Clases sobre los Conjuntos Numéricos

Organización de las clases virtuales para el Capítulo 2: Ahora, contenido del segundo video:

Seguimos con lo básico

de la Aritmética y Algebra.

Se remarcaran las propiedades

de las operaciones en los diferentes

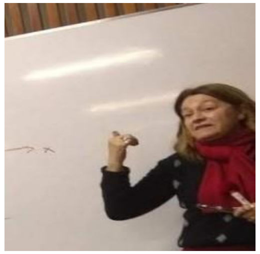
conjuntos numérios.

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

1.Nos saludamos

Hola!! Y si, hay que estudiar….

Hoy estamos en la segunda clase virtual del Capitulo 2 de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata. Todo esto es conocido, pero hay que destacar algunos aspectos.

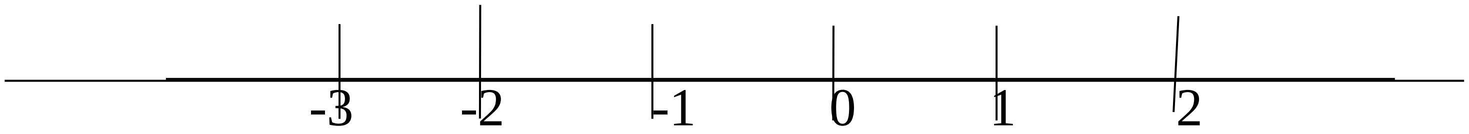


Los invito a mirar en los Apuntes de la Cátedra subidos en el sitio ***Ideas*** de la Facultad ,
Además no se tienen que olvidar de las **tablas de verdad de los conectivos y equivalencias lógicas pues siempren son muy útiles!!**

HEMOS VISTO ALGUNOS ASPECTOS DE LOS NÚMEROS NATURALES $\mathbb{N}$ Y DE LOS NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$, RECORDEMOS SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

Los números enteros, pueden representarse por ciertos puntos (aislados) de una recta, en la cual se han elegido dos puntos cualesquiera distintos 0 y U, para representar los números 0 y 1 respectivamente. La longitud del segmento OU, se considera la unidad de una escala métrica para $\mathbb{Z}$

Transportando la unidad mediante una construcción geométrica de paralelogramos, por ej. hacia la derecha de U se van determinando puntos sobre la recta que representan sucesivamente los enteros positivos (> 0), hacia la izquierda del O se determinan puntos que representan sucesivamente los enteros negativos (<0).



¿Y hay algo intermedio entre dos enteros? Si se va a los inicios cuando a los números se los consideraba totalmente asociados a los segmentos, en el principio hubo problemas con los negativos…no así en pensar que algo había entre dos naturales. Y esto último ¿por qué?

Se define la división de números enteros como la operación inversa de la multiplicación de enteros. Calcular 12:4 es hallar un número entero. que multiplicado por 4 de como resultado 12. Entonces 12:4=3 puesto que 4.3=12.

En cambio, la división 4:12 no puede efectuarse en $\mathbb{Z}$, pues no hay un número entero que multiplicado por 12 de cómo resultado 4 (cualquier negativo multiplicado por 12 dará por resultado un número negativo; 0.12 = 0; 1.12=12 y cualquier otro número natural al multiplicarlo por 12 da como resultado un número mayor que 12, por la ley de monotonía de la multiplicación).

Tampoco es resoluble en $\mathbb{Z}$ –3:7. ¿Porqué? ¡¡¡Expliquémoslo!!!

La *operación de dividir no es siempre posible en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros*.

Esta imposibilidad hizo ampliar al conjunto $\mathbb{Z}$, definiendo un conjunto en que la división sea realizable en el conjunto.

Es la necesidad de resolver problemas diarios lo que amplia el saber; también en Matemática.

Se introduce **para cada número entero no nulo *a*** un número llamado **inverso de *a*.** Ampliando a la vez la definición de multiplicación y estableciendo la **propiedad del inverso**

$$a \bullet \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \bullet a = 1$$

para todo ***a* no nulo, su inverso es** $\frac{1}{a}$.

Se considera que esa definición podemos poner entonces

$4 \div 12 = 4 \bullet \frac{1}{12};$ $\quad 3 \div 7 = 3 \bullet \frac{1}{7}$

Pero ahora, ¿cómo resolvemos esto?

$\frac{4}{12}\, y \quad \frac{3}{7}$ respectivamente.

