Clases de Lógica Formal
(*in*formalmente!!)

Organización de las primeras clases virtuales:
Ahora, contenido del quinto video:

La introducción de

herramientas

para deducir

Reflexiones…

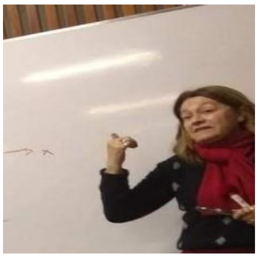
Entonces importa:

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

1- Nos saludamos

Hola! Espero que todo muy bien.
¿Entendiendo lo que estamos haciendo en Matemática 0?

Hoy estamos en la quinta clase virtual de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata.



Los invito a tener presente las definiciones de las operaciones lógicas entre las letras proposicionales y sus respectivas **tablas de verdad.**

Están en el **Apunte de la Cátedra**, está en sitio ***Ideas*** de la Facultad.

2.La buena manera de razonar

Veremos cómo lo estudiado permite justificar lo que hacemos al pensar y llegar a una conclusión de manera correcta.

La idea de esta introducción a la Lógica es dar herramientas que nos permitan decir cuando algunos razonamientos que desarrollamos en nuestras actividades se pueden justificar desde el punto de vista lógico. Ese es interés de la Lógica: hallar **formas** absolutamente verdaderas, que **convaliden los razonamientos.**

El Pensador, Rodin (1903)

Reitero que no haremos una aproximación axiomática. Pero dando lo imprescindible para que se entienda la ***buena manera de razonar***.

Los **Axiomas** son **fórmulas proposicionales** de una teoría que se aceptan como punto de partida de esa teoría. También los axiomas se los llama Postulados.

Cuando se establece una teoría además de los Axiomas se dan ***reglas de deducción*** y por resultado de su aplicación sobre los axiomas se obtienen los **teoremas**.

Un ejemplo de teoría que es familiar es la Geometría Elemental o Geometría Euclidiana.

La diferencia sustancial entre la teoría dada por Euclides en sus Elementos (buscar) y las teorías axiomáticas actuales es que Euclides consideraba a sus puntos de partida como verdaderos, no como en la actualidad que las teorías consideran los puntos de partida como hipótesis, sin atribuirles un valor de verdad. Considerar los axiomas de la Matemática como verdaderos es también una idea que Euclides toma de Aristóteles.

Euclides no incluyó en su trabajo un informe detallado del desarrollo de los resultados matemáticos que llevaron siglos para que puedan ser presentados como un cuerpo organizado como el que él presenta.

Comentario: El trabajo creativo del matemático no procede paso a paso en un razonamiento lógico, esa será la justificación necesaria. El trabajo creativo requiere de pensar, conjeturar y hacer hipótesis, luego de dar una demostración, cosa que también requiere de la intuición, percepción profunda, asociación de ideas, suerte, mucho trabajo y mucha paciencia.

Las matemáticas ya establecidas fueron objeto de distintas formulaciones deductivas. Ellas tuvieron por objeto lograr una presentación coherente y también de comprobar los pasos de una demostración. A través de los siglos (entre los años 3000 antes de Cristo hasta el 1900 después de Cristo) los matemáticos han elaborado los distintos tipos de números y las operaciones con esos números que constituyen el sistema de los números complejos. En cada momento del desarrollo y ampliación de estos números, los matemáticos, sabían precisamente cuales eran estos números y las propiedades que cumplían. En las últimas décadas del siglo XIX los matemáticos decidieron construir un desarrollo lógico del sistema de los números complejos. Para ello trataron de construir axiomas de los que se pudieran deducir las propiedades de los números que ellos ya conocían.
Este tipo de fundamentación se pretendió para todas las ramas de la Matemática (sea el Algebra, la Geometría, el Análisis, etc.) y consistiría en axiomas enunciados con completa exactitud y demostraciones explícitas de todos los resultados, aun de aquellos que pudieran pensarse obvios para la intuición. En lugar de la verdad se pedirá compatibilidad lógica o consistencia.
La axiomatización de la Matemática se llevó adelante y en un congreso internacional de matemáticos que se realizó en París en 1900, Henri Poincaré (uno de los matemáticos más importantes de su tiempo) proclamó que "el rigor había sido alcanzado". En realidad, en ese intento se habían usado aspectos que no tenían la consistencia deseada; surgieron así otras formulaciones de la fundamentación que se basan en distintos puntos de partida y posiciones filosóficas sobre ¿qué es la Matemática?

