Tópicos de resolução do Exame de Recurso de Álgebra Linear (versão 2)

1. (a) O vetor w é uma combinação linear de u e v se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : w = \alpha u + \beta v$.

$$(k, 9, -7) = \alpha(1, -1, 3) + \beta(-1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = k \\ -\alpha + \frac{1}{2}\beta = 9 \\ 3\alpha + \frac{1}{2}\beta = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -14 \\ \beta = 10 \\ \alpha = -4 \end{cases}.$$

R: Para $k = -14$, w é uma combinação linear de u e v.

(b) Calcule-se um vetor $\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3)$ ortogonal aos vetores u e v, isto é, um vetor $\tilde{z}$ tal que $< \tilde{z}, u >= 0$ e $< \tilde{z}, v >= 0$. Então

$$\begin{cases} z_1 - z_2 + 3z_3 = 0 \\ -z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 + 3z_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}z_2 + \frac{7}{2}z_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 4z_3 \\ z_2 = 7z_3 \end{cases}.$$

Portanto, qualquer vetor da forma $(4z_3, 7z_3, z_3), z_3 \in \mathbb{R}$ é ortogonal aos vetores u e v. Por exemplo, para $z_3 = 1$, $\tilde{z} = (4, 7, 1)$.

Note-se que $< u, v >= 1 \times (-1) - 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 0$ e portanto os vetores u e v são ortogonais. Desta forma, o conjunto $\{u, v, \tilde{z}\}$ é um conjunto ortogonal de vetores. Para encontrar um conjunto ortonormal a partir deste basta dividir os vetores pelas suas normas. Como

$$\|\tilde{z}\| = \sqrt{16 + 49 + 1} = \sqrt{66},$$

o conjunto $\{\frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v, z\}$ é um conjunto ortonormal para $z = \frac{1}{\sqrt{66}}\tilde{z} = (\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}})$.

2. (a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & \alpha & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \\ L_4 = L_4 - 4L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & \alpha + 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & \alpha - 4 & \beta + 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 = L_3 - 3L_2 \\ L_4 = L_4 - 2L_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 6 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 2 & \beta \end{array}\right].$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 6\}$ então $C(A) = 4$.

Se $\alpha = -2$ ou $\alpha = 6$ então $C(A) = 3$.

(b) Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 6\}$ então o sistema é possível determinado $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = -2$ e $\beta = 0 \vee \alpha = 6$ e $\beta = -4$ o sistema é possível indeterminado.

Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq 0 \vee \alpha = 6$ e $\beta \neq -4$ o sistema é impossível.

(c) i. $\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\}$.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ -y + 3z - 3t = 0 \\ -8z + 8t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ - \end{cases}.$$

$\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

ii. Seja x_h a solução geral do sistema homogéneo $AX = 0$ e x_p uma solução particular do sistema não homogéneo $AX = b$. Então,

$$Ax_h = 0 \text{ e } Ax_p = b.$$

Desta forma,

$$Ax_h + Ax_p = 0 + b \Leftrightarrow A(x_h + x_p) = b.$$

Portanto, a solução geral do sistema $AX = b$ é $x_h + x_p$.
Assim, a solução geral do sistema $AX = b$ é $\{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}, t), t \in \mathbb{R}\}$.

3. (a) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 4]$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 5 - \lambda = 0 \vee (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee 3 - \lambda = -2 \vee 3 - \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = 5 \vee \lambda = 1$.

$m.a.(\lambda = 5) = 2; m.a.(\lambda = 1) = 1$.

(b) $E(1):$

$$(A - I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; m.g.(\lambda = 1) = 1.$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 2u_3 = 0 \\ 4u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -u_3 \\ u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$E(1) = \{(-u_3, 0, u_3), u_3 \in \mathbb{R}\} = \{u_3(-1, 0, 1), u_3 \in \mathbb{R}\}$.

$E(5):$

$$(A - 5I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - (-L_1)]{} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; m.g.(\lambda = 5) = 2.$$

$$\begin{cases} -2u_1 + 2u_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$E(5) = \{(u_3, u_2, u_3), u_2, u_3 \in \mathbb{R}\} = \{u_2(0,1,0) + u_3(1,0,1), u_2, u_3 \in \mathbb{R}\}.$

(c) Se λ é valor próprio de B, $\exists u$ não nulo tal que $Bu = \lambda u$. Então,

$Cu = 5B^{-2}u = 5B^{-1}(B^{-1}u) = 5B^{-1}\frac{1}{\lambda}u = 5\frac{1}{\lambda}B^{-1}u = 5\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda}u = \frac{5}{\lambda^2}u.$

Logo, se λ é valor próprio de B, $\frac{5}{\lambda^2}$ é valor próprio de C.

Portanto os valores próprios de C são $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ e $\frac{5}{1} = 5$.

Os vetores próprios de C coincidem com os vetores próprios de B.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com n ímpar, uma matriz que satisfaz $A^T = -A$.

Então, $det(A^T) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$, pois n é ímpar.

Como $det(A) = det(A^T)$ e $det(A^T) = -det(A)$ vem

$det(A) = -det(A) \Leftrightarrow 2det(A) = 0 \Leftrightarrow det(A) = 0.$

Logo A é singular.