# Clases de Elementos de una Teoría *Intuitiva* de Conjuntos

(*in*formalmente!!)

## Organización de las primeras clases virtuales: Ahora, contenido del octavo video:

Será introduciendo otros

conceptos básicos de la teoría de conjuntos.

Es un "lenguaje" muy útil desde todo punto

de vista.

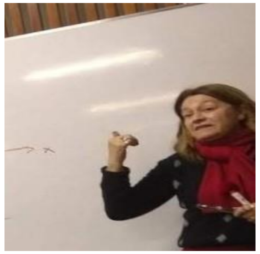
Reflexiones….

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

## 1. Nos saludamos

Hola, bien? ¿Entendiendo? Y si, hay que estudiar….

Hoy estamos en la octava clase virtual de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata.



Los invito a mirar en los Apuntes de la Cátedra subidos en el sitio ***Ideas*** de la Facultad , las **tablas de verdad de los conectivos y equivalencias lógicas pues siempren son muy útiles!!**

Como hemos discutido al introducir las herramientas lógicas, introducidas de manera intuitiva que esa es una parte del *Cálculo Proposicional Clásico* y del *Cálculo de Predicados Clásico*, del porque se los llama ***Cálculo***…. Pues, entre alguno de sus objetos se hacen *operaciones*: para fabricar nuevos objetos dentro del conjunto de esos objetos. La *conjunción*, la *disyunción*, la *negación*, el *condicional* y el *bicondicional*, sea entre letras proposicionales o entre esquemas proposicionales.

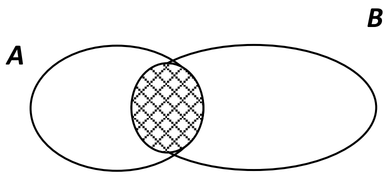
Hemos extendido el lenguaje matemático de estudio introduciendo una *Teoría de Conjuntos* (intuitiva) y con esos objetos, los conjuntos, vamos a fabricar nuevos conjuntos haciendo operaciones.

## ➢ Operaciones entre conjuntos

Siendo $A$ y $B$ conjuntos, se obtienen a partir de ellos, realizando operaciones conjuntistas, otros conjuntos.

**Intersección de** $A$ y $B$ es el conjunto de elementos que pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos; se simboliza por:

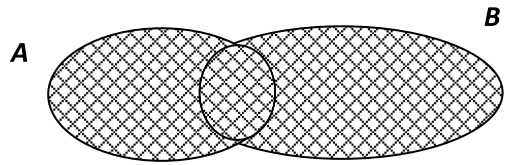
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$




Observar que el esquema que define a la operación $\cap$ de conjuntos**,** es una $\wedge$ de esquemas.

**Unión de $A$ y $B$** es el conjunto de elementos que pertenecen **a alguno** de esos conjuntos, se simboliza por:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

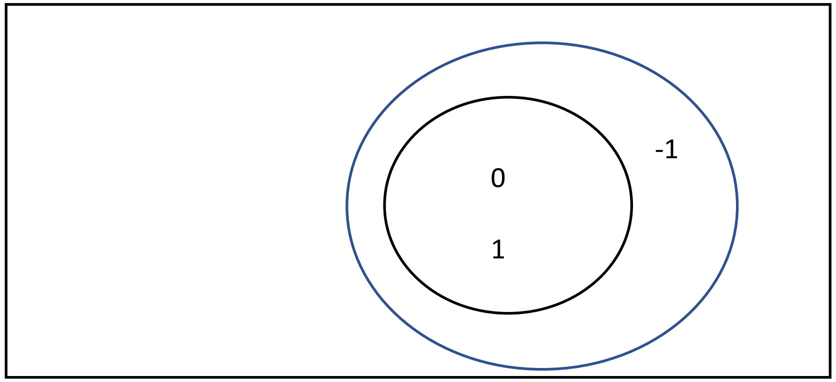



Observar que el esquema que define a la operación ∪ de conjuntos**,** es una ∨ de esquemas.

