Leis de Conservacao:

- Carga e Energia
- Momento

Autor: Banze, M.

Conteúdos

- Ondas electromagnéticas;
- Equacoes de Maxwell
- Caraga e Energia
    - Equacao de Continuidade
    - Teorema de Poynting
- Momento e sua conservação.

Ondas Electromagnéticas

- The waves consist of oscillating electric and magnetic fields that are at right angles to each other and to the direction of wave propagation. Thus, electromagnetic waves are transverse waves.
- Maxwell's equations predict the existence of electromagnetic waves that propagate through space at the speed of light c.

- Maxwell's prediction of electromagnetic radiation shows that the amplitudes of the electric and magnetic fields in an electromagnetic wave are related by the expression $E=cB$. The waves radiated from the oscillating charges can be detected at great distances. Furthermore, electromagnetic waves carry energy and momentum and hence can exert pressure on a surface.

- Heinrich Hertz confirmed Maxwell's prediction when he generated and detected electromagnetic waves in 1887.
- That discovery has led to many practical communication systems, including radio, television, and radar. On a conceptual level, Maxwell unified the subjects of light and electromagnetism by developing the idea that light is a form of electromagnetic radiation.

Equacoes de Maxwell

- In his unified theory of electromagnetism, Maxwell showed that electromagnetic waves are a natural consequence of the fundamental laws expressed in the following four equations:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\nabla . \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$div\boldsymbol{B} = 0$$

$$rotE = \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$rot\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Equação de Continuidade

Considere o volume da figura 1.

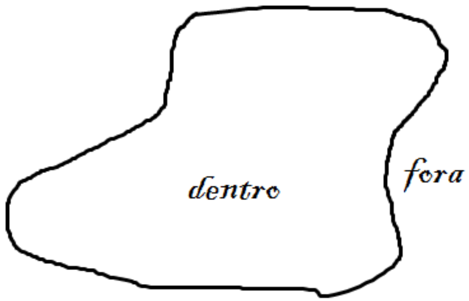

Fig 1: Volume V

- Se no volume temos carga eléctricas: $\rho = \frac{dq}{dV}$
- Ou seja, a carga num volume é: Q(t)=$\int \rho(r,t)dV$

- Tendo a energia electromagnetica densidade pode ser: $\rho_E = \frac{dE}{dV}$
- Tratando-se de algo que flui, passar por uma região que delimita a região (superfície), através da lei da conservação, pode-se escrever:

$$\frac{d(Q_{dentro}+Q_{sai})}{dt}=0$$

- Se se somar o que sai com aquilo que fica, não vai se encontrar nenhuma diferença a medida que o tempo passa, ou seja, a carga não desaparece.

Equação de Continuidade

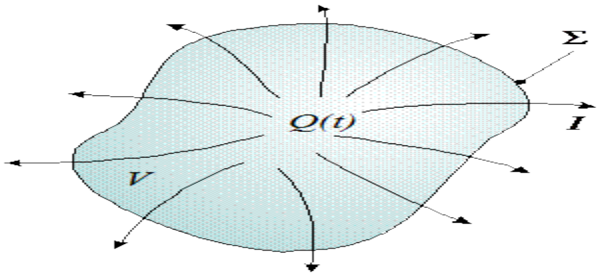

Fig 2: Volume de Carga

- A corrente para fora da região volumétrica $$I = \oint_{\Sigma} \vec{J} \bullet d\vec{S}$$

  deve corresponder à taxa de diminuição na carga no volume, ie., $$\oint_{\Sigma} \vec{J} \bullet d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

- Portanto, $$\oint_{\Sigma} \vec{J} \bullet d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

  ou para uma geometria fixa $$\oint_{\Sigma} \vec{J} \bullet d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

- Pela teorema de Gauss $$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Teorema de Ponyting

