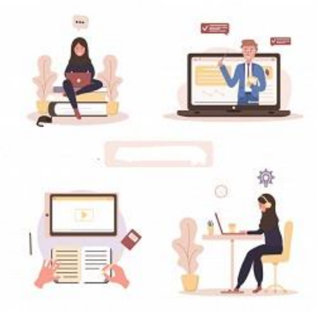
Clases sobre los Conjuntos Numéricos



Organización de las clases virtuales para el Capítulo 2: Ahora, contenido del tercer video:

Seguimos con lo básico

de la Aritmética y Algebra.

Se remarcaran las propiedades

de las operaciones de división, potencia

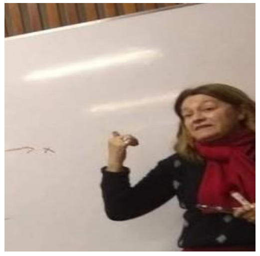
y ráiz .Remarcando lo importante.

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

1.Nos saludamos

Hola!! Y si, hay que estudiar….

Hoy estamos en la tercera clase virtual del Capitulo 2 de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata. Todo esto es conocido, pero hay que destacar algunos aspectos.



Los invito a mirar en los Apuntes de la Cátedra subidos en el sitio ***Ideas*** de la Facultad ,
Además no se tienen que olvidar de las **tablas de verdad de los conectivos y equivalencias lógicas pues siempren son muy útiles!!**

OTRAS OPERACIONES CONOCIDAS

Por la equivalencia definida en $\mathbb{Q}$ es posible pensar que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ **,** así algo definido en $\mathbb{Q}$ **vale en particular en cualquier subconjunto.**

- **DIVISION**

La **división** entre números racionales fraccionarios es posible que la hayan aprendido como, "la que divide" (**el divisor**) $\frac{c}{d} \neq 0$ para que esté definida, por lo tanto $c \neq 0$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} =$ *una multiplicación en cruz*, para encontrar numerador y denominador del resultado :

$$\frac{a}{b} \searrow \frac{c}{d} \nearrow = \frac{a.d}{} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \nearrow \frac{c}{d} \searrow = \frac{a.d}{b.c}$$

Es más sencillo si piensa que dentro de $\mathbb{Q}$ todo elemento no nulo tiene inverso.

Y por tanto la división de ***p por q***, ***q debe ser no nulo,*** es más conveniente (y práctico) usar la siguiente definición de división:
multiplicar *p* por el inverso de *q*, es: $\boldsymbol{p.q^{-1}}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$ observar que la **división se define con divisor no nulo**, por lo cual $c \neq 0$.

Esto facilita mucho:

Ejemplos:

a)

$$\frac{3}{5}:\frac{-6}{7}= \frac{3}{5}.\left(-\frac{6}{7}\right)^{-1}=\frac{3}{5}.\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{3.(-7)}{5.6}=$$

cómo 3 divide a 6, es posible simplificar por 3 numerador y denominador:

$$=\frac{1.(-7)}{5.2}=\frac{-7}{10}$$

b)

$$\frac{7}{9}:2=\frac{7}{9}.2^{-1}=\frac{7}{9}.\frac{1}{2}=\frac{7.1}{9.2}=\frac{7}{18}$$

c)

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}.\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}=\frac{2}{3}.\frac{7}{5}=\frac{2.7}{3.5}=\frac{14}{15}$$

➢ POTENCIACION

Es una operación que en un principio se origina para anotar de manera más rápida o efectiva algunas multiplicaciones, pero a los matemáticos lo que sirve les gusta generalizar Lo primero que nos enseñaron y aprendimos, con un ejemplo:

$2^3 = 2.2.2$

multiplicar **la base, el 2** “tantas veces” como **el exponente 3**

Recordar otros ejemplos similares.
Vamos directo a los números racionales para definir la **potencia de exponente natural**:

$$\text{si } p = \frac{a}{b} \quad , \quad a \neq 0 \qquad p^0 = 1$$

$$p^n = p.p^{n\text{-}1} \quad \text{con } n \geq 1$$

$$\text{si } p = 0 \qquad p^n = 0 \quad \text{para } n \geq 1$$

OBSERVACION IMPORTANTE: resulta que si $p \neq 0$ $p^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ para n natual.

Y NO se define 0^0 por ello se dirá que es **una indeterminación**.

Para el caso $p \neq 0$, se define **la potencia de exponente entero negativo**.

Si $p = \dfrac{a}{b}$ con $a \neq 0$ y m es entero, $m < 0$ $p^m = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-m}$.

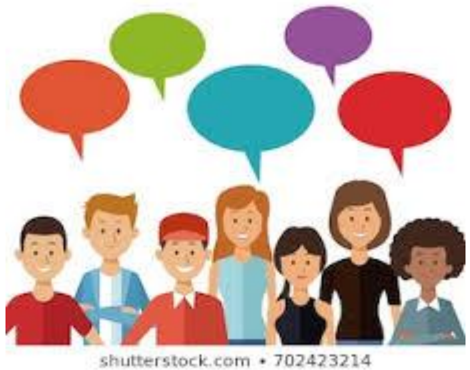
Observar que -*m* es natural.

