CAPÍTULO 3: Ecuaciones

Ecuaciones cuadráticas

Método de completación de cuadrados

Matemática 0. Facultad de Informática. U.N.L.P

Ecuaciones cuadráticas

- Polinomio cuadrático: $P(x) = \ ax^2 \ + \ bx + c \ (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, a \ \neq \ 0)$

Pregunta: ¿Qué sucede si $a = 0$?

- Ecuación cuadrática: $ax^2 \ + bx + c = 0$

- Observación: $ax^3 \ + \ bx^2 \ + \ cx \ + \ d \ = \ 0$ con $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \ \neq \ 0)$ es una ecuación cúbica y podemos seguir con el término de mayor grado.

- Trabajaremos con ecuaciones lineales y cuadráticas. Las de grado superior buscaremos factorizar.

¿Cómo resolver ecuaciones cuadráticas?

- En una ecuación cuadrática puede pasar que:
  - Tenga una sola solución.
  - Tenga dos soluciones.
  - Tenga infinitas soluciones.
  - No tenga solución.

- Si tenemos una ecuación cuadrática de la forma

$$(x-a)^2 = b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

veremos diferentes casos:

Tipos de solución

Ejemplo 1: $(x-1)^2 = 4$

$x-1=\pm 2$

$x_1 = 2+1 = 3$

$x_2 = -2+1 = -1$

La ec. tiene 2 sol.

Ejemplo 2: $(x-2)^2=3$

$x-2=\sqrt{3}$

$x_1 = \sqrt{3}+2$

$x_2 = -\sqrt{3}+2$

la ec. tiene 2 sol.

Tipos de solución

Ejemplo 3: $(x-2)^2 = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

La ec. tiene única sol.

Ejemplo 4: $\underbrace{(x+5)^2}_{>0} = \underbrace{-1}_{<0}$

abs!!

La ec. no tiene sol.

Método de completar cuadrados

- Este método es **muy** importante!

- Se trata de transformar una ecuación cuadrática del estilo
$$ax^2 + bx + c = 0$$
en una ecuación equivalente, pero de la forma
$$(x - a)^2 = b$$

- Usaremos este método ahora, para resolver ecuaciones cuadráticas y en Matemática 1, por ejemplo.

La “receta” del método

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

- ***Paso 1:*** Limpiar la x^2

Multiplicamos a ambos miembros por $\frac{1}{a}$

$$\frac{1}{a}\,(ax^2 + bx + c\,) = \frac{1}{a}.0$$

Al hacer la distributiva y operar nos queda

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{a}bx + \frac{1}{a}c = 0}$$

$2\,\frac{b}{2a}$

- ***Paso 2:*** ¿Quién es el doble producto?

El coeficiente del segundo termino, que es $\frac{b}{a}$, lo reescribimos de manera que aparezca un doble producto, por lo que multiplicamos y dividimos por dos, lo que nos queda $2\,\frac{b}{2a}$ y la ecuación nos queda:

$$\boxed{x^2 + 2\frac{b}{2a}\,x + \frac{1}{a}\,c = 0}$$

Continuamos con el método

- ***Paso 3:*** ¿Hay un trinomio cuadrado perfecto?

Recordamos del video de factorización, la fórmula del trinomio cuadrado perfecto:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Por lo que para llegar a una expresión semejante, reescribimos nuestra ecuación que era

$$\boxed{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0}$$

De la siguiente manera:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Despejando obtenemos la forma estudiada antes:

$$\boxed{(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Continuamos con el método

- ***Paso 4:*** Sumamos fracciones

De la ecuación anterior que era

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Resolvemos la operación de la derecha, sacando común denominador 4 a2

Lo que no hace que quede

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Resolvemos y analizamos el signo de la expresión de la derecha.

$$x = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Completamos un cuadrado y resolvemos

- *Ejemplo del material:* $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} = 0$

Paso 1 $\quad x^2 + 4x - 3 = 0$

Paso 2 $\quad x^2 + 2.2x - 3 = 0$

$(x+2)^2 = x^2 + 2.2x + 2^2$

Paso 3 $\quad \underbrace{x^2 + 2.2x + 2^2}_{(x+2)^2} - 2^2 - 3 = 0$

$(x+2)^2 - 4 - 3 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 7 = 0$

Paso 4 $\quad (x+2)^2 = 7 \Rightarrow x+2 = \sqrt{7}$

$x_1 = \sqrt{7} - 2$

$x_2 = -\sqrt{7} - 2$

Completamos un cuadrado y resolvemos

- *Otro ejemplo:* $3x^2 - 9x = 15$

$$3x^2 - 9x - 15 = 0$$

Paso 1 : $x^2 - \boxed{3x} - 5 = 0$

Paso 2 : $\underbrace{x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5 = 0$

$(x-b)^2 = x^2 - \boxed{2xb} + b^2$

$-3 = -2b \rightarrow b = \frac{3}{2}$

Paso 3 : $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 5 = 0$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

Paso 4 : $x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$x_1 = \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{3}{2}$

$x_2 = -\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{3}{2}$

El papel del discriminante

- *Definición:* Llamamos **discriminante** al número $b^2 - 4ac$ que aparece en la ecuación.
- El discriminante nos determina la cantidad de ~~ecuaciones.~~ sol.
- Tiene solución? Cuantas soluciones tiene la ecuación cuadrática si:

  - $b^2 - 4ac > 0$? → 2 sol.
  - $b^2 - 4ac = 0$? → 1 sol.
  - $b^2 - 4ac < 0$? → no tiene sol.