

**Álgebra Linear**  
**Exame de Recurso****Data:** 06/02/2021  
**Duração:** 2h00

A integridade académica é um valor fundamental da Universidade de Coimbra e da FEUC. O Regulamento Pedagógico da UC e o Regulamento Disciplinar dos Estudantes da UC proíbem e sancionam as várias formas de fraude ou tentativa de fraude académica. A UC e a FEUC proíbem comportamentos que revelem a intenção de o/a Estudante falsear os seus resultados e/ou que sejam suscetíveis de violar a confiança na integridade do mérito académico. A fraude em sede de avaliação de uma unidade curricular implica a anulação imediata dessa avaliação e leva à reprovação liminar do/a estudante na unidade curricular em causa, impedindo o aproveitamento no mesmo ano letivo. A fraude determina igualmente a possível comunicação ao Diretor da FEUC, para efeitos de instauração de procedimento disciplinar. Ao realizar qualquer elemento de avaliação, o/a Estudante compromete-se a:

- Respeitar o Regulamento Pedagógico da UC e o Regulamento Disciplinar dos Estudantes da UC, reconhecendo que ambos são também aplicáveis a todos os elementos de avaliação realizados à distância.
- Respeitar todas as regras associadas à realização dos elementos de avaliação à distância que tenham sido devidamente comunicadas pelo/a docente.
- Ser o/a único/a autor/a do elemento de avaliação entregue (excetuando-se trabalhos de grupo, cuja autoria deverá ser, única e exclusivamente, dos/as estudantes que assinam o respetivo trabalho).
- Não partilhar as questões e respostas de quaisquer provas de avaliação com outros/as estudantes nem recorrer à ajuda de terceiros/as para realização do elemento de avaliação à distância.
- Realizar uma prova oral, se para tal vier a ser escolhido/a, de forma aleatória ou tendo por base um critério definido pelo/a responsável da unidade curricular, independentemente da modalidade de avaliação definida para a unidade curricular. O estudante reconhece ainda que a falta de comparência a esta prova, ou a disparidade de classificações nela obtidas, relativamente ao elemento de avaliação original, poderá ter impacto na avaliação final.

1. Considere, em  $\mathbb{R}^3$ , os vetores  $u = (2, 1, -1)$  e  $v = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ .

- (a) Encontre  $k \in \mathbb{R}$  de forma a que o vector  $w = (-13, -7, k)$  seja uma combinação linear de  $u$  e  $v$ .
- (b) Determine  $z \in \mathbb{R}^3$  de modo que  $\{\frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v, z\}$  seja um conjunto ortonormal.

2. Considere o sistema  $AX = b$ , onde  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & \alpha & 2 \\ 4 & 6 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ \beta \end{bmatrix}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- (a) Faça a condensação da matriz completa  $[A|b]$  e indique a característica da matriz  $A$ ,  $C(A)$ , para os diferentes valores reais de  $\alpha$ .
- (b) Discuta, para todos os valores reais de  $\alpha$  e  $\beta$ , o sistema  $AX = b$ .
- (c) Considere  $\alpha = 6$  e  $\beta = -4$ :
- Determine o núcleo da matriz  $A$ .
  - Mostre que o vetor  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$  é uma solução particular do sistema não homogéneo  $AX = b$ .  
Usando a alínea anterior, 2.(c)i., justifique qual a solução geral do sistema  $AX = b$ .

3. Considere a matriz  $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ .

- (a) Determine os valores próprios de  $B$  e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
- (b) Determine os espaços próprios associados aos valores próprios de  $B$  e indique as multiplicidades geométricas respectivas.
- (c) Usando as alíneas anteriores, indique os valores e vetores próprios da matriz  $C$  dada por

$$C = 3 \times (B^T)^2.$$

4. Mostre que toda a matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com  $n$  ímpar, que satisfaz a propriedade  $A^T = -A$  (isto é,  $A$  é anti-simétrica), é uma matriz singular.

**Cotação: Todas as alíneas valem 2 valores.**  
**Respostas sem justificação não serão consideradas.**