Clases sobre los Conjuntos Numéricos

Organización de las clases virtuales para el Capítulo 2: Ahora, contenido del primer video:

Será introduciendo conceptos básicos

de la Aritmética y Algebra.

Se remarcaran las propiedades

que todos usamos,

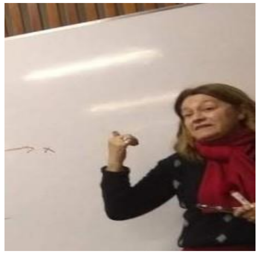
recordando sus nombres.

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

1.Nos saludamos

Hola!! Y si, hay que estudiar….

Hoy estamos en la primera clase virtual del Capitulo 2 de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata. Estos temas entiendo que les resultará más familiar.



Los invito a mirar en los Apuntes de la Cátedra subidos en el sitio ***Ideas*** de la Facultad ,
Además no se tienen que olvidar de las **tablas de verdad de los conectivos y equivalencias lógicas pues siempren son muy útiles!!**

RELEXIONEMOS sobre lo QUE SABEMOS

Hay estudios que demuestran las ventajas que a los nenes le enseñen a contar con los dedos.

Sistema de contar con los dedos **provee al pequeño de un entendimiento multisensorial** de las matemáticas, es decir, que el niño puede sentir de una manera concreta en sus dedos la idea abstracta de la numeración, no solo los números cardinales que le sirven para realizar operaciones matemáticas (uno, dos, etc.) sino también los ordinales que le sirven para enumerar (primero, segundo, etc.).

Esto es concreto

pero separado de nosotros

Ya en el aula…..

Entramos a la *enseñanza primaria* SUMAMOS (con la *idea de agregar*…), porque sumamos “dedos”, “palitos” hasta que nos dicen que son NUMEROS

Después nos enteramos de que son

NUMEROS NATURALES

Aprendemos también a MULTIPLICAR, no sabemos muy bien que es, pero si sabemos <u>LAS TABLAS DE MULTIPLICAR</u>.

En etapas más avanzadas del desarrollo intelectual se percibe el carácter abstracto de la idea de número. La Matemática no se ocupa del aspecto filosófico de la transición que da el paso de las colecciones de objetos concretos al concepto de número.

Los números son la base de la Matemática actual. Ahora bien, ¿qué es un número? Creados por la mente humana para contar objetos agrupados de diversos modos, los números no tienen referencia alguna a las características de los objetos contados.

Sabemos que son los **números naturales** 0,1,2, 3,....... , simbolizado por $\mathbb{N}$

Consideramos como definidas las **operaciones** fundamentales de **suma y multiplicación.**
Reflexión sobre las propiedades básicas esas operaciones
La suma (+) en los naturales:

3 + 4 = 7
$\in\mathbb{N}$ $\in\mathbb{N}$

LA SUMA ES CERRADA EN $\mathbb{N}$ (o LEY INTERNA)

(5+3)+7 = 8 +7 = 15
5+(3+7) = 5 +10 = 15

NO IMPORTA COMO ASOCIEMOS ……

LA SUMA ES ASOCIATIVA EN $\mathbb{N}$

4 + 5 = 9 NO IMPORTA si CAMBIAMOS el ORDEN de los sumandos …..(CONMUTAMOS)
5 + 4 = 9

LA SUMA ES CONMUTATIVA EN $\mathbb{N}$

0 + 6 = 6 el 0 no modifica al otro número cuando suma.

Por eso el <u>0 es NEUTRO DE LA SUMA EN</u> $\mathbb{N}$

Todo lo anterior lo sabe.
Por lo cual ahora lo vamos a complicar un poco….
Y aplicaremos la lógica…(¡no tiemble!)

Esas propiedades importantes las vamos a escribir casi formalmente:

1) ***La suma de dos números naturales es un número natural***

*Si **a** y **b** son números naturales entonces **a + b** es un número natural.*

Esta propiedad se llama **ley de cierre para la suma de números naturales**.

2) ***Si se consideran tres números naturales, la suma de los dos primeros más el tercero resulta igual a que si al primero se suma la suma de los otros dos.***

*Si **a, b** y **c** son números naturales cualesquiera entonces **(a+ b)+c = a+(b+ c)***

A esta propiedad se le da el nombre de **asociativa para la suma.**

3) ***El 0 es tal que sumado con cualquier otro número no lo modifica***.

*El **0** es un número natural tal que, si **a** es un número natural cualquiera, entonces* $\boldsymbol{a + 0 = a}$

Por eso al ***0*** se le dice **neutro de la suma**.

4) ***La suma de números naturales es conmutativa.***

*Si **a** y **b** son números naturales cualesquiera, entonces* $\boldsymbol{a + b = b + a}$

Actividad

a) Enuncie la propiedad similar a la 1) para **la multiplicación de los números naturales**.

