Inleiding Theoretische Informatica – Equationele Logica

Uitwerkingen bij opgaven 2.3, 3.1, 3.3, 3.4, 5.1, 6.1, 6.4, 7.1, 7.3, 7.7, 8.1

Martijn Vermaat (mvermaat@cs.vu.nl)

22 maart 2007

Opgave 2.3

We breiden `NatBool` uit met de functie d, de intentie is:

$$d(m,n) \iff m \text{ is een deler van } n \iff m \neq 0 \text{ en er is een } k \text{ zo dat } mk = n$$

```
functions
  d : Nat # Nat -> Bool

equations
  [D1] d(0, x)                             = false
  [D2] d(x, add(x, y))                     = d(x, y)
  [D3] d(succ(x), 0)                       = true
  [D4] d(add(succ(y), succ(x)), succ(y))   = false
```

Het algoritme dat hier gebruikt wordt om de uitkomst van $d(m,n)$ te bepalen is als volgt:

$m = 0$: Delen door nul kan niet, uitkomst is dus `false`.

$m > 0$: Trek m net zo lang van n af tot n gelijk is aan 0 (uitkomst is `true`), of m groter is dan n (uitkomst is `false`).

Opgave 3.1

(a) Een afleiding in de specificate `Stack-Of-Data` van de vergelijking

```
pop(pop(pop(empty))) = empty
```

1	`pop(empty) = empty`	[1]
2	`pop(pop(empty)) = pop(empty)`	congr, 1
3	`pop(pop(pop(empty))) = pop(pop(empty))`	congr, 2
4	`pop(pop(empty))) = empty`	trans, 1, 2
5	`pop(pop(pop(empty))) = empty`	trans, 3, 4

(b) Een afleiding in de specificatie `Stack-Of-Data` van de vergelijking

```
pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = empty
```

1	`pop(push(x, s)) = s`	[3]
2	`pop(push(x, empty)) = empty`	subs, 1
3	`pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = pop(push(x, empty))`	subs, 1
4	`pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = empty`	trans, 3, 2

Opgave 3.3

We bewijzen voor iedere gesloten term t dat deze afleidbaar gelijk is aan een term van de vorm $succ^n(0)$. Dit doen we volgens inductie naar de structuur van de term t:

Basisgeval: Het basisgeval is wanneer t een constante is, in dit geval is de enige mogelijkheid de constante 0. En omdat $succ^0(0) = 0$ zien we dat de bewering waar is in het basisgeval. (Om precies te zijn: t is afleidbaar gelijk aan zichzelf wegens reflexiviteit.)

Inductiestap: We onderscheiden drie mogelijkheden voor de structuur van t in onze inductiestap:

t is van de vorm $succ(u)$

We mogen volgens inductie aannemen dat u afleidbaar gelijk is aan een term van de vorm $succ^n(0)$. Wegens congruentie is dan t afleidbaar gelijk aan een term van de vorm $succ(succ^n(0))$ en dat is natuurlijk $succ^{n+1}(0)$.

t is van de vorm $add(u, v)$

De aannamen zijn dat u en v afleidbaar gelijk zijn aan respectievelijk een term van de vorm $succ^n(0)$ en een term van de vorm $succ^m(0)$. Volgens congruentie is t dan afleidbaar gelijk aan een term van de vorm $add(succ^n(0), succ^m(0))$.

Als $m = 0$ dan is t afleidbaar gelijk aan een term van de vorm $succ^n(0)$ (volgens $[N1]$) en zijn we klaar. Als $m > 0$, dan is t afleidbaar gelijk aan een term van de vorm $succ(add(succ^n(0), succ^{m-1}(0)))$ (volgens $[N2]$). Volgens de inductiehypothese is $add(succ^n(0), succ^{m-1}(0))$ afleidbaar gelijk aan een term van de vorm $succ^p(0)$ en dus het geheel (en volgens transitiviteit ook t) aan $succ^{p+1}(0)$.

t is van de vorm $mul(u, v)$

Wederom mogen we aannemen dat u en v afleidbaar gelijk zijn aan respectievelijk een term van de vorm $succ^n(0)$ en een term van de vorm $succ^m(0)$. Wegens congruentie is t dan afleidbaar gelijk aan een term van de vorm $mul(succ^n(0), succ^m(0))$.

