# Voorbeeld uitwerkingen Equationele Logica

bij opgaven 3.1, 3.4, 4.1, 4.4, 4.6, 5.1, 5.5, 6.1, 6.2, 7.3 en 7.4

5 maart 2005

## Opgave 3.1

**(a)** Een afleiding in de specificate `Stack-Of-Data` van de vergelijking

```
pop(pop(pop(empty))) = empty
```

| | | |
|---|---|---|
| 1 | `pop(empty) = empty` | [1] |
| 2 | `pop(pop(empty)) = pop(empty)` | congr, 1 |
| 3 | `pop(pop(pop(empty))) = pop(pop(empty))` | congr, 2 |
| 4 | `pop(pop(empty))) = empty` | trans, 1, 2 |
| 5 | `pop(pop(pop(empty))) = empty` | trans, 3, 4 |

**(b)** Een afleiding in de specificatie `Stack-Of-Data` van de vergelijking

```
pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = empty
```

| | | |
|---|---|---|
| 1 | `pop(push(x, s)) = s` | [3] |
| 2 | `pop(push(x, empty)) = empty` | subs, 1 |
| 3 | `pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = pop(push(x, empty))` | subs, 1 |
| 4 | `pop(push(x, pop(push(x, empty)))) = empty` | trans, 3, 2 |

## Opgave 3.4

Om te laten zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is, laten we zien dat $\sim$ transitief, symmetrisch en reflexief is.

Transitiviteit

Stel $t \sim u$ en $u \sim v$, dan is volgens de definitie $E \vdash t = u$ en $E \vdash u = v$. Wegens de regel *transitiviteit* van de afleidbaarheid, is dan ook $E \vdash t = v$. Met de definitie zien we dan weer dat ook $t \sim v$ waar is en dus is $\sim$ transitief.

Symmetrie

Stel $t \sim u$, dan is volgens de definitie $E \vdash t = u$. De afleidingsregel *symmetrie* zegt dat dan ook $E \vdash u = t$ en volgens de definitie zien we dan weer dat ook $u \sim t$. En dus is $\sim$ symmetrisch.

Reflexiviteit

Voor iedere term $t$ geldt volgens de afleidingsregel *reflexiviteit* dat $E \vdash t = t$. Onze definitie zegt dan dat ook $t \sim t$ en dus is $\sim$ reflexief.

Omdat $\sim$ transitief, symmetrisch en reflexief is, is $\sim$ een equivalentierelatie.

## Opgave 4.1

**(a)** Hiertoe moeten we laten zien dat $\phi$ over alle functies voldoet aan de voorwaarden van een homomorphisme:

- de constante $0_{\mathfrak{N}}$

$$\begin{aligned}\phi(0_{\mathfrak{N}}) &= \phi(0)\\ &= 0\\ &= 0_{\mathfrak{Z}}\end{aligned}$$

- de functie $\mathtt{succ}_{\mathfrak{N}}$
  Voor willekeurige $x \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{succ}_{\mathfrak{N}}(x)) &= \phi(x+1)\\ &= x+1\\ &= \mathtt{succ}_{\mathfrak{Z}}(x)\\ &= \mathtt{succ}_{\mathfrak{Z}}(\phi(x))\end{aligned}$$

- de functie $\mathtt{add}_{\mathfrak{N}}$
  Voor willekeurige $x, y \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{add}_{\mathfrak{N}}(x,y)) &= \phi(x+y)\\ &= x+y\\ &= \mathtt{add}_{\mathfrak{Z}}(x,y)\\ &= \mathtt{add}_{\mathfrak{Z}}(\phi(x),\phi(y))\end{aligned}$$

- de functie $\mathtt{mul}_{\mathfrak{N}}$
  Voor willekeurige $x, y \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\phi(\mathtt{mul}_{\mathfrak{N}}(x,y)) &= \phi(x*y)\\ &= x*y\\ &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{Z}}(x,y)\\ &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{Z}}(\phi(x),\phi(y))\end{aligned}$$

Hiermee hebben we laten zien dat $\phi$ aan alle voorwaarden van een homomorphisme voldoet.

**(b)** Nee, de interpretatie van 0 in $\mathfrak{N}$ moet op de interpretatie van 0 in $\mathfrak{Z}$ afgebeeld worden. Met de voorwaarden van een homomorfisme over de successor functie ligt daarmee heel de afbeelding vast.

**(c)** Stel, er is een homomorphisme $\phi$ van $\mathfrak{Z}$ naar $\mathfrak{N}$. We bekijken $\phi(-1) = n$ en weten dat $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 0)$. Nu hebben we

$$\phi(\mathtt{succ}_{\mathfrak{Z}}(-1)) \;=\; \phi(0) \;=\; 0$$

omdat $\phi(0_{\mathfrak{Z}} = 0)$ gelijk moet zijn aan $0_{\mathfrak{N}} = 0$.