Sol: ***El producto de dos números naturales es un número natural***.

b) Formule la ***propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales***.

c)*¿Hay elemento neutro para la multiplicación de números naturales?* ¿Cuál es?

d)**¿Es cierto que "el orden de los factores no altera el producto"? ¿Cómo se llama esa propiedad?**

Otra propiedad que debemos recordar es la **distributiva de la multiplicación en la suma de números naturales,** es decir:

Si ***a, b*** *y* ***c*** *son números naturales cualesquiera, entonces* $a.(b+c)=a.b+a.c$

EL ORDEN usual en $\mathbb{N}$

Dados dos números naturales a y b:

$$a \leq b \begin{cases} a \text{ ``aparece'' antes que } b \text{ en la sucesión de todos los números naturales} \\ \text{ó} \\ a = b \end{cases}$$

En caso contrario $b < a$.

Si ***a*, *b*** son números naturales y ***a* ≤ *b*** entonces **existe un número natural *c***, llamado **resta** o **diferencia de *b* y *a***, que se anota ***c* = *b* - *a*** el cual verifica ***b* = *a* + *c***

- **Monotonía**

Sabemos que $3 \leq 17$.

Además, que $7 \leq 21$, y que $7= 3+4$ y que $21= 17 +4$

Así que podemos decir: $3 + \mathbf{4} \leq 17 + \mathbf{4}$

¿y si en lugar 4 a ambos miembros de la desigualdad sumamos otro número?

¿y si en lugar de 3 ≤ 17 hubiera habido otra desigualdad, y sumábamos a ambos miembros un mismo número?

¿Qué piensa si en la desigualdad 3 ≤ 17, **multiplicamos a ambos miembros por 8, se sigue manteniendo una desigualdad en el mismo sentido (≤) ?**

➢ <u>Leyes de monotonía de la suma y de la multiplicación de números naturales</u>

Dados los números naturales *a, b, c* cualesquiera
si se verifica que $a \leq b$

entonces: $\quad a + c \leq b + c$

$$a \,.\, c \leq b \,.\, c$$

Ejercicio (haga algo!!!)
a) Verifique la propiedad de monotonía de la suma para cuatro casos.
b) Verifique la propiedad de monotonía de la multiplicación para cuatro casos

➢ Divisibilidad en $\mathbb{N}$

Se dice que:

*El número natural **b divide a un número natural a** si **existe un número natural c** tal que **b. c = a***

También se dice que el número ***a es múltiplo de b*** o que ***a es divisible por b***.

Por ejemplo: 4 divide a 12, pues existe 3 tal que 12= 4. 3. En este caso 3 es el cociente.

Actividad

a) Justifique las siguientes afirmaciones**:**

3 divide a 9, pues............................

1 divide a 10, pues...........

5 divide a 0, pues.............

Ya seguiremos con divisibilidad cuando "ampliemos" los números

b) Hay algún número natural que no sea divisible por 1?

c) Dé al menos 5 números naturales que sean múltiplo de 7.

d) Dé al menos 5 números naturales que sean divisibles por 2.

Avanzando un poco más en el proceso de enseñanza y aprendizaje, entramos en los

NUMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$

¿Para qué?pues la operación de resta ***no*** *es siempre posible en el conjunto* $\mathbb{N}$.

Esta dificultad conduce a ampliar el conjunto $\mathbb{N}$=*{1,2.3......}* para que la resta sea siempre posible. Para ello se introduce **para cada natural *a***, el **negativo *-a***, llamado **opuesto de *a***, ampliando a la vez la definición de suma mediante convención:

Propiedad del número opuesto: *(-a)+a=a+(-a)=0 para todo natural a.*

Por ejemplo -*3* es, por definición, el número que sumado a *3* da *0.*
El *–0=0*, pues *0 + 0 = 0*

A los números naturales y a sus opuestos se los llama NUMEROS ENTEROS, algunos son

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

La suma y multiplicación se definió en $\mathbb{Z}$ de manera de extender las dadas en los naturales, así las propiedades que se verifican en $\mathbb{N}$ también se verifiquen en $\mathbb{Z}$ y algunas más, para que así se arreglen las necesidades operacionales.

No pueden llevar a contradicción con las anteriores pues $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

El orden usual de los números enteros:

a $\leq$ ***b*** si ***a*** **aparece antes que** ***b*** **en la sucesión de los enteros ó** ***a = b***

Los **números negativos** se consideran menores que *0* en el orden usual.

A los naturales también se los llama *enteros positivos* siendo mayores o iguales que *0*.

El concepto de **número opuesto en $\mathbb{Z}$:**

Dado un **número entero *a*,** el **opuesto** se anota ***-a*** y es tal que $\boldsymbol{a + (-a) = (-a) + a = 0}$.