In het geval van $m = 0$ is t afleidbaar gelijk aan een term van de vorm $succ^n(0)$ (volgens $[N1]$).

Het geval voor $m > 0$ is iets moeilijker. Dan is t namelijk afleidbaar gelijk aan een term van de vorm $add(mul(succ^n(0), succ^{m-1}(0)), succ^n(0))$. Volgens de inductiehypothese weten we dat de mul afleidbaar gelijk is aan $succ^p(0)$. We gebruiken dezelfde redenering als bij het vorige punt ($add(u, v)$) om te laten zien dat het geheel nu afleidbaar gelijk is aan $succ^q(0)$. (Dit is niet precies, maar hier laten we het voor dit moment bij.)

Hiermee hebben we bewezen dat de bewering klopt. We hoeven geen rekening te houden met variabelen, omdat deze niet voor komen in een gesloten term.

Opgave 3.4

Om te laten zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is, laten we zien dat $\sim$ transitief, symmetrisch en reflexief is.

Transitiviteit

Stel $t \sim u$ en $u \sim v$, dan is volgens de definitie $E \vdash t = u$ en $E \vdash u = v$. Wegens de regel *transitiviteit* van de afleidbaarheid, is dan ook $E \vdash t = v$ (we kunnen namelijk een afleiding hiervoor construeren door afleidingen voor de eerste twee gelijkheden achter elkaar te zetten en vervolgens de regel *transitiviteits* toe te passen. Met de definitie zien we dan weer dat ook $t \sim v$ waar is en dus is $\sim$ transitief.

Symmetrie

Stel $t \sim u$, dan is volgens de definitie $E \vdash t = u$. De afleidingsregel *symmetrie* zegt dat dan ook $E \vdash u = t$ en volgens de definitie zien we dan weer dat ook $u \sim t$. En dus is $\sim$ symmetrisch.

Reflexiviteit

Voor iedere term t geldt volgens de afleidingsregel *reflexiviteit* dat $E \vdash t = t$. Onze definitie zegt dan dat ook $t \sim t$ en dus is $\sim$ reflexief.

Omdat $\sim$ transitief, symmetrisch en reflexief is, is $\sim$ een equivalentierelatie.

Opgave 5.1

De algebra $\mathfrak{P}(V)$ (met V een verzameling) heeft als drager de machtsverzameling van V. De functies worden geïnterpreteerd als

$$\begin{aligned}
\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)} &= V, \\
\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)} &= \{\}, \\
\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(X) &= V - X, \\
\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(X, Y) &= X \cap Y, \\
\texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(X, Y) &= X \cup Y.
\end{aligned}$$

We constateren eerst dat $\mathfrak{P}(V)$ een algebra voor `Booleans` is omdat de functietypes kloppen. Vervolgens laten we zien dat $\mathfrak{P}(V)$ zelfs een model is voor `Booleans` door te laten zien dat alle vergelijkingen (`[B1]` ... `[B5]`) waar zijn in $\mathfrak{P}(V)$.

Laat θ een assignment zijn van elementen uit $\mathcal{P}(V)$ aan de variabelen x en y, volgens

$$\begin{aligned}
\theta : \{x, y\} &\to \mathcal{P}(V), \\
\theta(x) &= X, \\
\theta(y) &= Y.
\end{aligned}$$

We laten nu zien dat voor iedere vergelijking uit `Booleans` de rechter kant identiek is aan de linker kant onder $\bar{\theta}$.