Vervolgens zien we dat

$$\mathtt{succ}_{\mathfrak{N}}(\phi(-1)) = \mathtt{succ}_{\mathfrak{N}}(n) = n + 1 \neq 0$$

en dus voldoet $\phi$ niet aan de voorwaarden van een homomorphisme. Dit is in tegenspraak met de aanname dat $\phi$ een homomorphisme is, dus kan $\phi$ niet bestaan.

## Opgave 4.4

De vraag

> "Laat zien dat er een ... bestaat."

betekent in de praktijk (bijna) altijd:

> "Geef een ... en laat zien dat het een ... is."

We geven het homomorphisme $\phi$ van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$ gedefiniëerd als

$$\phi(x) = \begin{cases} \Box & \text{als } x \in A_{\mathtt{data}}; \\ |x| & \text{als } x \in A_{\mathtt{stack}}, \end{cases}$$

waarbij $|x|$ de lengte van de string $x$ geeft.

Nu laten we zien dat $\phi$ daadwerkelijk een homomorfisme is. Voor alle constanten $\mathtt{di}_{\mathfrak{A}}$ hebben we

$$\begin{aligned} \phi(\mathtt{di}_{\mathfrak{A}}) &= \phi(a_i) \\ &= \Box \\ &= \mathtt{di}_{\mathfrak{B}}, \end{aligned}$$

en voor $\mathtt{error}_{\mathfrak{A}}$ hebben we

$$\begin{aligned} \phi(\mathtt{error}_{\mathfrak{A}}) &= \phi(\bot) \\ &= \Box \\ &= \mathtt{di}_{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Ook over push, pop en top voldoet $\phi$ aan de voorwaarden, want voor alle $d \in A_{\mathtt{data}}$ en $s \in A_{\mathtt{stack}}$ is

$$\begin{aligned} \phi(\mathtt{push}_{\mathfrak{A}}(d,s)) &= \phi(conc(d,s)) \\ &= |conc(d,s)| \\ &= |s| + 1 \\ &= \mathtt{push}_{\mathfrak{B}}(\Box, |s|) \\ &= \mathtt{push}_{\mathfrak{B}}(\phi(d), \phi(s)), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\phi(\texttt{pop}_{\mathfrak{A}}(s)) &= \phi(tail(s)) \\
&= |tail(s)| \\
&= max(|s| - 1,\, 0) \\
&= \texttt{pop}_{\mathfrak{B}}(|s|) \\
&= \texttt{pop}_{\mathfrak{B}}(\phi(s)),
\end{aligned}
$$

en

$$
\begin{aligned}
\phi(\texttt{top}_{\mathfrak{A}}(s)) &= \phi(head(s)) \\
&= \phi(e) && \text{met } e \in A_{\texttt{data}} \\
&= \square \\
&= \texttt{top}_{\mathfrak{B}}(|s|) \\
&= \texttt{top}_{\mathfrak{B}}(\phi(s)).
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt dat $\phi$ een homomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$ is en dus bestaat een dergelijk homomorphisme.

## Opgave 4.6

**(a)** Gegeven een homomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$

$$\psi : A \to B$$

en een homomorphisme van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{C}$

$$\omega : B \to C$$

krijgen we met de compositie

$$
\begin{aligned}
\phi &: A \to C \\
\phi &= \omega \circ \psi
\end{aligned}
$$

een homomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{C}$.

We hebben namelijk voor alle constanten $c$

$$
\begin{aligned}
\phi(c_{\mathfrak{A}}) &= \omega(\psi(c_{\mathfrak{A}})) \\
&= \omega(c_{\mathfrak{B}}) \\
&= c_{\mathfrak{C}}
\end{aligned}
$$

en voor alle functiesymbolen $f$ (waarbij $n$ het aantal argumenten van $f$ is)

$$
\begin{aligned}
\phi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= \omega(\psi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))) \\
&= \omega(f_{\mathfrak{B}}(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n))) \\
&= f_{\mathfrak{C}}(\omega(\psi(a_1)), \ldots, \omega(\psi(a_n))) \\
&= f_{\mathfrak{C}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)).
\end{aligned}
$$

**(b)** Gegeven een isomorfisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$

$$\psi : A \to B$$

construeren we een isomorfisme van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{A}$ als

$$\begin{aligned} &\phi : B \to A \\ &\phi = \psi^{-1}. \end{aligned}$$

De inverse van $\psi$ bestaat omdat $\psi$ een bijectie is. Bovendien is de inverse van een bijectie ook weer een bijectie, dus is $\phi$ een bijectie.

