Clases sobre los Conjuntos Numéricos

Organización de las clases virtuales para el Capítulo 2: Ahora, contenido del cuarto video:

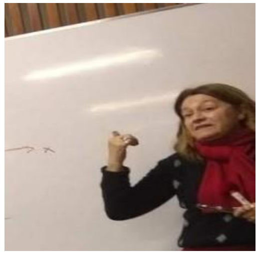
Será introduciendo conceptos básicos de la Aritmética y Algebra. Se trabaja con operaciones que generalmente conocemos destacando situaciones importantes. Más de representación de conjuntos y de radicación.

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

1.Nos saludamos

Hola!! Cuanto que tenemos que estudiar….

Hoy estamos en la cuarta clase virtual del Capitulo 2 de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata. Estos temas entiendo que les resultará más familiar.



Los invito a mirar en los Apuntes de la Cátedra subidos en el sitio ***Ideas*** de la Facultad ,
Además no se tienen que olvidar de las **tablas de verdad de los conectivos y equivalencias lógicas pues siempren son muy útiles!! Casi no las vamos a usar explícitamente en esta clase…Pero son como el Sol, siempre esta, y la Lógica también.**

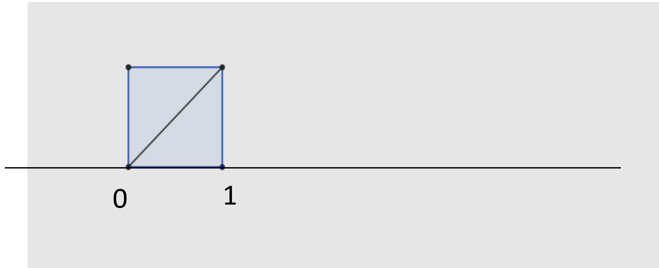
Lo que si hay que tener muy presente las operaciones ya definidas en los conjuntos numéricos

Más reflexiones sobre todos los conjuntos numéricos

Vimos que los puntos representativos de los números racionales están "muy próximos" sobre la recta (en cada segmento por pequeño que sea, hay infinitos puntos que representan a racionales), este hecho podría sugerir que todos los puntos de la recta quedan representados por los racionales, pero no es así.
También destacamos que todo racional **a/b** se expresa de manera única de forma decimal con un número finito de cifras luego de la coma o con infinitas cifras, pero periódicas en número finito. Es inmediato que se puede considerar un número decimal con infinitas cifras no periódicas, ese así construido no resultará racional. A estos números los llamamos **irracionales** (*no son razón de enteros*). Pueden construirse infinitos irracionales.

Es demostrable que $\sqrt{2} = 1{,}4142.....$ es un irracional.

De acuerdo con el teorema de Pitágoras $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 de longitud. Luego hay segmentos cuya longitud está dada por irracionales, $\sqrt{2}$ es un ejemplo. Con regla y compás por ejemplo esa longitud se puede trasladar a la recta determinando sobre ella puntos representativos de irracionales. Pues sumar una cantidad positiva de $\sqrt{2}$ es irracional.



Si se quiere que exista una correspondencia mutua (1 a 1) entre números, de una parte, y puntos de la recta, de la otra, es necesario introducir los irracionales.

También es irracional π = 3,141592..... (constante de proporcionalidad entre cualquier circunferencia y su respectivo diámetro), se ha demostrado que no surge como raíz de ningún índice de ningún número racional.

COMENTARIO: La existencia de un segmento inconmensurable (es decir que su longitud no es expresable como razón de números enteros), o lo que es equivalente la existencia de números irracionales, fue descubierta por los griegos, posiblemente en el siglo V a. de C.. Es un acontecimiento científico de gran trascendencia que dejó profunda huella en la Matemática y Filosofía desde entonces. Entre los siglos XIX y XX, Dedekind, Frege, Cantor y Weierstrass construyeron una teoría rigurosa de los números irracionales. Es tema de estudio de lo conocido como Análisis Matemático.

Todas las magnitudes medibles de que se hace uso en la práctica y en la ciencia aplicada pueden ser expresadas mediante números racionales con suficiente grado de aproximación. La precisión de los más perfectos instrumentos de medida no sale del campo de los números racionales.

Los **números reales** son todos los racionales además de los irracionales. Intuitivamente se puede aceptar que son los números que representan las longitudes de los segmentos.

