Clases de Lógica Formal
(*in*formalmente!!)

Organización de las primeras clases virtuales:
Ahora, contenido del cuarto video:

La introducción de otros conceptos y expresar lógicamente otras situaciones del lenguaje coloquial. Expresiones que dicen lo mismo.

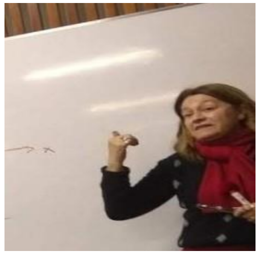
Entonces importa:

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

1- Nos saludamos

Hola, qué tal? Espero que todo muy bien.
¿Entendiendo lo que estamos haciendo en Matemática 0?

Hoy estamos en la cuarta clase virtual de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata.



Los invito a tener presente las definiciones de las operaciones lógicas entre las letras proposicionales y sus respectivas **tablas de verdad.**

Están en el **Apunte de la Cátedra**, está en sitio ***Ideas*** de la Facultad.

Seguiremos ampliando nuestro lenguaje simbólico para tratar de "dominar" el lenguaje coloquial...

❖ *Vamos a hacer comentarios sobre algunas tablas de verdad*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$\neg p$
V	F
F	V

En las columnas de los valores de verdad de las formas compuestas algunos son V y otros F.

Cualquier forma tal que los valores de verdad tengan ese comportamiento es una **contingencia.**

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

En la columna de los valores de verdad de esta forma compuesta son todos V.

Cualquier forma tal que los valores de verdad sean siempre V es una **tautología**.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

En la columna de los valores de verdad de esta forma compuesta son todos F.

Cualquier forma tal que los valores de verdad sean

siempre F es una **contradicción.**

La tautología que se dio es una de las más simples, al igual que en su caso la contradicción.

¡¡¡No son las únicas!!!

- ## Equivalencia Lógica

Recordemos que estamos haciendo un trabajo sobre el lenguaje coloquial (el de todos los días) para

ver qué aspectos podemos interpretar más rigurosamente, para su uso formal en Lógica, Matemática o materias de Informática.

Desde ya que este estudio formal es muy útil en la vida cotidiana, para interpretar reglamentos, ordenes o disposiciones.

En el lenguaje castellano hay muchas palabras distintas pero que tienen igual significado. Son los conocidos ***sinónimos*****.** Por ejemplo, si digo ***inteligente***, puede ser cambiada por ***perspicaz,*** por ***clarividente*** según el contexto y se tienen como "iguales"***.*** Son palabras muy distintas, pero todos le asignamos la misma interpretación.

La inquietud es: ¿***hay expresiones de la lógica formal que no son iguales pero que quieren decir lo mismo***?

Comencemos analizando la siguiente proposición:

María aprobó el examen de francés.

Y comparemos con:

No es cierto que María no aprobó el examen de francés.

¿Qué pueden decir respecto de lo que dicen ambas oraciones?

Justifiquemos porque son proposiciones… y su opinión.

Formalmente ellas son *proposiciones distintas*, como se ve al simbolizarlas:

a : *María aprobó el examen de francés.*

$\neg(\neg a)$: *No es cierto que María no aprobó el examen de francés.*

Pero ***expresan lo mismo.*** Le vamos a poner nombre a este hecho.

> Consideremos dos fórmulas proposicionales que indicaremos por P y Q que estén formadas por las mismas letras proposicionales.
>
> Pueden diferir en los conectivos.

En el ejemplo anterior podríamos poner que

, P es a y Q es $\neg(\neg a)$,

Otros casos podrían ser a) P: $p \to q$ y Q : $\neg p \vee q$;

b) P: $p \to (q \wedge r)$ y Q : $(p \wedge q) \to (r \wedge p)$

c) P : $p \to q$ y Q : $\neg p \to \neg q$

> P y Q (que involucran las mismas letras proposicionales) son ***lógicamente equivalentes*** si el bicondicional $P \leftrightarrow Q$ es verdadero para todos los valores de verdad de sus componentes.
>
> Por simplicidad también se dice P y Q **equivalentes**.
>
> Lo anotaremos $P \Leftrightarrow Q$

- Observar que es una doble flecha $\Leftrightarrow$.

También es usual encontrar el símbolo $\equiv$, para indicar equivalencia. Este es claramente una deformación del símbolo de igualdad, pero hay que tener muy presente que las proposiciones ***no son iguales*** aunque "digan lo mismo".

La equivalencia lógica es más que un bicondicional entre proposiciones.

Analicemos que significa la exigencia

"$P \leftrightarrow Q$ es verdadero para todos los valores de verdad de sus componentes",

si pensamos en la tabla de verdad del bicondicional:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Luego se rescatan los casos en que P y Q tienen igual valor de verdad, además deben estar formadas por las mismas letras proposicionales y no necesariamente los mismos conectivos !!!