We laten nu zien dat $\phi$ een homomorphisme is van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{A}$. Voor alle constanten $c$ hebben we

$$\begin{aligned} \phi(c_{\mathfrak{B}}) &= \psi^{-1}(c_{\mathfrak{B}}) \\ &= c_{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

en voor alle functiesymbolen $f$ hebben we

$$\begin{aligned} \phi(f_{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)) &= \psi^{-1}(f_{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= f_{\mathfrak{A}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)). \end{aligned}$$

Ter verduidelijking: deze laatste gelijkheid volgt uit het feit dat $\psi$ een homomorphisme is, want daarmee is

$$\begin{aligned} \psi(f_{\mathfrak{A}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))) &= f_{\mathfrak{B}}(\psi(\phi(a_1)), \ldots, \psi(\phi(a_n))) \\ &= f_{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

We hebben nu laten zien dat $\phi$ een bijectief homomorphisme is en dus een isomorphisme.

**(c)** Een relatie is een equivalentierelatie als deze reflexief, symmetrisch en transitief is.

**Reflexiviteit** Gegeven een algebra $\mathfrak{A}$ bekijken we het isomorphisme

$$\phi(x) = x.$$

Dat $\phi$ bijectief is moge duidelijk zijn. We laten kort zien dat $\phi$ een homomorphisme is en daarmee dus ook een isomorphisme. Voor constanten $c$ en functiesymbolen $f$ hebben we

$$\begin{aligned} \phi(c_{\mathfrak{A}}) &= c_{\mathfrak{A}} \\ \phi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \\ &= f_{\mathfrak{A}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)). \end{aligned}$$

Hiermee is $\phi$ een isomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{A}$ en hebben we dus

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}.$$

**Symmetrie** Gegeven twee algebra's $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ met

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Er bestaat dus een isomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$. We hebben bij **(b)** gezien dat de inverse van dit isomorphisme een isomorphisme is van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{A}$ en dus hebben we ook

$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}.$$

**Transitiviteit** Gegeven drie algebra's $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$ met

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}.$$

Er bestaan dus isomorphismes $\phi$ van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$ en $\psi$ van $\mathfrak{B}$ naar $\mathfrak{C}$. We construeren nu

$$\omega = \psi \circ \phi$$

welke een homomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{C}$ is. De compositie van twee bijecties geeft weer een bijectie en dus is $\omega$ een isomorphisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{C}$ en hebben we

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}.$$

Hiermee hebben we laten zien dat $\cong$ een equivalentierelatie is.

## Opgave 5.1

De algebra $\mathfrak{P}(V)$ (met $V$ een verzameling) heeft als drager de machtsverzameling van $V$. De functies worden geïnterpreteerd als

$$\begin{aligned}
\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)} &= V, \\
\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)} &= \{\}, \\
\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(X) &= V - X, \\
\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(X, Y) &= X \cap Y, \\
\texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(X, Y) &= X \cup Y.
\end{aligned}$$

We constateren eerst dat $\mathfrak{P}(V)$ een algebra voor `Booleans` is omdat de functietypes kloppen. Vervolgens laten we zien dat $\mathfrak{P}(V)$ zelfs een model is voor `Booleans` door te laten zien dat alle vergelijkingen (`[B1]` ... `[B5]`) waar zijn in $\mathfrak{P}(V)$.

Laat $\theta$ een assignment zijn van elementen uit $\mathcal{P}(V)$ aan de variabelen $x$ en $y$, volgens

$$\begin{aligned}
\theta : \{x, y\} &\to \mathcal{P}(V), \\
\theta(x) &= X, \\
\theta(y) &= Y.
\end{aligned}$$

We laten nu zien dat voor iedere vergelijking uit `Booleans` de rechter kant identiek is aan de linker kant onder $\bar{\theta}$.

- [B1] and(true,x) = x

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{true}, x)) &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{true}), \bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)}, \theta(x)) \\ &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(V, X) \\ &= V \cap X \\ &= X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(x) &= \theta(x) \\ &= X\end{aligned}$$

- [B2] and(false,x) = false

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{false}, x)) &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{false}), \bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)}, \theta(x)) \\ &= \texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\{\}, X) \\ &= \{\} \cap X \\ &= \{\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{false}) &= \texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)} \\ &= \{\}\end{aligned}$$

- [B3] not(true) = false

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not(true)}) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{true})) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)}) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(V) \\ &= V - V \\ &= \{\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{false}) &= \texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)} \\ &= \{\}\end{aligned}$$

- [B4] not(false) = true

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not(false)}) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{false})) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{false}_{\mathfrak{P}(V)}) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\{\}) \\ &= V - \{\} \\ &= V\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{true}) &= \texttt{true}_{\mathfrak{P}(V)} \\
&= V
\end{aligned}
$$