La justificación rigurosa de estas definiciones de la suma y multiplicación se hace en un curso de Análisis Matemático con el concepto de límite. Las vamos a aceptar……

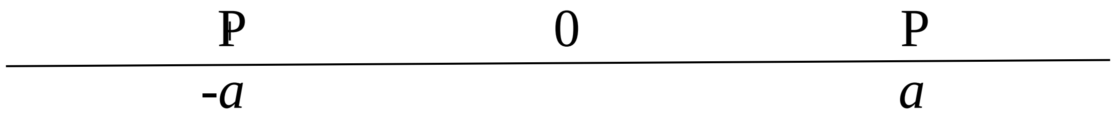
Es útil dar la definición de **valor absoluto en** $\mathbb{R}$ (esta definición se hace de modo que coincida con la definición dada anteriormente para aquellos números reales que también sean enteros):

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad \mathrm{a} < 0 \end{cases}$$

Así

$$|2| = |-2| = 2 \quad ; \quad \left|\frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \quad ; \quad |\text{-}0{,}2731...| = 0{,}2731...$$

OBSERVACION: El $|a|$ se puede interpretar como la longitud del segmento PO siendo P el punto que representa al real *a*. Por ejemplo:



¿Cuáles de estas afirmaciones son falsas y cuáles verdaderas?:

$$|9| = 9 \quad ; \quad \left|-\frac{8}{3}\right| = \left|\frac{8}{3}\right| \quad ; \quad |0{,}27| > 0{,}27 \quad ;$$

$$|-234{,}18| \geq 234{,}18 \quad ; \quad -\frac{2}{3} < \left|-\frac{2}{3}\right| \quad ; \quad \left|-\frac{2}{3}\right| \leq \frac{2}{3}$$

Para cada número dar otro que tenga igual valor absoluto:

3,2 ; -2,85 ; ¼ ; -0,58 ; - $\sqrt{2}$

Evaluar las expresiones:

$-\left|-\frac{7}{3}\right|$; $1-\sqrt{3}.\sqrt{|-3|}$; $|-4|+|-8|$; $|(-4)+(-8)|$

¿Es $|a+b| = |a| + |b|$? Justifique.

➢ Más sobre representación de conjuntos de números reales

Por la observación de que a cada número real le corresponde un punto de una recta, graduada convenientemente, y recíprocamente, esto nos permite dibujar sobre una recta los conjuntos de números reales.

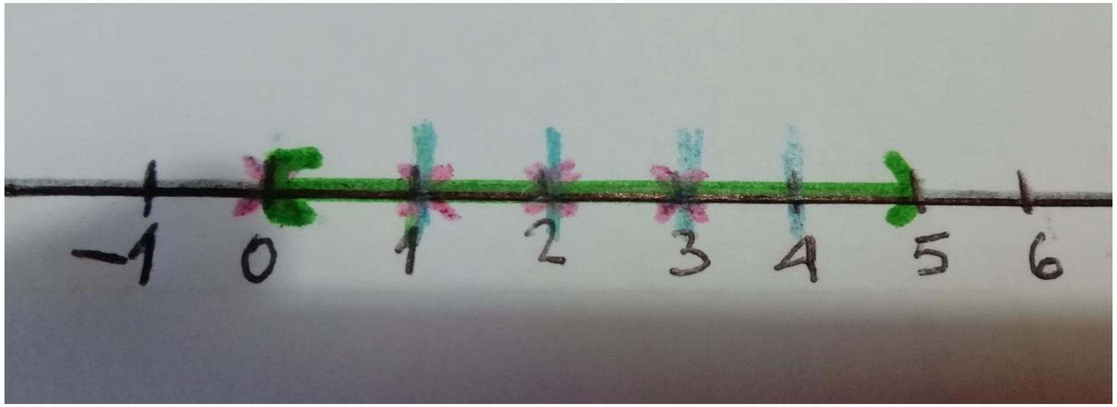
El **orden usual en** $\mathbb{R}$ extiende al dado para los números racionales, ya que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ Y aquellos reales v y t que están representados en la recta por los puntos V y T respectivamente, v es menor que t si el punto V está a la izquierda de T, o si $V = T$ entonces también $v = t$.

Valen similares **reglas de monotonía para la suma y multiplicación** como las ya vistas.