Hay una axiomatización del Cálculo Proposicional Clásico, si le interesa ver por ejemplo https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_proposicional_de_Frege o

https://es.wikipedia.org/wiki/Axioma , desde ya que hay muchos libros en que lo puede encontrar.

No sólo en Matemática, Informática o las ciencias en general es importante pensar y razonar muy bien. También en las discusiones de todos los días, en la lectura de las noticias y en nuestro diario vivir es importante tener claro cómo usar el lenguaje y el razonamiento (esto es el obtener conclusiones a partir de algunos datos) de manera adecuada.

Hay argumentos de la vida diaria como:

Juan va al cine o Juan va al teatro.

Si Juan va al cine Juan encuentra a María.

No Juan no encuentra a María.

Juan va al teatro

De este argumento se pueden extraer las oraciones:

Juan va al cine

Juan va al teatro.

Juan encuentra a María

y que el argumento está formado por oraciones que son combinaciones apropiadas de ellas. Ellas son proposiciones (conociendo quienes son Juan, María y sus costumbres)

Se quiere justificar estos argumentos o similares, independientemente de las proposiciones concretas que lo formen sino por la forma de los mismos.

Podemos usar letras:

p: Juan va al cine

q: Juan va al teatro.

r: Juan encuentra a María

y el argumento por:

p o q

Si p entonces r

No es el caso que r

---

q

Y usando conectivos:

$p \vee q$

$p \rightarrow r$

$\neg r$

---

q

Vamos a dar un sentido más preciso a nuestra discusión.

3. DEMOSTRACIONES

- **Análisis de argumentos o razonamientos**

Hay cosas que se saben por simple observación. Uno puede decir acertadamente si está lloviendo simplemente mirando para afuera. También puede decidir si el agua es fría o templada simplemente poniendo la mano en el agua. Nuestra propia experiencia y la memoria de las cosas que percibimos en el pasado son cosas que sabemos. A esto hay que agregar también la experiencia de otros. Por ejemplo: ¿cómo sabemos el día que nacimos? La experiencia propia de haber nacido no alcanza, nuestros padres nos han dicho y le hemos creído. De la misma manera aceptamos de los historiadores y ellos de otras personas, en un camino hacia el pasado hasta llegar a contemporáneos al 25 de mayo de 1810, que ese día asumió el Primer Gobierno Patrio. Pero hay conocimiento que trasciende la experiencia colectiva. Se saben cosas de los orígenes de la Tierra, de las dimensiones del Universo o de los componentes del átomo que no han sido observados directamente por nadie. Para estos casos procedemos por medio de razonamientos. Cuando razonamos se usan relaciones entre proposiciones para sacar nuestro conocimiento de todo lo que se ha podido experimentar directamente y otras se dan por ciertas.

Considerar la siguiente proposición:

Las piedras en la China ruedan por la ladera de la montaña.

Demos razones por las cuales pensamos que la afirmación anterior es verdadera.


La proposición "Las piedras ..." es la **conclusión** de una serie de otras proposiciones que consideramos como dadas por diferentes experimentos que se llaman **premisas**.

Una proposición no es una premisa ni tampoco conclusión. Una proposición es premisa o conclusión con respecto a otras proposiciones.

El conjunto de premisas junto con la conclusión es llamado **argumento** o **razonamiento**.

Las proposiciones que llamamos premisas son el soporte o evidencia para la proposición que se llama conclusión.
Una manera común de decir es que la conclusión se **deriva** o **infiere** de las premisas.

Actividad:
¿Qué conclusión infiere de las siguientes proposiciones?
(Se supone que las dice una persona que no miente):
Justifique su respuesta, intuitivamente.

Si hace menos de 28^{0}C entonces salgo a correr
Hace menos de 28^0 C
___

Voy al teatro o me quedo en casa mirando televisión.
No me quedo en casa mirando televisión.
___

Actividad:
En cada argumento identificar la conclusión y numerar cada una de las premisas.

a) *Un informático es muy reflexivo y detallista, y Pedro no lo es, luego él no se recibirá de informático.*
b) *Si Ana venció el partido entonces Ana es finalista.*
Ana venció el partido. Ana es finalista.