Que se anotaran en general:

Sean a y b números enteros, $b \neq 0$. Un **número racional** es un número de la forma

$\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$ o sea es $a : b$

$\frac{a}{b}$ es una fracción con numerador a y denominador b

Se denomina por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los **números racionales** es decir:

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} : a \text{ y } b \text{ elementos de } \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \}$$

Así la operación *4:12* es realizable en $\mathbb{Q}$ pues $4:12 = 4/12$.

Recuerde que 0:3 = 0, luego 0/3 = 0. ¿Si a 3 lo reemplaza por cualquier otro número no nulo que resulta?

COMENTARIO:
Los números enteros son abstracciones del proceso de contar colecciones finitas de objetos. Pero en la vida diaria no es suficiente poder contar objetos individuales, sino que también es preciso medir magnitudes tales como longitudes, áreas, pesos, tiempo, etc. Las medidas de estas magnitudes llevan muchas veces a subdivisiones pequeñas que llevan a la Aritmética más allá de los números enteros.

REFLEXION:
¿Es cada número natural un número entero?
¿Es cada número entero un número racional?

En $\mathbb{Q}$ también se definen las operaciones de **suma** y **multiplicación**, con la pretensión de que las propiedades de estas operaciones en $\mathbb{Z}$ se conserven y en caso se enriquezcan.

Recordemos que dados los números racionales

$$\frac{a}{b} \; y \; \frac{c}{d}$$

(observar que esto significa que a, b, c y *d son números enteros con b y d ambos no*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d} \qquad \text{A)}$$

nulos)

Y que

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d} \qquad \text{B)}$$

Por ser (A) y (B) razones de números enteros con denominador no nulo (por qué?), resultan la suma y el producto cerrados en $\mathbb{Q}$.

Así:

$$\frac{-1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{-1\cdot 3+6\cdot 1}{6\cdot 3}=\frac{-3+6}{9}=\frac{3}{18}$$

$$\frac{5}{-2}+\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 2+(-2)\cdot 1}{(-2)\cdot 2}=\frac{10-2}{-1}=\frac{8}{-4}$$

$$\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{-2.3+3.2}{3.3}=\frac{-6+6}{9}=\frac{0}{9}=0$$

Se dice que los números racionales $\frac{a}{b}$ ***y*** $\frac{c}{d}$ ***son equivalentes si y sólo si*** $a.d = b.c$

Así, por ejemplo:

$\frac{8}{-4}$ es equivalente a -2

$\frac{2}{6}$ es equivalente a $\frac{1}{3}$ y también a $\frac{-3}{-9}$

¿¿¿Está de acuerdo???
¿Por qué?

Por abuso de notación escribimos que

$$\frac{8}{-4} = \frac{2}{-1} = \frac{-2}{1} = -2 \qquad ; \qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-3}{-9}$$

Aceptaremos que el resultado de una operación entre números racionales no se modifica si reemplazamos uno de ellos por otro que le sea equivalente.
(la demostración de esta afirmación no la haremos acá)

Por lo dicho:

$$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b} \quad \text{para } a \text{ y } b \text{ enteros, } b\neq 0$$

Además $\frac{a}{-b}+\frac{a}{b}=\frac{a.b+(-b).a}{-b.b}=\frac{0}{-b^2}=0 \qquad \frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{a.b+b.(-a)}{b.b}=\frac{0}{b^2}=0$

Así por ejemplo el opuesto de $\frac{3}{5}$ es $\frac{3}{-5}$ que además es igual a $\frac{-3}{5}$

Luego $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$ es el opuesto de $\frac{a}{b}$ y lo podemos anotar como $-\frac{a}{b}$

- **Propiedades de las operaciones de suma y multiplicación en $\mathbb{Q}$**

Para la *suma son las mismas que para* $\mathbb{Z}$ (para la formulación es suficiente cambiar "pertenece a $\mathbb{Z}$" por "pertenece a $\mathbb{Q}$").

Para la *multiplicación son las mismas* que en $\mathbb{Z}$, con la misma indicación, pero **se agrega**:

$(\forall u)((u \in \mathbb{Q} \wedge u \neq 0) \rightarrow (\exists u^*)(u^* \in \mathbb{Q} \wedge u.u^* = 1)$ el u^* se denomina inverso de u, se anota u^{-1}

NOTACION: número mixto

¿Qué significa la escritura $3\frac{2}{5}$? ó $4\frac{6}{11}$?

Es una manera de anotar números que tiene una parte entera más una parte fraccionaria.

