Clases de Lógica Formal
(*in*formalmente!!)

Organización de las primeras clases virtuales:
Ahora, contenido del sexto video:

La introducción de otros conceptos y expresar lógicamente otras situaciones del lenguaje coloquial. Expresiones que dicen lo mismo.

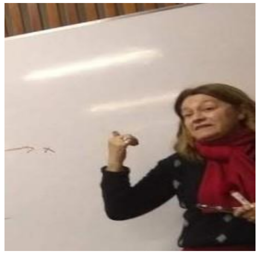
Entonces importa:

¡¡¡Para que sirva!!! A los estudiantes el contacto virtual.

1- Nos saludamos

Hola, qué tal? Todo muy bien?
Entendiendo Matemática 0?

Hoy estamos en la sexta clase virtual de Matemática 0, de la Facultad de Informatica dependiente de la Universidad Nacional de La Plata.



Los invito a tener presente las definiciones de las operaciones lógicas entre las letras proposicionales y sus respectivas **tablas de verdad.**

Están en el **Apunte de la Cátedra**, está en sitio ***Ideas*** de la Facultad.

Seguiremos ampliando nuestro lenguaje simbólico para tratar de "dominar" el lenguaje coloquial...

2. Enriqueciendo el lenguaje simbólico

Las proposiciones que hemos estudiado hasta ahora afirman "cosas" sobre individuos, sobre objetos particulares.

Hay veces que se necesita hacer afirmaciones sobre elementos de un determinado conjunto sin especificar un elemento en particular, permitiremos que ese elemento **varíe** en un conjunto (**universo del esquema**), que sean todos los elementos del conjunto o sean algunos de ellos.

El nombre que recibe esta parte de la Lógica es **Cálculo de Predicados Clásico**.

Para eso introducimos otro elemento importante de este lenguaje: los **cuantificadores**.

Hay situaciones que debemos expresar: “todos los...” o “existen...”, como por ejemplo en las siguientes afirmaciones:

1. *Todos los estudiantes de Matemática 0 son muy aplicados.*
2. *Todos los números enteros son divisibles por 1*
3. *Existen números primos.*
4. *Hay animales carnívoros.*

Ellas tienen un valor de verdad, ¿cuál?

Estas proposiciones decimos que son **universales** y **existenciales**. (las dos primeras y las tercera y cuarta) respectivamente.

¿Qué están expresando?

La 1. está diciendo que para cada uno o cualquiera sea el estudiante de Matemática 0 él es muy aplicado; se dice que es universal pues habla de una propiedad que se les asigna a todos los estudiantes de Matemática 0.

La 2. expresa que para cada uno o cualquiera sea el número entero este es divisible por 1; se habla de una propiedad que tienen todos los números enteros.

A la 1. y 2. se llaman ***universales.***

La 3. manifiesta la existencia de números que tienen la propiedad de ser primos, dice que hay individuos que son primos. (Se sabe que ellos son infinitos, cosa que fue probada por Euclides en sus Elementos)

La 4. habla de que dentro de los animales hay algunos que comen carne.

La 3. y la 4. se llaman ***existenciales***.

Para poder atribuirles un valor de verdad está claro que se debe elegir el conjunto donde se "mueven" los objetos de los cuales se habla. La elección del conjunto que se tome como universo es importante. Ese conjunto se llama **universo.**

Muchas afirmaciones de Matemática son de estos tipos. La mayoría de las propiedades que se estudiarán son así.

- Una manera de simbolizarlas

Se simbolizan las palabras "***todos***" o "***para todo***" o "***cualquiera"*** por $\forall$ y las palabras "***hay***" o "***existen***" o "***algún"*** por $\exists$**.**
Cada uno de esos símbolos se llaman respectivamente ***cuantificador universal*** y ***cuantificador existencial***.

Dando por hecho que el **universo U** es el conjunto de los números enteros

2. $(\forall x)(x \text{ } es \text{ } divisible \text{ } por \text{ } 1)$
3. $(\exists x)(x \text{ } es \text{ } numero \text{ } primo)$

Por simplificación o para generalizar se usan **esquemas proposicionales** o **funciones proposicionales**. Ellos se simbolizan por ejemplo por $P(x)$, $Q(x)$, etc.

