EJERCICIO 6, CAPÍTULO 3

Sea $\otimes$ la operación definida sobre los números enteros como $a \otimes b = 2.a.b$. Demostrar que $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ es un anillo.

Recordemos primero que un anillo es una terna ordenada **(A,+, .)** **,** donde **A** es un conjunto y **"+"** y **"."** son dos operaciones binarias que cumplen:
1. **(A,+)** es un grupo conmutativo
2. La operación "." es una operación cerrada y asociativa.
3. La operación "." es distributiva con respecto a "+".

Para probar que $(\mathbb{Z},+,\otimes)$ es un anillo. Tendremos que ver entonces que:

1. El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros con la operación binaria suma, que escribimos: $(\mathbb{Z},+)$ es un grupo conmutativo (está demostrado en el ejemplo 1.1 de la página 3, lo transcribimos).

La operación suma tiene en este conjunto las siguientes propiedades:

- ***Cerrada*****:** para cualquier par de números enteros su suma da un número entero:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ entonces\ a+b \in \mathbb{Z}.$$

- ***Asociativa:*** para cualquier terna de números enteros el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ y\ c \in \mathbb{Z}\ entonces\ (a+b)+c = a+(b+c).$$

- ***Existencia de elemento neutro*****:** ya que existe un **único** número tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0 pues existe el 0 en $\mathbb{Z}$ tal que:

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}\ entonces\ a+0 = 0+a = a.$$

- ***Existencia de elemento opuesto*****:** ya que para todo número entero existe otro número entero, **único,** que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ entonces \text{ existe - } a \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

Por estas propiedades de la suma en $\mathbb{Z}$, decimos que $(\mathbb{Z},+)$ tiene estructura de **grupo**.

Además, la operación suma cumple la propiedad:

- ***Conmutativa*****:** para cualquier par de números enteros el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ entonces\ a+b = b+a.$$

Por eso decimos que $(\mathbb{Z},+)$ tiene estructura de **grupo conmutativo o abeliano**.

2. La operación multiplicación o producto $\otimes$ en el conjunto de números enteros cumple las siguientes propiedades:

- ***Cerrada:*** ya que para cualquier par de números enteros su producto $\otimes$ da un número entero.

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ entonces\quad a \otimes b = 2.a.b \in \mathbb{Z},$$

pues $2 \in \mathbb{Z}$ y el producto de enteros es una operación cerrada.

- **Asociativa:** el producto $\otimes$ es una operación asociativa ya que para cualquier terna de números enteros el resultado de multiplicarlos $\otimes$ da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ y\ c \in \mathbb{Z}\ entonces\ (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c).$$

Veamos la demostración de la última igualdad, para ello calculamos ambos miembros por separado y veamos que dan lo mismo. Por un lado, tenemos que

$$(a \otimes b) \otimes c = (2\ a.b) \otimes c = 2.(2.a.b).c = 4.a.b.c$$

La última igualdad se cumple porque el producto de números enteros es asociativo. Por otro lado,

$$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (2.b.c) = 2.a.(2.b.c) = 4.a.b.c,$$

donde la última igualdad también es verdadera debido a la conmutatividad del producto de números enteros. Como ambos miembros valen $4.a.b.c$ entonces son iguales.

3. **Distributiva del producto con respecto a la suma:** ya que para cualquier terna de números enteros el resultado de multiplicar $\otimes$ uno de ellos por la suma de los otros dos da el mismo resultado que multiplicar $\otimes$ cada uno de ellos y después sumarlos:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ y\ c \in \mathbb{Z}\ entonces\ a \otimes (b+c) = a \otimes b + a \otimes c.$$

Probemos esta última igualdad, para ello, como antes, calculamos cada miembro. El primero es

$$a \otimes (b+c) = 2.a.\ (b+c) = 2.a.b + 2.a.c,$$

pues el producto de números enteros es distributivo en la suma. Calculando el segundo miembro

$$a \otimes b + a \otimes c = 2.a.b + 2.a.c.$$

Lo que nos muestra que el producto $\otimes$ es distributivo en la suma de números enteros. Decimos entonces que $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$, por cumplir todas las propiedades antes mencionadas tiene estructura de **Anillo.**