- Suponha que se tem uma configuracao de carga e corrente que, no tempo t, produz-se **E** e **B.** No instante seguinte, dt, as cargas se movimentam um pouco. Procura-se-a saber entao, o trabalho dW realizado pelas forcas electromagneticas que actuam nessas cargas no intervalo dt e, para tal, segundo a lei de forca de Lorentz, o trabalho realizado sobre uma carga q é:

$$\mathbf{F}dl = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times \boldsymbol{B}).\boldsymbol{v}dt = q\boldsymbol{E}.\boldsymbol{v}dt$$

- Sabe-se que, $q = \rho dV \ e \ \rho\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}$
- O trabalho em todas as cargas de um volume V é:

$$\frac{dW}{dt} = \int (\boldsymbol{E}.\boldsymbol{J})dV$$

- **E.J-**trabalho realizado realizadoo por unidade de tempo, por unidade de volume , o que equivale a dizer a pontencia fornecida por unidade de volume. Expressando essa quantidade dos campos, isoladamente, usando a lei de Ampere-Maxwell para eliminar **J.**

$$\boldsymbol{E}.\boldsymbol{J} = \frac{\mathbf{1}}{\mu_0}\boldsymbol{E}.(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) - \epsilon_0\boldsymbol{E}.\frac{\boldsymbol{\partial E}}{\boldsymbol{\partial}t}$$

Teorema de Poynting (Cont.)

- Sabe-se que $\nabla.(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}(\nabla\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}.(\nabla\times\boldsymbol{B})$
- Recorrendo à lei de Faraday:
- $E.(\nabla\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}.\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla.(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$
- Mas $\boldsymbol{B}.\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial (B^2)}{\partial t}$ e **E**$.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial (E^2)}{\partial t}$
- Portanto, $E.J = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla.(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$
- A priori foi dito que $\frac{dW}{dt} = \int(\boldsymbol{E}.\boldsymbol{J})dV$, por isso, aplicando o teorema do divergente ao segundo termo, tem-se:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV - \frac{1}{\mu_0}\oint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}).dA$$

- Esse é o teorema de Poynting (teorema de energia-trabalho da electrodinamica). A primeira integral do segundo membro é a energia total armazenada nos campos e o segundo termo representa a taxa à qual a energia ee retirada de V pelos campos electromagneticos, atraves da superficie de contorno.
- Este teorema diz que o trabalho realizado sobre cargas pela força electromagnética é igual ao decréscimo de energia armazenado no campo, menos a energia que flui para fora através da superfície.

Teorema de Poynting (Cont.)

- Electromagnetic waves carry energy, and as they propagate through space they can transfer energy to objects placed in their path. The rate of flow of energy in an electromagnetic wave is described by a vector S, called the Poynting vector, which is defined by the expression: $\boldsymbol{S} = -\frac{1}{\mu_0} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$
- The magnitude of the Poynting vector represents the rate at which energy flows through a unit surface area perpendicular to the direction of wave propagation. Thus, the magnitude of the Poynting vector represents power per unit area. The direction of the vector is along the direction of wave propagation (Fig. 3)). The SI units of the Poynting vector are J/$s.m^2$ = W/m^2 .
- As an example, let us evaluate the magnitude of S for a plane electromagnetic wave where $|\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}|$=E.B, in this case $S = \frac{1}{\mu_0} E.B$. Because we B=E/c can also express this as $S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 = \frac{c}{\mu_0} B^2$
- These equations for S apply at any instant of time and represent the instantaneous rate at which energy is passing through a unit area.

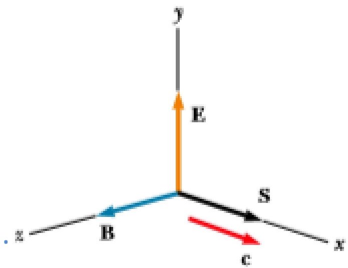

Fig. 3: The Poynting vector S for a plane electromagnetic wave is along the direction of wave propagation.

Teorema de Poyting (Cont.)

- $\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{em}}{dt} - \oint \boldsymbol{S}.dA$
- É claro que o trabalho W realizado sobre cargas irá aumentar a sua energia mecânica (cinética, potencial).

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right),$$ densidade de energia dos campos.

