

# Voorbeeld tentamenvragen Equationele Logica

5 maart 2005

## Opgave 1

Beschouw de volgende specificatie Spec:

```
module Spec

  sorts object

  functions
    0      :                -> object
    succ : object          -> object
    add  : object # object -> object

  equations
    [E1] : add(x,0)      = x
    [E2] : add(x,succ(y)) = succ(add(x,y))

end
```

- a. Geef een formele afleiding in de specificatie Spec van de vergelijking

$$\text{add}(\text{add}(\text{succ}(z), 0), 0) = \text{add}(z, \text{succ}(0)).$$

- b. De specificatie beschrijft de natuurlijke getallen met succ als de opvolger functie en add als optelling. Om alle gehele getallen te kunnen beschrijven wordt de specificatie uitgebreid met de volgende functiesymbolen:

```
pred : object      -> object
sub  : object # object -> object
```

Hiermee worden respectievelijk de functies voorganger en aftrekken bedoeld. Breid de specificatie uit met geschikte vergelijkingen die het gedrag van de nieuwe verzameling functiesymbolen op de gehele getallen beschrijven.

## Opgave 2

We werken in de signatuur  $(S, \Sigma)$  met één soort: nat; en alleen de constante 0 en het binaire functiesymbool add.  $\mathcal{N}^+$  is de  $\Sigma$ -algebra met als domein de natuurlijke getallen en de voor de hand liggende interpretaties: 0 als het getal 0 en add als de gewone optelling. Welke van de volgende twee afbeeldingen zijn homomorfismen? Toelichting is alleen nodig wanneer een afbeelding geen homomorfisme is.

- a.  $\phi$  gegeven door  $\phi(n) = n + 3$ .
- b.  $\phi$  gegeven door  $\phi(n) = 2n$ .

## Opgave 3

Gegeven is de volgende specificatie Spec:

```

module Spec

  sorts object

  functions
    a :          -> object
    h : object -> object
    s : object -> object

  equations
    [E1] : h(h(x)) = x
    [E2] : s(h(x)) = s(x)

end Spec

```

Voor deze specificatie beschouwen we de volgende  $\Sigma$ -algebra's  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$  en  $\mathfrak{N}$ .

$$\begin{array}{llll}
 \mathfrak{K}: & K = \mathbb{N}, & a_{\mathfrak{K}} = 0, & h_{\mathfrak{K}}(n) = n + 1, & s_{\mathfrak{K}}(n) = n^2. \\
 \mathfrak{L}: & L = \mathbb{Z}, & a_{\mathfrak{L}} = 0, & h_{\mathfrak{L}}(z) = -z, & s_{\mathfrak{L}}(z) = z^2. \\
 \mathfrak{M}: & M = \mathbb{Z}, & a_{\mathfrak{M}} = 0, & h_{\mathfrak{M}}(z) = -z, & s_{\mathfrak{M}}(z) = |z| + 1. \\
 \mathfrak{N}: & N = \{2, 4, 16, \dots\}, & a_{\mathfrak{N}} = 2, & h_{\mathfrak{N}}(x) = x, & s_{\mathfrak{N}}(x) = x^2.
 \end{array}$$

- a. Geef een afleiding voor de volgende vergelijking:

$$s(s(h(a))) = s(h(s(a))).$$

- b. Precies één van de algebra's  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  is *geen* model voor de specificatie Spec. Geef aan welke dat is en waarom.
- c. Ga voor elk van de drie algebra's van  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  die een model zijn voor Spec na of het een initieel model is voor Spec. Alleen negatieve antwoorden moeten worden gemotiveerd door het aangeven van junk en/of confusion.
- d. Geef een kanonieke term algebra voor de specificatie Spec.