Uitwerkingen bij Inleiding Theoretische Informatica
Deel 1: Equationele Logica – Syntax en semantiek

Opgave 5.5

We volgen de hint op die bij de opgave gegeven wordt. We beschouwen de algebra $\mathfrak{M}$ voor de specificatie `NatBool` met drager A en interpretaties als we gewend zijn, behalve voor interpretaties hier onder gedefiniëerd.

$$\begin{aligned} A_{\texttt{nat}} &= \{\omega, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ A_{\texttt{bool}} &= \{T, F\} \end{aligned}$$

Voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ definiëren we interpretaties als volgt.

$$\begin{aligned}
\texttt{0}_{\mathfrak{M}} &= 0 \\
\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(n) &= n + 1 \\
\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= \omega \\
\texttt{add}_{\mathfrak{M}}(m, n) &= m + n \\
\texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega, n) &= \omega \\
\texttt{add}_{\mathfrak{M}}(n, \omega) &= \omega \\
\texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega, \omega) &= \omega \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(m, n) &= m * n \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, 0) &= 0 \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, n + 1) &= \omega \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(n, \omega) &= \omega \\
\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, \omega) &= \omega \\
\texttt{even}_{\mathfrak{M}}(n) &= \begin{cases} T & \text{als } n \text{ even is} \\ F & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases} \\
\texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= T \\
\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(n) &= \begin{cases} F & \text{als } n \text{ even is} \\ T & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases} \\
\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= T
\end{aligned}$$

We hebben dus een algebra geconstrueerd waarin we een extra element toegevoegd hebben dat ‘zowel even als oneven’ is. Om alle vergelijkingen nog waar te maken was er wat puzzelwerk nodig (je kunt ω opvatten als nuldeler voor zowel optelling als vermeningvuldiging als je er iets in wilt zien).
Nu moeten we laten zien dat $\mathfrak{M}$ een model is voor de specificatie `NatBool`. We laten de vergelijkingen `[B1]` ...`[B5]` voor wat ze zijn; onze toevoeging van ω heeft hier geen invloed op. Van de overige vergelijkingen uit `NatBool` laten we voor `[A1]`, `[M2]` en `[E2]` zien dat ze waar zijn in $\mathfrak{M}$, de rest gaat op vergelijkbare wijze.

Laat nu θ een assignment zijn van elementen uit A aan de variabelen x en y. We stellen dat $\theta(x) = a$ en $\theta(y) = b$.

- `[A1] add(x,0) = x`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(x, \texttt{0})) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x), \bar{\theta}(\texttt{0})) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\theta(x), 0_{\mathfrak{M}}) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(a, 0) \\ &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(x) &= \theta(x) \\ &= a\end{aligned}$$

- `[M2] mul(x,succ(y)) = add(mul(x,y),x)`

  We schrijven eerst de linkerkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x), \bar{\theta}(\texttt{succ}(y))) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\theta(x), \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(y))) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\theta(y))) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(b))\end{aligned}$$

  We onderscheiden nu verschillende gevallen voor m en n.

  - Wanneer $a = b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, \omega) \\ &= \omega\end{aligned}$$

  - Wanneer $a, b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, b + 1) \\ &= a * (b + 1)\end{aligned}$$

  - Wanneer $a = \omega$ en $b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega, b + 1) \\ &= \omega\end{aligned}$$

  - Wanneer $a \in \mathbb{N}$ en $b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{mul}(x, \texttt{succ}(y))) &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, \texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a, \omega) \\ &= \omega\end{aligned}$$

En vervolgens schrijven we de rechterkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\texttt{mul}(x,y),x)) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x),\bar{\theta}(y)),\bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\theta(x),\theta(y)),\theta(x)) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,b),a)\end{aligned}$$

We onderscheiden nu weer dezelfde gevallen voor a en b.

- Wanneer $a = b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,\omega),\omega) \\ &= \omega\end{aligned}$$

- Wanneer $a, b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,b),a) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(a*b,a) \\ &= (a*b)+a \\ &= a*(b+1)\end{aligned}$$

- Wanneer $a = \omega$ en $b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,b),\omega) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\ldots,\omega) \\ &= \omega\end{aligned}$$

- Wanneer $a \in \mathbb{N}$ en $b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,\omega),a) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega,a) \\ &= \omega\end{aligned}$$

- `[E2] even(succ(x)) = odd(x)`

  We schrijven weer eerst de linkerkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\texttt{succ}(x))) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)))) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)))) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(a))\end{aligned}$$

We onderscheiden twee gevallen voor a.

- Wanneer $a \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(a)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(a+1) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(a+1) \\ &= \begin{cases} F & \text{als } a \text{ even is} \\ T & \text{als } a \text{ oneven is} \end{cases}\end{aligned}$$

- Wanneer $a = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

En vervolgens schrijven we de rechterkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a)\end{aligned}$$

We onderscheiden weer twee gevallen voor a.

- Wanneer $a \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a) \\ &= \begin{cases} F & \text{als } a \text{ even is} \\ T & \text{als } a \text{ oneven is} \end{cases}\end{aligned}$$

- Wanneer $a = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

We hebben nu laten zien dat $\mathfrak{M}$ inderdaad een model is voor de specificatie `NatBool`. Nu bekijken we de vergelijking

```
even(x) = not(odd(x))
```

en zien dat deze niet waar is in $\mathfrak{M}$. Beschouw bijvoorbeeld de assignment θ met $\theta(x) = \omega$. We hebben dan

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(x)) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

en

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{not}(\texttt{odd}(x))) &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\texttt{odd}(x))) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x))) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\theta(x))) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(T) \\
&= F.
\end{aligned}
$$

Uit alle vergelijkingen van `NatBool` volgt deze vergelijking dus niet semantisch. Volgens de correctheid van afleidbaarheid, is deze vergelijking dan ook niet afleidbaar in de specificatie `NatBool`.