Sean:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \le x \le 3\} \quad ; \quad B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \le x \le 4\} \quad ; \quad C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 5\}$$

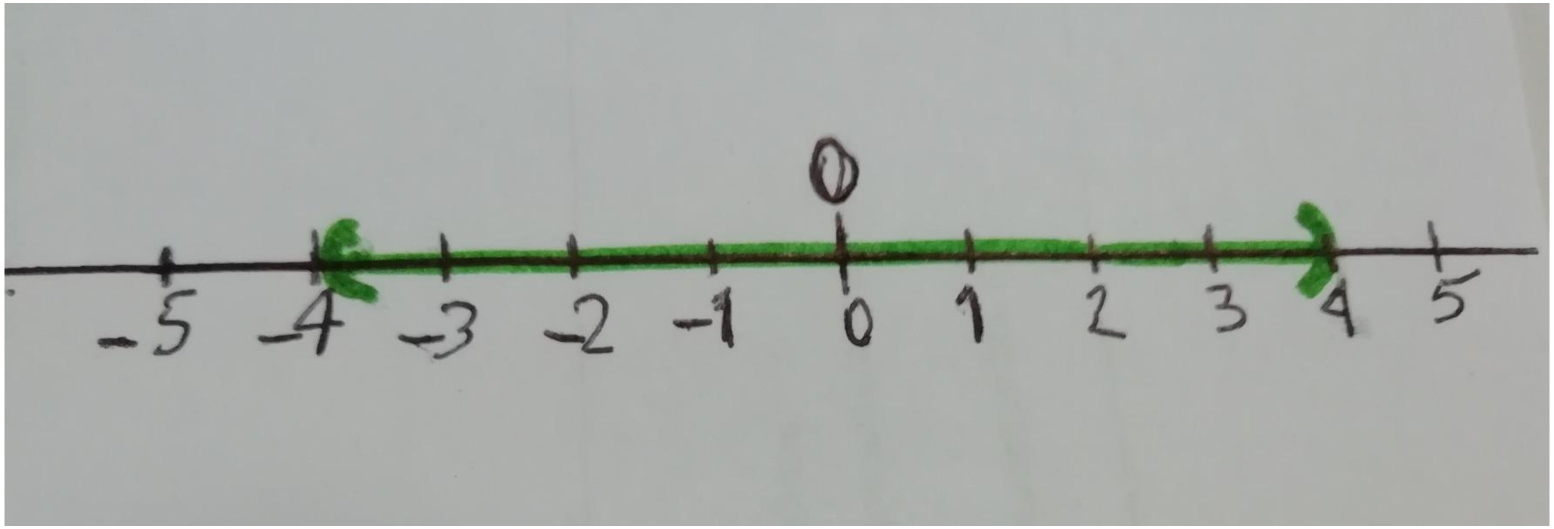
Hacer un gráfico en la recta numérica de los conjuntos dados.



A se graficó con cruces rosas, B con guiones celestes y C con línea llena verde (con el 0 y ¡*tan cerca del 5 como se quiera, pero sin tocarlo*!) $C = [0,5)$ escrito como **intervalo.**

¿Hay relaciones de inclusión entre ellos? ¿Cuáles? : $A \subseteq C \qquad B \subseteq C$

Graficar $D = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 4\}$ y comparar con los conjuntos antes definidos



El conjunto D se graficó con línea llena verde, tan próxima al -4 y al 4 como se quiera pero sin tocarlos… D = (-4 , 4) escrito como intervalo. Y resulta que $A \subseteq D$

❖**Respecto de la radicación es importante destacar lo siguiente:**

La radicación para $r \in \mathbb{R}$ se define la radicación de igual forma que en los racionales.

Está claro que para el **índice impar *n*** está definida **<u>para todo real *r*</u>**
(es decir $\sqrt[n]{r}$ existe en $\mathbb{R}$).

Para el caso de **índice par *n***, $\sqrt[n]{r}$ **<u>es real sólo si *r* sea un número real y $r \geq 0$</u>**.

Pues observe: **Si *a* es real entonces $a^2 = a.\, a \geq 0$**

(Si $a = 0$: $a.\, a = 0.0 = 0$

Si $a > 0$: $a.\, a > a.\, 0$ por monotonía del producto, por consiguiente $a^2 > 0$.