- [B5] `or(x,y) = not(and(not(x),not(y)))`

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{or}(x,y)) &= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(x),\bar{\theta}(y)) \\
&= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(x),\theta(y)) \\
&= \texttt{or}_{\mathfrak{P}(V)}(X,Y) \\
&= X \cup Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}(\texttt{not}(\texttt{and}(\texttt{not}(x),\texttt{not}(y)))) &= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{and}(\texttt{not}(x),\texttt{not}(y)))) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(\texttt{not}(x)),\bar{\theta}(\texttt{not}(y)))) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(x)),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\bar{\theta}(y)))) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(x)),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\theta(y)))) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(X),\texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(Y))) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}(\texttt{and}_{\mathfrak{P}(V)}(V-X,V-Y)) \\
&= \texttt{not}_{\mathfrak{P}(V)}((V-X)\cap(V-Y)) \\
&= V-((V-X)\cap(V-Y)) \\
&= X \cup Y
\end{aligned}
$$

Hiermee hebben we laten zien dat iedere vergelijking in `Booleans` waar is in $\mathfrak{P}(V)$ en dus dat $\mathfrak{P}(V)$ een model is voor de specificatie `Booleans`.

## Opgave 5.5

Om te laten zien dat een bepaalde vergelijking niet afleidbaar is uit een specificatie kunnen we een tegenmodel construeren. Dit is een model voor de specificatie waarin de gegeven vergelijking niet waar is. Volgens de correctheidsstelling is deze vergelijking dan ook niet afleidbaar uit de specificatie.

We volgen de hint op die bij de opgave gegeven wordt. We beschouwen de algebra $\mathfrak{M}$ voor de specificatie `NatBool` met drager $A$ en interpretaties als we gewend zijn, behalve voor interpretaties hier onder gedefiniëerd.

$$
\begin{aligned}
A_{\texttt{nat}} &= \{\omega, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
A_{\texttt{bool}} &= \{T, F\}
\end{aligned}
$$

Voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ definiëren we interpretaties als volgt.

$$
\begin{aligned}
0_{\mathfrak{M}} &= 0\\
\mathtt{succ}_{\mathfrak{M}}(n) &= n+1\\
\mathtt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= \omega\\
\mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(m,n) &= m+n\\
\mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega,n) &= \omega\\
\mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(n,\omega) &= \omega\\
\mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega,\omega) &= \omega\\
\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(m,n) &= m*n\\
\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,0) &= 0\\
\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,n+1) &= \omega\\
\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(n,\omega) &= \omega\\
\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,\omega) &= \omega\\
\mathtt{even}_{\mathfrak{M}}(n) &= \begin{cases} T & \text{als } n \text{ even is}\\ F & \text{als } n \text{ oneven is}\end{cases}\\
\mathtt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= T\\
\mathtt{odd}_{\mathfrak{M}}(n) &= \begin{cases} F & \text{als } n \text{ even is}\\ T & \text{als } n \text{ oneven is}\end{cases}\\
\mathtt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega) &= T
\end{aligned}
$$

We hebben dus een algebra geconstrueerd waarin we een extra element toegevoegd hebben dat ‘zowel even als oneven’ is. Om alle vergelijkingen nog waar te maken was er wat puzzelwerk nodig (je kunt $\omega$ opvatten als nuldeler voor zowel optelling als vermeningvuldiging als je er iets in wilt zien).

Nu moeten we laten zien dat $\mathfrak{M}$ een model is voor de specificatie `NatBool`. We laten de vergelijkingen `[B1]` ...`[B5]` voor wat ze zijn; onze toevoeging van $\omega$ heeft hier geen invloed op. Van de overige vergelijkingen uit `NatBool` laten we voor `[A1]`, `[M2]` en `[E2]` zien dat ze waar zijn in $\mathfrak{M}$, de rest gaat op vergelijkbare wijze.

Laat nu $\theta$ een assignment zijn van elementen uit $A$ aan de variabelen $x$ en $y$. We stellen dat $\theta(x) = a$ en $\theta(y) = b$.

- `[A1] add(x,0) = x`

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}(\mathtt{add}(x,0)) &= \mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x), \bar{\theta}(0))\\
&= \mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\theta(x), 0_{\mathfrak{M}})\\
&= \mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(a, 0)\\
&= a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}(x) &= \theta(x)\\
&= a
\end{aligned}
$$

- [M2] `mul(x,succ(y)) = add(mul(x,y),x)`

  We schrijven eerst de linkerkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mathtt{mul}(x,\mathtt{succ}(y))) &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x),\bar{\theta}(\mathtt{succ}(y)))\\ &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\theta(x),\mathtt{succ}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(y)))\\ &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,\mathtt{succ}_{\mathfrak{M}}(\theta(y)))\\ &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,\mathtt{succ}_{\mathfrak{M}}(b))\end{aligned}$$

  We onderscheiden nu verschillende gevallen voor $a$ en $b$.