➢ Formalicemos lo formal

Se quiere, mediante definiciones poder analizar si una determinada derivación (arribar a una conclusión) a partir de hipótesis dadas (lo que se tiene como dato o sabido) es una *buena manera de razonar.*

Un argumento o razonamiento es **lógicamente válido** si de premisas verdaderas no se puede deducir una conclusión falsa.

- **¿Cómo se convalida un razonamiento?**

Una manera muy clara y efectiva es por tablas de verdad.

Si el razonamiento es de la forma: $P_1,\ P_2,\ P_3,...,\ P_n, C,$ donde $P_1,...,\ P_n$ son las premisas y C la conclusión, se acostumbra escribir:

$P_1, P_2, .., P_n /\ \ C$, o también

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline C \end{array}$$

Ambas maneras expresan que de $P_1,...,\ P_n$ se deduce C.

Para que esto sea **correcto lógicamente**, debe cumplirse lo siguiente:

$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ sea un condicional "siempre verdadero".

Esto es, para todos los valores de verdad que puedan darse como combinación de los valores de las letras proposicionales que componen las premisas $P_1, \ldots, P_n$ y la conclusión *C,* el valor de verdad del condicional sea V.

- Se construye el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ y se hace su tabla de verdad.
- ¿Cuándo el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ es F ?

  Será F en el caso que todas las premisas sean V y la conclusión sea F.

  Si hay un caso en esta situación, significa que **el razonamiento no es válido.**
- Y será **válido** en el caso que siempre (esto es, en cada línea de valores) el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ resulte verdadero.

- **¿Cómo se deduce?**

Aplicando reiteradamente reglas **de derivación** que cumplan la condición que, de premisas verdaderas no se pueda arribar a una conclusión falsa.

Son sinónimos: **reglas de deducción, reglas de derivación, reglas de inferencia.**

La más natural de todas las reglas es la llamada **Modus Ponens**.

Pongámosla a prueba, ¿qué concluye si tiene las siguientes proposiciones como premisas?:

Si Guillermo estudió bien entonces Guillermo aprobó.

Guillermo estudió bien.

Seguramente que: *Guillermo aprobó.*

La **estructura formal** es:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad} \\ q \end{array}$$

¿Cumple la definición de razonamiento lógicamente válido?

Usaremos el método de convalidación por tabla de verdad.

Hay dos métodos basados en tablas de verdad para analizar la validez de un razonamiento.

Método 1:

Para el del ejemplo, construimos una tabla de verdad que tiene por columnas las letras proposicionales o componentes, las premisas y la conclusión.

Componentes		Premisas		Conclusión
p	q	$p \to q$	p	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	F	F	F

Estrategia de análisis:

- Buscamos líneas en que la conclusión sea F. ¿Hay? Si, son la 2da. y 4ta. línea.
- Analizamos si en estas líneas las premisas son V. En la 2da línea hay una premisa F, en la 4ta. línea las dos premisas son F. Luego, ***no*** se da el caso de premisas V y conclusión F.

  Luego, este razonamiento es lógicamente válido.

Este **mismo esquema y proceder** se puede usar para analizar cualquier razonamiento $P_1, P_2, .., P_n / \; C$.

Método 2:

Se basa también en tablas de verdad, pero tiene un trabajo adicional.

Primero se debe recordar la tabla de verdad del condicional: sólo es F si el antecedente es V y el consecuente es F, en todo otro caso es V.

También recordemos que una conjunción es V sólo en el caso que ambas letras proposicionales sean V. Esto es así también para cualquier número de conyuntos.

- Para ello *se construye* una forma proposicional *condicional*, formando el antecedente con la conjunción de las premisas y como consecuente la conclusión.

En este caso será:

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

Se hace la tabla de este condicional:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- Se analiza si en alguna línea de la columna del condicional (el fabricado) es F. ¿Hay? No. Luego el razonamiento es lógicamente válido.

Veamos otro razonamiento:

Si Juan ganó el partido entonces Juan salió campeón.

Juan salió campeón.

Juan ganó el partido.

Analicemos su validez lógica.

Su forma es:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \qquad\quad} \\ \quad p \end{array}$$

Por Método 1:

Componentes		Premisas		Conclusión
p	q	$p \to q$	q	p
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

En las líneas 3 y 4 la conclusión es F, y en la línea 3 ambas premisas son V, por lo tanto el razonamiento es lógicamente inválido.

