Domácí úkol 2

Ladislav Martínek a Richard Werner

May 4, 2019

Domácí úkol 2 (6 bodů)

1 Úkoly

1. (1b) Z datového souboru načtěte text k analýze. Odhadněte pravděpodobnosti písmen (včetně mezer), které se v textu vyskytují. Takto získané empirické rozdělení graficky znázorněte. Pro další body předpokládejme, že je text vygenerován z homogenního markovského řetězce s diskrétním časem.
2. (1.5b) Za tohoto předpokladu odhadněte matici přechodu.
3. (2b) Na základě matice z předchozího bodu najděte stacionární rozdělení tohoto řetězce.
4. (1.5b) Porovnejte stacionární rozdělení se získaným empirickým rozdělením. Tj. na hladině 5% otestujte hypotézu, že se empirické rozdělení z bodu 1 rovná stacionárnímu rozdělení.

2 Řešení

```
In [1]: import math
        import scipy
        import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        from scipy import stats
```

2.1 Zpracování souborů

```
In [2]: K = 15
        L = len("Martínek")
        X = ((K*L*23) % (20)) + 1
        X_file = '0'*(3-len(str(X)))+str(X)+'.txt'
```

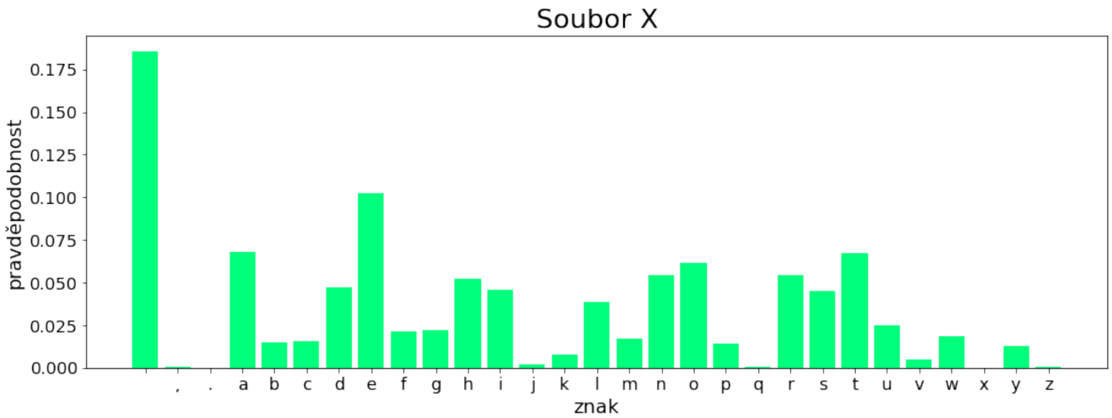
```
In [3]: def read_whole_file(filename):
            with open(filename, 'r') as file:
                return file.read()

        xfile = read_whole_file(X_file)
```

2.2 Příklad 1

- Na následujícím grafu jsou znázorněny vypočítané pravděpodobnosti výskytu daných písmen (znaků) v datovém souboru.

```
In [4]: xletters, xletter_cnt = np.unique(list(xfile.replace("\n", "").lower()),
                                          return_counts=True)
```

```
In [5]: xletter_cnt_prob = xletter_cnt/xletter_cnt.sum()
        f, ax1 = plt.subplots(1, 1, figsize=(15,5))
        ax1.bar(xletters, xletter_cnt_prob, color=(0, 1, 0.48, 1))
        for tick in ax1.xaxis.get_major_ticks(): tick.label.set_fontsize(14)
        for tick in ax1.yaxis.get_major_ticks(): tick.label.set_fontsize(14)
        ax1.set_xlabel('znak', fontsize=16)
        ax1.set_ylabel('pravděpodobnost', fontsize=16)
        ax1.set_title('Soubor X', fontsize=22)
        plt.show()
```



2.3 Příklad 2

Iterovali jsme přes celý textový soubor a napočítali konkrétní přechody mezi písmeny (znaky). Abychom získali matici přechodů, bylo nutné, aby suma v řádku byla rovna 1 pro pravděpodobnost přechodu ze znaku i do znaku j. Takže jsme každý řádek matice vydělili jeho součtem. Níže je vidět výsledná matice přechodu.