Si $a < 0$; $a.\, a > a.\, 0$ por monotonía del producto, por consiguiente $a^2 > 0$)

Observemos que si ***n* es par** (es $n = 2k$ para k algún entero) entonces $\boldsymbol{a^n = (-a)^n}$

Si n es par:

Si $r > 0$, $\sqrt[n]{r}$ y $-\sqrt[n]{r}$ son ambos raíces *n*- ésimas de *r*.

Si $r = 0$, 0 es la única raíz *n*-ésima de *r*.

Si $r < 0$, *r* no tiene raíz *n*-ésima real.

Comparemos cada uno de los números ¼ ; 1 ; 25 con sus respectivos cuadrados.

Comparemos esos mismos números con el valor absoluto de sus raíces respectivas raíces cuadradas.

Solución:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \text{ y } \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ además } \left|\sqrt{\frac{1}{4}}\right| = \frac{1}{2} \quad \text{entonces } \left|\sqrt{\frac{1}{4}}\right| > \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{1} = 1 \text{ y } \sqrt{1} = \text{-}1 \quad \text{además } \left|\sqrt{1}\right| = 1 \quad \text{entonces } \left|\sqrt{1}\right| = 1$$

$$\sqrt{25} = 5 \text{ y } \sqrt{25} = -5 \quad \text{además } \left|\sqrt{25}\right| = 5 \quad \text{entonces } \left|\sqrt{25}\right| < 25$$

Actividad

Comprobar las siguientes desigualdades:

$$\sqrt{36+64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64} \qquad \sqrt{144+81} \neq \sqrt{144} + \sqrt{81}$$

¿Qué me cuenta?......

****Veamos cómo se trabajan cuando hay potencias y raíces juntas.**
Es usual que pueda encontrar también exponente fraccionario.

La definición para $r \in \mathbb{R} \quad r^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{r^m}$ siempre que exista; $m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$

$$2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2.8} = \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{8} = 2.\sqrt[3]{2}$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{4}{25}\right)^{-3}} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^{3}} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^{2}.\frac{25}{4}} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^{2}}.\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{25}{4}.(\pm\frac{5}{2}) = \pm\frac{125}{8} \quad \text{PORQUE?}$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{2}}=\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^{4}}=\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^{4}}=\pm\left(\frac{1}{7}\right)^{2}=\pm\frac{1}{49}\quad \text{PORQUE?}$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^{3}}=\sqrt{-\frac{1}{343}}\quad \text{NO EXISTE}$$

Recordatorio: $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

$$(2+\sqrt{3})\ .\ (2-\sqrt{3})\ =\ 2\ .\ 2\ +\ 2.(-\sqrt{3})\ +\sqrt{3}\ .\ 2\ +\sqrt{3}\ .\ (-\sqrt{3}) =$$

Se aplicó propiedad distributiva de la multiplicación en sumas

$= 4-2.\sqrt{3}\ +\sqrt{3}\ .\ 2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4-3=1,$ habiendo simplificado.....

❖ Racionalizar denominadores

Significa ***cambiar una fracción*** que tiene en su denominador **números irracionales de la forma**

$$\sqrt[n]{r} \qquad \text{o} \quad s+\sqrt[n]{r}$$

por otra fracción equivalente con denominador racional (sin raíces…).

La idea y propósito de hacerlo hace tiempo era por que las cuentas se hacían a mano.

Piense la diferencia que es realizar $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx \dfrac{1}{1,414213}$ a hacer $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx \dfrac{1,414213}{2}$

También tiene aplicaciones varias, una de ellas la verán en Matemática 2.

Racionalice las siguientes expresiones:

Lo que recién se dijo: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} . \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\dfrac{2+\sqrt{7}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \dfrac{2+\sqrt{7}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}} . \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{7}.\sqrt{7}+\sqrt{14}.\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} =$

$= \dfrac{2\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2+\sqrt{2}.\sqrt{7}.\sqrt{7}}{7} = \dfrac{2\sqrt{7}+7+\sqrt{2}.7}{7} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}+1+\sqrt{2}$

ii) $$\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}.\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Observar que a los efectos del cálculo se ha considerado $\left|\sqrt[n]{r}\right|$ es usual que en muchos cálculos algebraicos se use sólo el valor positivo de las raíces de índice par.
Pero hay que tener presente que hay dos posibles en el campo de los números reales.
Esa situación si se toma en cuenta al resolver ecuaciones, como se verá muy pronto….