Actividad

Demuestre utilizando el Método 2 que:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \qquad\quad} \\ \quad p \end{array}$$

es un razonamiento lógicamente inválido.

Este último (mal) ejemplo debe "tenerse en mente".

Es un error muy común esta mala forma de razonar. NO es lógicamente válida.

Más ejemplos:

Si Argentina ganó o empató entonces va a la final.

Argentina ganó.

Luego, Argentina va a la final.

La forma del razonamiento:

$$\begin{array}{l} (g \vee e) \to f \\ \underline{g \qquad\qquad\quad} \\ \qquad f \end{array}$$

Con*: g*: *Argentina ganó.* *e: Argentina empató.* *f: Argentina va a la final.*

Para analizar si el razonamiento es lógicamente válido usaremos el Método 2.

Observar que al haber 3 letras proposicionales la tabla tiene 8 líneas (ya la cosa se está complicando.... no deja de ser efectivo, pero da trabajo …).

g	e	f	$g \vee e$	$(g \vee e) \to f$	$((g \vee e) \to f) \wedge g$	$(((g \vee e) \to f) \wedge g) \to f$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V

Luego esto significa que el razonamiento es lógicamente válido. (¡¡¡Lógica aparte, si la conclusión resulta verdadera sería muy bueno!!!...)

Otro:

Si María consiguió trabajo entonces María ganó dinero.

Si María ganó dinero entonces María compró una moto.

Luego, si María consiguió trabajo entonces María compró una moto

Veamos la forma de este razonamiento:

Donde: *t*: *María consiguió trabajo*

d: *María ganó dinero*

m: *María compró una moto.*

$$\begin{array}{c} t \to d \\ d \to m \\ \hline t \to m \end{array}$$

Veamos que esta es una manera lógicamente correcta de razonar:

t	d	m	$t \to d$	$d \to m$	$t \to m$	$(t \to d) \wedge (d \to m)$	$((t \to d) \wedge (d \to m)) \to (t \to m)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Actividad

Utilizando el Método 1 ó 2 analizar la validez de las siguientes formas de razonamiento:

a) $$\begin{array}{l} a \to b \\ \underline{\sim b} \\ \sim a \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} c \vee d \\ \underline{d} \\ \sim c \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} e \to f \\ \underline{\sim e} \\ f \end{array}$$

d) $$\begin{array}{c} \underline{g \to h} \\ g \to (g \wedge h) \end{array}$$

❖ Pruebas o demostraciones

El método de las tablas de verdad es un camino para analizar la validez de una forma de razonamiento. Se puede hacer un método reducido cuando se tienen muchas letras o variables proposicionales. Hay otra manera de analizarlo.

> Sabemos que la Matemática se conoce como una **ciencia deductiva.**
>
> A partir de algunos datos (hipótesis) ir sacando consecuencias valederas, por buenos razonamientos.
>
> Esto es, encontrar una cadena de pequeñas demostraciones o justificaciones que paso a paso permitan saliendo de las premisas arribar a la conclusión. Esto es dar una **prueba** o **demostración** del razonamiento.

La manera de razonar desde el punto de vista lógico (de premisas verdaderas no permiten obtener conclusiones falsas), aplicamos paso a paso, las llamadas ***reglas de inferencia*** (muchas de ellas tienen nombre). Hemos visto ya algunas de ellas:

El **Modus Ponens**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \quad q \end{array}$$

El **Silogismo Hipotético**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

El **Modus Tollens**

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{\sim q} \\ \sim p \end{array}$$

Claramente una buena manera de razonar es **sustituir** una forma proposicional por otra equivalente.

Actividad:

Justifique esa afirmación**.**

Ejemplos

Probemos que son reglas de inferencia también:

Silogismo disyuntivo

$i)$

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array}$$

Gana o empata

No gana

---

empata

$ii)$

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim q} \\ p \end{array}$$

Gana o empata

No empata

---

gana

¿Cuál es la idea intuitiva? Si afirmo una disyunción y también la negación de uno de los disyuntos el otro disyunto debe ser verdadero.

Para i) se aplica el método 2.

		Premisa	Premisa	Conj. de Prem.	Condicional
p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Actividad

Hágalo para ii). O use que $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, y en ese caso ii) tiene "la forma" de i).