- Entao $\frac{d}{dt}\int (u_{mec} + u_{em})dV = -\oint \boldsymbol{S}.dA = -\int (\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{S})dV$
- Portanto, $\frac{\partial}{\partial t}(u_{mec} + u_{em}) = -\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{S}$

Síntese: Carga e Energia

- Para grandezas que fluem, caracteizadas por uma densidade,

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{J}$=0: No caso da carga electrica

- No caso da densidade de energia electromagnética:

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{S}$=0, Onde **S** é o vector de Poyting

- **J e S** têm semelhancas por estar-se falando de fluxo de uma grandeza física.

Integrando sobre o volume:

$$\frac{dQ^{dentro}}{dt} + \int \nabla \boldsymbol{J}\, dV = 0$$

- Pela teorema de Gauss:

$$\frac{dQ^{dentro}}{dt} + \oiint \boldsymbol{J} d\boldsymbol{S} = 0$$

- **J**-fluxo de carga, dá a taxa com que a carga eléctrica sai.

$$\frac{d(Q_{dentro}+Q_{sai})}{dt}=0$$

Carga se conserva, Energia se conserva

Conservacao do Momentum

- Campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ actuando sobre as cargas em um meio, além da energia, alteram seus momentos linear e angular.

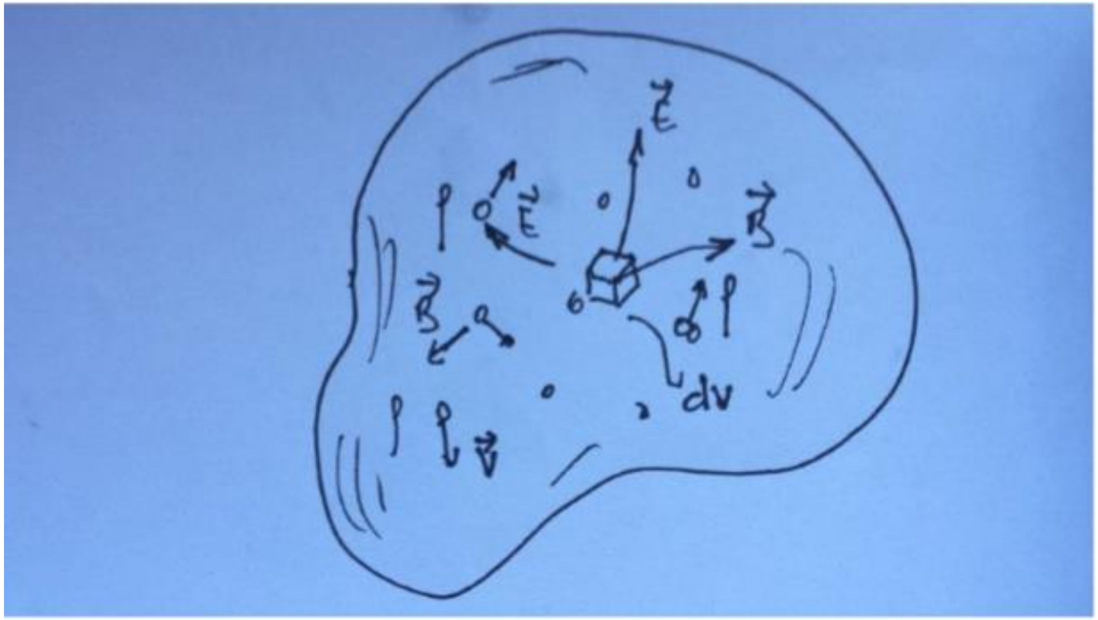

Fig. 4: Campos **E** e **B** actuando sobe cargas.

Força actuante na carga dq, dentro do volume elementar dV: $\boldsymbol{F} = \rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})dV = (\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B})dV$.

Implica que a força por unidade de volume fica: $\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dV} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$

Conservacao do Momentum (Cont.)