Para 2. podríamos escribir $P(x)$: *x es divisible por 1.*

Para 3. escribimos $Q(x)$: *x es número primo.*

En muchas oportunidades el uso de los paréntesis que encierran $\forall x$ y $\exists x$ no se usarán.

Así podríamos escribir

2. $(\forall x)(P(x))$
3. $(\exists x)(Q(x))$

Los paréntesis indican ***el alcance del cuantificador***.

- Vamos a reflexionar sobre lo que expresan 1. y 2.

En 1. aunque no hay expresado un condicional se puede reflexionar que por el sólo hecho de ser un estudiante de Matemática 0, ese individuo es muy aplicado; así podríamos poner:

M(x): x es alumno de Matemática 0.

A(x): x es aplicado.

$(\forall x)(\ M(x) \rightarrow A(x)\ )$

¿Para esta proposición que universo se puede considerar? No es único.

Debe ser un conjunto en el cual la variable x se pueda “mover” y al reemplazar en el esquema la expresión tenga sentido.

Para este caso podrían considerarse uno muy amplio como ***U***, el conjunto de los seres humanos vivos; otro menos ambicioso el conjunto de los alumnos de la Facultad de Informática de la U.N.L.P..

Para 2. se puede considerar que del hecho de ser un número entero entonces ese número es divisible por 1. Así podríamos poner:

E(x): x es un número entero.

P(x): x es divisible por 1.

$(\forall x)(\ E(x) \rightarrow P(x)\ )$

¿Conjuntos que sirven como universo? El conjunto de los números reales, el de los números racionales o el de los números enteros.

Resumiendo

- Una proposición universal es de la forma: Para todo x, $P(x)$, se simbolizará:

  $(\forall x)(P(x))$

- Una proposición existencial es de la forma: Existe x, $P(x)$, se simbolizará :

  $(\exists x)(P(x))$

El esquema puede ser compuesto. Valen las mismas reglas de formación entre esquemas que para las letras del Cálculo Proposicional Clásico.

Ejemplo

Simbolizar: *Los números naturales son positivos*

Esta proposición afirma que por el hecho de un número ser natural él es positivo.

No habla de un número natural en particular sino de cualquiera de ellos, es decir es algo referido a todos los naturales, luego su simbolización:

$(\forall x)(x \text{ es numero natural entonces } x \text{ es positivo})$

Usando esquemas: $N(x)$: *x es número natural*

$P(x)$: *x es positivo*

$(\forall x)(N(x) \rightarrow P(x))$

Si consideramos como universo, por ejemplo $\mathbb{Q}$.

Si cambiamos al universo por $\mathbb{N}$ lo simbolizamos: $(\forall x)(x \text{ es positivo})$ o

$(\forall x)(P(x))$

¿Cuál es el valor de verdad?

Otro ejemplo:

Simbolizar y analizar el valor de verdad: (Recuerde que hay que establecer el universo).

Todos los números son impares.

El concepto de número primo tiene sentido dentro de los números naturales o de los enteros.

Lo explicaremos profundamente en el Capítulo 2.

Voy a usar dos esquemas para su simbolización:

$S(x)$: *x es número.*

$I(x)$: *x es impar.*

$$(\forall x)(\ S(x) \rightarrow I(x)\ )$$

¿Cuál es el valor de verdad? Si no se da un universo no se le puede atribuir.

a) Pensemos como universo U a los números enteros $\mathbb{Z}$.

Observemos que el esquema es un condicional: $S(x) \rightarrow I(x)$. y recordando como es la tabla de verdad de un condicional, si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, ese esquema será falso si hay un elemento del universo en que eso sea así.

Es por tanto posible encontrar un individuo (en este caso un número entero) que satisfaga $S(x)$ y no $I(x)$. Por ejemplo el 8, $S(8) \rightarrow I(8)$ es falso.

Entonces no todo número entero cumplen la afirmación. Es así que el valor de verdad de $(\forall x)(\ S(x) \rightarrow I(x))$ es falso.

b) Definamos como universo U = {1, 3 , -13}.