El opuesto de *-4* que se anota – *(-4)*, es *4* pues $-4+4=0$; el número - *(-7)* (el opuesto de *-7)* es *7* pues $7+(-7)=0$.

IMPORTANTE: Si los números se simbolizan con letras, por ej. ***b***, la presencia de un signo **–** ante los mismos no significa que el número **– *b*** sea negativo, está significando el opuesto de ***b***.

Reflexión sobre las propiedades de las operaciones en $\mathbb{Z}$

$3 + (-4) = -1$

$\in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\in \mathbb{Z}$

LA SUMA ES <u>CERRADA</u> EN $\mathbb{Z}$ (o <u>LEY INTERNA</u>):

$(-5+4)+7 = -1+ 7 = 6$

$-5+(4+7) = -5 +11 = 6$

NO IMPORTA COMO ASOCIEMOS ……

LA SUMA ES ASOCIATIVA EN $\mathbb{Z}$

$-4 + 5 = 1$ NO IMPORTA si CAMBIAMOS el ORDEN de los sumandos …..(CONMUTAMOS)

LA SUMA ES CONMUTATIVA EN $\mathbb{Z}$

0 +(-20) = -20 el 0 no modifica al otro número cuando suma

Por eso el <u>0 es NEUTRO DE LA SUMA EN</u> $\mathbb{Z}$

Y se puede <u>agregar en la suma en $\mathbb{Z}$:</u>

5 + (-5) = 0

Para 5 existe el -5 tal que su suma es nula. EL OPUESTO….

Eso pasa para cualquier entero……

Recordatorio: para multiplicar números enteros se usa **la regla de los signos**:

+ . + = +	- . + = -
+ . - = -	- . - = +

Analizamos la MULTIPLICACIÓN (.) en $\mathbb{Z}$:

3. (-5) = -15

$\in\mathbb{Z}$ $\in\mathbb{Z}$

La . es CERRADA en $\mathbb{Z}$

(-5.4).7 = -20. 7 = -140

-5.(4.7) = -5 .28 = -140

NO IMPORTA COMO ASOCIEMOS ……

LA MULTIPLICACION ES ASOCIATIVA EN $\mathbb{Z}$

\- 4 . 5 = -20 NO IMPORTA si CAMBIAMOS el ORDEN de los factores …..(CONMUTAMOS)

5 .(- 4) = -20

LA MULTIPLICACION ES CONMUTATIVA EN $\mathbb{Z}$.

1 .(-80) = -80 el 1 no modifica al otro número cuando multiplica.

Por eso el 1 es NEUTRO DE LA MULTILICACION EN $\mathbb{Z}$

IMPORTANTE:

$2.(4+(-10)) = 2.(-6) = -12$ y $2.4 + 2.(-10) = 8 - 20 = -12$

Es decir que se puede hacer la suma y multiplicar o multiplicar y sumar…

UNA PROPIEDAD QUE LIGA LAS OPERACIONES DEFINIDAS EN $\mathbb{Z}$:

DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION EN LA SUMA en $\mathbb{Z}$

La propiedad distributiva de la multiplicación en la suma es la que permite sacar "factor común" … que luego aplicaremos

Usando los cuantificadores y esquemas adecuados vamos a mostrar la simbolización de las propiedades de la suma:

1. la suma + es cerrada en $\mathbb{Z}$: dados dos números enteros el resultado de la suma es un número entero, que simbólicamente:

$$(\forall m)(\forall n)((m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}) \rightarrow (m+n \in \mathbb{Z}))$$

2. la suma + es asociativa en $\mathbb{Z}$:

$$(\forall m)(\forall n)(\forall w)((m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \wedge w \in \mathbb{Z}) \rightarrow ((m+n)+w = m+(n+w)))$$

3. la suma + tiene elemento neutro en $\mathbb{Z}$: (es el 0…)

$$(\exists 0)(\forall m)(0 \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge (0+m) = (m+0) = m))$$

CUIDADO: LOS CUANTIFICADORES $\exists$ y $\forall$ NO CONMUTAN!!!!

4. la suma + tiene la propiedad del elemento opuesto en $\mathbb{Z}$:

$$(\forall m)(m \in \mathbb{Z} \rightarrow (\exists m^*)(m^* \in \mathbb{Z} \wedge (m+m^* = m^* + m = 0)))$$

Al elemento m^* se llama opuesto de m y se *anota usualmente* por -*m*.

5. la suma + es conmutativa en $\mathbb{Z}$:

$$(\forall m)(\forall n)((m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}) \rightarrow m + n = n + m)$$

La distributiva de la multiplicación en suma en $\mathbb{Z}$:

$$(\forall m)(\forall n)(\forall w)((m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \wedge w \in \mathbb{Z}) \rightarrow m.(n + w) = m.n + m.w)$$

** Queda para que con este “modelo” se anime y escriba simbólicamente las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

También, escriba simbólicamente las propiedades de la suma y multiplicación en $\mathbb{N}$.