**Ejemplo**

i) Si $A$ = {0, 1} y $B$ ={-1,0, 1} entonces $A \cap B$ = {0, 1} y $A \cup B$={-1, 0, 1}

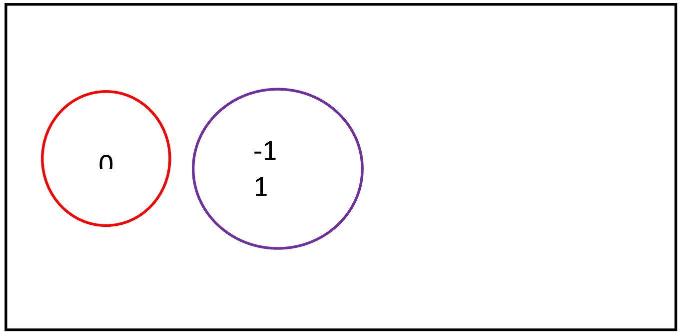
**Observe** la relación de inclusión entre $A$, $B$ y los resultados de las operaciones. ¿Puede arriesgar?




$A$ contorno en negro
$B$ contorno en azul

ii) Si $A = \{0\}$ y $B = \{-1, 1\}$ entonces $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = \{-1, 0, 1\}$

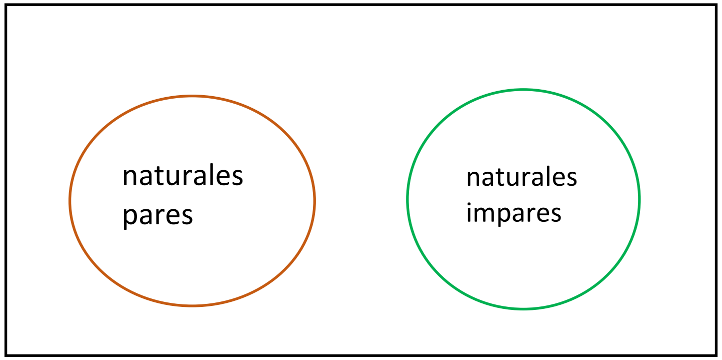
**Observe** la relación de inclusión entre $A$, $B$ y los resultados de las operaciones, ¿qué opina??




$A$ contorno en rojo
$B$ contorno en violeta

iii) Si $P = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$ e $I = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar}\}$ entonces $P \cap I = \varnothing$ y $P \cup I = \mathbb{N}$

Observe la relación de inclusión entre $P, I$ y los resultados de las operaciones ¿qué arriesga??




$P$ contorno en naranja
$I$ contorno en verde

**Actividad**

Hallar $A \cap B$ y $A \cup B$ para $A = \{ -1, 3, 6\}$, $B = \{ -2, -1, 3, ,4, 6, 8\}$

Hacer el diagrama de Venn y pensar si puede conjeturar sobre propiedades relativas a esos nuevos conjuntos.

**Actividad**

Pensemos en dos conjuntos cualesquiera $A$ y $B$.

En qué condiciones de ellos se verificarán las siguientes proposiciones (son independientes una de otra), haga un gráfico para ayudarse...:


i) $A \cap B = B$

ii) $A \cup B = \varnothing$

iii) $B \cup \varnothing = \varnothing$

iv) $A \cap \varnothing = \varnothing$

v) $A \cap \varnothing = A$

vi) $A \cap B = A \cup B$

## ➢ Propiedades de la unión e intersección

Se está muy acostumbrado a realizar estas operaciones con conjuntos concretos, y también a partir de los ejemplos recién analizados se pueden establecer las siguientes propiedades. Se probará alguna con el propósito de mostrar un excelente ejercicio de razonamiento.

**Propiedad Conmutativa: (de la unión y de la intersección de conjuntos)**

Cualesquiera sean los conjuntos $A$, $B$, se cumple:

$$A \cup B = B \cup A \qquad\qquad A \cap B = B \cap A$$

**Propiedad Asociativa: (de la unión y de la intersección de conjuntos)**

Cualesquiera sean los conjuntos $A$, $B$ y $C$, se cumple:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

La demostración de estas propiedades es inmediata, cada una de ellas se basa en las homónimas propiedades de la disyunción y conjunción del cálculo lógico.

