Formele Talen - Inleveropgaven II

Martijn Vermaat
mvermaat@cs.vu.nl

14 december 2004

Opgave 1

$$L = \{a^n b^m a^n \mid n, m \geq 0\}$$

a) We gebruiken de pompstelling voor reguliere talen om te bewijzen dat L niet regulier is.

Stel dat L wel regulier is. Volgens de pompstelling bestaat er nu een positief getal m zo dat iedere $w \in L$ met $|w| \geq m$ als volgt opgedeeld kan worden in x, y en z:

$$w = xyz,$$

met

$$|xy| \leq m \quad \text{en} \quad |y| \geq 1,$$

zo dat

$$xy^iz \in L \quad \text{voor alle } i \in \mathbb{N}.$$

Laten we bij deze m de string $w = a^m b a^m$ bekijken. Dan kan w geschreven worden als xyz met:

$$\begin{aligned} x &= a^{|x|}, \\ y &= a^{|y|}, \\ z &= a^{m-|x|-|y|}ba^m. \end{aligned}$$

Nu moet ook de volgende string in L zitten:

$$\begin{aligned} xy^2z &= a^{|x|}a^{2|y|}a^{m-|x|-|y|}ba^m \\ &= a^{m+|y|}ba^m. \end{aligned}$$

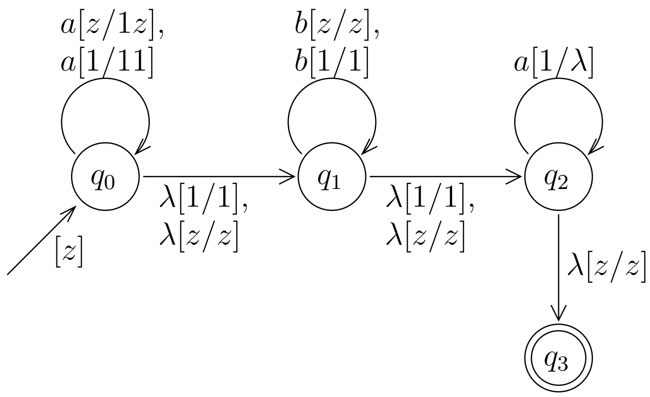
Maar omdat $|y| \geq 1$ volgt $m + |y| \neq m$ en dus zit xy^2z niet in L. Dit is in tegenspraak met onze eerdere veronderstelling, dus moet onze aanname onjuist geweest zijn en is L niet regulier.

■

b) Een contextvrije grammatica die L genereert:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSa \;\;|\;\; B \\ B & \rightarrow & bB \;\;|\;\; \lambda \end{array}$$

c) Een nondeterministische pushdown automaat die L accepteert:



Opgave 2

a) 1. Na eliminatie van λ-producties:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & SAa \,|\, Sa \,|\, BBb \,|\, Bb \,|\, b \\ A & \rightarrow & CC \,|\, C \,|\, a \\ B & \rightarrow & C \,|\, Sb \\ C & \rightarrow & SDE \,|\, SE \\ D & \rightarrow & A \,|\, ab \end{array}$$

2. Na eliminatie van unit-producties:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & SAa \,|\, Sa \,|\, BBb \,|\, Bb \,|\, b \\ A & \rightarrow & CC \,|\, a \,|\, SDE \,|\, SE \\ B & \rightarrow & Sb \,|\, SDE \,|\, SE \\ C & \rightarrow & SDE \,|\, SE \\ D & \rightarrow & ab \,|\, CC \,|\, a \,|\, SDE \,|\, SE \end{array}$$

3. Na verwijderen van nutteloze producties:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & SAa \,|\, Sa \,|\, BBb \,|\, Bb \,|\, b \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & Sb \end{array}$$

b) Dezelfde grammatica in Chomsky normaalvorm:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_1 \mid SX_a \mid BY_2 \mid BX_b \mid b \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow SX_b \\
X_a &\rightarrow a \\
X_b &\rightarrow b \\
Y_1 &\rightarrow AX_a \\
Y_2 &\rightarrow BX_b
\end{aligned}
$$

c) We schrijven nu dezelfde grammatica om naar Greibach normaalvorm. We gebruiken hierbij de ordening $<$ op de non-terminals gedefiniëerd als

$$S < A < B.$$

... hier moet ik even over nadenken...

Opgave 3

Hieronder volgt een visuele voortelling van het CYK parseer algoritme toegepast op *baaba* en de gegeven grammatica. Voor $V_{nm} = \{\varphi\}$ schrijven we $\{\varphi\}_{nm}$.

b	a	a	b	a
$\{B\}_{11}$	$\{A,C\}_{22}$	$\{A,C\}_{33}$	$\{B\}_{44}$	$\{A,C\}_{55}$
$\{S,A\}_{12}$	$\{B\}_{23}$	$\{S,C\}_{34}$	$\{S,A\}_{45}$	
$\{\}_{13}$	$\{B\}_{2,4}$	$\{B\}_{35}$		
$\{\}_{14}$	$\{S,A\}_{25}$			
$\{S,A,C\}_{15}$				

We zien dat $S \in V_{15}$ en dus zit *baaba* in de taal die door de gegeven grammatica wordt gegenereerd.

Opgave 4

De volgende contextvrije grammatica genereert precies $L(M)$ voor de gegeven npda M:

$$
\begin{array}{rcl}
(q_0yq_1) & \rightarrow & \lambda \\
(q_1yq_1) & \rightarrow & \lambda \\
(q_1zq_1) & \rightarrow & 1 \\
(q_0zr) & \rightarrow & 0(qyr')(r'zr) \\
(q_0yr) & \rightarrow & 0(q_0yr')(r'yr) \quad | \quad 1(q_0yr) \\
(q_1yr) & \rightarrow & 1(q_1yr')(r'yr)
\end{array}
$$

met $S = (q_0zq_1)$ en $r, r' \in \{q_0, q_1\}$.