Clases de Elementos de

una Teoría *Intuitiva* de Conjuntos

(*in*formalmente!!)

Organización de las primeras clases virtuales: Ahora, contenido del séptimo video:

Será la introducción de

conceptos básicos de la teoría de conjuntos.

También es un "lenguaje".

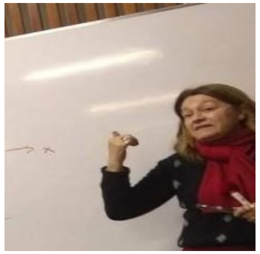
Reflexiones….

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

1. **Nos saludamos**

Hola, bien? ¿Entendiendo? Y si, hay que estudiar….

Hoy estamos en la septima clase virtual de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata.



Los invito a mirar en los Apuntes de la Cátedra subidos en el sitio ***Ideas*** de la Facultad , las **tablas de verdad de los conectivos y equivalencias lógicas pues siempren son muy útiles!!**

2-Introducción

El desarrollo de la Matemática a través de los tiempos llevó a que su escritura fuera más simbólica: la representación de los números (en cada civilización adoptaron alguna forma para expresarlos), conceptos de la geometría y el análisis matemático también se fueron expresando de manera especial.

Se trató de buscar un lenguaje común que pudiera demostrar la unidad de la Matemática.

A fines del siglo XIX y principios del XX se desarrolló la Teoría de Conjuntos. Esta teoría es un lenguaje que se usa en todas las ramas de la Matemática, permitiendo expresar los conceptos de cada teoría. Se hará un trabajo intuitivo sobre los conjuntos y sus operaciones.

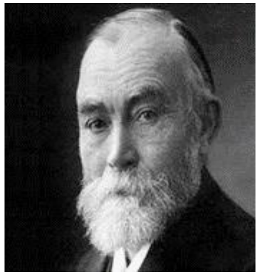
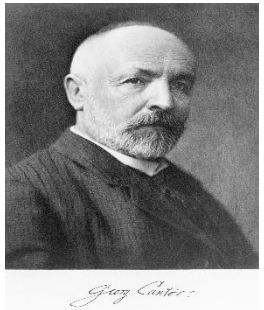
Es conocido que hay más de una axiomatización de la Teoría de Conjuntos y que algunos primeros tratamientos de esta llevaron a paradojas que fueron subsanadas con estas axiomatizaciones.

Para los curiosos recomiendo leer sobre esas cosas, es un ejemplo de la evolución del conocimiento humano. No sólo de la Matemática, toda la Ciencia ha sabido ir adaptando sus teorías a medida que sus observaciones resultaron más precisas (las diferentes teorías de la evolución, las de la materia, las astronómicas, etc.)

Respecto a este tema, recomiendo leer sobre la *paradoja de Russell*. Saber quién fue Russell, no sólo un gran matemático, sino un gran humanista.

Hay una importante vinculación con las operaciones del Cálculo Proposicional Clásico y el Cálculo de Predicado Clásico y las de esta teoría. Así también una relación con algunas clases de álgebras.

Nuevamente menciono algunos pioneros de esta teoría, algunos ya fueron nombrados por ser lógicos.


Frege	**Cantor**	**Russell**	**Zermelo**	**Fraenkel**

➢ Definiciones básicas

La idea **conjunto** se considera ***primitiva*** (no requiere definición). Por esto entenderemos una colección o agrupamiento de entes u objetos, que generalmente tienen características similares. Los objetos que están en un conjunto son los **elementos** del conjunto.

Los conjuntos están determinados por sus elementos.

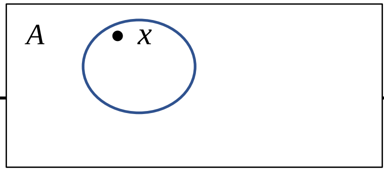
Es usual anotar a los conjuntos con letras mayúsculas y a los elementos, si son letras, con minúsculas. Usamos símbolos auxiliares, las llaves, para encerrar a los elementos que separamos por comas.

Un ejemplo $A = \{2, 3, a, h\}$, para A sus elementos son el 2, el 3, la letra a y la letra h.

Si A es un conjunto y x es un elemento de A lo indicamos por $x \in A$.

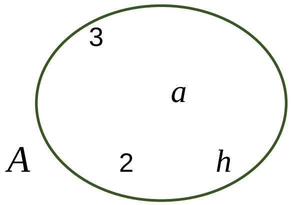
Se lee: x pertenece a A.

La representación usual de los conjuntos es por **diagramas de Venn**



Venn

Así: $2 \in A, 3 \in A, a \in A, h \in A$.