  - Wanneer $a = b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mathtt{mul}(x,\mathtt{succ}(y))) &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,\mathtt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega))\\ &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,\omega)\\ &= \omega\end{aligned}$$

  - Wanneer $a, b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mathtt{mul}(x,\mathtt{succ}(y))) &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,b+1)\\ &= a*(b+1)\end{aligned}$$

  - Wanneer $a = \omega$ en $b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mathtt{mul}(x,\mathtt{succ}(y))) &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,b+1)\\ &= \omega\end{aligned}$$

  - Wanneer $a \in \mathbb{N}$ en $b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mathtt{mul}(x,\mathtt{succ}(y))) &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,\mathtt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega))\\ &= \mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,\omega)\\ &= \omega\end{aligned}$$

  En vervolgens schrijven we de rechterkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mathtt{add}(\mathtt{mul}(x,y),x)) &= \mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\mathtt{mul}(x,y),x))\\ &= \mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x),\bar{\theta}(y)),\bar{\theta}(x))\\ &= \mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\theta(x),\theta(y)),\theta(x))\\ &= \mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,b),a)\end{aligned}$$

  We onderscheiden nu weer dezelfde gevallen voor $a$ en $b$.

  - Wanneer $a = b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mathtt{add}(\mathtt{mul}(x,y),x)) &= \mathtt{add}_{\mathfrak{M}}(\mathtt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,\omega),\omega)\\ &= \omega\end{aligned}$$

- Wanneer $a, b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,b),a) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(a*b,a) \\ &= (a*b)+a \\ &= a*(b+1)\end{aligned}$$

- Wanneer $a = \omega$ en $b \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(\omega,b),\omega) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\ldots,\omega) \\ &= \omega\end{aligned}$$

- Wanneer $a \in \mathbb{N}$ en $b = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{add}(\texttt{mul}(x,y),x)) &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\texttt{mul}_{\mathfrak{M}}(a,\omega),a) \\ &= \texttt{add}_{\mathfrak{M}}(\omega,a) \\ &= \omega\end{aligned}$$

- `[E2] even(succ(x)) = odd(x)`

  We schrijven weer eerst de linkerkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\texttt{succ}(x))) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)))) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)))) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(a))\end{aligned}$$

  We onderscheiden twee gevallen voor $a$.

  - Wanneer $a \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(a)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(a+1) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(a+1) \\ &= \begin{cases} F & \text{als } a \text{ even is} \\ T & \text{als } a \text{ oneven is}\end{cases}\end{aligned}$$

  - Wanneer $a = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(\texttt{succ}(x))) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\texttt{succ}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

  En vervolgens schrijven we de rechterkant uit.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a)\end{aligned}$$

  We onderscheiden weer twee gevallen voor $a$.

– Wanneer $a \in \mathbb{N}$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a) \\ &= \begin{cases} F & \text{als } a \text{ even is} \\ T & \text{als } a \text{ oneven is} \end{cases}\end{aligned}$$

– Wanneer $a = \omega$ hebben we:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{odd}(x)) &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(a) \\ &= \texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

We hebben nu laten zien dat $\mathfrak{M}$ inderdaad een model is voor de specificatie `NatBool`. Nu bekijken we de vergelijking

```
even(x) = not(odd(x))
```

en zien dat deze niet waar is in $\mathfrak{M}$. Beschouw bijvoorbeeld de assignment $\theta$ met $\theta(x) = \omega$. We hebben dan

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{even}(x)) &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\theta(x)) \\ &= \texttt{even}_{\mathfrak{M}}(\omega) \\ &= T\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\texttt{not}(\texttt{odd}(x))) &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(\texttt{odd}(x))) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\bar{\theta}(x))) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\theta(x))) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(\texttt{odd}_{\mathfrak{M}}(\omega)) \\ &= \texttt{not}_{\mathfrak{M}}(T) \\ &= F.\end{aligned}$$

Uit alle vergelijkingen van `NatBool` volgt deze vergelijking dus niet semantisch. Volgens de correctheid van afleidbaarheid, is deze vergelijking dan ook niet afleidbaar in de specificatie `NatBool`.

## Opgave 6.1

**(a)** We hebben bij opgave 5.1 gezien dat iedere verzamelingsalgebra $\mathfrak{P}(V)$ over een verzameling $V$ (als in voorbeeld 4.3) een model is voor de specificatie `Booleans`. Nu beschouwen we de algebra $\mathfrak{P}(F)$ over de verzameling $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ met als drager $\mathcal{P}(F)$.