Analicemos:

En caso de estar definidas las potencias que se mencionan a continuación se satisfacen las igualdades propuestas: para p y q racionales

$$(p.q)^m = p^m.q^m$$
$$p^m.p^n = p^{m+n}$$
$$(p^m)^m = p^{m.m}$$

¿Cuáles restricciones debe hacer? ¿Cómo deben ser *m* y *n*?



Ejemplo

$$\{1\text{-}1:[1\text{-}1:(1\text{-}\frac{1}{2})]\}^{-2} = \{1\text{-}1:[1\text{-}1:\ \frac{1}{2}]\}^{-2} =$$

$$= \{1\text{-}1:[1\text{-}1.\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}]\}^{-2} = \{1\text{-}1:[1\text{-}1.2]\}^{-2} =$$

$$= \{1\text{-}1:[1\text{-}2]\}^{-2} = \{1\text{-}1:[\text{-}1]\}^{-2} = \{1\text{-}1.[\text{-}1]^{-1}\}^{-2} =$$

$$= \{1\text{-}1.(\text{-}1)\}^{-2} = \{1\text{-}(\text{-}1)\}^{-2} = \{1+1\}^{-2} = 2^{-2} = 1/4$$

$$\{[\left(\frac{7}{8}\right)^5]^{-2}\}^0 = 1$$

$$\frac{3^5 \, . \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}{\left[\left(\frac{11}{3}\right)^3\right]^{-2} : \left(\frac{7}{11}\right)^5 - \frac{9}{11}} = \frac{3^5 \, . \left(\frac{3}{2}\right)^5 - \left(\frac{2}{1}\right)^4}{\left(\frac{11}{3}\right)^{-6} : \left(\frac{7}{11}\right)^5 - \frac{9}{11}} =$$

$$= \frac{3^5 \, . \, \frac{3^5}{2^5} - 16}{\left(\frac{3}{11}\right)^6 . \left(\frac{11}{7}\right)^5 - \frac{9}{11}} = \frac{3^5 \, . \, \frac{3^5}{2^5} - 16}{\frac{3^6}{11^6} . \frac{11^5}{7^5} - \frac{9}{11}} = \frac{\frac{3^5 . 3^5}{2^5} - 16}{\frac{3^6}{11^6} . \frac{11^5}{7^5} - \frac{9}{11}} = \text{usando las propiedades y simplificación}$$

$$= \frac{\frac{3^{10}}{32} - 16}{\frac{3^6}{11} . \frac{1}{7^5} - \frac{9}{11}} = \frac{\frac{3^{10} - 32.16}{32}}{\frac{3^6}{11.7^5} - \frac{9}{11}} = \frac{\frac{3^{10} - 32.16}{32}}{\frac{3^6 - 7^5.9}{11.7^5}} = \frac{3^{10} - 32.16}{32} . \left(\frac{3^6 - 7^5.9}{11.7^5}\right)^{-1} = \frac{3^{10} - 32.16}{32} . \frac{11.7^5}{3^6 - 7^5.9}$$

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2 .(2)^{-1}.5^3}{(-1)^{-1}}\right]^2 = \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 .\frac{1}{2}.5^3}{-1}\right]^2 = \left[\frac{\frac{1}{16}.\frac{1}{2}.5^3}{-1}\right]^2 = \frac{\left(\frac{1}{16}.\frac{1}{2}.5^3\right)^2}{(-1)^2} = \left(\frac{1}{16}.\frac{1}{2}.5^3\right)^2 = \frac{1^2}{16^2}.\frac{1^2}{2^2}.(5^3)^2 =$$

$$= \frac{1}{16^2}.\frac{1}{2^2}.5^6 = \frac{5^6}{(2^4)^2.2^2} = \frac{5^6}{2^{8+2}} = \frac{5^6}{2^{10}}$$

Puede realizar las cuentas finales o dejar así, depende para que necesite a esos cálculos.

❖Verificar las siguientes desigualdades:

a) $\left(2+\frac{5}{2}\right)^2 \neq 4+\frac{25}{4}$

b) $\left(1-\frac{3}{2}\right)^3 \neq 1-\frac{27}{8}$

para a) lo ayudo:

$$\left(2+\frac{5}{2}\right)^2 = \left(2+\frac{5}{2}\right).\left(2+\frac{5}{2}\right) = \xrightarrow{\textit{aplicando la propiedad distributiva de multiplicación en suma}}$$

$$= 2.2+2.\frac{5}{2}+\frac{5}{2}.2+\frac{5}{2}.\frac{5}{2} = \xrightarrow{\textit{haciendo las operaciones indicadas}}$$

$$= 4+5+5+\frac{25}{4} = 4+10+\frac{25}{4}$$

c)Qué se puede concluir a partir de a) y b)? ¿Se distribuye la potencia en la suma? ...