Es claro que en una discusión es posible "cambiar" una proposición por otra lógicamente equivalente sin alterar el sentido del discurso, esto también es posible en los razonamientos que veremos luego. Por eso el interés de encontrar formas proposicionales equivalentes.

Reflexionemos:

Si dos fórmulas atómicas son equivalentes, ¿cómo son?

La misma definición da un método efectivo para analizar la equivalencia de formas proposicionales.

¿***Cuál es la estrategia?***

Hacer tablas de verdad, que pueden ser trabajosas, pero es un proceso efectivo. Por lo general requiere de paciencia….

Comprobemos que para **toda variable proposicional *p*,** $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$

Analizando la tabla de verdad correspondiente del bicondicional:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \leftrightarrow \neg(\neg p)$
V	F	V	V
F	V	F	V

Por lo tanto, como en las dos líneas de verdad posibles el bicondicional es V, podemos concluir que $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$

A esta equivalencia se le da el nombre de **regla (de equivalencia) de la doble negación**

Luego esto vale para cualquier proposición, un caso de ello es el ejemplo dado inicialmente.

a) ¿Son equivalentes $p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$?

Analizando la tabla de verdad correspondiente al bicondicional entre ambas

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

- Por definición son equivalentes.

Esta equivalencia está estableciendo: es posible escribir un condicional en términos de negación y disyunción, pero como vale la regla de la doble negación también permite expresar una disyunción en términos de un condicional.

Actividad:

Escriba una fórmula equivalente a $p \vee q$ en términos de $\to$.

b) ¿Son equivalentes $p \to (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \to (r \wedge p)$?

Para resolverlo hacemos la tabla del bicondicional entre ambas formas

p	q	r	$p \to (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \to (r \wedge p)$	$(p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to (r \wedge p))$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Como se destaca, en las líneas 2 y 6 en la columna del bicondicional hay F, por lo cual no son equivalentes.

Actividad:

Estudiar la equivalencia lógica de las fórmulas proposicionales que se dan en cada caso:

a) $p, \quad p \wedge p, \quad p \vee p$

b) $p \wedge (q \wedge r), \quad (p \wedge q) \wedge r$

c) $p \vee (q \vee r), \quad (p \vee q) \vee r$

d) $p \wedge q, \quad q \wedge p$

e) $p \vee q, \quad q \vee p$

f) $p \wedge (q \vee r), \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

g) $p \vee (q \wedge r), \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

h) $\neg (p \wedge q), \quad \neg p \vee \neg q$

i) $\neg (p \vee q), \quad \neg p \wedge \neg q$

- ¿Qué sugieren las equivalencias comprobadas en b) y c)? ¿Les pondría algún nombre?
- ¿Qué opina sobre d) y e)? ¿Cómo lo expresaría con palabras?
- Igual tarea para f) y g).

Las equivalencias comprobadas en h) y i) dan una “herramienta” para negar conjunciones y disyunciones.
Se llaman **reglas o leyes de De Morgan**.

Actividad:

a) Escriba proposiciones que sean instancias de cada una de las formas dadas la Actividad anterior.

¿Le convence que son equivalentes?

b) Analice las siguientes proposiciones:

Si subió la marea entonces hay almejas en la costa.

No hay almejas en la costa entonces no subió la marea.

Suponga que el valor de verdad de la primera es V, ¿qué puede decir del valor de verdad de la segunda?

Simbolice cada una de ellas.

c) Analice las siguientes proposiciones:

Si en Internet está el reglamento entonces José sabe las condiciones para entrar.

José no sabe las condiciones para entrar entonces en Internet no está el reglamento.

Suponga que el valor de verdad de la primera es F, ¿qué puede decir del valor de verdad de la segunda?

Simbolice cada una de ellas.

¿Se anima a *conjeturar* algo?

Conjetura: algo que se cree que es válido, pero todavía no se probó que vale….

Luego, sus conjeturas, ¿serán ciertas?

Vamos a estudiar la equivalencia lógica de las fórmulas proposicionales:

$p \to q$ y $\neg q \to \neg p$

Para eso tenemos que recurrir a la tabla de verdad del bicondicional:

$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ Analizar los valores de verdad en cada fila

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Así se ha demostrado que $\boxed{(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)}$

La equivalencia que probó se llama regla de la **contrarrecíproca.**
Muy importante de recordar.

Actividad:

Estudiar si son equivalentes las fórmulas proposicionales que se dan en cada caso:

a) $p \to q, \quad \neg p \vee q, \quad \neg(p \wedge \neg q)$

b) $p \to (q \to r), \quad (p \wedge q) \to r$

c) $p \to q, \quad q \to p$

Justifique su respuesta y escriba proposiciones que sean instancias de cada una de las formas dadas en el ejercicio anterior.

¿Le convencen las que son equivalentes?

Las equivalencias que tienen demostradas es muy útil tenerlas presente.

Por ello se sugiere lo siguiente, hacer un cuadro resumen donde estén las equivalencias todas juntas (Si recuerda el nombre mejor).

$p \Leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge p)$	$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
....	....