**Wel junk** Iedere gesloten term uit `Booleans` wordt in $\mathfrak{P}(F)$ geïnterpreteerd als òfwel heel F, òfwel de lege verzameling $\{\}$. Het bewijs hiervan verloopt via inductie naar de structuur van de term en laten we hier achterwege.

Laten we nu het element $\{2, 4, 5\}$ uit $\mathfrak{P}(F)$ bekijken. Dit is niet $F$, ook niet $\{\}$ en dus niet de interpretatie van een gesloten term. Hieruit volgt dat $\mathfrak{P}(F)$ junk bevat.

**Geen confusion** Voor iedere gesloten term $t$ uit Booleans geldt dat

$$\vdash t = \texttt{true} \quad \text{of} \quad \vdash t = \texttt{false}. \qquad\qquad \text{(volgens voorbeeld 6.3)}$$

Laat nu $s$ en $t$ gesloten termen zijn met $\nvdash t = s$. Dan moet òfwel $\vdash s = \texttt{true}$ en $\vdash t = \texttt{false}$, òfwel $\vdash s = \texttt{false}$ en $\vdash t = \texttt{true}$. In beide gevallen worden $s$ en $t$ als verschillende elementen van $\mathfrak{P}(F)$ geïnterpreteerd en dus bevat $\mathfrak{P}(F)$ geen confusion.

**(b)** Laten we nu analoog aan onderdeel **(a)** de verzamelingsalgebra $\mathfrak{P}(\{\})$ over de lege verzameling bekijken met in de drager als enige element $\{\}$.

**Geen junk** Volgens de definitie van de verzamelingsalgebra interpreteren we nu `true` als $\{\}$. Hieruit volgt direct dat $\mathfrak{P}(\{\})$ geen junk bevat, want het enige element uit de drager is de interpretatie van een gesloten term.

**Wel confusion** In de algebra $\mathfrak{P}(\{\})$ worden de interpretaties van de termen `true` en `false` geïdentificeerd. Toch is de vergelijking `true` $=$ `false` niet afleidbaar uit de specificatie `Booleans` (bovenstaande algebra $\mathfrak{P}(F)$ is bijvoorbeeld een tegenmodel) en dus bevat $\mathfrak{P}(\{\})$ confusion.

**(c)** We bekijken de algebra $\mathfrak{B}_3$ voor de specificatie `Booleans` met als drager $\{A, B, C\}$ en interpretaties

$$\begin{aligned}
\texttt{true}_{\mathfrak{B}_3} &= B,\\
\texttt{false}_{\mathfrak{B}_3} &= B,\\
\texttt{and}_{\mathfrak{B}_3}(x, y) &= B,\\
\texttt{or}_{\mathfrak{B}_3}(x, y) &= B,\\
\texttt{not}_{\mathfrak{B}_3}(x) &= B.
\end{aligned}$$

Dat $\mathfrak{B}_3$ een model is voor `Booleans` mag duidelijk zijn (iedere term evalueert naar $B$ en dus is iedere vergelijking waar).

**Wel junk** Het is niet moeilijk in te zien dat iedere gesloten term uit `Booleans` wordt in $\mathfrak{B}_3$ geïnterpreteerd als $B$. Dit betekent dat de elementen $A$ en $C$ niet de interpretatie van een gesloten term zijn en dus dat $\mathfrak{B}_3$ junk bevat.

**Wel confusion** In de algebra $\mathfrak{B}_3$ worden de interpretaties van de termen `true` en `false` geïdentificeerd. Toch is de vergelijking `true` $=$ `false` niet afleidbaar uit de specificatie `Booleans` (bovenstaande algebra $\mathfrak{P}(F)$ is bijvoorbeeld een tegenmodel) en dus bevat $\mathfrak{B}_3$ confusion.

## Opgave 6.2

**(a)** We construeren het termmodel $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ voor de specificatie `Booleans` met behulp van de equivalentierelatie $\sim$ op termen uit $Ter_\Sigma$:

$$s \sim t \iff E \vdash s = t$$

waarbij $E$ de verzameling vergelijkingen in `Booleans` is.

Als drager van het termmodel nemen we nu de equivalentieklassen van de gesloten termen onder $\sim$. We hebben eerder gezien dat iedere gesloten term in `Booleans` afleidbaar gelijk is aan òfwel `true` òfwel `false`, dus hebben we als drager genoeg aan de twee equivalentieklassen $[\mathtt{true}]$ en $[\mathtt{false}]$ van de termen `true` en `false`.

