Uitwerking van opgave 3 c

bij paragraaf 2.3 van Huth&Ryan

> Bewijs dat er geen predikatenlogische formule ϕ bestaat zo dat geldt:
>
> $$\mathcal{M} \models \phi \quad \Leftrightarrow \quad \text{het domein van } \mathcal{M} \text{ is eindig}$$

Bewijs. Stel dat dergelijke ϕ wel bestaat. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ (≥ 1) is er een model voor ϕ met n elementen in het domein. Volgens de Skolem-Löwenheim stelling heeft ϕ een model $\mathcal{M}$ met een oneindig groot domein. Tegenspraak (de definitie van ϕ zegt dat het domein van $\mathcal{M}$ eindig is).

Er bestaat dus geen formule ϕ volgens bovenstaande definitie. □

> Bewijs dat er ook geen verzameling predikatenlogische formules Σ bestaat zo dat geldt:
>
> $$\mathcal{M} \models \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \text{het domein van } \mathcal{M} \text{ is eindig}$$

De Skolem-Löwenheim stelling wordt in Huth&Ryan niet gegeven voor het algemenere geval van een verzameling formules. Na bestudering van het bewijs bij deze stelling kunnen we concluderen dat de stelling net zo goed op gaat voor het algemenere geval en eenzelfde bewijs geven als bij de vorige opgave.

Instructiever is wellicht het volgende bewijs met de compactheidsstelling (dat overigens ook een bewijs is voor de vorige opgave).

Bewijs. Stel dat dergelijke verzameling Σ wel bestaat. De formule $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$ zegt dat er ten minste n elementen in een model zijn ($n > 1$). Laat $\Gamma = \Sigma \cup \{\lambda_n | n > 1\}$.

We bekijken een willekeurige eindige deelverzameling Δ van Γ. Er bestaat een m groter dan alle n met λ_n in Δ (Δ is immers eindig). Ieder eindig model met ten minste m elementen is nu een model voor Δ (het is immers een model voor Σ en voor alle λ_n in Δ).

De compactheidsstelling zegt dat Γ een model $\mathcal{M}$ heeft. Volgens de formules λ_n is het domein van $\mathcal{M}$ oneindig groot. Maar omdat $\mathcal{M}$ ook een model voor Σ is, heeft dit domein per definitie van Σ eindig veel elementen. Dit is een tegenspraak, dus kan de verzameling Σ niet bestaan. □