- [B1] `and(true,x) = x`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{true}, x)) &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{true}), \bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)}, \theta(x)) \\ &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(V, X) \\ &= V \cap X \\ &= X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(x) &= \theta(x) \\ &= X\end{aligned}$$

- [B2] `and(false,x) = false`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{false}, x)) &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{false}), \bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)}, \theta(x)) \\ &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\{\}, X) \\ &= \{\} \cap X \\ &= \{\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{false}) &= \texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)} \\ &= \{\}\end{aligned}$$

- [B3] `not(true) = false`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not(true)}) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{true})) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)}) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(V) \\ &= V - V \\ &= \{\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{false}) &= \texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)} \\ &= \{\}\end{aligned}$$

- [B4] `not(false) = true`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not(false)}) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{false})) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)}) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\{\}) \\ &= V - \{\} \\ &= V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{true}) &= \texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)}\\ &= V\end{aligned}$$

- `[B5] or(x,y) = not(and(not(x),not(y)))`

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{or}(x,y)) &= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(x),\bar{\theta}(y))\\ &= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(x),\theta(y))\\ &= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(X,Y)\\ &= X\cup Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not}(\texttt{and}(\texttt{not}(x),\texttt{not}(y)))) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{not}(x),\texttt{not}(y))))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{not}(x)),\bar{\theta}(\texttt{not}(y))))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(x)),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(y))))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(x)),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(y))))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(X),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(Y)))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(V-X,V-Y))\\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}((V-X)\cap(V-Y))\\ &= V-((V-X)\cap(V-Y))\\ &= X\cup Y\end{aligned}$$

Hiermee hebben we laten zien dat iedere vergelijking in `Booleans` waar is in $\mathfrak{P}(V)$ en dus dat $\mathfrak{P}(V)$ een model is voor de specificatie `Booleans`.

Opgave 6.1

(a) We hebben bij opgave 5.1 gezien dat iedere verzamelingsalgebra $\mathfrak{P}(V)$ over een verzameling V (als in voorbeeld 4.3) een model is voor de specificatie `Booleans`. Nu beschouwen we de algebra $\mathfrak{P}(F)$ over de verzameling $F = \{1,2,3,4,5,6\}$ met als drager $\mathcal{P}(F)$.

Wel junk Iedere gesloten term uit `Booleans` wordt in $\mathfrak{P}(F)$ geïnterpreteerd als òfwel heel F, òfwel de lege verzameling ($\{\}$ of $\emptyset$). Het bewijs hiervan verloopt via inductie naar de structuur van de term en laten we hier achterwege.

Laten we nu het element $\{2,4,5\}$ uit $\mathfrak{P}(F)$ bekijken. Dit is niet F, ook niet $\emptyset$ en dus niet de interpretatie van een gesloten term. Hieruit volgt dat $\mathfrak{P}(F)$ junk bevat.

Geen confusion Voor iedere gesloten term t uit `Booleans` geldt dat

$$\vdash t = \texttt{true} \quad \text{of} \quad \vdash t = \texttt{false}. \qquad \text{(volgens voorbeeld 6.3)}$$

Laat nu s en t gesloten termen zijn met $\nvdash t = s$. Dan moet òfwel $\vdash s = \texttt{true}$ en $\vdash t = \texttt{false}$, òfwel $\vdash s = \texttt{false}$ en $\vdash t = \texttt{true}$. In beide gevallen worden s en t als verschillende elementen van $\mathfrak{P}(F)$ geïnterpreteerd en dus bevat $\mathfrak{P}(F)$ geen confusion.

(b) Laten we nu analoog aan onderdeel **(a)** de verzamelingsalgebra $\mathfrak{P}(\emptyset)$ over de lege verzameling bekijken met in de drager als enige element de lege verzameling $\emptyset$.

Geen junk Volgens de definitie van de verzamelingsalgebra interpreteren we nu `true` als $\emptyset$. Hieruit volgt direct dat $\mathfrak{P}(\emptyset)$ geen junk bevat, want het enige element uit de drager is de interpretatie van een gesloten term.

Wel confusion In de algebra $\mathfrak{P}(\emptyset)$ worden de interpretaties van de termen `true` en `false` geïdentificeerd. Toch is de vergelijking `true` = `false` niet afleidbaar uit de specificatie `Booleans` (bovenstaande algebra $\mathfrak{P}(F)$ is bijvoorbeeld een tegenmodel) en dus bevat $\mathfrak{P}(\emptyset)$ confusion.

