Suma de sucesiones aritméticas y geométricas

Matemática I

primer semestre-2020

Facultad de Informática, UNLP

Hay muchas situaciones, tanto de interés teórico como práctico, donde se requiere sumar los primeros términos de una sucesión. En esta clase nos enfocaremos en dos casos muy importantes, el de las llamadas progresiones aritméticas y el de las progresiones geométricas.

Comencemos recordando quienes son

Sucesiones aritméticas

Son sucesiones donde la diferencia entre dos números consecutivos es siempre la mísma:

$$a_2 - a_1 = \ldots = a_{20} - a_{19} = \ldots = a_{82} - a_{81} = \ldots$$

Su definición en *forma explícita* está completamente caracterizada por dos números: el primer elemento de la sucesión, a_1 y la diferencia entre dos números consecutivos cualesquiera, d

$$\boxed{a_k = a_1 + d(k-1)\ , \ \ \forall k \in \mathbb{N}}$$

Por ejemplo, consideremos la secuencia de números $2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots$ es claro que la diferencia entre dos números consecutivos es siempre la misma (e igual a 5) y un término genérico se puede escribir como $a_k = 2 + 5(k-1)$

Sucesiones geométricas

Son sucesiones donde el cociente entre dos números consecutivos es siempre el mísmo:

$$\frac{a_2}{a_1} = \ldots = \frac{a_{20}}{a_{19}} = \ldots = \frac{a_{82}}{a_{81}} = \ldots$$

Su definición en *forma explícita* está completamente caracterizada por dos números: el primer elemento de la sucesión, a_1 y el cociente entre dos números consecutivos cualesquiera, r

$$\boxed{a_k = a_1 \cdot r^{k-1} \ , \ \ \forall k \in \mathbb{N}}$$

Por ejemplo, consideremos la secuencia de números $2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$ es claro que el cociente entre dos números consecutivos es siempre el mismo (e igual a 5) y un término genérico se puede escribir como $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$

Volvamos entonces al problema que queríamos abordar, que es el de calcular sumas parciales de estas dos progresiones, es decir queremos hallar la suma de los n primeros elementos de la sucesión.
Aprovechando la notación de sumatoria que se ha visto previamente en este curso, podemos escribir compactamente la suma parcial S_n, como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

que no es más que una forma abreviada de escribir $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Recordemos que el índice k es lo que se denomina un índice mudo y podemos cambiarle el nombre como queramos sin alterar la suma, *i.e.* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{t=1}^{n} a_t = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell$

Obviamente, la idea no es elegir un n determinado y sumar uno por uno todos los términos a mano, sino que lo que queremos hacer es encontrar alguna estrategia que nos permita obtener una expresión genérica para la suma como función del número natural n.

En realidad, notemos que S_n define en sí mismo una nueva sucesión $\{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$ y lleva el nombre particular de *sucesión de sumas parciales*. Luego, lo que queremos buscar nosotros no es más que la *forma explícita* de dicha sucesión.

Será útil, para cuando veamos algunos ejemplos, recordar algunas propiedades de la sumatoria. Por ejemplo,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k} \qquad (M)$$

que elegimos denotar aquí como propiedad M (por Multiplicación) y que no es más que la distributividad del producto con respecto a la suma de n términos. En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k &= c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n \\ &= c \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

Otra propiedad que nos será de utilidad es

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k} \qquad (S)$$

que denotamos como propiedad S (por Suma) y no es más que una consecuencia de la asociatividad y la conmutatividad de la suma.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \\
&= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k
\end{aligned}$$

Sumas parciales de la progresión aritmética

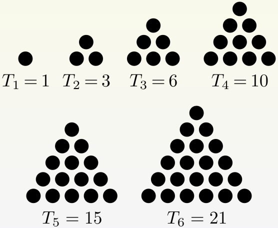
Comencemos con un ejemplo muy sencillo (probablemente el más sencillo), donde $a_1 = 1$ y $d = 1$. O sea, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots$ no es más que la sucesión de números naturales: $a_k = k$. Supongamos que queremos hallar ahora la forma explícita de S_n.
El truco consiste en calcular $2\,S_n = S_n + S_n$ reordenando los términos de una forma inteligente

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
S_n = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\
+ & & & & & & & & & \\
S_n = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\,S_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}
$$

en la última línea aparece n veces el término $(n+1)$, de donde concluimos que $2S_n = n(n+1)$ o bien

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

La sucesión de sumas parciales formadas por esta sucesión aritmética particular (con $a_1 = 1$ y $d = 1$), se suele denotar con la letra $T_n = n(n+1)/2 \to \{1, 3, 6, 10, \dots\}$ en vez de la letra S_n y lleva el nombre de *sucesión de números triangulares*, puesto que T_n coincide con el número de bolas contenidas en triángulos, de n bolas por lado, como los de la figura