- La técnica es considerar un elemento genérico del conjunto que está en uno de los miembros de la igualdad a demostrar y aplicar la definición y propiedades, así poder concluir que ese elemento es elemento del conjunto del otro miembro de la igualdad.

- En general hay que probar la "doble" contención para probar una igualdad de conjuntos.

EJEMPLO

♦ Probar $A \cup B = B \cup A$

Demostración:

Sea $x \in A \cup B \underset{\text{def. de unión}}{\leftrightarrow} x \in A \vee x \in B \underset{p \vee q \Leftrightarrow q \vee p}{\leftrightarrow} x \in B \vee x \in A \underset{\text{def. de unión}}{\leftrightarrow} x \in B \cup A$

♦

EJEMPLO

♦ Probar $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

Demostración:

Sea $x\in(A\cap B)\cap C \underset{\text{def. de intersección}}{\leftrightarrow} x\in(A\cap B)\wedge x\in C \underset{\text{def. de intersección}}{\leftrightarrow} (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C$)

¿Qué queremos obtener? Que $x$ es elemento de $A\cap(B\cap C)$. La idea es asociar de manera distinta la conjunción.

Como ya se ha probado la asociatividad de la conjunción, sigamos:

$$(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C \leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C) \underset{\text{def. de intersección}}{\leftrightarrow} x\in A\wedge x\in B\cap C \underset{\text{def. de intersección}}{\leftrightarrow} x\in A\cap(B\cap C)$$

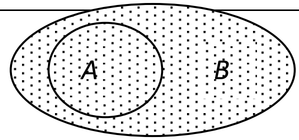
♦

En estos ejemplos todos los pasos fueron justificados por una equivalencia lógica o una definición (que es una equivalencia) por lo cual todos los pasos seguidos son "un ida y vuelta", por ello es que se da la doble contención.

**Propiedad:** Sean $A$ y $B$ conjuntos

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$




En estas propiedades las igualdades no siempre se dan, requieren una hipótesis adicional sobre los conjuntos que intervienen. Vale que los justifique con los diagramas de Venn.

**Ejemplo (sólo si tiene ganas lo lee)**

♦ Probar: $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Demostración:

¿Qué es lo que hay que probar? Sabiendo que $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$.

Hay que probar una igualdad de conjuntos cuando se cumple una condición.

Por lo tanto, se debe verificar la doble inclusión $B \subseteq A \cup B$ y que $A \cup B \subseteq B$, y seguramente habrá que usar la hipótesis pues por los ejemplos ya vistos, en general la unión no es igual a ninguno de los conjuntos que se están uniendo...

- Comencemos probando $B \subseteq A \cup B$ :

Sea $x \in B$, habrá que deducir que ese elemento genérico tomado en $B$ es también elemento de la unión.

Pero qué es el conjunto unión de $A$ con $B$: son los elementos que están al menos en uno de ellos.

Formalmente hacemos lo siguiente:

$$x \in B \underset{regla:\frac{p}{p\vee q}}{\rightarrow} x \in B \vee x \in A \underset{\text{def. de unión}}{\leftrightarrow} x \in B \cup A \underset{\text{son iguales!}}{\leftrightarrow} x \in A \cup B$$

- Se demostrará la otra contención $A \cup B \subseteq B$, analice el uso de la hipótesis:

Sea $x \in A \cup B$, habrá que deducir que ese $x$ genérico tomado en $A \cup B$ es también elemento de *B.*

$$x \in A \cup B \underset{\text{def. de unión}}{\leftrightarrow} x \in A \vee x \in B$$

Se tiene la hipótesis: $A \subseteq B$, lo que significa que si $x \in A \rightarrow x \in B$, por lo cual seguimos así:

$$x \in A \vee x \in B \underset{hipótesis}{\rightarrow} x \in B \vee x \in B \underset{p \vee p \Leftrightarrow p}{\leftrightarrow} x \in B$$

♦

Muy importante: En la demostración de $B \subseteq A \cup B$ NO se usó la hipótesis adicional, por lo tanto es siempre verdadero que un conjunto está contenido en una unión de la que forma parte.....

