Uitwerkingen derde huiswerkopdracht Voortgezette Logica

Martijn Vermaat
mvermaat@cs.vu.nl

8 december 2004

Opgave 1 (3.3 6)

Te bewijzen:

$$\forall x(Px \vee Qx) \vDash_P \forall x(Px \leftrightarrow \neg Qx)\,.$$

Daartoe laten we zien dat ieder P-minimaal model voor $\forall x(Px \vee Qx)$ (afgekort φ), ook $\forall x(Px \leftrightarrow \neg Qx)$ (afgekort ψ) waar maakt.

Bewijs We bekijken een willekeurig P-minimaal model $\mathcal{M}$ voor φ. Nu geldt voor ieder element e in het domein van $\mathcal{M}$ dat òfwel $e \in P^{\mathcal{M}}$, òfwel $e \in Q^{\mathcal{M}}$ (maar nooit beide).

Want stel dat er een element e is waarvoor dat niet geldt. Dat in ieder geval Pe òf Qe moet gelden is snel duidelijk, anders maakt $\mathcal{M}$ φ niet waar. Dat betekent dus dat Pe èn Qe. Maar dan is $\mathcal{M}$ geen P-minimaal model voor φ. (Neem bijvoorbeeld $\mathcal{M}'$ gelijk aan $\mathcal{M}$ maar zonder Pe. Dan is $\mathcal{M}' <_P \mathcal{M}$ en $\mathcal{M}'$ maakt nog steeds φ waar.) Dit is in tegenspraak met ons gegeven, dus kan dit element e niet bestaan.

Anders gezegd geldt dus voor ieder element e:

$$Pe \rightarrow \neg Qe$$

en

$$\neg Qe \rightarrow Pe.$$

Dit is precies wat gezegd wordt met ψ, dus maakt ons model $\mathcal{M}$ ook ψ waar. En dat is wat we nodig hadden om te bewijzen dat

$$\forall x(Px \vee Qx) \vDash_P \forall x(Px \leftrightarrow \neg Qx).$$

■

Opgave 2 (3.7)

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &\models \Sigma\,, \\ \mathcal{M}_2 &\not\models \Sigma\,, \\ \mathcal{M}_3 &\models \Sigma\,. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &\models_P \Sigma\,, \\ \mathcal{M}_2 &\not\models_P \Sigma\,, \\ \mathcal{M}_3 &\models_P \Sigma\,. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &\models_{P;B} \Sigma\,, \\ \mathcal{M}_2 &\not\models_{P;B} \Sigma\,, \\ \mathcal{M}_3 &\not\models_{P;B} \Sigma\,. \end{aligned}$$

4. Te bewijzen:

$$\Sigma \models_{P;B} Pt\,.$$

Hiertoe laten we zien dat in ieder $<^{P;B}$-minimaal model voor Σ ook Pt waar is.

Bewijs Laat $\mathcal{M}$ een willekeurig $<^{P;B}$-minimaal model voor Σ zijn. Dan moet $\mathcal{M} \models \Sigma$. Volgens Σ is At waar en volgens $\forall x((Ax \vee Bx) \to Px)$ dan ook Pt.

Omdat $\mathcal{M}$ willekeurig gekozen was, maakt ieder $<^{P;B}$-minimaal model voor Σ ook Pt waar en dus geldt (volgens definitie)

$$\Sigma \models_{P;B} Pt\,.$$

■

5. Te bewijzen:

$$\Sigma \not\models_{P;B} Pu\,.$$

We geven een tegenvoorbeeld voor het geval dit niet zo was.

Bewijs Bekijk het gegeven model $\mathcal{M}_1$. Dit model is een $<^{P;B}$-minimaal model voor Σ, maar maakt niet Pu waar. Dus Pu is niet waar in alle $<^{P;B}$-minimale modellen voor Σ en dus

$$\Sigma \not\models_{P;B} Pu\,.$$

■

6. We laten zien dat

$$\Sigma \models_{P;B} Ps$$

geldt.

Bewijs We nemen $\mathcal{M}$ als een willekeurig $<^{P;B}$-minimaal model voor Σ aan. Dan moet $\mathcal{M} \models \Sigma$. Volgens Σ is Bs waar en volgens $\forall x((Ax \vee Bx) \rightarrow Px)$ dan ook Ps.

Hieruit volgt dat ieder $<^{P;B}$-minimaal model voor Σ ook Ps waar maakt en dus geldt

$$\Sigma \models_{P;B} Ps\,.$$

■

N.B. Ook in dit geval kunnen we $P^{\mathcal{M}}$ niet minimaliseren door s eruit te laten, omdat we dan volgens de eerste formule in Σ ook s uit $B^{\mathcal{M}}$ moeten laten (en dat heeft direct als gevolg dat de derde formule uit Σ, Bs, niet meer waar is).