A un conjunto lo podemos presentar dando de manera explícita cada uno de sus elementos (**extensión**) o dando lo que se llama una propiedad definidora del conjunto, todo elemento que cumple esa propiedad está en el conjunto y sólo esos elementos están en el conjunto (**comprensión**).

Dar el conjunto por extensión es factible si el conjunto tiene un número finito de elementos (se cuentan sus elementos y se termina de hacerlo), pero sin embargo algunos conjuntos infinitos (cuando no es finito…) se presentan de esa manera cuando se entiende su ley de formación.

Otro ejemplo:

a) Si $A = \{ 0, 2, 4, 6 \}$ (definido por extensión)

Se tiene que $0 \in A$, $2 \in A$, $4 \in A$ y $6 \in A$. **NO ES CORRECTO expresar 4 está contenido en A al igual para los otros elementos**

A queda definido por comprensión como:

$A = \{ x \colon x$ es un número par positivo menor que $8 \} = \{ x \colon x$ es un número par $\wedge\ x \geq 0\ \wedge\ x < 8 \}$

Ambas maneras definen A. Analizar que no son las únicas…. Pensemos alguna más.

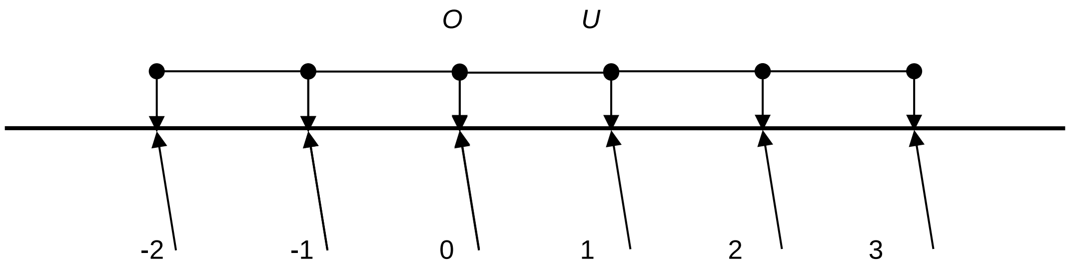
Haga el diagrama de Venn.

b) Al conjunto de todos los números naturales a pesar de su infinitud es usual anotarlo

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, ...\}$ los puntos suspensivos dan la idea de cómo sigue el conjunto...

Igualmente ocurre con los números enteros $\mathbb{Z} = \{ ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Estos conjuntos usualmente se dibujan sobre una recta, en la que se ha establecido un punto origen O, que representa el número 0, un punto U, a la derecha de O, representa al 1. Se considera una unidad de medida (longitud del segmento OU) que se transporta a la derecha de O representando a los números positivos y a la izquierda de O los números negativos.



Recordatorio: se anotará $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales y reales respectivamente.

c) Un conjunto más difícil de escribir:

El conjunto de los números naturales pares. $P = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es par}\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$

- Anímese a escribir : *El conjunto de los números naturales impares.*

Actividad:

a) Defina de dos maneras distintas el conjunto de los números naturales impares que son menores o iguales que 8.

b) Ídem para el conjunto de los números enteros impares que son mayores que -2 y menores que 7.

¡¡¡Una definición conveniente!!! El conjunto que no tiene elementos es el **conjunto vacío**, y se simboliza por $\emptyset$.

En esta teoría está definida la igualdad, de la manera más natural posible…

Para A y B conjuntos, ellos son **iguales** si y sólo si A y B tienen los mismos elementos.

Esto es, todo elemento de A es también elemento de B y recíprocamente.

Esto lo anotaremos: $A = B$

Ejemplo

Claramente son iguales los tres conjuntos

$A = \{x : x = 2.k \wedge (k = 0 \vee k = 1)\}$, $B = \{x : x^2 - 2x = 0\}$ y $C = \{0, 2\}$,

lo más fácil es expresar cada uno de ellos de manera explícita.

❖ Qué opinan de los conjuntos H = { 1 , 2, *t* } y R = { 1, 2, 3, *u, t, w* } , ¿son iguales?

Qué pasa entre los elementos de R si los "busco" en el conjunto H? , y si a los elementos de H los "busco" en el conjunto R?

Hay oportunidades que no se da la igualdad, pero sucede que todo elemento de A es elemento de B.

- Es conveniente ponerle nombre a este hecho tan habitual, piense que es lo que ocurre con el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros, y para otros conjuntos numéricos (¿cuáles situaciones se presentan?)

Si ocurre que todo elemento de A es elemento de B, diremos que A es **subconjunto** de B o que A está **incluido** en B, o que B **contiene** a A.