Consideremos ahora una sucesión aritmética arbitraria (con a_1 y d cualesquiera) y repitamos el mismo truco que empleamos en el caso particular anterior

$$\begin{array}{cccccccc} S_n = & a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_n \\ + & & & & & & & \\ S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + & \dots & + & a_1 \\ \hline \end{array}$$

$$2\,S_n = \quad (a_1 + a_n) \quad + \quad (a_2 + a_{n-1}) \quad + \quad \dots \quad + \quad (a_n + a_1)$$

reemplazando la expresión explícita de los términos a_k se observa

$$\begin{array}{rcl} a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_1 + d(n-2)) & = & a_1 + (a_1 + d(n-1)) = a_1 + a_n \\ a_3 + a_{n-2} = (a_1 + d2) + (a_1 + d(n-3)) & = & a_1 + (a_1 + d(n-1)) = a_1 + a_n \\ a_4 + a_{n-3} = (a_1 + d3) + (a_1 + d(n-4)) & = & a_1 + (a_1 + d(n-1)) = a_1 + a_n \\ & \vdots & \\ a_n + a_1 \quad = \quad (a_1 + d(n-1)) \; + \; a_1 & = & a_1 + (a_1 + d(n-1)) = a_1 + a_n \end{array}$$

Nuevamente los n paréntesis que aparecen en $2S_n$ son todos iguales!!!

Concluimos que resulta $2S_n = n(a_1 + a_n)$, o bien

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Podemos dar otra expresión alternativa para S_n si reemplazamos $a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + d(n-1)) = 2a_1 + d(n-1)$

$$\boxed{S_n = n\, a_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2}}$$

Estas dos expresiones son equivalentes y valen para cualquier progresión aritmética y en particular deberían reproducir lo hallado en el caso particular $a_1 = 1,\ d = 1$. En efecto, en este caso la expresión general se reduce a

$$\begin{array}{ccccc} S_n = n\, a_1 + d\,\dfrac{n(n-1)}{2} & \longrightarrow & n + \dfrac{n(n-1)}{2} & = & n - \dfrac{n}{2} + \dfrac{n^2}{2} = \dfrac{n}{2} + \dfrac{n^2}{2} \\ & \uparrow & & & \\ & \boxed{a_1 = 1, d = 1} & & = & \dfrac{n(n+1)}{2} = T_n \end{array}$$

que coincide exactamente con lo hallado anteriormente

ejemplos

$$\sum_{k=1}^{45}[4+5(k-1)] = ? \qquad (\leftarrow \ \textit{ejercicio 21.c}\ )$$

- Se trata de una suma parcial (desde $k=1$ hasta $n=45$) de una sucesión aritmética con $a_1=4$ y $d=5$!
- $\boxed{S_{45}} = 45\cdot 4+5\cdot\frac{45(45-1)}{2} = 180+5\cdot 45\cdot 22 = \boxed{5130}$

Es interesante obtener el mismo resultado, utilizando las propiedades de la sumatoria, *e.g.*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{45}[4+5(k-1)] &= \sum_{k=1}^{45}[-1+5k] \\
\textit{propiedad}\ \ (S) \quad &= \sum_{k=1}^{45}(-1)\cdot 1+\sum_{k=1}^{45}5k \\
\textit{propiedad}\ \ (M) \quad &= (-1)\cdot\sum_{k=1}^{45}1+5\cdot\sum_{k=1}^{45}k \\
&= (-1)\cdot 45+5\cdot T_{45} = \boxed{5130}
\end{aligned}$$

ejemplos

- Sabiendo que la suma de los 10 primeros términos de una sucesión aritmética es 50 y el primer término es -2. Calcular la diferencia de la sucesión. ($\leftarrow$ *ejercicio* 27)

  ¿qué datos tenemos?
  - $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_n = 50$
  - $a_1 = -2$

    Usando lo que hemos aprendido podemos reescribir la primera condición como
    $S_{10} = 10\, a_1 + d\frac{10(10-1)}{2} = 50$
    Reemplazando ahora la segunda condición resulta

$$10\,(-2) + d\frac{10(10-1)}{2} = 50$$
$$-20 + d \cdot 45 = 50$$
$$d \cdot 45 = 70$$
$$d = \frac{70}{45}$$
$$\boxed{d = \frac{14}{9}}$$