REFLEXIONEMOS

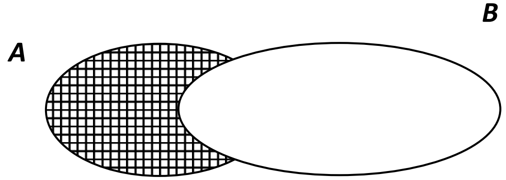
¿Para cualquier conjunto $A$ calcular: $A \cup \varnothing$ y $A \cap \varnothing$, que darán?

♦

## ➢ Otras operaciones con conjuntos

La **diferencia entre** $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos que son elementos de $A$ y no son elementos de $B$.

Esto lo anotaremos simbólicamente por:




$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

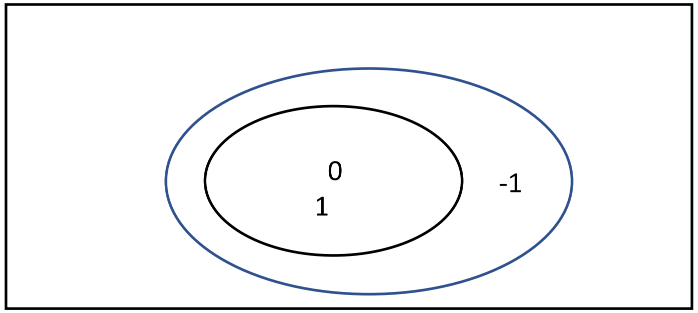
$\notin$ simboliza "no pertenece". En la definición $x \notin B$ significa $\neg(x \in B)$.

Observar que el esquema que define a la operación **-** de conjuntos, es una $\wedge$ y una $\neg$ de esquemas.

EJEMPLOS

i) Si $A$ = {0, 1} y $B$ = {-1,0, 1} entonces $A$ - $B$ = $\varnothing$

Observe la relación de inclusión entre $A$, $B$ y el resultado de la operación. ¿Puede asegurar algo??




$A$ esta con borde negro

$B$ con borde azul

$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$, pero es $A$ contenido en $B$, todos los elementos de $A$ también están en $B$, por cual $A$ - $B$ es vacío.

ii) Si $A$ ={0, 1} y $B$ ={-1, 0, 1} entonces $B$ - $A$ = {-1} . ¡Usando el mismo diagrama de Venn, nos ayuda para justificar!

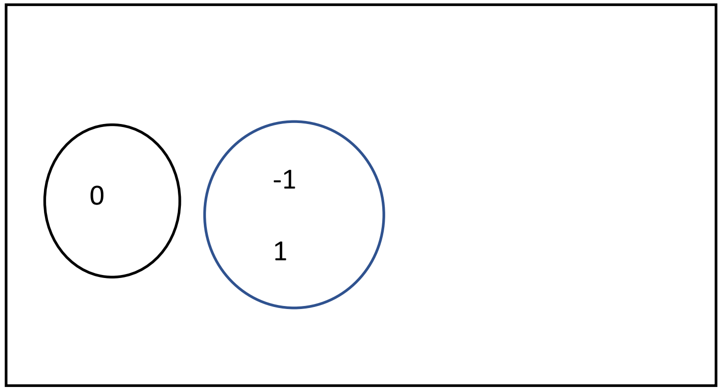
Observe la relación de inclusión entre *A, B* y el resultado de la operación. ¿Puede asegurar algo?

Usando los resultados de dos incisos anteriores que puede decir de la diferencia de conjuntos ¿Es conmutativa?

OTRO EJEMPLO:

Si $A$ ={0} y $B$ ={-1, 1} entonces $A$ - $B$ = $A$

Observe la relación de inclusión entre *A, B* y el resultado de la operación, ¿qué opina?




