

Uitwerking van opgave 16c

bij paragraaf 5.3 van Huth&Ryan

We zoeken een eigenschap van de toegankelijkheidsrelatie die correspondeert met het formuleschema $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$, dat wil zeggen:

Het schema $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ is geldig in een frame $\mathcal{F} = (W, R)$
 \iff
 R heeft de gezochte eigenschap

De gezochte eigenschap wordt wel de ‘diamond property’ genoemd en is als volgt gedefinieerd:

$$\forall xyz [Rxy \wedge Rxz \rightarrow \exists t (Ryt \wedge Rzt)]$$

Er rest ons nog te bewijzen dat de diamond property inderdaad correspondeert met het gegeven formuleschema.

- (a) We bewijzen eerst dat het schema $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ geldig is in een frame als de relatie van het frame de diamond property heeft.

We nemen aan dat R de diamond property heeft. Neem nu een labeling functie L en een verzameling werelden W zodat $\mathcal{M} = (W, R, L)$ een model is. We laten zien dat $\mathcal{M} \models \Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$.

Kies een willekeurige x uit W en neem aan dat $x \models \Diamond\Box\phi$. Er is dus een y met Rxy en $y \models \Box\phi$. De diamond property zegt nu dat voor iedere z met Rxz er een t bestaat met Ryt en Rzt . Dat betekent dat $t \models \phi$ (immers, $y \models \Box\phi$). Maar dan hebben we voor iedere z met Rxz dus $z \models \Diamond\phi$. Dit geeft precies $x \models \Box\Diamond\phi$.

Hiermee hebben we laten zien dat $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ waar is in iedere wereld van ieder model op ieder frame met de diamond property en dus geldig in al deze frames.

- (b) We bewijzen vervolgens dat het schema $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ niet geldig is in een frame als de relatie van het frame niet de diamond property heeft.

Neem een willekeurig frame $\mathcal{F} = (W, R)$ zonder de diamond property. Dan zijn er dus drie werelden x, y en z in W zodat Rxy en Rxz zonder dat er een wereld t bestaat met Ryt en Rzt .

We laten nu zien dat $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ niet geldig is in \mathcal{F} . Daartoe kiezen we een labeling functie L zodat $\mathcal{M} = (W, R, L)$ een model is met:

p is waar in alle werelden u met Ryu en nergens anders

Nu hebben we $x \models \Diamond\Box p$, want y is toegankelijk vanuit x en alle werelden vanuit y toegankelijk maken p waar.

Maar we hebben *niet* $x \models \Box\Diamond p$, immers, $\Diamond p$ zou waar moeten zijn in alle werelden bereikbaar vanuit x , waaronder z . Maar $z \not\models \Diamond p$ omdat er geen wereld bereikbaar is vanuit z die

p waar maakt. De enige werelden die p waar maken zijn bereikbaar vanuit y en er is geen wereld t met Ryt en Rzt .

Dit betekent dat $x \not\models \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$. Dit is een instantie van het schema en dus weten we ook dat $x \not\models \Diamond \Box \phi \rightarrow \Box \Diamond \phi$.

Hiermee hebben we laten zien dat er een wereld in een model op \mathcal{F} is waar $\Diamond \Box \phi \rightarrow \Box \Diamond \phi$ niet waar is, dus dat $\Diamond \Box \phi \rightarrow \Box \Diamond \phi$ niet geldig is in \mathcal{F} .