrak{B}_3$ worden de interpretaties van de termen `true` en `false` geïdentificeerd. Toch is de vergelijking `true` $=$ `false` niet afleidbaar uit de specificatie `Booleans` (bovenstaande algebra $\mathfrak{P}(F)$ is bijvoorbeeld een tegenmodel) en dus bevat $\mathfrak{B}_3$ confusion.