$A$ contorno negro

$B$ contorno azul

$A-B=\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ , pero $A$ y $B$ no tienen elementos en común, luego a $A$ no se le “saca” ningún elemento.

EJEMPLO

♦ Demostrar para cualquier par de conjuntos $A$ y $B$ que $A - B \subseteq A$

Demostración:

Sea $x \in A - B \xrightarrow[\substack{\text{por definición} \\ \text{de diferencia}}]{} x \in A \wedge x \notin B \xrightarrow[\text{por simplificación}]{} x \in A$

Por lo tanto $A - B \subseteq A$

♦

**Actividad** <u>OPTATIVO</u>

Para practicar demostraciones, haga alguna de las siguientes:

**Propiedades:** Cualquiera sea el conjunto $A$

a) $A - A = \varnothing$

b) $A - \varnothing = A$

c) $\varnothing - A = \varnothing$

los ayudo!!! 

Se probará a).

Hay que demostrar que $A - A \subseteq \varnothing$ y además que $\varnothing \subseteq A - A$.

Observar que la segunda contención está probada pues es un caso particular de que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Respecto de la primera contención a probar: $x \in A - A \xrightarrow[\text{por definición de diferencia}]{} (x \in A \wedge x \notin A) \xrightarrow[\text{por antecedente falso}]{} x \in \varnothing$

Al ser una contradicción $x \in A \wedge x \notin A$ el Cálculo lógico permite deducir “cualquier cosa” pues el condicional es verdadero….

- **Universos y complemento**

Consideremos el conjunto de estudiantes de la Facultad de Informática, llamémoslo *F.* Este conjunto contiene a varios subconjuntos.

Por ejemplo, podría pensarse en el conjunto *P* de alumnos de la Fac. de Informática que son alumnos de Estructura de Datos;

el conjunto *I* de alumnos de la Fac. de Informática (es decir elementos de *F*) que hablan inglés;

el conjunto *W* de elementos de *F* que saben manejar la Web;

el subconjunto *O* de *F* cuyo documento de identidad termina en *0.*

Se puede necesitar trabajar con el alumnado de la Fac. de Informática, es decir con el conjunto *F*, por alguna razón. Ese conjunto será el **universo** para esa tarea.

**El universo es algo relativo**. **Es convencional, algo que se establece**.

Para alguna investigación sociológica podría ser útil considerar como universo *U* el conjunto de todos los alumnos de la Universidad Nacional de La Plata, en cuyo caso *F* es un subconjunto de *U*.

Dentro de *U* puede considerarse el conjunto de los alumnos que hablan inglés, este conjunto NO es *I*, ¿por qué?

En algunas situaciones algebraicas el universo puede ser $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y en otras $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales o cualquier otro conjunto numérico a convenir.

La idea intuitiva es que **universo** es el conjunto que contiene a todos los conjuntos con que se trabaja en determinada circunstancia.

Por razones que escapan a este Curso, el universo No es un conjunto que contiene todos los conjuntos.
Un universo de esa naturaleza conduciría a una paradoja en la teoría. Por eso las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos no permiten ese universo….

Hay conjuntos que se pueden definir como aquellos elementos de un conjunto que no cumplen una determinada condición.
Por ejemplo, podría tener interés el conjunto de estudiantes de la Universidad Nacional de La Plata que no hablan inglés, o los números enteros que no son primos, etc.

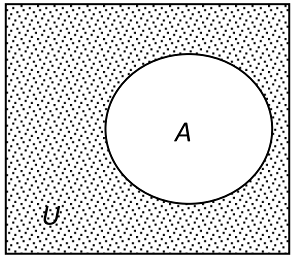
Para eso es útil la siguiente definición:

Para $A$ subconjunto del universo $U$, el **complemento de $A$ respecto de $U$** es el conjunto de elementos que pertenecen a $U$ pero no a $A$; se simboliza por $\underset{U}{\complement}A$ .

$$\underset{U}{\complement}A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

Cuando el conjunto $U$ se sobrentiende se anota simplemente $\complement A$, $A'$ o $A^C$ .