Esto significa en el caso $3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$

$$4\frac{6}{11} = \frac{44+6}{11} = \frac{50}{11}$$

En general:

$$m.\frac{a}{b} = m + \frac{a}{b} = ?$$

Ejercicio

Halle el inverso para cada uno de los siguientes números:

$$-2\,;\,2.\frac{1}{5}\,;\,\frac{2}{7}\,;\,\frac{2}{a-b} \qquad\qquad a \neq b$$

Ejercicio

¿Cuál es el error en el siguiente ejercicio?

$$4+\frac{18}{3}=\frac{12}{3}+6 \ \text{ pues } \ \frac{12+18}{3}=\frac{12+18}{3}$$

Por lo tanto

$$4-\frac{12}{3}=6-\frac{18}{3}$$

$$2.\left(2-\frac{6}{3}\right)=3.\left(2-\frac{6}{3}\right)$$

Por lo tanto

2=3

b) Justificar las siguientes desigualdades:

b1) $2 - \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{2}\right) \neq \left(2 - \frac{1}{3}\right).\left(4 - \frac{1}{2}\right)$

b2) $5.\left(\frac{3}{2} - 8\right) \neq \frac{15}{10} - 40$

b3) $\frac{1}{8} : \left(\frac{2}{3} . \frac{1}{2}\right) \neq \left(-\frac{1}{8} : \frac{2}{3}\right) . \frac{1}{2}$

Se va a definir cómo es posible ordenar a los números racionales o fraccionarios. No es tan simple como en los enteros y en los naturales.

ORDEN EN $\mathbb{Q}$

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ números racionales, diremos que $\frac{a}{b}$ es mayor o igual que $\frac{c}{d}$, lo anotaremos

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } a.d \geq b.d$$

Así resulta $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$ pues 1.4 $\leq$ 2.3

$-\frac{5}{2} \leq -\frac{7}{3}$ pues (-5).5 $\leq$ 3. (-7)

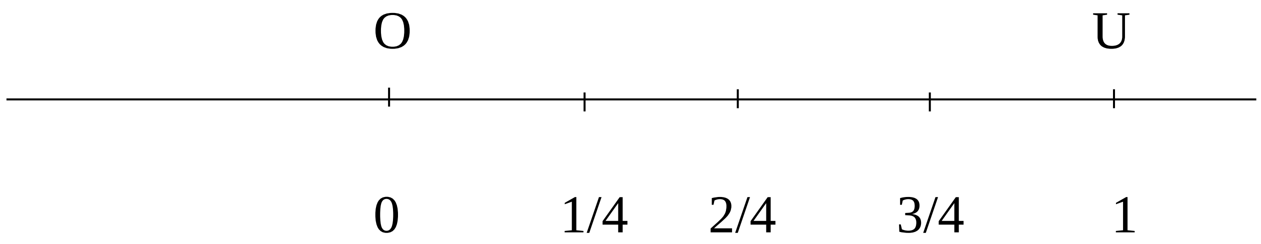
Los **racionales positivos** son los números racionales mayores o iguales que 0.
Los **racionales negativos** son los números racionales menores que 0.

Los números racionales son representables en una recta. Para ello se procede de manera similar que para la representación de los números enteros, considerando sobre una recta dos puntos arbitrarios 0 y U que representan a 0 y 1 respectivamente.

Hacia la derecha del punto 0 se representan los racionales positivos, hacia la izquierda de 0 los racionales negativos.

Luego considerar a veces $\frac{1}{b}$ es decir $a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ mediante la regla del paralelogramo.

Por ejemplo, si $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$



Ordenar por la relación ≤ y representar:

$$-\frac{12}{6}\ ;3;\frac{2}{5};-1;-\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{7};\frac{6}{4};0$$

Ejercicio

a) Reemplazar *m* por números enteros de modo que sea verdadero $-3 < m < 5$

(por ejemplo, si $m = 0$ $\quad -3< 0 <5$ es cierto).

b) ¿Por cuántos valores enteros puede reemplazar *m*? Haga un gráfico de esa situación.

Ejercicio

a) Remplazar *m* por números racionales de modo que sea verdadero que $-3 < m < 5$

$$(\text{por ej. si } m = \frac{1}{2}\ ;\ -3 < \frac{1}{2} < 5 \text{ es cierto}).$$

b) Observar que $m = 1/2$ ó $m = 2/3$ son valores para los que resulta $-3 \leq m \leq 5$ verdadero. Representar la situación en la recta numérica.

c) ¿Hay una cantidad limitada de números racionales *m* entre -3 y 5?

Ejemplo

Demostrar: **entre dos números racionales distintos hay otro número racional**.

Solución: Siendo p y q números racionales $p = \frac{a}{b}$ y $q = \frac{c}{d}$, siendo $a,\ b,\ c$ y d

números enteros con b y d no nulos.

Se pueden considerar b y d $>$ o (por qué?)