La sustitución de la variable sólo es posible por esos valores.

Entonces $S(1) \rightarrow I(1)$, $S(3) \rightarrow I(3)$ y por ultimo $S(-13) \rightarrow I(-13)$. Como en cada uno de los casos posibles, esos condicionales es verdadero, luego $(\forall x)(\ S(x) \rightarrow I(x))$ es verdadero.

Otro ejemplo:
Simbolizar y analizar el valor de verdad: (Recuerde que hay que establecer el universo).

Existen números pares.

Los esquemas pueden ser,

$N(x)$: *x es número.*

$R(x)$: *x es par.*

$$(\exists x)(N(x) \wedge R(x))$$

a) Pensemos como universo U a los números enteros $\mathbb{Z}$.

Como hay números que son pares, por ejemplo el 6, entonces $N(6) \wedge R(6)$ es verdadera. Por lo tanto $(\exists x)(N(x) \wedge R(x))$ es verdadera en $\mathbb{Z}$**.**

b) Definamos como universo U = {1, -5 , 9}.

Los valores por los que se puede reemplazar la variable es 1, - 5 ó 9.

Y así $N(1) \wedge R(1)$, $N(-5) \wedge R(-5)$ y $N(9) \wedge R(9)$. Son todas proposiciones falsas.

Luego, $(\exists x)(N(x) \wedge R(x))$, es falsa.

c) Si definimos como universo U = {2, -15, 8}

Analicemos que el valor de $(\exists x)(N(x) \wedge R(x))$ es verdadero.

Otro ejemplo:
Simbolizar:

Los cuadrados de los números reales son positivos.

Vamos a usar los siguientes esquemas

$R(x)$: *x es un número real.*

$T(x)$: *x es positivo.*

$(\forall x)(R(x) \rightarrow T(x^2))$ es la manera de simbolizarla.

Analice el valor de verdad, en U = $\mathbb{R}$**.**

Otro ejemplo:

Simbolizar:

Todo número es par o impar.

$N(x)$: *x es número.*

$R(x)$: *x es par.*

$I(x)$: *x es impar.*

$(\forall x)(N(x) \to (R(x) \vee I(x))$ Analice el valor de verdad, en U = $\mathbb{Z}$**.**

- El valor de verdad de una **proposición universal** de la forma *Para todo* x, $P(x)$ depende del universo que esté involucrando y si cada uno de los individuos a de ese universo verifique o no lo que está afirmando $P(x)$ cuando x es sustituido por un individuo a .

Si $P(a)$ es una proposición verdadera cualquiera sea a del universo es entonces

$(\forall x)(P(x))$ verdadera.

- El valor de verdad de una **proposición existencial** de la forma *Existe* x, $P(x)$ depende del universo que esté involucrando y si hay algún individuo a de ese universo que verifique $P(x)$ cuando x es sustituido por a .

Si $P(a)$ es una proposición verdadera para algún individuo *a* del universo es entonces

$(\exists x)(P(x))$ verdadera.

Actividad:

a) Simbolizar las siguientes proposiciones indicando claramente cuál es el universo que considera.

i) Todos los números primos son positivos.

ii) Existen números reales irracionales.

iii) Hay números reales racionales y hay números reales irracionales.

iv) Todos los números racionales son enteros.

v) Todos los números enteros son racionales.

vi) Hay números racionales que son enteros.

vii) Hay enteros múltiplos de 8 y de 9 a la vez.

viii) Existen enteros que son múltiplos de 7 que son pares.

ix) Todo múltiplo de 2 es múltiplo de 4.

x) Existen alumnos que estudian.

xi) Los alumnos que estudian aprueban.

b) Determine, de ser posible, un universo en que resulten falsas y otro en que resulten verdaderas.

En muchas oportunidades es necesario simbolizar con más de una variable proposicional. Puede que estas proposiciones lleven a formular esquemas de más de una variable.

Ejemplo

Una de las nociones más básicas en que podemos pensar es el orden.

Supongamos que queremos expresar: *Todo número tiene uno mayor.*

Consideremos como universo el conjunto $\mathbb{Z}$, de qué se habla? De que dado un número entero (cualquiera) hay otro número entero que es mayor.