Opgave 3 (4.2 1)

Te bewijzen:

$$\varphi \models_{\sqsubset} \psi \rightarrow \chi$$

gegeven

$$\varphi \wedge \psi \models_{\sqsubset} \chi\,. \tag{1}$$

Bewijs Wat we moeten laten zien is dat, gegeven 1, voor ieder $\sqsubset$-preferent model $\mathcal{M}$ voor φ geldt:

$$\mathcal{M} \models \psi \rightarrow \chi\,.$$

Hiertoe bekijken we een willekeurig $\sqsubset$-preferent model $\mathcal{M}$ voor φ. Nu onderscheiden we voor $\mathcal{M}$ de volgende twee gevallen:

1. $\mathcal{M} \vDash \psi$
2. $\mathcal{M} \vDash \neg\psi$

In geval 2 is het duidelijk dat geldt:

$$\mathcal{M} \vDash \psi \to \chi\,.$$

In het eerste geval moeten we hiertoe laten zien dat χ waar is. Nu is in dit geval $\mathcal{M}$ ook een $\sqsubset$-preferent model voor $\varphi \wedge \psi$. Dan volgt uit ons gegeven 1 dat $\mathcal{M}$ ook χ waar maakt.

Concluderend hebben we laten zien dat, gegeven 1, voor ieder $\sqsubset$-preferent model $\mathcal{M}$ voor φ geldt:

$$\mathcal{M} \vDash \psi \to \chi\,.$$

En dus geldt, gegeven 1, ook

$$\varphi \vDash_{\sqsubset} \psi \to \chi\,.$$

■

Geldt de omgekeerde implicatie ook?

De omgekeerde implicatie

$$\varphi \vDash_{\sqsubset} \psi \to \chi \implies \varphi \wedge \psi \vDash_{\sqsubset} \chi$$

geldt niet. We laten dit zien door een tegenvoorbeeld te geven.

Bewijs We kiezen voor φ, ψ en χ formules uit de eerste-orde predikatenlogica:

$$\begin{aligned}
\varphi &= Bt\,,\\
\psi &= \forall x((Bx \wedge \neg Px) \to Fx)\,,\\
\chi &= Ft\,.
\end{aligned}$$

Voor $\sqsubset$ kiezen we de strikte partiële ordening $<^P$ zoals deze is gedefiniëerd voor predikaatcircumscriptie in definitie 3.1 van de reader.

We laten nu zien dat

$$\varphi \vDash_{<^P} \psi \to \chi$$

maar niet

$$\varphi \wedge \psi \vDash_{<^P} \chi\,.$$

Laat $\mathcal{M}$ een $<^P$-preferent model zijn voor φ. Dat betekent dat $t^{\mathcal{M}} \notin P^{\mathcal{M}}$. Want stel dat $t^{\mathcal{M}} \in P^{\mathcal{M}}$. Dan is er een model $\mathcal{M}'$ voor φ gelijk aan $\mathcal{M}$ maar zonder $t^{\mathcal{M}'}$ in $P^{\mathcal{M}'}$ met $\mathcal{M}' <^P \mathcal{M}$. Dat is in tegenspraak met de gegeven eigenschap van $\mathcal{M}$ en dus geldt $t^{\mathcal{M}} \notin P^{\mathcal{M}}$.

Uit de waarheid van φ en $\neg Pt$ in $\mathcal{M}$ volgt dat gegeven de waarheid van ψ ook χ waar is. En dus geldt $\mathcal{M} \vDash \psi \to \chi$. Omdat $\mathcal{M}$ een willekeurig gekozen $<^P$-preferent model voor φ is, volgt hier uit dat

$$\varphi \vDash_{<^P} \psi \to \chi\,.$$

We bekijken het model $\mathcal{M}$ met domein $\{Tweety\}$, interpretatie $t^{\mathcal{M}} = Tweety$ en

$$B^{\mathcal{M}} = P^{\mathcal{M}} = \{Tweety\} \quad \text{en} \quad F^{\mathcal{M}} = \{\}\,.$$

Dit is een $<^P$-preferent model voor φ en ψ, omdat:

1. $\mathcal{M} \vDash \varphi$
2. $\mathcal{M} \vDash \psi$
3. Er is geen model $\mathcal{M}'$ voor φ en ψ met $\mathcal{M}' <^P \mathcal{M}$.

   Want stel dat er wel zo'n model $\mathcal{M}'$ zou zijn. De enige manier om $\mathcal{M}' <^P \mathcal{M}$ waar te maken is door $\mathcal{M}'$ gelijk te nemen aan $\mathcal{M}$, echter met $P^{\mathcal{M}'} = \{\}$. Maar dan is $\mathcal{M}'$ geen model meer voor ψ. Dit is in tegenspraak met de definitie van $\mathcal{M}'$ en dus bestaat dit model niet.

In $\mathcal{M}$ is echter χ niet waar en dus hebben we

$$\varphi \wedge \psi \nvDash_{<^P} \chi\,.$$

Uit deze twee resultaten concluderen we dat de implicatie

$$\varphi \vDash_{\sqsubset} \psi \to \chi \implies \varphi \wedge \psi \vDash_{\sqsubset} \chi$$

niet geldt.

■