In [22]:
```
# dict with keys to the matrix
letters = list(xfile.replace("\n", "").lower())
letter_to_key = {}
key_to_letter = {}
cnt = 0
for i in letters:
    if i not in letter_to_key:
        letter_to_key[i] = cnt
        key_to_letter[cnt] = i
        cnt += 1
matrix = np.zeros((len(letter_to_key), len(letter_to_key)))
# counts in matrix
for i, letter in enumerate(letters[:-1]):
    matrix[letter_to_key[letter]][letter_to_key[letters[i+1]]] += 1

# transition matrix - need sum of row == 1
P = matrix/np.sum(matrix, 1)[:, np.newaxis]

string = ' |'
for j in key_to_letter:
    string = string + ' {} |'.format(key_to_letter[j])
display(string)

# print the matrix
for i, row in enumerate(P):
```

```
string = key_to_letter[i]+'| '
for j, letter_cnt in enumerate(row):
    if round(letter_cnt, 2) == 0:
        string = string + '{0:.2f}|'.format(round(letter_cnt, 2))
    else:
        string = string + '{0:.2f}|'.format(round(letter_cnt, 2))
display(string)
```

	p	i	e	r	o	t	,		d	g	f	b	l	u	m	y	w	a	.	h	c	n	s	v	k	q	j	x	z
p	0.11	0.13	0.25	0.07	0.05	0.02	0.00	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	0.07	0.00	0.02	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
i	0.01	0.00	0.08	0.08	0.02	0.15	0.00	0.06	0.03	0.04	0.03	0.00	0.03	0.01	0.05	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.04	0.24	0.09	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
e	0.01	0.02	0.03	0.15	0.00	0.02	0.00	0.35	0.10	0.01	0.00	0.00	0.04	0.00	0.01	0.02	0.00	0.07	0.00	0.00	0.01	0.09	0.05	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
r	0.00	0.12	0.25	0.04	0.11	0.04	0.00	0.18	0.03	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00	0.03	0.04	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
o	0.01	0.01	0.00	0.11	0.05	0.07	0.00	0.12	0.01	0.05	0.11	0.00	0.05	0.14	0.06	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01
t	0.00	0.03	0.06	0.03	0.09	0.03	0.00	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.35	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
,	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.04	0.03	0.01	0.01	0.06	0.14	0.00	0.00	0.05	0.02	0.05	0.06	0.04	0.00	0.04	0.01	0.07	0.13	0.00	0.09	0.04	0.02	0.06	0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00
d	0.00	0.05	0.10	0.04	0.10	0.00	0.00	0.58	0.01	0.00	0.01	0.00	0.02	0.01	0.00	0.01	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
g	0.00	0.04	0.09	0.12	0.03	0.01	0.00	0.32	0.00	0.04	0.00	0.00	0.01	0.04	0.00	0.02	0.00	0.04	0.00	0.12	0.00	0.01	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
f	0.00	0.07	0.09	0.10	0.19	0.04	0.00	0.33	0.00	0.00	0.04	0.00	0.04	0.07	0.00	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
b	0.00	0.10	0.21	0.13	0.11	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.02	0.13	0.13	0.00	0.03	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
l	0.00	0.12	0.21	0.00	0.11	0.01	0.00	0.10	0.09	0.02	0.01	0.00	0.12	0.03	0.00	0.07	0.00	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
u	0.06	0.02	0.02	0.10	0.00	0.15	0.00	0.01	0.02	0.10	0.00	0.01	0.12	0.00	0.04	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00	0.03	0.14	0.14	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01
m	0.02	0.07	0.25	0.00	0.09	0.00	0.01	0.20	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y	0.00	0.00	0.09	0.00	0.04	0.01	0.00	0.80	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
w	0.00	0.12	0.17	0.01	0.12	0.00	0.00	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.14	0.00	0.06	0.02	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
a	0.01	0.02	0.01	0.11	0.00	0.10	0.00	0.06	0.07	0.03	0.01	0.03	0.06	0.02	0.01	0.04	0.02	0.00	0.00	0.00	0.04	0.26	0.08	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
h	0.00	0.13	0.48	0.00	0.08	0.04	0.00	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
c	0.00	0.03	0.11	0.00	0.19	0.07	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.03	0.00	0.00	0.00	0.16	0.00	0.25	0.01	0.00	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00
n	0.00	0.02	0.06	0.05	0.04	0.06	0.00	0.25	0.29	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.03	0.00	0.00	0.03	0.01	0.02	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
s	0.01	0.04	0.08	0.00	0.08	0.11	0.00	0.49	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.03	0.00	0.05	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00
v	0.00	0.13	0.73	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
k	0.00	0.15	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
q	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
j	0.00	0.00	0.87	0.00	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
x	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
z	0.00	0.17	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17

