Voorbeeld tentamenvragen Equationele Logica

Antwoorden

5 maart 2005

Opgave 1

a.

1	add(x,0) = x	[E1]
2	add(add(succ(z),0),0) = add(succ(z),0)	subst, 1
3	add(succ(z),0) = succ(z)	subst, 1
4	add(add(succ(z),0),0) = succ(z)	trans, 2, 3
5	add(x,succ(y)) = succ(add(x,y))	[E2]
6	add(z,succ(0)) = succ(add(z,0))	subst, 5
7	add(z,0) = z	subst, 1
8	succ(add(z,0)) = succ(z)	congr, 7
9	add(z,succ(0)) = succ(z)	trans, 6, 8
10	succ(z) = add(z,succ(0))	symm, 9
11	add(add(succ(z),0),0) = add(z,succ(0))	trans, 4, 10

b.

```
module Spec

  sorts object

  functions
    0    :                   -> object
    succ : object            -> object
    pred : object            -> object
    add  : object # object -> object
    sub  : object # object -> object

  equations
    [E1] : add(x,0)        = x
    [E2] : add(x,succ(y)) = succ(add(x,y))
    [E3] : add(x,pred(y)) = pred(add(x,y))
    [E4] : succ(pred(x))  = x
```

```
[E5] : pred(succ(x))  = x
[E6] : sub(x,0)       = x
[E7] : sub(x,succ(y)) = pred(sub(x,y))
[E8] : sub(x,pred(y)) = succ(sub(x,y))

end
```

Opgave 2

De afbeelding gegeven bij **a.** is geen homomorfisme, omdat $(2+5)+3 \neq (2+3)+(5+3)$. De afbeelding gegeven bij **b.** is wel een homomorfisme.

Opgave 3

a.

1	`s(h(x)) = s(x)`	[E2]
2	`s(s(h(x))) = s(s(x))`	congr, 1
3	`s(s(h(a))) = s(s(a))`	subst, 2
4	`s(h(s(a))) = s(s(a))`	subst, 1
5	`s(s(a)) = s(h(s(a)))`	symm, 4
6	`s(s(h(a))) = s(h(s(a)))`	trans, 3, 5

b. De algebra $\mathfrak{K}$ is geen model voor de specificatie `Spec` omdat de vergelijking `[E1]` hierin niet waar is. Kies bijvoorbeeld de assignment θ met $\theta(x) = 3$. We zien dan dat

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mathtt{h(h(x))}) &= 3+2\\ &= 5\end{aligned}$$

terwijl

$$\bar{\theta}(\mathrm{x}) = 3.$$

c. We bekijken voor de overige algebra's of ze initiele modellen zijn voor `Spec`.

De algebra $\mathfrak{L}$ Deze algebra is geen initieel model voor `Spec`, omdat er junk is. Voor alle getallen ongelijk aan 0 geldt namelijk dat ze niet de interpretatie zijn van een gesloten term.

Bovendien bevat deze algebra confusion, omdat iedere gesloten term geïnterpreteerd wordt als het getal 0. Dit betekent dat iedere vergelijking van gesloten termen waar is in $\mathfrak{L}$, terwijl bijvoorbeeld `s(x) = x` niet afleidbaar is in `Spec`.

De algebra $\mathfrak{M}$ Deze algebra is geen initieel model voor `Spec`, omdat er confusion aanwezig is. De termen `a` en `h(a)` worden namelijk gelijk geïnterpreteerd, terwijl ze niet als gelijk kunnen worden afgeleid in de specificatie `Spec`.

De algebra $\mathfrak{N}$ Deze algebra is geen initieel model voor `Spec`, omdat er confusion aanwezig is. Bijvoorbeeld de termen `x` en `h(x)` worden geïdentificeerd, terwijl deze gelijkheid niet afleidbaar is in `Spec`.

d. Een kta voor `Spec` is de algebra $\mathfrak{S}$ met als drager de verzameling

$$\{\ldots, \mathtt{h(s(s(a)))}, \mathtt{h(s(a))}, \mathtt{h(a)}, \mathtt{a}, \mathtt{s(a)}, \mathtt{s(s(a))}, \ldots\}$$

en als interpretaties

$$\begin{aligned}
\mathtt{a}_{\mathfrak{S}} &= \mathtt{a}, \\
\mathtt{h}_{\mathfrak{S}}(t) &= \begin{cases} u & \text{als } t \text{ van de vorm } \mathtt{h}(u) \text{ is;} \\ \mathtt{h}(t) & \text{in de overige gevallen,} \end{cases} \\
\mathtt{s}_{\mathfrak{S}}(t) &= \begin{cases} \mathtt{s}(u) & \text{als } t \text{ van de vorm } \mathtt{h}(u) \text{ is;} \\ \mathtt{s}(t) & \text{in de overige gevallen.} \end{cases}
\end{aligned}$$