(c) We bekijken de algebra $\mathfrak{B}_3$ voor de specificatie `Booleans` met als drager $\{A, B, C\}$ en interpretaties

$$\begin{aligned} \texttt{true}_{\mathfrak{B}_3} &= B, \\ \texttt{false}_{\mathfrak{B}_3} &= B, \\ \texttt{and}_{\mathfrak{B}_3}(x, y) &= B, \\ \texttt{or}_{\mathfrak{B}_3}(x, y) &= B, \\ \texttt{not}_{\mathfrak{B}_3}(x) &= B. \end{aligned}$$

Dat $\mathfrak{B}_3$ een model is voor `Booleans` mag duidelijk zijn (iedere term evalueert naar B en dus is iedere vergelijking waar).

Wel junk Het is niet moeilijk in te zien dat iedere gesloten term uit `Booleans` wordt in $\mathfrak{B}_3$ geïnterpreteerd als B. Dit betekent dat de elementen A en C niet de interpretatie van een gesloten term zijn en dus dat $\mathfrak{B}_3$ junk bevat.

Wel confusion In de algebra $\mathfrak{B}_3$ worden de interpretaties van de termen `true` en `false` geïdentificeerd. Toch is de vergelijking `true` = `false` niet afleidbaar uit de specificatie `Booleans` (bovenstaande algebra $\mathfrak{P}(F)$ is bijvoorbeeld een tegenmodel) en dus bevat $\mathfrak{B}_3$ confusion.

Opgave 6.4

(a)

1	`s(h(x)) = s(x)`	[E2]
2	`s(s(h(x))) = s(s(x))`	congr, 1
3	`s(s(h(a))) = s(s(a))`	subst, 2
4	`s(h(s(a))) = s(s(a))`	subst, 1
5	`s(s(a)) = s(h(s(a)))`	symm, 4
6	`s(s(h(a))) = s(h(s(a)))`	trans, 3, 5

(b) De algebra $\mathfrak{K}$ is geen model voor de specificatie `Spec` omdat de vergelijking `[E1]` hierin niet waar is. Kies bijvoorbeeld de assignment θ met $\theta(x) = 3$. We zien dan dat

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\texttt{h(h(x))}) &= 3 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

terwijl

$$\bar{\theta}(\mathtt{x}) = 3.$$

(c) We bekijken voor de overige algebra's of ze initiele modellen zijn voor `Spec`.

De algebra $\mathfrak{L}$ Deze algebra is geen initieel model voor `Spec`, omdat er junk is. Voor alle getallen ongelijk aan 0 geldt namelijk dat ze niet de interpretatie zijn van een gesloten term.

Bovendien bevat deze algebra confusion, omdat iedere gesloten term geïnterpreteerd wordt als het getal 0. Dit betekent dat iedere vergelijking van gesloten termen waar is in $\mathfrak{L}$, terwijl bijvoorbeeld `s(x) = x` niet afleidbaar is in `Spec`.

De algebra $\mathfrak{M}$ Deze algebra is geen initieel model voor `Spec`, omdat er confusion aanwezig is. De termen `a` en `h(a)` worden namelijk gelijk geïnterpreteerd, terwijl ze niet als gelijk kunnen worden afgeleid in de specificatie `Spec`.

De algebra $\mathfrak{N}$ Deze algebra is geen initieel model voor `Spec`, omdat er confusion aanwezig is. Bijvoorbeeld de termen `x` en `h(x)` worden geïdentificeerd, terwijl deze gelijkheid niet afleidbaar is in `Spec`.