➢ Monotonía

También es oportuno recordar las **Leyes de monotonía en $\mathbb{Z}$:**

Para la suma es análoga a la propiedad en los números naturales:

Si a, b, c son enteros y $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$

Veamos la siguiente situación:

$$6 \leq 8$$
$$(-2).\ 6 = -12$$
$$(-2).\ 8 = -16$$

Luego: $(-2).\ 6 \geq (-2).\ 8$

Dados ***a***, ***b*** enteros tales que:

$$\boldsymbol{a \leq b}$$

si ***c*** es un entero, $\boldsymbol{c \geq 0}$ entonces $\boldsymbol{a.c \leq b.c}$

si ***c*** es un entero, $\boldsymbol{c \leq 0}$ entonces $\boldsymbol{a.c \geq b.c}$

Ejemplo: Los números enteros pueden denotar cambios:
DE TEMPERATURA en una ciudad

HORA	TEMPERATURA	CAMBIO
3	-5	-2
5	-6	-1
7	-6	0
9	-4	2
11	0	4
13	5	5
15	8	3
17	6	-2
19	3	-3

Actividad

Efectuar en cada caso las operaciones indicadas y decir si el resultado pertenece a $\mathbb{N}$ o si pertenece a $\mathbb{Z}$.

a) -(-4)
b) 4- 4
c) 6 – 5.(-1)
d) -(8 - (3- 7 + 5 +(-3-2)))

➢ **Valor absoluto**

Dado un número entero *a* se define el **valor absoluto** por:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

POR EJEMPLO: Si $a = 3$ $\quad |a| = |3| = 3$ pues $3 \geq 0$

Si $a = -3$ $\quad |a| = |-3| = 3$ pues $-3 < 0$

Observar que cualquiera sea el número entero (positivo o negativo) ***a***, el $|a| \geq 0$.

➢ El concepto de **divisibilidad** para números naturales se extiende a $\mathbb{Z}$.

Dados dos enteros ***a*** y ***b***,

b* divide a *a si existe el número entero ***c*** tal que ***b.c = a***

Se utilizarán en $\mathbb{Z}$ las expresiones *es múltiplo, es divisor de , es divisible por.*

Resulta que -5 divide a 5 pues $-5.(-1) = 5$

50 es *múltiplo* de 25 pues $2.25 = 50$

-8 *es divisible* por 4 pues $4.(-2) = -8$

-3 *es divisor de* -27 pues $-3.9 = -27$

En la teoría de los números enteros se puede demostrar el siguiente teorema, llamado **<u>Teorema del Algoritmo de la División</u>**:

Dados dos enteros *a* y *b*, siendo *b* no nulo existen dos números enteros *c* (**cociente**) y *r* (**resto**) que verifican

$$a = b.\, c + r \qquad \text{con } 0 \leq r < |b|$$

El cociente y el resto son únicos en estas condiciones

Recordatorio: Un número entero se dice **primo** si tiene <u>exactamente cuatro divisores.</u>

Por ejemplo:

3 es primo pues los únicos divisores son *3, -3, 1, -1.*

1 no es primo pues sus únicos divisores son *1* y –

0 no es primo pues todo entero divide a *0* (compruébelo)

-120 no es primo pues algunos de sus divisores son *2, -2, 3, -3, 1,-1, 5, -5.*

a) Factorizar los siguientes números como producto de números primos:

284, -325, 121, -1000

¿Puede hallar otra factorización similar de cada uno de ellos?

b) Calcular el Máximo Común Divisor entre:

24 y 16, 49 y 21, 126 y 248, 45 y 21.

c) Para los mismos pares de b) calcular el Mínimo Común Múltiplo.

a)

$$\begin{array}{r|l} 284 & 2 \\ 142 & 2 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

Luego, 284= 2.2.71

$$\begin{array}{r|l} 325 & 5 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Luego, -325= -5.5.13

b) y c) El Máximo Común Divisor entre dos enteros cualesquiera ***a*** y ***b*** pero no simultáneamente nulos, es el ***mayor número entero positivo d*** que divida tanto a ***a*** como a ***b***.

El Mínimo Común Múltiplo entre dos enteros cualesquiera ***a*** y ***b*** pero no simultáneamente nulos, es el ***menor número entero positivo m*** que sea divisible tanto por ***a*** como por ***b***.

Lo ayudo, haciendo como en a) se puede llegar a que 24= 2.2.2.3 y 16= 2.2.2.2
Así d = (24,16) = 2.2.2 y m=[24,16]= 2.2.2.2.3