Álgebra Linear – Licenciatura em Economia – 2021/22

Nome:____ **N.º**__________

Frequência **Data: 28/janeiro/2022** **Duração: 120 min.**

Cada alínea vale 2 valores. Indique os cálculos auxiliares, responda de forma clara e justifique as suas conclusões.

NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORAS OU TELEMÓVEIS

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & k^2-1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5k \\ 4 \end{bmatrix}$, para $k \in \mathbb{R}$.

1. a) Discuta para todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ o sistema $Ax = b$:

1. b) **Faça $\boldsymbol{k = 1}$**. Utilizando o método de eliminação de Gauss, classifique e determine o conjunto solução dos sistemas

b.i) $Ax = b$,

b.ii) $A^T v = 0$,

indicando, nos dois casos, a caraterística da matriz dos coeficientes, bem como as incógnitas principais e as incógnitas livres (caso existam).

2. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $7(I_3 - B)(B^2 + B + I_3) = (4\alpha - 5)I_3$.

b) Sabendo que $M = B + B^T$, calcule $\det(M)$ e construa a matriz inversa de M.

3. Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

3. a) Verifique que $(1, 1, 1)$ é um vetor próprio de C e indique o valor próprio que lhe está associado.

3. b) Calcule os valores próprios de C e indique as respetivas multiplicidades algébrica e geométrica.

3. c) Determine um conjunto ortogonal de vetores unitários constituído por vetores próprios de C.

3. d) Faça a decomposição espectral da matriz C.

4. Suponha que $u \in \mathbb{R}^7$ tal que $u^T u = 1$ e ainda que $P = I_7 - uu^T$ e $Q = I_7 - 2P$. Justificando cuidadosamente a sua resposta, prove que $P^2 = P$ e $Q^2 = I_7$.