2.4 Příklad 3

Při hledání stacionárního rozdělení vycházíme z rovnosti $\pi = \pi P$. Dále že pokud platí $\vec{v}P = \lambda\vec{v}$, potom také $(\alpha\vec{v})P = \lambda(\alpha\vec{v})$. Z dokumnetace scipy metoda eig vrací jako druhý argument: *The normalized left eigenvector corresponding to the eigenvalue w[i] is the column vl[:,i]. Only returned if left=True.*

In [7]:
```
# Solve an ordinary or generalized eigenvalue problem of a square matrix.
v = scipy.linalg.eig(P.astype(np.float),left=True,right=False)
# The eigenvalues, each repeated according to its multiplicity.
v = v[1]
# get first column
v = v[:,0]
stacionary_distribution = v / sum(v)
print("Stacionary distribution")
print(stacionary_distribution.real)
print("\nCheck sum: ", stacionary_distribution.sum().real)
print()
stacionary_distribution_round = (v / sum(v)).round(4).real
print(stacionary_distribution_round)
print()
print("\nCheck sum after round: ", stacionary_distribution_round.sum())
```

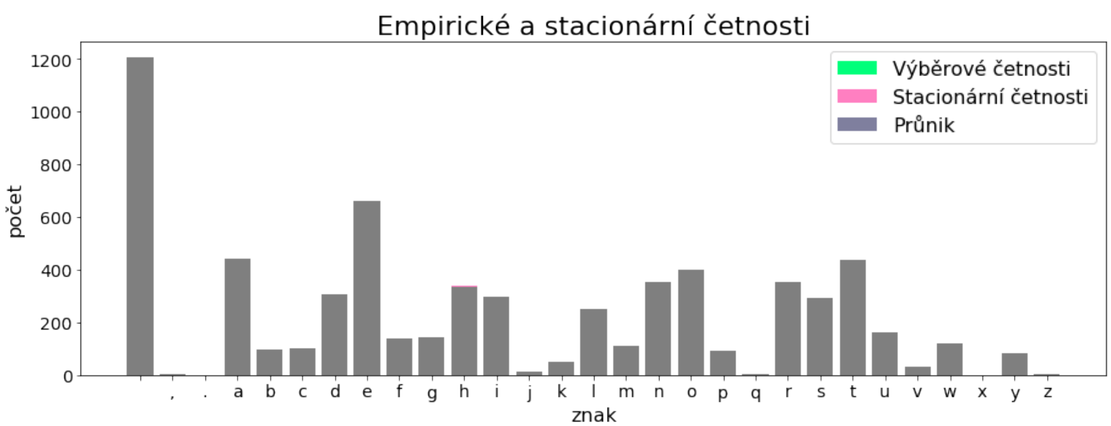
```
Stacionary distribution
[1.39846205e-02 4.59924066e-02 1.01994761e-01 5.44738342e-02
 6.18536309e-02 6.73979107e-02 3.07747283e-04 1.85601668e-01
 4.69262579e-02 2.20088141e-02 2.12347538e-02 1.50814659e-02
 3.85932560e-02 2.46153263e-02 1.69257852e-02 1.30767711e-02
 1.81592446e-02 6.77060272e-02 1.53877335e-04 5.18785635e-02
 1.56952306e-02 5.46203074e-02 4.47920949e-02 4.61583354e-03
 8.00092027e-03 9.23461875e-04 2.30847846e-03 1.53838252e-04
 9.23112969e-04]

Check sum:  0.9999999999999999

[0.014  0.046  0.102  0.0545 0.0619 0.0674 0.0003 0.1856 0.0469 0.022
 0.0212 0.0151 0.0386 0.0246 0.0169 0.0131 0.0182 0.0677 0.0002 0.0519
 0.0157 0.0546 0.0448 0.0046 0.008  0.0009 0.0023 0.0002 0.0009]


Check sum after round:  1.0001
```