Para ello usaremos:

$$M(x, y): y \text{ es mayor que } x$$

Se tiene entonces que cuantificar de manera conveniente y resulta:

$$(\forall x)\,(\exists y)\,(M(x, y))$$

Ejemplo

¿Hay diferencia entre lo que expresan? (Considerar como universo el conjunto de seres humanos vivos actualmente)

1. *Todos aman a alguien.*
2. *Hay quien ama a todos.*

Pensemos lo que dice (1). Dado un individuo cualquiera, él ama a otro individuo. El amor no es siempre correspondido...por lo cual no tiene porqué ser la relación "hacia el otro lado".

¿Qué dice (2)? Que hay un individuo que ama a cualquier otro individuo.

Lo que dicen es **muy distinto.** **¿**Cómo se simbolizan?

Sea: $A(x, y)$: x *ama a* y

Para 1. $(\forall x)\,(\exists y)\,(A(x\,,y))$

Para 2. $(\exists y)\,(\forall x)\,(A(y, x))$

Por lo tanto, ***el orden de los cuantificadores es importante***. ¡¡¡Y el orden de las variables dentro del esquema también!!!

Actividad

i) *Hay un número que es menor que todo número.*

ii) *Todo número es menor que todo número.*

iii) *Todo número es menor que algún número.*

a) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números reales.

b) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números naturales.

Actividad

Sean:

i) *Todo número tiene inverso multiplicativo.*

ii) *Hay números que tienen inverso multiplicativo.*

a) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números reales.

b) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números enteros.

c) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números reales mayores que 3.

d) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números enteros mayores que 3.

Reglas para negar proposiciones con un cuantificador

A partir de las definiciones de los valores de verdad de las proposiciones universales y existenciales es posible deducir que vale lo siguiente

Proposición	**Negación de la Proposición**	**Ejemplo**
$(\forall x)(P(x))$	$\neg(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$	NO todos son santos. Hay algunos que NO son santos
$(\exists x)(P(x))$	$\neg(\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$	NO existen alumnos aprobados Todos los alumnos son NO aprobados

Con estas reglas es suficiente para negar cualquier proposición con cuantificadores.

La idea es que hay que ir introduciendo la regla en la proposición de a un cuantificador por vez.

Ejemplo

Negar: $(\forall x)(T(x) \to (R(x) \vee S(x)))$

De acuerdo a la regla anterior:

$$\neg (\forall x)(T(x) \to (R(x) \vee S(x))) \Leftrightarrow (\exists x)\neg (T(x) \to (R(x) \vee S(x)))$$

Negando un condicional se tiene:

$$(\exists x)\neg (T(x) \to (R(x) \vee S(x))) \Leftrightarrow (\exists x)(T(x) \wedge \neg (R(x) \vee S(x)))$$

y aplicando una de las reglas de De Morgan:

$$(\exists x)(T(x) \wedge \neg (R(x) \vee S(x))) \Leftrightarrow (\exists x)(T(x) \wedge \neg R(x) \wedge \neg S(x))$$

Ejemplo

Negar: $(\exists y)(\forall x)(H(y) \wedge (R(x, y) \to S(x)))$

De acuerdo a las reglas y la recomendación: $\neg (\exists y)(\forall x)(H(y) \wedge (R(x, y) \to S(x))) \Leftrightarrow (\forall y)\neg(\forall x)(H(y) \wedge (R(x, y) \to S(x)))$

Siguiendo...

$$(\forall y)\neg(\forall x)(H(y) \wedge (R(x, y) \to S(x))) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)\neg (H(y) \wedge (R(x, y) \to S(x)))$$

aplicando Regla de De Morgan:

$$(\forall y)(\exists x)\neg(H(y) \wedge (R(x, y) \to S(x))) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(\neg H(y) \vee \neg (R(x, y) \to S(x)))$$

por la negación de un condicional:

$$(\forall y)(\exists x)(\neg H(y) \vee \neg (R(x, y) \to S(x))) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(\neg H(y) \vee (R(x, y) \wedge \neg S(x)))$$

¿Cuándo se considera terminado? Cuando cada símbolo de negación afecta un solo esquema proposicional.