Uitwerkingen tweede huiswerkopdracht Voortgezette Logica

Martijn Vermaat
mvermaat@cs.vu.nl

21 november 2004

Opgave 1

Gezocht wordt een model met 3 kenners waar in een bepaalde wereld t de volgende formules waar zijn:

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{M}, t & \Vdash & K_1 p \\ \mathcal{M}, t & \Vdash & K_2 p \\ \mathcal{M}, t & \Vdash & K_3 K_1 p \\ \mathcal{M}, t & \nVdash & K_3 K_2 p\end{array}$$

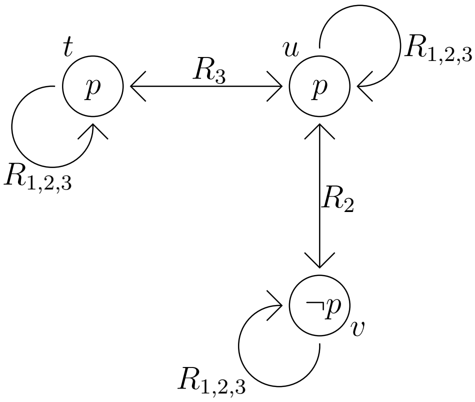
We definiëren het frame $\mathcal{F}$ als volgt:

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F} & = & (\{t, u, v\}, R_1, R_2, R_3) \\ & & \text{waarbij} \\ & & R_1 = \{(t,t), (u,u), (v,v)\} \\ & & R_2 = \{(t,t), (u,u), (v,v), (u,v), (v,u)\} \\ & & R_3 = \{(t,t), (u,u), (v,v), (t,u), (u,t)\}\end{array}$$

Nu voldoet het model $\mathcal{M}$ aan bovengenoemde eisen:

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{M} & = & (\mathcal{F}, \pi) \\ & & \text{met} \\ & & \pi(t)(p) = 1 \\ & & \pi(u)(p) = 1 \\ & & \pi(v)(p) = 0\end{array}$$

En voor wie $\mathcal{M}$ in een plaatje wil zien:



Dit is een tegenmodel voor de bewering dat wanneer twee kenners iets weten, ze dit ook van elkaar weten. We kunnen dus zeggen dat deze bewering niet in het algemeen geldt:

$$K_i p \wedge K_j p \quad \not\models \quad K_i K_j p$$

waarbij i en j twee kenners zijn.

Opgave 2

Een afleiding in $S5$ voor $\neg K \neg K p \rightarrow K(p \vee q)$:

1	$\neg Kp \rightarrow K\neg Kp$	A3
2	$\neg K\neg Kp \rightarrow Kp$	PROP, 1
3	$K(p \rightarrow q) \rightarrow (Kp \rightarrow Kq)$	DB
4	$K(p \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (Kp \rightarrow K(p \vee q))$	SUB, 3
5	$p \rightarrow (p \vee q)$	CT
6	$K(p \rightarrow (p \vee q))$	UG, 5
7	$Kp \rightarrow K(p \vee q)$	MP, 4,6
8	$\neg K\neg Kp \rightarrow K(p \vee q)$	†, 2,7

Opgave 3

In een willekeurig epistemisch model $\mathcal{M}$ bekijken we de toegankelijkheidsrelatie die hoort bij de operator E (waarbij n het aantal kenners is):

$$R_E = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

Volgens de semantiek van de kennis operator K betekent $(p \to Ep)$ nu dat er voor iedere wereld s die p waar maakt geldt: p is waar in alle werelden t met $R_E st$.

Evenzo betekent $(p \to EEp)$ nu dat er voor iedere wereld s die p waar maakt geldt: p is waar in alle werelden u met $R_E st$ en $R_E tu$ en voor t willekeurige werelden.

We zien dat, gegeven $\mathcal{M} \Vdash (p \to Ep)$, in deze interpretatie van $(p \to EEp)$ de werelden t allemaal p waar maken. Eenvoudig is te zien dat nogmaals toepassen van het gegevene op alle werelden t geeft dat alle werelden u ook p waar maken. En dat is precies wat nodig was om $(p \to EEp)$ waar te maken.