- Como no Teorema de Poynting, vamos escrever esta força só em termos dos campos

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}; \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right),$$

portanto,

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$

O último termo deste relação pode ser modificado para introduzir a derivada temporal do Vetor de Poynting $\vec{S}$:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$

Usando esse resultado, temos

$$\vec{f} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{S} + \epsilon_0 [(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})]$$

Conservacao do Momentum (Cont.)

Relação vetorial:

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}$$

portanto

$$\vec{a}\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla\left(\frac{a^2}{2}\right) - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{a}$$

Aplicando esse resultado tanto na expressão para $\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$ como para $\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})$, temos

$$\vec{f} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{S} + \epsilon_0\left[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \nabla\frac{E^2}{2}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} - \nabla\frac{B^2}{2}\right]$$

O segundo e terceiro termos dessa expressão podem ser escritos de uma forma mais conveniente definindo o *Tensor Tensão de Maxwell* como

$$\overleftrightarrow{T} = \epsilon_0\left[\vec{E}\vec{E} - \frac{E^2}{2}\overleftrightarrow{I}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}\vec{B} - \frac{B^2}{2}\overleftrightarrow{I}\right]$$

onde $\overleftrightarrow{I}$ é o tensor unitário.

Conservacao do Momentum (Cont.)

OBS: notação de díada de um tensor ↔ Jackson usa a notação matricial.

Para quem não se lembra, escrever

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{a}\vec{b} \rightarrow \overleftrightarrow{T} = a_x b_x \hat{e}_x \hat{e}_x + a_x b_y \hat{e}_x \hat{e}_y + \cdots + a_z b_y \hat{e}_z \hat{e}_y + a_z b_z \hat{e}_z \hat{e}_z$$

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{a} \otimes \vec{b}$$

e

$$\overleftrightarrow{I} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y + \hat{e}_z \hat{e}_z$$

Assim

$$\vec{c} \cdot \overleftrightarrow{T} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} \ \text{ e } \ \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

<u>Divergente</u>: derivadas se aplicam a todos os termos à sua direita, mas o produto escalar dos versores só ao primeiro vetor,

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{a}\vec{b}\right) = (\nabla \cdot \vec{a})\vec{b} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$$

Para tensores, o Teorema de Gauss também se aplica, na forma: $\int dV \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \int d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T}$

Conservacao do Momentum (Cont.)

Usando a definição do Tensor Tensão de Maxwell, temos

$$\boxed{\vec{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}}$$

A força eletromagnética total sobre as cargas dentro do volume V é dada por

$$\boxed{\vec{F} = \int dV \left(\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \right) = \oint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{S} dV}$$

Nesta expressão utilizamos o Teorema de Gauss, a simetria de $\overleftrightarrow{T}$, isto é, $d\vec{A} \cdot \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}$, e representamos o vetor diferencial de área por $d\vec{A}$ para evitar confundir com o Vetor de Poynting.

<u>Conservação de Momento Linear</u>

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{S} dV = \oint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}$$

Densidade de momento armazenado nos campos:

$$\vec{g} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} \rightarrow \boxed{\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}}$$

Fluxo de momento transportado pelos campos: $-\overleftrightarrow{T}$ $\qquad [T] = \left[\frac{(ML/T)}{L^2 T}\right]$

Considerações Finais

- A carga total de um sistema isolado nunca varia. Ainda que existam fenómenos físicos que podem criar ou aniquilar cargas, não existe nenhum fenómeno na natureza capaz de alterar a carga total deste sistema. Por exemplo, um raio g pode converter sua energia em massa e gerar um par elétron-pósitron (o pósitron é a anti-partícula do elétron, com a mesma massa e carga positiva) mas o balanço de cargas do sistema não muda.
- As ondas electromagenticas transportam energia e, o vector de Poyting é analogo a equacao de continuidade e este teorema diz que o trabalho realizado sobre cargas pela força electromagnética é igual ao decréscimo de energia armazenado no campo, menos a energia que flui para fora através da superfície. O vector de Poyting trata-se da densidade de energia enquanto a equação da continuidade postula sobre a conservação da carga de um certo volume.