La expresión simbólica: $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

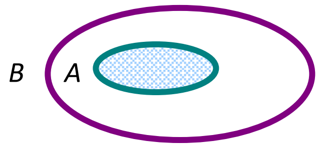
Si esta proposición es verdadera, A está incluido en B

Para indicarlo usamos la ***notación***: $A \subseteq B$

La pertenencia es una relación entre ELEMENTO y el CONJUNTO en el que está.

La contención es una relación entre CONJUNTO y CONJUNTO del que forma parte.

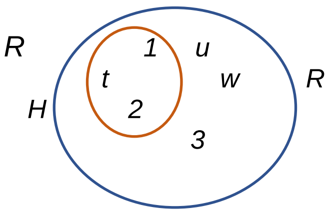
La situación la podemos "ver" por el diagrama:



Simbolizar $A \subset B$ es indicar que A es subconjunto de B y A distinto de B.

Si A **no es subconjunto** de B se anota $A \not\subset B$ o $A \not\subseteq B$.

Hacemos el **diagrama de Venn** de *H* y *R*



H se bordeo de color **naranja**.
El borde de *R* con **azul.**

Ejemplo (importante!!!)

Dados A = { *a* : *a* es un libro escrito por D. Sarmiento}

B = { *b* : *b* es biblioteca pública de la ciudad de La Plata }

Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, los libros se indicarán por el título y las bibliotecas por su nombre:

r : "Recuerdos de Provincia" $\in A$

$r \vee o$: "Recuerdos de Provincia" $\in A \vee$ "La Odisea" $\in A$

$r \wedge o$: "Recuerdos de Provincia" $\in A \wedge$ "La Odisea" $\in A$

f : "Facundo" $\in A$

$r \wedge f$: "Recuerdos de Provincia" $\in A \wedge$ "Facundo" $\in A$

m : La biblioteca de la Municipalidad de La Plata $\in B$

t : "Recuerdos de Provincia" $\in B$

u : La biblioteca pública de la Universidad Nacional de La Plata $\in B$

$m \wedge u$: La biblioteca de la Municipalidad de La Plata $\in B \wedge$ La biblioteca pública de la Universidad Nacional de La Plata $\in B$

$j \vee o$: "La Odisea" $\in B \vee$ "La Odisea" $\in A$

n : La biblioteca Nacional $\in B$

e : La biblioteca de la Facultad de Informática de la Universidad de La Plata $\in B$

"Recuerdos de Provincia" es un libro escrito por Sarmiento, al igual que "Facundo".

"La Odisea" es un libro atribuido de Homero.

Recordando los valores de verdad de las proposiciones compuestas se tiene que son verdaderas r, $r \vee o$, f, $r \wedge f$. Es falsa $r \wedge o$.

La biblioteca que está en la ciudad de La Plata y es la biblioteca municipal es pública.

La biblioteca pública de la Universidad Nacional de La Plata está en 7 y 60, por si le interesa el dato.

La biblioteca de la Facultad de Informática de la Universidad de La Plata, funciona en PB del edificio de la Facultad.

Volvamos al análisis...

El conjunto B es un conjunto de bibliotecas, públicas y ubicadas en La Plata.

Por lo tanto, *t* es falsa, observar que "Recuerdos de Provincia" es un libro y NO una biblioteca.

Seguro que es un libro que está en casi todas las bibliotecas públicas de la ciudad de La Plata.

La pertenencia (elemento - conjunto) no es transitiva.

Si son verdaderas *m, u,* $m \wedge u$, $j \vee o$ (justifique!!) . Son falsas *n* y *e*, ¿por qué? Averigüe.

Actividad

a) Si $A = \{-1, 4, a, c\}$, indicar con verdadero (V) o falso (F) y justificar los siguientes casos:

$-1 \in A \quad \cdots$	$b \in A \quad \cdots$	$a \in A \quad \cdots$
$-1 \subseteq A \quad \cdots$	$\{a,c\} \in A \quad \cdots$	$b \notin A \quad \cdots$
$\{a\} \in A \quad \cdots$	$\{a,c\} \subseteq A \quad \cdots$	$1 \in A \wedge 4 \in A \quad \cdots$

b) Bajo qué condiciones de los conjuntos A y B, ejemplifique, resultan verdaderas:

1. $A \subseteq B \quad$ y $\quad B \subseteq A$
2. $A \neq B \quad$ y $\quad B \subseteq A$

➢ Propiedades de la inclusión

Si A es subconjunto de B y además B es subconjunto de A, entonces $A = B$.

Además si $A= B$ vale que A es subconjunto de B y B es subconjunto de A.