****Justifique las desigualdades. ¿CUAL sería el ERROR?:**

a) $2^{5-2} \neq 2^5 - 2^2$

b) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 \neq \frac{1^{\left(2^3\right)}}{3}$

c) $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^3\right]^2 \neq \left(\frac{-1}{4}\right)^5$

UNA APLICACIÓN de LA POTENCIACION (le sirve para entender algunas respuestas que le da su calculadora…)

NOTACION CIENTIFICA (se llama así por sus aplicaciones)

Supongamos que viaja a 321800 km/h. Tardaría más de 15000 años en arribar a la estrella más cercana al Sol y tendría que recorrer alrededor de 5000 millones de km.

Números “grandes” como 5000 millones son algunas veces expresados en ***notación científica***. Significa utilizando potencias de 10. Por ejemplo:

NUMERO	NOTACION CIENTIFICA
1000	$1 \text{ X } 10^3$
1000000	$1 \text{ X } 10^6$
2300000	$2{,}3 \text{ X } 10^6$

Un **número en notación científica es un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia de 10:**

5000 millones $= 5000 \times 10^6 = 5 \times 10^9$

También los números “pequeños” se escriben utilizando potencias de 10.
La carga de un electrón es 0.00000000048 unidades electrostáticas.
Utilizando potencias de 10 con exponente negativo podemos expresar.

$$0.000\ \ 000\ \ 000\,48 = 4.8 \times 10^{-10}$$

NUMERO	NOTACION CIENTIFICA
0.1	1×10^{-1}
0.01	1×10^{-2}
0.378	3.78×10^{-1}

Expresar 2 567 000 000 000 en notación científica

$$2\ \underbrace{567\ 000\ 000\ 000}_{\text{12 lugares}} = 2.567 \times 10^{12}$$

Expresar 3.8×10^5 en notación decimal

$3.8 \times 10^5 = 3.8 \times 100000 = 380000$

Actividad OPTATIVA

1)Expresar en notación decimal el promedio de glóbulos blancos en la sangre de una persona de sexo masculino que es de 5.43×10^6 por milímetro cúbico.

2)Expresar en potencias de 10 con el primer dígito significativo a la izquierda de la coma (notación científica).

0.000187 0.002025 54000 18181837

OTRO EJERCICIO OPTATIVO, pero muy real. ***¿En qué planeta está?*** **Venga a la Tierra**

a) La estrella Barnard está alrededor de 6.1 año-luz de la Tierra (considerar que 1 año-luz es el espacio recorrido por la luz en un año, sabiendo que su propagación en el vacío es de 300000 km por segundo). Hallar esa distancia en km y expresarla en notación científica.

b) Considerar que la luz solar recorre aproximadamente 300000 km por segundo. La distancia media del Sol en millones de km a cada planeta es

Mercurio : 58
Venus : 108
Tierra : 149
Marte : 228
Júpiter : 778
Saturno : 1428
Urano : 2873
Neptuno : 4501
Plutón : 5915

¿Cuánto tiempo tarda en llegar la luz emanada del Sol a cada planeta?

SOLUCION: Para la Tierra:

$$\frac{1.49 \times 10^{8}\text{km}}{3 \times 10^{5}\ \text{km/seg}} = 0.4966....\ \times 10^{3}\ \text{seg.}$$

$$= 4.96 \times 10^{2}\ \text{seg}$$

OTRO: Calcular y expresar con notación científica:

$$\frac{(2 \times 10^{-2} : 3 \times 10^{-1})/\ 2.9 \times 0.005}{(0.5 -2)^{-2}}$$

- **Radicación**

OBSERVAR que para algunos números racionales ***p*** tiene sentido (con esto significamos que es resoluble en $\mathbb{Q}$) preguntarse cuál es el número ***h*** tal que $h^2 = p$ o cuál es el número ***t*** que $t^5 = p$? De existir, al ***h*** lo llamaremos **raíz cuadrada de *p*** y al ***t*** lo llamaremos **raíz quinta de p**.

En general para cualquier **número natural** ***n*, *n* > *1*** llamaremos **raíz *n*-ésima de *p***, si es que existe un número racional ***h*** tal que $h^n = p$. Y se anotara: $\sqrt[n]{p} = h$

Así resulta:

Como $(-2)^2 = 2^2 = 4$, es decir **2 y -2 son ambos raíces cuadradas de 4**

$\sqrt[3]{0,064} = 0,4$ pues $0,4^3 = 0,064$

$\sqrt[4]{1} =$ admite a 1 y a -1 como resultados, pues $1^4 = 1$

y también $(-1)^4 = 1$, luego es usual escribir $\sqrt[4]{1} = \pm 1$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3} \text{ pues } \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

La operación de radicación es una operación parcial en los racionales pues no está definida para todo número racional. Más adelante se justificará que √2 no tiene solución racional.

Justifique además que $\sqrt{-16}$ no existe en $\mathbb{Q}$, y que tampoco $\sqrt[4]{-16}$

Luego generalizaremos las operaciones a todos los números reales.