Daremos más reglas de inferencia, sirven en demostraciones matemáticas como en los razonamientos cotidianos.

La mayoría de ellas son muy intuitivas además de ser maneras válidas de razonar.

Se han puesto los nombres de las reglas, pero no es imprescindible recordarlos, aunque ello sea útil.

Simplificación

$i)$

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

Cantó y bailó

---

cantó

$ii)$

$$\frac{p \wedge q}{q}$$

Cantó y bailó

---

bailó

Adición

$$\frac{p}{p \vee q}$$

Estudio

---

estudio o paseo

Actividad

Demuestre que la simplificación y la adición son reglas de inferencia y de una interpretación intuitiva. Si lo piensa de manera semántica (en función de los valores de verdada) lo va a entender muy bien.

Actividad

¿Es una regla de inferencia: $\dfrac{p}{p \wedge q}$?

De un ejemplo que refuerce su opinión.

Actividad

¿La siguiente es una regla de inferencia? Justifique.

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

Explique la diferencia entre lo propuesto por las dos actividades anteriores.

La regla se llama **conjunción.**

Veamos el siguiente ejemplo:

Si entro a Internet entonces encuentro las ofertas que necesito; pero si voy a mirar vidrieras, me compro algo que me tienta. Estas son mis alternativas: entro a Internet o voy a mirar vidrieras. Por lo tanto o bien encuentro las ofertas que necesito o me compro algo que me tienta.

Simbolizando:

i: (yo) entro a Internet.

o: (yo) encuentro las ofertas que necesito.

v: (yo) voy a mirar vidrieras.

c: (yo) me compro algo que me tienta.

$$\boxed{\begin{array}{l} (i \to o) \wedge (v \to c) \\ i \vee v \\ \hline \quad o \vee c \end{array}}$$

Este argumento presenta un **dilema**, es común en la táctica de debates y es una forma de pensar sobre alternativas de acción.

Actividad

Verificar que la forma ejemplificada antes:

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \underline{p \vee r \qquad\qquad\quad} \\ \qquad q \vee s \end{array}$$

es una manera válida de razonar.

$p \Leftrightarrow p \wedge p \Leftrightarrow p \vee p$ *Tautología (T)*

$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ *Doble negación (DN)*

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $\quad p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ *Asociatividad (As.)*

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $\quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *Conmutatividad (Conm.)*

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Distributividad (Dist.)

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ $\quad \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ *De Morgan*

$(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ *Implicación*

$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ *Contraposición*

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Modus Ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Modus Tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

Silogismo Hipotético (SH)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}$$

Silogismo Disyuntivo (SD)

$$\frac{p \wedge q}{p} \; ; \quad \frac{p \wedge q}{q}$$

Simplificación (Simp.)

$$\frac{p}{p \vee q} \; ; \quad \frac{q}{p \vee q}$$

Adición (Ad.)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

Conjunción (Conj.)

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$$

Dilema (Dil.)

EJEMPLO

Dar una prueba formal para un razonamiento que simbolizado tiene la forma:

$$\begin{array}{ll} 1. & a \to b \\ 2. & c \wedge \neg b \\ 3. & (c \vee d) \to e \\ 4. & e \to f \\ \hline & \neg a \wedge f \end{array}$$

Solución: Si observamos la conclusión $(\neg a \wedge f)$ es una conjunción, por la regla de conjunción será suficiente que pudiéramos sacar por aplicación de las reglas aceptadas: $\neg a$ y f.

Pensando en las apariciones de f en las premisas, es el consecuente de 4., donde e es antecedente, luego debemos trabajar para "sacar" e.

A su vez e es consecuente de (3), hay entonces que "sacar" su antecedente.

La proposición $\neg a$ no aparece en las premisas. En (1) está a como antecedente de $a \to b$, luego es objetivo poder deducir $\neg b$ para "sacar" $\neg a$ por Modus Tollens.

Manos a la obra!:

1. $a \to b$ (P)
2. $c \wedge \neg b$ (P)
3. $(c \vee d) \to e$ (P)
4. $e \to f$ (P)
5. $\neg b$ de (2) por simp.
6. $\neg a$ de (1) y (5) por M. T.
7. c de (2) por simp.
8. $c \vee d$ de (7) por ad.
9. e de (3) y (8) por M.P.
10. f de (4) y (9) por M.P.
11. $\neg a \wedge f$ de (6) y (10) conj.