Por lo cual podemos enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad de la Igualdad:

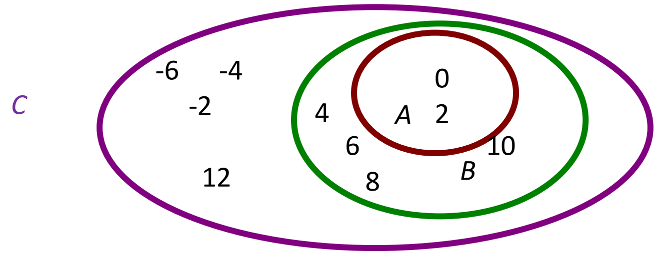
$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A)$$

$\Leftrightarrow$ simboliza "si y sólo si" en el sentido de equivalente,
esto es que teniendo como hipótesis o dato lo que está de un lado de "$\Leftrightarrow$" se puede obtener lo que está del otro lado y viceversa.

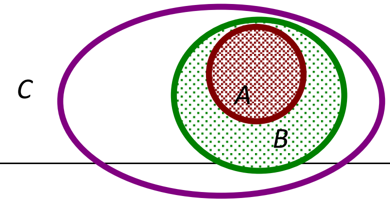
<u>**Analizar este ejemplo**</u>: $A = \{0, 2\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ se verifica que $A \subseteq B$ y

si $C = \{-6, -4, -2, , 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ se da que $B \subseteq C$ y claramente $A \subseteq C$.

El contorno de A se hizo en rojo.
El contorno de B **con verde**, y el de C con violeta.
<u>Los nombres de ellos no son parte del conjunto (Obvio!!)</u>



Esta situación es general y muy obvia si la ilustramos:



Se puede entonces enunciar:

♦ PROPIEDAD 1 **(Propiedad transitiva de la contención)**

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Demostración: ¡¡NO OBLIGATORIA!! (pero ….es instructiva)

Para ello se debe tomar un elemento cualquiera de A y usando las hipótesis en el momento oportuno, llegar a que ese elemento de A es también elemento de C.

Este es un elemento totalmente general de A, sólo es eso lo que se sabe de él, que está en A.

Sea $x \in A$, como por hipótesis $A \subseteq B$, usando la definición de inclusión, resulta que $x \in B$.

Ahora que se tiene $x \in B$, se usa la hipótesis $B \subseteq C$, resulta así que $x \in C$. Luego $A \subseteq C$.

♦

Importante y Lógicamente...

♦ Cualquiera sea el conjunto A, se verifica que $\varnothing \subseteq A$

Intuitivamente un "conjunto que no tiene objetos" está "adentro" de cualquier otro….

Demostración:

De acuerdo con la definición: $\varnothing \subseteq A$ si y sólo si $(\forall x)(x \in \varnothing \to x \in A)$ es verdadero.

El condicional $(x \in \varnothing \to x \in A)$ es verdadero cualquiera sea x, pues su antecedente es falso (¿Por qué? .....)

Por lo cual, se cumple $\varnothing \subseteq A$

ESTA MIRELA pues ES MUY INSTRUCTIVA.
Verá la importancia de la Lógica y sus definiciones y maneras de deducir.

♦

Actividad:

Graficar conjuntos A, B y C que cumplan simultáneamente: $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, $B \not\subset C$ y $C \not\subset B$.

Actividad:

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 5, 9\}$ indicar con verdadero (V) o falso (F) sobre … y justificar los siguientes casos:

$\{2,5\} \in A \cdots$ $\quad \varnothing \in A \cdots$ $\quad \{2,4\} \not\subset A \cdots$

$\{2,5\} \subseteq A \cdots$ $\quad \varnothing \subseteq A \cdots$ $\quad \{2,4\} \notin A \cdots$

$\{\{9\}\} \subseteq A \cdots$ $\quad \{\varnothing\} \subseteq A \cdots$ $\quad \{5, 9\} \subseteq A \cdots$

Actividad:

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 5, 9, \{1, 2\}\}$ indicar con verdadero (V) o falso (F) sobre … y justificar los siguientes casos:

$\{1\} \in A \cdots$ $\quad \varnothing \in A \cdots$ $\quad \{2,5\} \not\subset A \cdots$ $\quad \{1\} \subseteq A$ ...

$\{1,2\} \subseteq A \cdots$ $\quad \varnothing \subseteq A \cdots$ $\quad \{1,2\} \notin A \cdots$ $\{3, \{1,2\}\} \subseteq A$ ...

$\{9\} \subseteq A \cdots$ $\quad \{2\} \subseteq A \cdots$ $\quad \{5, 9\} \subseteq A \cdots$ $\quad 2 \in A$ ...