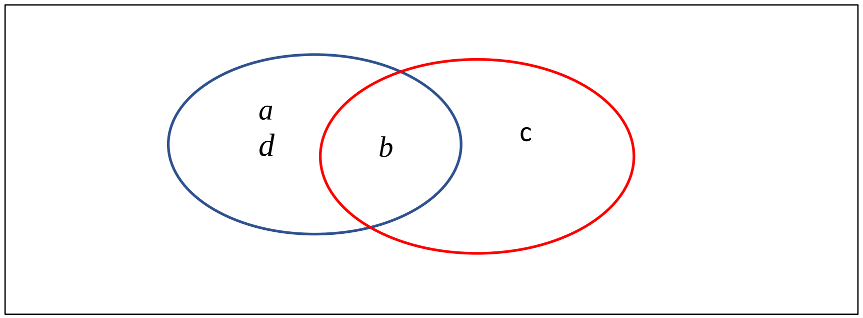
Claramente $\underset{U}{\complement}A$ **=** $U$ - $A$




EJEMPLO

a) Dado el universo $U$ = { *a, b, c, d* } y los conjuntos $A$ = {*a, b, d*} y $B$ = {*c, b*}, resulta

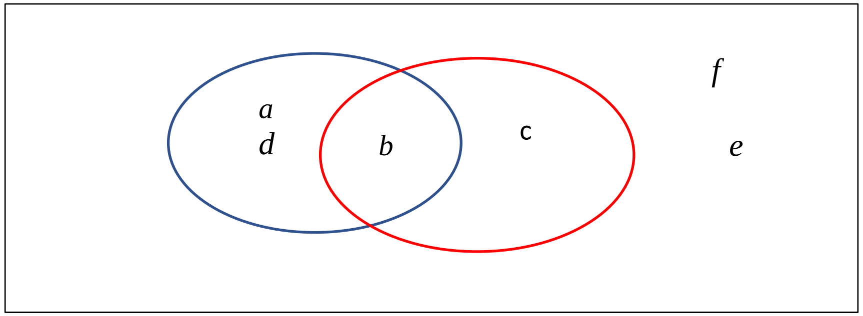
$\underset{U}{\complement}A$ = { *c*} y $\underset{U}{\complement}B$ ={ *a* , *d* }




El *U* está representado como un rectángulo negro
*A* con borde azul
*B* con borde rojo

Dado el universo $U = \{ a, b, c, d, e, f \}$ y los conjuntos $A = \{a, b, d\}$ y $B = \{c, b\}$, resulta

$\complement_U A = \{c, e, f\}$ y $\complement_U B = \{a, d, e, f\}$

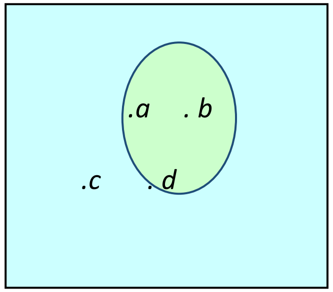



El *U* está representado como un rectángulo negro
*A* con borde azul
*B* con borde rojo

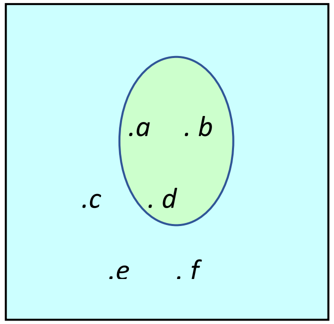
Compare los resultados de i) y ii). ¿Por qué difieren?