Opgave 7.1

(a) Hiertoe moeten we laten zien dat ϕ over alle functies voldoet aan de voorwaarden van een homomorphisme:

- de constante $\mathtt{0}_{\mathfrak{N}}$

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{0}_{\mathfrak{N}}) &= \phi(0)\\ &= 0\\ &= \mathtt{0}_{\mathfrak{Z}}\end{aligned}$$

- de functie $\mathtt{succ}_{\mathfrak{N}}$
  Voor willekeurige $x \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{succ}_{\mathfrak{N}}(x)) &= \phi(x+1)\\ &= x+1\\ &= \mathtt{succ}_{\mathfrak{Z}}(x)\\ &= \mathtt{succ}_{\mathfrak{Z}}(\phi(x))\end{aligned}$$

- de functie $\mathtt{add}_{\mathfrak{N}}$
  Voor willekeurige $x, y \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{add}_{\mathfrak{N}}(x,y)) &= \phi(x+y)\\ &= x+y\\ &= \mathtt{add}_{\mathfrak{Z}}(x,y)\\ &= \mathtt{add}_{\mathfrak{Z}}(\phi(x),\phi(y))\end{aligned}$$

- de functie $\texttt{mul}_{\mathfrak{N}}$
  Voor willekeurige $x, y \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\phi(\texttt{mul}_{\mathfrak{N}}(x,y)) &= \phi(x * y)\\ &= x * y\\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{Z}}(x,y)\\ &= \texttt{mul}_{\mathfrak{Z}}(\phi(x),\phi(y))\end{aligned}$$

Hiermee hebben we laten zien dat ϕ aan alle voorwaarden van een homomorphisme voldoet.

(b) Nee, de interpretatie van $\texttt{0}$ in $\mathfrak{N}$ moet op de interpretatie van $\texttt{0}$ in $\mathfrak{Z}$ afgebeeld worden. Met de voorwaarden van een homomorfisme over de successor functie ligt daarmee heel de afbeelding vast.

(c) Stel, er is een homomorphisme ϕ van $\mathfrak{Z}$ naar $\mathfrak{N}$. We bekijken $\phi(-1) = n$ en weten dat $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 0)$. Nu hebben we

$$\phi(\texttt{succ}_{\mathfrak{Z}}(-1)) \;=\; \phi(0) \;=\; 0$$

omdat $\phi(\texttt{0}_{\mathfrak{Z}} = 0)$ gelijk moet zijn aan $\texttt{0}_{\mathfrak{N}} = 0$.

Vervolgens zien we dat

$$\texttt{succ}_{\mathfrak{N}}(\phi(-1)) = \texttt{succ}_{\mathfrak{N}}(n) = n + 1 \neq 0$$

en dus voldoet ϕ niet aan de voorwaarden van een homomorphisme. Dit is in tegenspraak met de aanname dat ϕ een homomorphisme is, dus kan ϕ niet bestaan.

Opgave 7.3

(a) $\phi(n) = n + 3$ is geen homomorphisme in $\mathcal{N}^+$, want we zien bijvoorbeeld dat:

$$\begin{aligned}\phi(\texttt{add}_{\mathcal{N}^+}(2,5)) &= \phi(7)\\ &= 10\\ &\neq 13\\ &= \texttt{add}_{\mathcal{N}^+}(5,8)\\ &= \texttt{add}_{\mathcal{N}^+}(\phi(2),\phi(5))\end{aligned}$$

(b) $\phi(n) = 2n$ is wel een homomorphisme in $\mathcal{N}^+$, want voor willekeurige x, y uit $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\phi(\texttt{0}_{\mathcal{N}^+}) &= \phi(0)\\ &= 0\\ &= \texttt{0}_{\mathcal{N}^+}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\phi(\texttt{add}_{\mathcal{N}+}(x,y)) &= \phi(x+y) \\
&= 2(x+y) \\
&= 2x\ +\ 2y \\
&= \texttt{add}_{\mathcal{N}+}(2x,2y) \\
&= \texttt{add}_{\mathcal{N}+}(\phi(x),\phi(y))
\end{aligned}
$$

Hiermee voldoet ϕ aan alle voorwaarden.

Opgave 7.7

(a) Gegeven een homomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$

$$\psi : A \rightarrow B$$

en een homomorphisme van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{C}$

$$\omega : B \rightarrow C$$

krijgen we met de compositie

$$
\begin{aligned}
&\phi : A \rightarrow C \\
&\phi = \omega \circ \psi
\end{aligned}
$$

een homomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{C}$.

