Uitwerking van opgave 16c

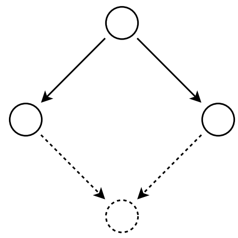
bij paragraaf 5.3 van Huth&Ryan

We zoeken een eigenschap van de toegankelijkheidsrelatie die correspondeert met het formuleschema $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$, dat wil zeggen:

Het schema $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$ is geldig in een frame $\mathcal{F} = (W, R)$
$\Longleftrightarrow$
R heeft de gezochte eigenschap

De gezochte eigenschap wordt wel de 'diamond property' genoemd en is als volgt gedefinieerd:

$$\forall xyz\ [\ Rxy \wedge Rxz\ \to\ \exists t\ (Ryt \wedge Rzt)\ ]$$



Er rest ons nog te bewijzen dat de diamond property inderdaad correspondeert met het gegeven formuleschema.

(a) We bewijzen eerst dat het schema $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$ geldig is in een frame als de relatie van het frame de diamond property heeft.

We nemen aan dat R de diamond property heeft. Neem nu een labeling functie L en een verzameling werelden W zodat $\mathcal{M} = (W, R, L)$ een model is. We laten zien dat $\mathcal{M} \Vdash \Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$.

Kies een willekeurige x uit W en neem aan dat $x \Vdash \Diamond\Box\phi$. Er is dus een y met Rxy en $y \Vdash \Box\phi$. De diamond property zegt nu dat voor iedere z met Rxz er een t bestaat met Ryt en Rzt. Dat betekent dat $t \Vdash \phi$ (immers, $y \Vdash \Box\phi$). Maar dan hebben we voor iedere z met Rxz dus $z \Vdash \Diamond\phi$. Dit geeft precies $x \Vdash \Box\Diamond\phi$.

Hiermee hebben we laten zien dat $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$ waar is in iedere wereld van ieder model op ieder frame met de diamond property en dus geldig in al deze frames.

(b) We bewijzen vervolgens dat het schema $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$ niet geldig is in een frame als de relatie van het frame niet de diamond property heeft.

Neem een willekeurig frame $\mathcal{F} = (W, R)$ zonder de diamond property. Dan zijn er dus drie werelden x, y en z in W zodat Rxy en Rxz zonder dat er een wereld t bestaat met Ryt en Rzt.

We laten nu zien dat $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$ niet geldig is in $\mathcal{F}$. Daartoe kiezen we een labeling functie L zodat $\mathcal{M} = (W, R, L)$ een model is met:

p is waar in alle werelden u met Ryu en nergens anders

Nu hebben we $x \Vdash \Diamond\Box p$, want y is toegankelijk vanuit x en alle werelden vanuit y toegankelijk maken p waar.

Maar we hebben *niet* $x \Vdash \Box\Diamond p$, immers, $\Diamond p$ zou waar moeten zijn in alle werelden bereikbaar vanuit x, waaronder z. Maar $z \nVdash \Diamond p$ omdat er geen wereld bereikbaar is vanuit z die p waar maakt. De enige werelden die p waar maken zijn bereikbaar vanuit y en er is geen wereld t met Ryt en Rzt.

Dit betekent dat $x \nVdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$. Dit is een instantie van het schema en dus weten we ook dat $x \nVdash \Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$.

Hiermee hebben we laten zien dat er een wereld in een model op $\mathcal{F}$ is waar $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$ niet waar is, dus dat $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$ niet geldig is in $\mathcal{F}$.