2.5 Příklad 4

- Na následujícím grafu je znázorněno srovnání empirických četností výskytu znaků s teoretickými četnostmi, které vycházejí ze stacionárního rozdělení.
- Je dobře vidět, že jsou obě sady četností téměř identické, tudíž předpokládáme, že ani nebude možné zamítnout jejich shodu ve prospěch alternativy, tedy že jsou nezávislé. K tomuto využijeme testu dobré shody.

```
In [8]: y_values = []
        for l in xletters:
            y_values.append(stacionary_distribution.real[letter_to_key[l]])
```

```
In [9]: fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(15, 5))
        ax.bar(xletters, xletter_cnt, fc=(0, 1, 0.48, 1), lw=3)
        ax.bar(xletters, np.array(y_values)*len(xfile), fc=(1, 0, 0.52, 0.5), lw=3)
        ax.bar([1], [0], color=(0, 0, 0.249, 0.5))
        ax.set_xlabel('znak', fontsize=16)
        ax.set_ylabel('počet', fontsize=16)
        ax.set_title('Empirické a stacionární četnosti', fontsize=22)
        plt.legend(['Výběrové četnosti', 'Stacionární četnosti', 'Průnik'], fontsize=16)
        for tick in ax.xaxis.get_major_ticks():
            tick.label.set_fontsize(14)
        for tick in ax.yaxis.get_major_ticks():
            tick.label.set_fontsize(14)
        plt.show()
```



```
In [10]: stationary_counts = np.array(y_values)*len(xfile)
```

```
In [11]: def merge_bins(counts):
             flag = True
             while(flag):
                 flag = False
                 merged_arr = []
                 waiting = 0
                 for val in counts:
                     if val+waiting > 4:
                         merged_arr.append(val+waiting)
                         waiting = 0
                     else:
                         flag = True
                         waiting += val;
                 if waiting > 0:
                     merged_arr[-1] += waiting
                 counts = merged_arr
             return np.array(counts)
```

```
In [12]: merged_stationary_counts = merge_bins(stationary_counts)
         merged_xletter_cnt = merge_bins(xletter_cnt)
         print("Četnosti mají shodnou délku po spojení binů?",
         "Ano" if len(merged_stationary_counts) == len(merged_xletter_cnt) else "Ne")
```

```
Četnosti mají shodnou délku po spojení binů? Ano
```

2.5.1 Test dobré shody

- H_0 pro nás představuje dobrou shodu empirických a stacionárního rozdělení,
- H_A představuje jejich nezávislost.

```
In [13]: chi, p = stats.chisquare(merged_xletter_cnt, merged_stationary_counts)
         crit = stats.chi2.isf(0.05, len(merged_stationary_counts) - 1)
         print("Hodnota testové statistiky: ", chi)
         print("Kritická hodnota: ", crit)
         print("p-hodnota:", p)
         print("-"*20 + "\nZamítáme: ", "Ano" if chi >= crit else "Ne")
```

```
Hodnota testové statistiky:  0.014022647231326082
Kritická hodnota:  37.65248413348277
p-hodnota: 1.0
--------------------
Zamítáme:  Ne
```

- Na hladině 5% nezamítáme hypotézu H_0, tedy H_A je statisticky nevýznamné a může nastat chyba 2. druhu o které nic nevíme. Ale z vysoké p-hodnoty můžeme s téměř sto procentní jistotou říct, že chyba 2. druhu nenastane a platí hypotéza H_0, jak jsme předpokládali. Tedy empirické četnosti a vektor stacionárního rozdělení mají shodné rozdělení.