El número $\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{2}.\frac{(a.d)+(b.c)}{b.d} = \frac{(a.d)+(b.c)}{2b.d}$

es un número racional (justifique) y lo llamaremos t. Además se cumple $p < t$:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ por hipótesis, es decir $a.d \ < \ b.c$

luego $a.d + a.d \ < \ a.d + b.c$ (por monotonia de la suma)

es decir $2ad < \ a.d + b.c$, como el número $2bd > 0$

$$\frac{2.a.d}{2.b.d} < \frac{a.d + b.c}{2.b.d} \text{ por monotonía del producto.}$$

Pero: $p = \frac{a}{b} < \frac{a.d + b.c}{2.b.d} = t$

Como queríamos ver.

<u>Demuestre</u> que también que $t < q$.

Consecuencia de esta propiedad es que **entre dos números racionales distintos hay infinitos números racionales**. ¿Por qué?

Intuitivamente: cualquiera sea el segmento que se considere en la recta representativa de $\mathbb{Q}$, por pequeño que sea, hay infinitos puntos que representan números racionales.

- Los números racionales también se pueden expresar en forma decimal.

Para el $\frac{a}{b}$ haciendo la división de *a* por *b*.

i) O bien como un **número decimal finito**, si se llega a un resto 0, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0.5 \ ; \ \frac{3}{8} = 0.375$$

ii) O bien como una **expresión decimal periódica**. En efecto, si al dividir *a* por *b* no se obtiene resto 0, como los sucesivos restos son todos menores que *b* (*b* es un nº finito), llega un momento en que uno se repite y, a partir de él, se repiten las cifras del cociente.

Por ejemplo: (comprobarlo!!)

$$\frac{5}{3} = 1.66...... = 1.\overline{6}$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857..... = 0.\overline{142857}$$

Verificar las desigualdades:

a) $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$

b) $\frac{1}{4} - \frac{3}{7} < 1 - \frac{8}{7}$

c) $0.33 < \frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{3} < 0.34$

Compruebe que $0.\overline{9} = 1$

SOLUCION: De acuerdo a la propiedad demostrada en el ejercicio si $0.\overline{9} < 1$ existe

otro número racional $t = \dfrac{(0.\overline{9}+1)}{2}$ entre ambos.

Pero $t = \dfrac{1.\overline{9}}{2}$

$$\begin{array}{l|l} 1.9999\ldots & \underline{\;2\;} \\ 19 & 0.999 \\ \;\;19 & \end{array}$$

es decir que $t = 0.9999.. = 0.\overline{9}$

Luego NO HAY otro racional entre $0,\overline{9}$ y 1, luego son iguales….

➢ **Hay otros números**

Aquellos números que no se pueden expresar como cociente de números enteros coinciden con los que tienen una expresión decimal que NO tiene un número finito de cifras ni tienen un número de cifras periódicas. Por no ser racionales, se llaman **irracionales.**

Los ejemplos más conocidos son π, *e* y las raíces cuadradas de 2 o de 3.

π y raíz cuadrada de 2 tienen interpretación geométrica importante, por lo tanto, son números muy concretos.
El número *e* es entre otras cosas la base de los logaritmos naturales que en su calculadora lo tienen indicados como *ln.*

El conjunto de los números racionales y el de los números irracionales son disjuntos.
La unión de ambos conjuntos forma el conjunto de los **números reales**, que se simboliza por $\mathbb{R}$.

A los irracionales es usual simbolizar por $\mathbb{I}$.

Las operaciones de **suma** y **multiplicación se definen sobre** $\mathbb{R}$. Y las propiedades que tienen esas operaciones son las mismas que tienen las definidas sobre los números racionales.

Ejemplos:

1) **La suma de un número irracional con un número racional es irracional**:

Sean q un número racional, v un número irracional. Supongamos que la suma de ambos sea racional: $q=\dfrac{a}{b}$ con a entero y b entero y $b \neq 0$. El v no se puede escribir como cociente de números enteros.

Suponemos que $q+v=\dfrac{h}{m}$ con h y m números enteros con $m \neq 0$

Despejamos $v=\dfrac{h}{m}-q=\dfrac{h}{m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{h.b-a.m}{m.b}$ pero $m.b \neq 0$, luego v es racional en contra de la hipótesis. ***Es decir, la suma NO puede ser racional!!***

2) **La suma de dos irracionales puede ser racional:**

Sean los irracionales u =1+ π y w =3 - π, así u + w = (1+ π) + (3 - π), conmutando y asociando convenientemente, u + w = 4.

Luego, **la suma en $\mathbb{I}$ NO es cerrada.**