

Ejercicio 9: Sean $A = \{x : x = 10k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{x : x = 5h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$ conjuntos:

- (a) Probar que $A \subseteq B$.

Para ver que $A \subseteq B$ tomemos un elemento cualquiera de A y probemos que es un elemento de B .

Sea $x \in A$ entonces x se puede escribir como $x = 10k + 5$ para algún número $k \in \mathbb{Z}$.

Luego, $x = 10k + 5 = 5 \cdot 2k + 5 = 5 \cdot (2k + 1) = 5 \cdot h$, siendo $h = 2k + 1$. Aquí hemos usado la propiedad distributiva del producto en la suma de números enteros en la tercera igualdad.

Observemos que $h \in \mathbb{Z}$ porque $k \in \mathbb{Z}$ y por ser producto y suma de números enteros (es decir, el producto y la suma de números enteros son operaciones cerradas en \mathbb{Z}).

Con lo que tenemos que $x = 5 \cdot h$, $h \in \mathbb{Z}$, entonces $x \in B$.

Como x es un elemento cualquiera de A y probamos que x pertenece a B , queda demostrado que $A \subseteq B$.

- (b) ¿El número 40 es un elemento de A ? ¿Y de B ? Justifique su respuesta.

Supongamos que $40 \in A$, entonces $40 = 10k + 5$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Busquemos cuál es el valor de k , para eso despejamos k de la ecuación anterior y tenemos que

$$40 - 5 = 10k \Rightarrow \frac{35}{10} = k, \text{ es decir } k \notin \mathbb{Z}, \text{ absurdo.}$$

Este absurdo o contradicción viene de suponer que $40 \in A$, luego $40 \notin A$.

Sin embargo, como $40 = 5 \cdot 8$ y $8 \in \mathbb{Z}$ tenemos que $40 \in B$.

- (c) ¿Está el conjunto B incluido en el conjunto A ? Justifique su respuesta.

Si B estuviera contenido o incluido en A , todo elemento de B sería elemento de A . Como vimos en el inciso anterior que $40 \in B$ y $40 \notin A$, concluimos que B no está contenido en A .

Observación: Si escribimos A y B por extensión, mostrando algunos de sus elementos, vamos a ver que hay otros enteros, además del 40 que pertenecen a B y no pertenecen a A . Recordemos que el conjunto B es el conjunto de los múltiplos enteros de 5, es decir, los números enteros terminados en 5 o 0. En cambio, en el conjunto A encontramos a los enteros que son suma de un múltiplo de 10 y 5. Es decir, los elementos del conjunto A son los enteros terminados en 5 que son múltiplos de 5, pero NO todos los múltiplos de 5 (por esto $A \subseteq B$, pero $A \neq B$).