

## Uitwerking van extra opgave 2

bij paragraaf 1.5 van Huth&Ryan

Vergelijk  $A$  en  $B$ :

**A:**  $\models \phi \rightarrow \psi$

**B:** Als  $\models \phi$  dan  $\models \psi$

Geldt  $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ ? En  $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$ ?

We proberen een waarheidstafel voor  $\phi \rightarrow \psi$  te maken:

$\phi$	$\psi$	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

Wanneer we nu **A** aannemen weten we dat  $\phi \rightarrow \psi$  een tautologie is en de waarheidstafel dus geen regels bevat die F geven. Regel drie uit bovenstaande tafel komt hierin dus niet voor (er is blijkbaar geen waardentoekenning mogelijk die  $\phi$  waar maakt en  $\psi$  niet waar).

Stel nu dat  $\models \phi$ . Dan vervallen ook regels twee en vier uit de waarheidstafel en blijft regel één over. Maar dan zien we dat ook  $\psi$  een tautologie is en dus hebben we  $\models \psi$ .

Hiermee hebben we laten zien dat  $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$  geldt.

Maar  $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$  geldt niet. We geven een tegenvoorbeeld. Neem als instanties  $\phi := p \vee q$  en  $\psi := p$ .

Nu is stelling **B** waar, omdat  $\phi$  geen tautologie is. Maar **A** is niet waar want  $p \vee q \rightarrow p$  is geen tautologie. Dus geldt niet  $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$ .