Uitwerking van opgave 3c

bij paragraaf 1.5 van Huth&Ryan

Stelling. *De verzameling connectieven* $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *is niet functioneel volledig.*

Notatie Laat $v : \texttt{atoms} \to \{\texttt{T}, \texttt{F}\}$ een waardetoekenning zijn.

We schrijven $[\![\phi]\!]_v$ voor de waarde van ϕ onder v. Met $v \diamond p$ bedoelen we de waardetoekenning v met alleen de waarde voor p veranderd:

$$v \diamond p\,(q) = \begin{cases} v(q) & \text{als } q \neq p \\ v(q)^{-1} & \text{anders} \end{cases}$$

Lemma 1. *Laat* ϕ *een welgevormde formule zijn over* $\{\texttt{atoms}, \neg, \leftrightarrow\}$*. Voor iedere* $p \in \texttt{atoms}$ *geldt*

$[\![\phi]\!]_v \neq [\![\phi]\!]_{v \diamond p}$ *voor iedere waardetoekenning* v*, òf*

$[\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_{v \diamond p}$ *voor iedere waardetoekenning* v*.*

Bewijs. Via inductie naar de structuur van ϕ:

Basisgeval $\phi = q$

Triviaal.

Inductiestap $\phi = \neg\psi$

Direct via de inductiehypothese en $[\![\phi]\!]_v \neq [\![\neg\psi]\!]_v$ voor willekeurige v.

Inductiestap $\phi = \psi \leftrightarrow \chi$

Beschouw $p \in \texttt{atoms}$. De inductiehypothesen geven vier gevallen:

1. $[\![\psi]\!]_u = [\![\psi]\!]_{u \diamond p}$ en $[\![\chi]\!]_w = [\![\chi]\!]_{w \diamond p}$ voor alle $u, w \Rightarrow [\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_{v \diamond p}$ voor alle v
2. $[\![\psi]\!]_u \neq [\![\psi]\!]_{u \diamond p}$ en $[\![\chi]\!]_w \neq [\![\chi]\!]_{w \diamond p}$ voor alle $u, w \Rightarrow [\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_{v \diamond p}$ voor alle v
3. $[\![\psi]\!]_u = [\![\psi]\!]_{u \diamond p}$ en $[\![\chi]\!]_w \neq [\![\chi]\!]_{w \diamond p}$ voor alle $u, w \Rightarrow [\![\phi]\!]_v \neq [\![\phi]\!]_{v \diamond p}$ voor alle v
4. $[\![\psi]\!]_u \neq [\![\psi]\!]_{u \diamond p}$ en $[\![\chi]\!]_w = [\![\chi]\!]_{w \diamond p}$ voor alle $u, w \Rightarrow [\![\phi]\!]_v \neq [\![\phi]\!]_{v \diamond p}$ voor alle v $\square$

Bewijs van stelling. Stel $\{\neg, \leftrightarrow\}$ is functioneel volledig. Laat ϕ een welgevormde formule zijn over $\{\texttt{atoms}, \neg, \leftrightarrow\}$ met $\phi \equiv p \to q$. Dan $[\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_{v \diamond p}$ voor iedere v met $v(q) = \texttt{T}$ en $[\![\phi]\!]_v \neq [\![\phi]\!]_{v \diamond p}$ voor iedere v met $v(q) = \texttt{F}$. Dit is in tegenspraak met lemma 1. $\square$