Sumas parciales de la progresión geométrica

Consideremos ahora el caso de las sucesiones geométricas. En este caso, también podemos sumar sucesiones y reagrupar los términos de una forma inteligente para llegar a la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, en vez de considerar $S_n + S_n$ está vez la combinación inteligente será $S_n - r \cdot S_n$, donde r es la razón de la sucesión.

$$\begin{aligned}
S_n - r\,S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1} \; - \; r \cdot \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1} \\
&= \left(a_1 + a_1\,r + \ldots + a_1\,r^{n-2} + a_1\,r^{n-1}\right) - r\left(a_1 + a_1\,r + a_1\,r^2 + \ldots + a_1\,r^{n-1}\right) \\
&= \left(a_1 + a_1\,r + \ldots + a_1\,r^{n-2} + a_1\,r^{n-1}\right) - \left(a_1\,r + a_1\,r^2 + \ldots + a_1\,r^{n-1} + a_1\,r^n\right) \\
&= a_1 + a_1\,r + a_1\,r^2 + \ldots + a_1\,r^{n-2} + a_1\,r^{n-1} \\
&\qquad - a_1\,r - a_1\,r^2 - \ldots - a_1\,r^{n-2} - a_1\,r^{n-1} - a_1\,r^n \\
&= a_1 - a_1 r^n
\end{aligned}$$

De aquí vemos que $(1-r)\cdot S_n = a_1(1-r^n)$, o bien (si $r \neq 1$)

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}}$$

ejemplos

$$\sum_{t=1}^{h} 2 \cdot 8^t = ? \qquad (\leftarrow \ \textit{ejercicio } 31.f\ )$$

- observamos que efectivamente se trata de la suma parcial de una sucesión geométrica, solo que no está escrita de la forma usual. Lo primero que debemos hacer es llevar el término t-ésimo a la *forma explícita* ($a_t = a_1 \cdot r^{t-1}$)

$$a_t = 2 \cdot 8^t = 2 \cdot 8 \cdot 8^{t-1} = 16 \cdot 8^{t-1}$$

donde ahora sí podemos reconocer al primer elemento $a_1 = 16$ y a la razón $r = 8$ y utilizando la fórmula hallada recientemente para las sumas parciales de las progresiones geométrica, concluimos que

$$\sum_{t=1}^{h} 2 \cdot 8^t = 16 \frac{1 - 8^h}{1 - 8} = \boxed{-\frac{16}{7}\left(1 - 8^h\right)}$$

ejemplos

- Una pelota de ping pong se lanza desde una altura de 16 mts. En cada rebote se eleva verticalmente $\frac{1}{4}$ de la altura alcanzada en la caída previa.
  a) ¿A qué altura se elevará en el séptimo rebote?
  b) ¿Cuál es la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo? ($\leftarrow$ *ejercicio* 32)

  a) $\rightarrow$ La altura en el rebote n-ésimo define una sucesión para $n = 1, 2, 3, \ldots,$ la cual cumple
  - La primera altura de la secuencia es la altura a la cual fue arrojada: $a_1 = 16$ mts
  - La altura en el rebote n-ésimo es $\frac{1}{4}$ de la altura del rebote anterior: $a_n = \frac{1}{4}\, a_{n-1} \;\rightarrow\; \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{4} = constante$, se trata entonces de una secuencia geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$!
    $\rightarrow$ la altura después del primer rebote es a_2, después del segundo rebote es a_3 y así sucesivamente. Luego la altura después del rebote número 7 es entonces
    $a_8 = a_1\, r^{8-1} = 16mts \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 = \frac{1}{1024} mts \approx 0{,}00098 mts$
    $\boxed{tan\ solo\ 0,98mm!!}$

b) $\rightarrow$ Queremos ahora calcular la distancia total que recorrió la pelota desde que fue soltada a 16 mts hasta encontrarse a los 0,00098 mts de altura luego del rebote número 7.
Lo primero que debemos notar es que en todos los rebotes intermedios la pelota recorrió 2 veces la altura de dicho rebote (una para subir y otra para bajar). Esto no ocurrió con la primer y última altura de la secuencia. Luego, la distancia total recorrida fue

$$\begin{aligned} \textit{distancia recorrida} &= a_1 + 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 + \ldots + 2 \cdot a_7 + a_8 \\ &= 2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_7 + a_8) - a_1 - a_8 \\ &= 2 \cdot S_8 - (a_1 + a_8) \\ &= 2 \cdot a_1 \frac{1 - r^8}{1 - r} - (a_1 + a_8) \\ &= 2 \cdot 16mts \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^8}{1 - \frac{1}{4}} - \left(16 + \frac{1}{1024}\right) mts \end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{distancia recorrida} \approx 26{,}665 mts}$$