

Uitwerking van extra opgave 2

bij paragraaf 1.5 van Huth&Ryan

Vergelijk **A** en **B**:

A: $\models \phi \rightarrow \psi$

B: Als $\models \phi$ dan $\models \psi$

Geldt $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$? En $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$?

We proberen een waarheidstafel voor $\phi \rightarrow \psi$ te maken:

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

Wanneer we nu **A** aannemen weten we dat $\phi \rightarrow \psi$ een tautologie is en de waarheidstafel dus geen regels bevat die F geven. Regel drie uit bovenstaande tafel komt hierin dus niet voor (er is blijkbaar geen waardentoekenning mogelijk die ϕ waar maakt en ψ niet waar).

Stel nu dat $\models \phi$. Dan vervallen ook regels twee en vier uit de waarheidstafel en blijft regel één over. Maar dan zien we dat ook ψ een tautologie is en dus hebben we $\models \psi$.

Hiermee hebben we laten zien dat $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ geldt.

Maar $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$ geldt niet. We geven een tegenvoorbeeld. Neem als instanties $\phi := p \vee q$ en $\psi := p$.

Nu is stelling **B** waar, omdat ϕ geen tautologie is. Maar **A** is niet waar want $p \vee q \rightarrow p$ is geen tautologie. Dus geldt niet $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$.