We hebben namelijk voor alle constanten c

$$
\begin{aligned}
\phi(c_{\mathfrak{A}}) &= \omega(\psi(c_{\mathfrak{A}})) \\
&= \omega(c_{\mathfrak{B}}) \\
&= c_{\mathfrak{C}}
\end{aligned}
$$

en voor alle functiesymbolen f (waarbij n het aantal argumenten van f is)

$$
\begin{aligned}
\phi(f_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)) &= \omega(\psi(f_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n))) \\
&= \omega(f_{\mathfrak{B}}(\psi(a_1),\ldots,\psi(a_n))) \\
&= f_{\mathfrak{C}}(\omega(\psi(a_1)),\ldots,\omega(\psi(a_n))) \\
&= f_{\mathfrak{C}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)).
\end{aligned}
$$

(b) Gegeven een isomorfisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$

$$\psi : A \rightarrow B$$

construeren we een isomorfisme van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{A}$ als

$$
\begin{aligned}
&\phi : B \rightarrow A \\
&\phi = \psi^{-1}.
\end{aligned}
$$

De inverse van ψ bestaat omdat ψ een bijectie is. Bovendien is de inverse van een bijectie ook weer een bijectie, dus is ϕ een bijectie.

We laten nu zien dat ϕ een homomorphisme is van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{A}$. Voor alle constanten c hebben we

$$\begin{aligned} \phi(c_{\mathfrak{B}}) &= \psi^{-1}(c_{\mathfrak{B}}) \\ &= c_{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

en voor alle functiesymbolen f hebben we

$$\begin{aligned} \phi(f_{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)) &= \psi^{-1}(f_{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= f_{\mathfrak{A}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)). \end{aligned}$$

Ter verduidelijking: deze laatste gelijkheid volgt uit het feit dat ψ een homomorphisme is, want daarmee is

$$\begin{aligned} \psi(f_{\mathfrak{A}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))) &= f_{\mathfrak{B}}(\psi(\phi(a_1)), \ldots, \psi(\phi(a_n))) \\ &= f_{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

We hebben nu laten zien dat ϕ een bijectief homomorphisme is en dus een isomorphisme.

(c) Een relatie is een equivalentierelatie als deze reflexief, symmetrisch en transitief is.

Reflexiviteit Gegeven een algebra $\mathfrak{A}$ bekijken we het isomorphisme

$$\phi(x) = x.$$

Dat ϕ bijectief is moge duidelijk zijn. We laten kort zien dat ϕ een homomorphisme is en daarmee dus ook een isomorphisme. Voor constanten c en functiesymbolen f hebben we

$$\begin{aligned} \phi(c_{\mathfrak{A}}) &= c_{\mathfrak{A}} \\ \phi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \\ &= f_{\mathfrak{A}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)). \end{aligned}$$

Hiermee is ϕ een isomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{A}$ en hebben we dus

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}.$$

Symmetrie Gegeven twee algebra's $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ met

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Er bestaat dus een isomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$. We hebben bij **(b)** gezien dat de inverse van dit isomorphisme een isomorphisme is van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{A}$ en dus hebben we ook

$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}.$$

Transitiviteit Gegeven drie algebra's $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$ met

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}.$$

Er bestaan dus isomorphismes ϕ van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$ en ψ van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{C}$. We construeren nu

$$\omega = \psi \circ \phi$$

welke een homomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{C}$ is. De compositie van twee bijecties geeft weer een bijectie en dus is ω een isomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{C}$ en hebben we

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}.$$

Hiermee hebben we laten zien dat $\cong$ een equivalentierelatie is.

Opgave 8.1

(a) We construeren het termmodel $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ voor de specificatie `Booleans` met behulp van de equivalentierelatie $\sim$ op termen uit Ter_Σ:

$$s \sim t \iff E \vdash s = t$$

waarbij E de verzameling vergelijkingen in `Booleans` is.