Los universos dados en cada caso son distintos por lo tanto se obtienen complementos distintos. Mire detalle

i)




ii)




Haga un esquema similar para *B.*

**Ejemplo**

♦ Probar que para cualquier $A$ subconjunto de $U$ vale que $\underset{U}{\complement}(\underset{U}{\complement} A) = A$

Sea $x \in \underset{U}{\complement}(\underset{U}{\complement} A)$ entonces por definición de complemento respecto de $U$, se tiene

$$x \in U \wedge x \notin \underset{U}{\complement} A \underset{\substack{\text{def. de}\\ \text{complemento}}}{\leftrightarrow} x \in U \wedge \neg\, x \in \underset{U}{\complement} A \underset{\substack{\text{def. de}\\ \text{complemento}}}{\leftrightarrow} x \in U \wedge \neg(x \in U \wedge x \notin A) \underset{\substack{\text{Ley de}\\ \text{De Morgan}}}{\leftrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\text{Ley de}\\ \text{De Morgan}}}{\leftrightarrow} x \in U \wedge (x \notin U \vee x \in A) \underset{\substack{\text{Distributiva de la con-}\\ \text{junción en disyunción}}}{\leftrightarrow} (x \in U \wedge x \notin U) \vee (x \in U \wedge x \in A)$$

Acá hay un detalle importante:

Si se llama P: $x \in U \wedge x \notin U$

¿Cuál es el valor de verdad de P? Sí, es falsa.

Por lo cual seguimos razonando así:

$$(x \in U \wedge x \notin U) \vee (x \in U \wedge x \in A) \underset{\substack{p \vee q\\ \sim p\\ \hline q}}{\rightarrow} x \in U \wedge x \in A \underset{\text{Simplificación}}{\rightarrow} x \in A \text{ .}$$

Se debe justificar la otra contención:

Sea $x \in A \underset{\substack{A \subseteq U\\ x \in A \rightarrow x \in U}}{\rightarrow} x \in U \wedge x \in A \underset{\substack{p\\ \hline p \vee q}}{\rightarrow} (x \in U \wedge x \notin U) \vee (x \in U \wedge x \in A)$

y a partir de acá "deshacer el camino" de la otra contención .....

♦

Ejercicio

i) Para el universo $U$ = {*a, b, c, d, e, f* } y los conjuntos $A$ = {*a, b, d*} y $B$ = {*c, b*}, calcular:

$$A \cup \underset{U}{\complement} A \qquad A \cap \underset{U}{\complement} A$$

$$B \cup \underset{U}{\complement} B \qquad B \cap \underset{U}{\complement} B$$

ii) ¿Qué opina de este resultado, se generalizará?

**Actividad**

Para cualquier conjunto $A$ subconjunto de $U$, analizar el valor de verdad de:

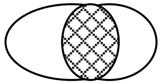
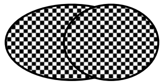
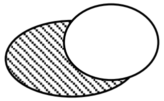
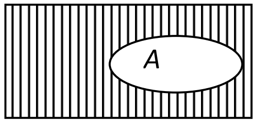
$$A \cup \underset{U}{\complement} A = U \qquad A \cap \underset{U}{\complement} A = \varnothing$$

**Actividad**

Calcular para cualquier $U$:

a) $\underset{U}{\complement} \varnothing$ b) $\underset{U}{\complement} U$

**RESUMEN de conceptos operaciones de conjuntos y la lógica relacionada**

| | |
|---|---|
| **Intersección** de $A$ y $B$ | $A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}$   **conjunción** |
| **Unión** de $A$ y $B$ | $A\cup B=\{x: x\in A \vee x\in B\}$   **disyunción** |
| **Diferencia** de $A$ y $B$ | $A-B=\{x: x\in A \wedge x\notin B\}$   **Conjunción + negación** |
| **Complemento de** $A$ **respecto de** $U$ | $\complement_U A=\{x: x\in U \wedge x\notin A\}$   **Conjunción + negación "especial"** |

**EJERCICIO**

Sea $U$ = {alumnos que cursan alguna de las materias $A_1$, $A_2$, $A_3$ }

Expresar en lenguaje conjuntista por operaciones convenientes:

a) Los alumnos que cursan $A_1$

b) Los alumnos que no cursan $A_1$

c) Los alumnos que cursan $A_1$ y no cursan $A_3$

d) Los alumnos que no cursan $A_1$ y que no cursan $A_3$

e) Los alumnos que sólo cursan $A_1$

f) Los alumnos que cursan $A_2$ y no cursan $A_3$