De interpretaties van de constanten en functiesymbolen kiezen we in het termmodel als volgt:

$$\begin{aligned}
\mathtt{true}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim} &= [\mathtt{true}] \\
\mathtt{false}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim} &= [\mathtt{false}] \\
\mathtt{and}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([t],[s]) &= [\mathtt{and}(t,s)] \\
\mathtt{or}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([t],[s]) &= [\mathtt{or}(t,s)] \\
\mathtt{not}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([t]) &= [\mathtt{not}(t)]
\end{aligned}$$

**(b)** We bekijken nu de functie $\phi : Ter_\Sigma/\sim\ \rightarrow A$ die equivalentieklassen afbeelt op de drager $A$ van $\mathfrak{B}_2$ en gedefiniëerd is als

$$\begin{aligned}
\phi([\mathtt{true}]) &= T, \\
\phi([\mathtt{false}]) &= F.
\end{aligned}$$

Nu laten we zien dat $\phi$ een isomorfisme is van $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ naar $\mathfrak{B}_2$.

**Homomorfisme** Eerst bekijken we of $\phi$ een homomorfisme is. Voor de constante `true` hebben we:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathtt{true}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}) &= \phi([\mathtt{true}]) \\
&= T \\
&= \mathtt{true}_{\mathfrak{B}_2}
\end{aligned}$$

Voor de constante `false` gaat dit op gelijke wijze. We bekijken nu het functiesymbool `not` toegepast op het element $x$. Voor de waarde van $x$ zijn er twee mogelijkheden, we beperken ons hier tot $[\mathtt{true}]$:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathtt{not}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}(x)) &= \phi(\mathtt{not}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([\mathtt{true}])) \\
&= \phi([\mathtt{not(true)}]) \\
&= \phi([\mathtt{false}]) \\
&= F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathtt{not}_{\mathfrak{B}_2}(\phi(x)) &= \mathtt{not}_{\mathfrak{B}_2}(\phi([\mathtt{true}])) \\
&= \mathtt{not}_{\mathfrak{B}_2}(T) \\
&= F
\end{aligned}$$

Vervolgens bekijken we het functiesymbool `and` toegepast op de elementen $x$ en $y$. Ook hier zijn er voor $x$ en $y$ beiden twee mogelijke waarden, we behandelen alleen het geval dat

$x = [\texttt{true}]$ en $y = [\texttt{false}]$:

$$\begin{aligned}
\phi(\texttt{and}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}(x,y)) &= \phi(\texttt{and}_{\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim}([\texttt{true}],[\texttt{false}])) \\
&= \phi([\texttt{and}(\texttt{true},\texttt{false})]) \\
&= \phi([\texttt{false}]) \\
&= F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\texttt{and}_{\mathfrak{B}_2}(\phi(x),\phi(y)) &= \texttt{and}_{\mathfrak{B}_2}(\phi([\texttt{true}]),\phi([\texttt{false}])) \\
&= \texttt{and}_{\mathfrak{B}_2}(T,F) \\
&= F
\end{aligned}$$

Hetzelfde verhaal voor het functiesymbool `or` zullen we achterwege laten. Hiermee hebben we laten zien dat $\phi$ een homomorfisme is van $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ naar $\mathfrak{B}_2$.

**Surjectief** De drager van $\mathfrak{B}_2$ bestaat uit de elementen $T$ en $F$. In onze definitie van $\phi$ zien we duidelijk dat beiden het beeld zijn van een element uit $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ en dus is $\phi$ surjectief.

**Injectief** Evenzo is gemakkelijk te zien dat de twee verschillende elementen $[\texttt{true}]$ en $[\texttt{false}]$ met $\phi$ ook twee verschillende beelden hebben, namelijk $T$ respectievelijk $F$. En dus is $\phi$ injectief.

Nu we hebben laten zien dat er een isomorfisme bestaat van $\mathfrak{Ter}_\Sigma/\sim$ naar $\mathfrak{B}_2$ ($\phi$ is een injectief en surjectief homomorfisme) weten we dus ook dat deze twee algebra's isomorf zijn.

# Opgave 7.3

**(a)** Er zijn twee equivalentieklassen onder afleidbare gelijkheid van gesloten termen. Uit beide klassen kiezen we één representant voor de drager van de kanonieke term algebra $\mathfrak{A}_1$:

$$A_1 = \{\texttt{true},\texttt{false}\}.$$

De functiesymbolen uit `Booleans` interpreteren we als volgt:

$$\begin{aligned}
\texttt{true}_{\mathfrak{A}_1} &= \texttt{true}, \\
\texttt{false}_{\mathfrak{A}_1} &= \texttt{false}, \\
\texttt{and}_{\mathfrak{A}_1}(t,s) &= \begin{cases} \texttt{true} & \text{als } t = s = \texttt{true}; \\ \texttt{false} & \text{in de overige gevallen,} \end{cases} \\
\texttt{or}_{\mathfrak{A}_1}(t,s) &= \begin{cases} \texttt{true} & \text{als } t = \texttt{true} \text{ of } s = \texttt{true}; \\ \texttt{false} & \text{in de overige gevallen,} \end{cases} \\
\texttt{not}_{\mathfrak{A}_1}(t) &= \begin{cases} \texttt{true} & \text{als } t = \texttt{false}; \\ \texttt{false} & \text{als } t = \texttt{true}. \end{cases}
\end{aligned}$$

