Inleiding Theoretische Informatica – Lambda Calculus

Uitwerkingen van geselecteerde opgaven

Martijn Vermaat (mvermaat@cs.vu.nl)

10 maart 2006

1 Termen en reductie

2. $\lambda x.\lambda y.\mathsf{0}$ of $\lambda xy.\mathsf{0}$

3. (a) $(\,(\lambda x.(\lambda y.(x\,(y\,z))))\quad(\lambda x.((y\,x)\,x))\,)$

4. (b) $(\lambda x.x)\quad(\lambda x.\lambda y.x\,y\,y)\quad\lambda x.\lambda y.x\,(x\,y)$

7. (a) Nee.
   (c) Nee.
   (e) Nee.
   (h) Ja.

8. (b) $(\lambda x.\mathsf{mul}\,x\,y)$
   (c) $(\lambda x.\mathsf{mul}\,x\,5)$
   (h) $(\lambda z.(\lambda y.\mathsf{plus}\,x\,y)\,z)$

10. (a) $\underline{(\lambda y.\mathsf{mul}\,3\,y)\;7}\quad\rightarrow_\beta\quad\mathsf{mul}\,3\,7\quad\rightarrow_\delta\quad 21$
    (d)

$$\begin{aligned}\underline{(\lambda f\,x.f\,x)\quad(\lambda y.\mathsf{plus}\,x\,y)}\quad 3 &\rightarrow_\beta \underline{(\lambda z.\underline{(\lambda y.\mathsf{plus}\,x\,y)\,z})\quad 3}\\ &\rightarrow_\beta \underline{(\lambda z.\mathsf{plus}\,x\,z)\quad 3}\\ &\rightarrow_\beta \mathsf{plus}\,x\,3\end{aligned}$$

    (f)

$$\begin{aligned}\underline{(\lambda f\,x.f\,(f\,(x)))\;(\lambda x.\mathsf{mul}\,x\,7)}\;3 &\rightarrow_\beta \underline{(\lambda x.\underline{(\lambda x.\mathsf{mul}\,x\,7)\;(\underline{(\lambda x.\mathsf{mul}\,x\,7)\;(x)})})\;3}\\ &\rightarrow_\beta \underline{(\lambda x.\underline{(\lambda x.\mathsf{mul}\,x\,7)\;(\mathsf{mul}\,x\,7)})\;3}\\ &\rightarrow_\beta \underline{(\lambda x.\mathsf{mul}\,(\mathsf{mul}\,x\,7)\,7)\;3}\\ &\rightarrow_\beta \mathsf{mul}\,(\mathsf{mul}\,3\,7)\,7\\ &\rightarrow_\delta \mathsf{mul}\,21\,7\\ &\rightarrow_\delta 147\end{aligned}$$

2 Reductiestrategieën

2. (a)

$$\begin{aligned}(\lambda x.x\,x\,x)\ \ \lambda x.x\,x\,x &\to_\beta (\lambda x.x\,x\,x)\ \ (\lambda x.x\,x\,x)\ \ \lambda x.x\,x\,x\\ &\to_\beta (\lambda x.x\,x\,x)\ \ (\lambda x.x\,x\,x)\ \ (\lambda x.x\,x\,x)\ \ \lambda x.x\,x\,x\\ &\to_\beta (\lambda x.x\,x\,x)\ \ (\lambda x.x\,x\,x)\ \ (\lambda x.x\,x\,x)\ \ (\lambda x.x\,x\,x)\ \ \lambda x.x\,x\,x\\ &\to_\beta \ldots\text{etc.}\end{aligned}$$

(c) De leftmost-innermost strategie vindt altijd een normaalvorm als deze bestaat. We vinden in dit geval geen normaalvorm, dus heeft deze term geen normaalvorm.

3 Datatypes

9. (a)

$$\begin{aligned}\mathsf{xor\,true\,true} &=_\beta \mathsf{false}\\ \mathsf{xor\,true\,false} &=_\beta \mathsf{true}\\ \mathsf{xor\,false\,true} &=_\beta \mathsf{true}\\ \mathsf{xor\,false\,false} &=_\beta \mathsf{false}\end{aligned}$$

(b) $\mathsf{xor} := \lambda ab.b\,(a\,\mathsf{false\,true})\,(a\,\mathsf{true\,false})$

(c)

$$\begin{aligned}\mathsf{xor\,true\,false} &= (\lambda ab.b\,(a\,\mathsf{false\,true})\,(a\,\mathsf{true\,false}))\,(\lambda xy.x)\,\lambda xy.y\\ &\to_\beta (\lambda b.b\,((\lambda xy.x)\,\mathsf{false\,true})\,((\lambda xy.x)\,\mathsf{true\,false}))\,\lambda xy.y\\ &\to_\beta (\lambda xy.y)\,((\lambda xy.x)\,\mathsf{false\,true})\,((\lambda xy.x)\,\mathsf{true\,false})\\ &\to_\beta (\lambda y.y)\,((\lambda xy.x)\,\mathsf{true\,false})\\ &\to_\beta (\lambda xy.x)\,\mathsf{true\,false}\\ &\to_\beta (\lambda y.\mathsf{true})\,\mathsf{false}\\ &\to_\beta \mathsf{true}\end{aligned}$$

4 Recursie

7. Een eerste poging is deze recursieve definitie van map
$\mathsf{map} = \lambda fl.(\mathsf{empty}\,l)\,\mathsf{nil}\,(\mathsf{cons}\,(f\,(\mathsf{head}\,l))\,(\mathsf{map}\,f\,(\mathsf{tail}\,l)))$

Dit kunnen we ook schrijven als
$\mathsf{map} = (\lambda m.\lambda fl.(\mathsf{empty}\,l)\,\mathsf{nil}\,(\mathsf{cons}\,(f\,(\mathsf{head}\,l))\,(m\,f\,(\mathsf{tail}\,l))))\,\mathsf{map}$

Nu kunnen we de fixed-point combinator Y gebruiken om hiervan de uiteindelijke definitie van map te maken:
$\mathsf{map} = \mathsf{Y}\,\lambda m.\lambda fl.(\mathsf{empty}\,l)\,\mathsf{nil}\,(\mathsf{cons}\,(f\,(\mathsf{head}\,l))\,(\mathsf{map}\,f\,(\mathsf{tail}\,l)))$

5 Getypeerde λ-calculus

1. (c) De term $\mathsf{K\,I}$ is gelijk aan $(\lambda xy.x)\,\lambda x.x$.

$$
\dfrac{\dfrac{x : C \vdash x : C}{\vdash \lambda x.x : C \to C} \qquad \dfrac{\dfrac{x : C \to C, y : B \vdash x : C \to C}{x : C \to C \vdash \lambda y.x : B \to C \to C}}{\vdash \lambda xy.x : (C \to C) \to B \to C \to C}}{\vdash (\lambda xy.x)\, \lambda x.x : B \to C \to C}
$$