Equationele Logica beknopt

Syntax

Signatuur (S, Σ)

S Verzameling soortnamen.
Σ Verzameling functiesymbolen met types over S.

Termen $Ter_\Sigma(X)$ over (S, Σ)

(S, Σ) Signatuur.
X Verzameling variabelen met types uit S.

De verzameling $Ter_\Sigma(X)$ van termen met vrije variabelen uit X is inductief gedefinieerd als volgt waarbij steeds de types gerespecteerd worden:

- $f \in \Sigma$ en $t_1, \ldots, t_n \in Ter_\Sigma(X) \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_n) \in Ter_\Sigma(X)$
- $x \in Ter_\Sigma(X)$ voor alle $x \in X$

Specificatie $((S, \Sigma), E)$

(S, Σ) Signatuur.
E Verzameling vergelijkingen $l_i = r_i$ met l_i en r_i termen uit $Ter_\Sigma(X)$.

Substitutie $\bar{\theta} : Ter_\Sigma(X) \to Ter_\Sigma(X)$

$\theta : X \to Ter_\Sigma(X)$ Substitutie van termen voor variabelen.
$\bar{\theta} : Ter_\Sigma(X) \to Ter_\Sigma(X)$ Uitbreiding op termen.

Gegeven een substitutie θ wordt de uitbreiding daarvan inductief gedefinieerd als:

$$\bar{\theta}(x) = \theta(x)$$
$$\bar{\theta}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\bar{\theta}(t_1), \ldots, \bar{\theta}(t_n))$$

Semantiek

Σ-algebra $\mathfrak{A} = (A, I)$

(S, Σ) Signatuur.
A Drager, S-soortig.
I Interpretatie.

Voor iedere $f \in \Sigma$ geeft $I(f)$ een interpretatie $f_\mathfrak{A}$ op de drager, waarbij steeds alle typen kloppen.

Assignment $\bar{\theta} : Ter_\Sigma(X) \to A$

$\mathfrak{A} = (A, I)$ Σ-algebra.
$\theta : X \to A$ Assignment van $a \in A$ aan $x \in X$.
$\bar{\theta} : Ter_\Sigma(X) \to A$ Uitbreiding op termen.

Gegeven een assignment θ wordt de uitbreiding daarvan inductief gedefinieerd als:

$$\bar{\theta}(x) = \theta(x)$$
$$\bar{\theta}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_\mathfrak{A}(\bar{\theta}(t_1), \ldots, \bar{\theta}(t_n))$$

Waarheid $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2$

$t_1 = t_2$ is waar in $\mathfrak{A}$ wanneer $\bar{\theta}(t_1) = \bar{\theta}(t_2)$ voor iedere assignment θ. Voor een verzameling vergelijkingen E zeggen we dat $\mathfrak{A} \models E$ wanneer $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2$ voor alle $t_1 = t_2$ in E.

Semantisch gevolg $E \models t_1 = t_2$

$t_1 = t_2$ volgt semantisch uit E wanneer $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2$ voor iedere algebra $\mathfrak{A}$ met $\mathfrak{A} \models E$.

Equationele logica

Afleidbaarheid $E \vdash t_1 = t_2$

De verzameling vergelijkingen afleidbaar uit E is inductief gedefinieerd:

- als $t_1 = t_2 \in E$ (het is een axioma), dan $E \vdash t_1 = t_2$,
- $E \vdash t = t$ voor alle t (reflexiviteit) ,
- als $E \vdash t_1 = t_2$, dan $E \vdash t_2 = t_1$ (symmetrie) ,
- als $E \vdash t_1 = t_2$ en $E \vdash t_2 = t_3$, dan $E \vdash t_1 = t_3$ (transitiviteit) ,
- als $E \vdash t_i = u_i$ voor $i = 1 \ldots n$, dan $f(t_i, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$ (congruentie) ,
- als $E \vdash t_1 = t_2$, dan $E \vdash \bar{\theta}(t_1) = \bar{\theta}(t_2)$ voor alle substituties θ .

Volledigheid van $\vdash$

Correctheid $E \vdash t_1 = t_2 \implies E \models t_1 = t_2$.
Volledigheid $E \models t_1 = t_2 \implies E \vdash t_1 = t_2$.

Modellen

Model $\mathfrak{A}$ voor $((S, \Sigma), E)$

Een Σ-algebra $\mathfrak{A}$ is een model voor de specificatie $((S, \Sigma), E)$ wanneer $\mathfrak{A} \models E$.

Initiële modellen

$((S, \Sigma), E)$ Specificatie.
$\mathfrak{A} = (A, I)$ Model voor $((S, \Sigma), E)$.

Een element $a \in A$ is junk wanneer het niet de interpretatie is van een gesloten term.
Gesloten termen t_1 en t_2 vormen confusion wanneer $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2$ terwijl $E \not\models t_1 = t_2$.
Een model is initieel wanneer het geen junk en geen confusion bevat.

Termmodel $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\!\sim$

Gegeven een specificatie $((S, \Sigma), E)$ bestaat het termmodel $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\!\sim$ uit

- drager $Ter_\Sigma/\!\sim$ van equivalentieklassen $[t]$ van termen $t \in Ter_\Sigma$,
- voor alle $f \in \Sigma$, een interpretatie $f_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([t_1], \ldots, [t_n]) \equiv [f(t_1, \ldots, t_2)]$.

Hierbij is de equivalentieklasse $[t]$ van t gedefinieerd als $\{u \in Ter_\Sigma \mid E \vdash t = u\}$.
Het termmodel $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\!\sim$ is initieel voor $((S, \Sigma), E)$.

Isomorfie

Homomorfisme ϕ van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$

$\mathfrak{A} = (A, I_\mathfrak{A})$ en $\mathfrak{B} = (B, I_\mathfrak{B})$ Σ-algebra's.
$\phi : A \to B$ Afbeelding van A naar B.

De afbeelding ϕ is een homomorfisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$ wanneer

$$\phi(f_\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)) \equiv f_\mathfrak{B}(\phi(a_1, \ldots, a_n))$$

voor alle $f \in \Sigma$ en alle $a_i \in A$ (types respecterend).

Isomorfie $\cong$

Een bijectief homomorfisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$ is een isomorfisme. Als er een isomorfisme bestaat tussen twee algebra's $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ noemen we ze isomorf ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$).
Alle initiële modellen van een specificatie zijn isomorf.

Martijn Vermaat (`mvermaat@cs.vu.nl`), maart 2008.
Gebaseerd op het dictaat *Equationele specificatie van datatypen*.