**(b)** We kunnen ook andere representanten voor de drager kiezen, bijvoorbeeld zoals in deze algebra $\mathfrak{A}_2$:

$$A_2 = \{\texttt{true}, \texttt{not(true)}\}.$$

De functiesymbolen uit `Booleans` interpreteren we nu als volgt:

$$\begin{aligned}
\texttt{true}_{\mathfrak{A}_2} &= \texttt{true},\\
\texttt{false}_{\mathfrak{A}_2} &= \texttt{not(true)},\\
\texttt{and}_{\mathfrak{A}_2}(t,s) &= \begin{cases} \texttt{true} & \text{als } t = s = \texttt{true};\\ \texttt{not(true)} & \text{in de overige gevallen,} \end{cases}\\
\texttt{or}_{\mathfrak{A}_2}(t,s) &= \begin{cases} \texttt{true} & \text{als } t = \texttt{true} \text{ of } s = \texttt{true};\\ \texttt{not(true)} & \text{in de overige gevallen,} \end{cases}\\
\texttt{not}_{\mathfrak{A}_2}(t) &= \begin{cases} \texttt{true} & \text{als } t = \texttt{not(true)};\\ \texttt{not(true)} & \text{als } t = \texttt{true}. \end{cases}
\end{aligned}$$

**(c)** De derde mogelijkheid voor de drager van een kta bij deze specificatie is de volgende algebra $\mathfrak{A}_3$:

$$A_3 = \{\texttt{not(false)}, \texttt{false}\}.$$

De functiesymbolen uit `Booleans` interpreteren we nu als volgt:

$$\begin{aligned}
\texttt{true}_{\mathfrak{A}_3} &= \texttt{not(false)},\\
\texttt{false}_{\mathfrak{A}_3} &= \texttt{false},\\
\texttt{and}_{\mathfrak{A}_3}(t,s) &= \begin{cases} \texttt{not(false)} & \text{als } t = s = \texttt{not(false)};\\ \texttt{false} & \text{in de overige gevallen,} \end{cases}\\
\texttt{or}_{\mathfrak{A}_3}(t,s) &= \begin{cases} \texttt{not(false)} & \text{als } t = \texttt{not(false)} \text{ of } s = \texttt{not(false)};\\ \texttt{false} & \text{in de overige gevallen,} \end{cases}\\
\texttt{not}_{\mathfrak{A}_3}(t) &= \begin{cases} \texttt{not(false)} & \text{als } t = \texttt{false};\\ \texttt{false} & \text{als } t = \texttt{not(false)}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Merk overigens op dat er geen andere mogelijkheden zijn voor een kanonieke term algebra voor de specificatie `Booleans`. Wanneer we twee andere representanten uit de twee equivalentieklassen kiezen voor de drager van een kta kunnen we niet voldoen aan de eis dat iedere subterm van een element uit de drager ook een element uit de drager is. Dit is alleen te voorkomen door meer dan twee elementen in de drager te plaatsen, maar dan voldoen we niet meer aan de eis dat iedere equivalentieklasse precies één representant heeft in de drager.

## Opgave 7.4

**(a)** Een initieel correcte specificatie $E$ voor $\mathfrak{B}$ bestaat uit de volgende vergelijkingen:

```
[E1] f(f(f(x))) = f(f(c))
[E2] f(a) = c
```

**(b)** Een kta voor $E$ is de algebra $\mathfrak{E}$ met als drager de verzameling

$$\{\texttt{a}, \texttt{c}, \texttt{f(c)}, \texttt{f(f(c))}\}$$

en als interpretaties

$$\begin{aligned}
\texttt{a}_{\mathfrak{E}} &= \texttt{a}, \\
\texttt{c}_{\mathfrak{E}} &= \texttt{c}, \\
\texttt{f}_{\mathfrak{E}}(a) &= \texttt{c}, \\
\texttt{f}_{\mathfrak{E}}(c) &= \texttt{f(c)}, \\
\texttt{f}_{\mathfrak{E}}(f(c)) &= \texttt{f(f(c))}, \\
\texttt{f}_{\mathfrak{E}}(f(f(c))) &= \texttt{f(f(c))}.
\end{aligned}$$