Als drager van het termmodel nemen we nu de equivalentieklassen van de gesloten termen onder $\sim$. We hebben eerder gezien dat iedere gesloten term in `Booleans` afleidbaar gelijk is aan òfwel `true` òfwel `false`, dus hebben we als drager genoeg aan de twee equivalentieklassen [`true`] en [`false`] van de termen `true` en `false`.

De interpretaties van de constanten en functiesymbolen kiezen we in het termmodel als volgt:

$$\begin{aligned}
\mathtt{true}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim} &= [\mathtt{true}] \\
\mathtt{false}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim} &= [\mathtt{false}] \\
\mathtt{and}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([t],[s]) &= [\mathtt{and}(t,s)] \\
\mathtt{or}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([t],[s]) &= [\mathtt{or}(t,s)] \\
\mathtt{not}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([t]) &= [\mathtt{not}(t)]
\end{aligned}$$

(b) We bekijken de functie $\phi : Ter_\Sigma/\sim \;\to A$ die equivalentieklassen afbeelt op de drager A van $\mathfrak{B}_2$ en gedefiniëerd is als

$$\phi([\mathtt{true}]) = T,$$
$$\phi([\mathtt{false}]) = F.$$

Nu laten we zien dat ϕ een isomorfisme is van $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ naar $\mathfrak{B}_2$.

Homomorfisme Eerst bekijken we of ϕ een homomorfisme is. Voor de constante `true` hebben we:

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{true}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}) &= \phi([\mathtt{true}]) \\ &= T \\ &= \mathtt{true}_{\mathfrak{B}_2}\end{aligned}$$

Voor de constante `false` gaat dit op gelijke wijze. We bekijken nu het functiesymbool `not` toegepast op het element x. Voor de waarde van x zijn er twee mogelijkheden, we beperken ons hier tot [`true`]:

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{not}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}(x)) &= \phi(\mathtt{not}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([\mathtt{true}])) \\ &= \phi([\mathtt{not(true)}]) \\ &= \phi([\mathtt{false}]) \\ &= F\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{not}_{\mathfrak{B}_2}(\phi(x)) &= \mathtt{not}_{\mathfrak{B}_2}(\phi([\mathtt{true}])) \\ &= \mathtt{not}_{\mathfrak{B}_2}(T) \\ &= F\end{aligned}$$

Vervolgens bekijken we het functiesymbool `and` toegepast op de elementen x en y. Ook hier zijn er voor x en y beiden twee mogelijke waarden, we behandelen alleen het geval dat $x = [\mathtt{true}]$ en $y = [\mathtt{false}]$:

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{and}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}(x, y)) &= \phi(\mathtt{and}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([\mathtt{true}], [\mathtt{false}])) \\ &= \phi([\mathtt{and}(\mathtt{true}, \mathtt{false})]) \\ &= \phi([\mathtt{false}]) \\ &= F\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{and}_{\mathfrak{B}_2}(\phi(x), \phi(y)) &= \mathtt{and}_{\mathfrak{B}_2}(\phi([\mathtt{true}]), \phi([\mathtt{false}])) \\ &= \mathtt{and}_{\mathfrak{B}_2}(T, F) \\ &= F\end{aligned}$$

Hetzelfde verhaal voor het functiesymbool `or` zullen we achterwege laten. Hiermee hebben we laten zien dat ϕ een homomorfisme is van $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ naar $\mathfrak{B}_2$.

Surjectief De drager van $\mathfrak{B}_2$ bestaat uit de elementen T en F. In onze definitie van ϕ zien we duidelijk dat beiden het beeld zijn van een element uit $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ en dus is ϕ surjectief.

Injectief Evenzo is gemakkelijk te zien dat de twee verschillende elementen [`true`] en [`false`] met ϕ ook twee verschillende beelden hebben, namelijk T respectievelijk F. En dus is ϕ injectief.

Nu we hebben laten zien dat er een isomorfisme bestaat van $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ naar $\mathfrak{B}_2$ (ϕ is een injectief en surjectief homomorfisme) weten we dus ook dat deze twee algebra's isomorf zijn.