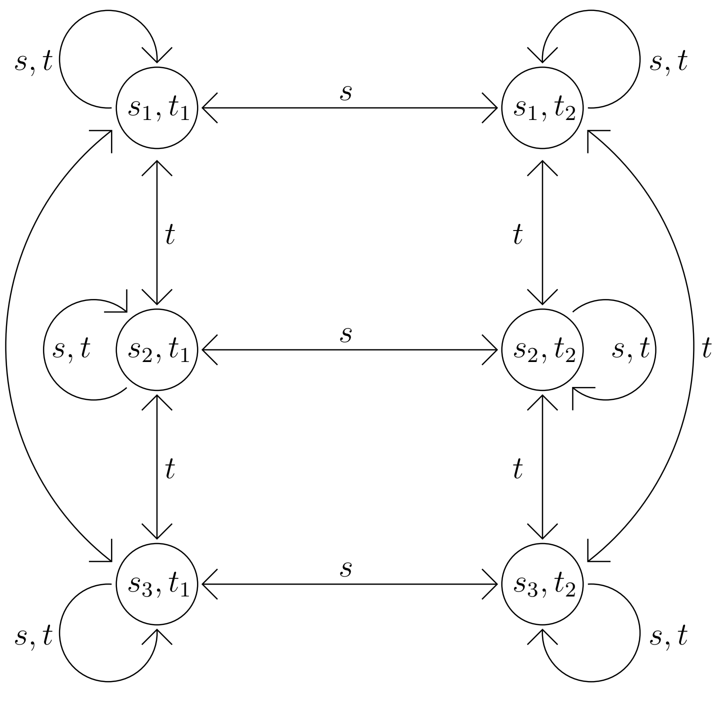
Aangezien het model $\mathcal{M}$ willekeurig gekozen was, is onze conclusie

$$\text{als} \quad \mathcal{M} \Vdash (p \to Ep) \quad \text{dan ook} \quad \mathcal{M} \Vdash (p \to EEp)$$

voor ieder epistemisch model $\mathcal{M}$.

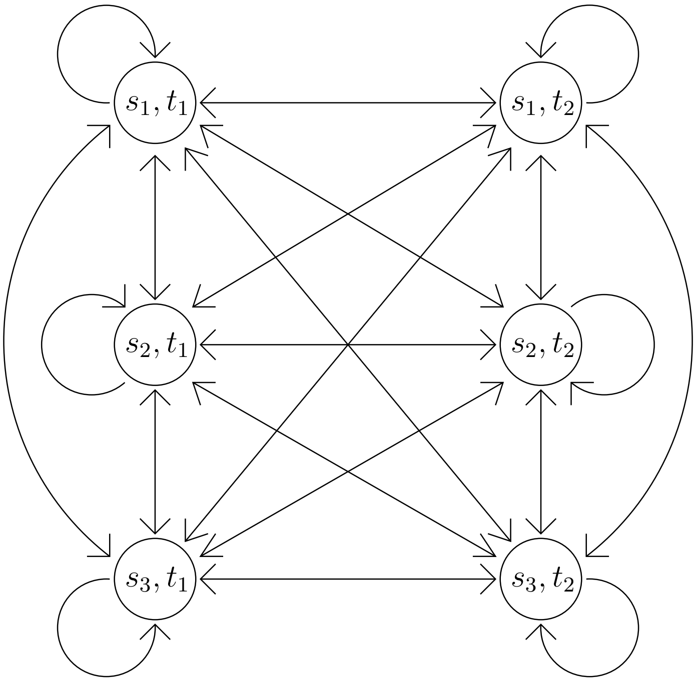
Opgave 4

Het frame ziet er in een plaatje als volgt uit:



Hierbij vormen de pijlen met s te toegankelijkheidsrelatie R_s voor kennisoperator K_s van kenner s. Evenzo voor kenner t. De vereniging $R_s \bigcup R_t$ van beiden geeft volgens definitie de toegankelijkheidsrelatie R_E voor E.

We bekijken nu de toegankelijkheidsrelatie R_{EE} behorende bij het toepassen van E na E. Deze bevat die paren (x, y) waarvoor geldt xEz en zEy voor een willekeurige wereld z:



Volgens definitie van E en onze constructie van R_{EE} geldt inderdaad voor ieder model $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}, s \Vdash EE\varphi \iff \mathcal{M}, t \Vdash \varphi, \text{ voor alle punten } t \text{ zó dat } sR_{EE}t.$$

Ook herinneren we ons de de definitie van de C operator:

$$\mathcal{M}, s \Vdash C\varphi \iff \mathcal{M}, t \Vdash \varphi, \text{ voor alle punten } t \text{ zó dat } sR_{C}t.$$

Nu is R_C gedefiniëerd als de transitieve afsluiting van R_E, maar als we die bekijken in ons frame zien we dat die precies gelijk is aan de afgebeelde R_{EE}.

Volgens bovenstaande hebben we nu

$$\mathcal{M}, s \Vdash EE\varphi \iff \mathcal{M}, s \Vdash C\varphi$$

hetgeen triviaal zorgt voor de waarheid van $C_P \leftrightarrow EE_p$ (in ieder model op ons frame).