Relatório de AED

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Martim Peralta Gomes, nº 119488

Tiago Queirós Rocha, nº 120515

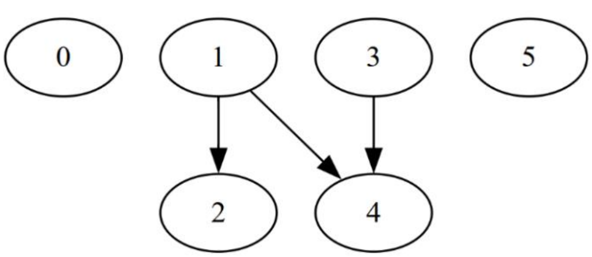
Introdução

O presente relatório tem como objetivo caracterizar a complexidade computacional de dois algoritmos fundamentais em grafos orientados: o algoritmo de Bellman-Ford e o algoritmo de construção do fecho transitivo. Estes algoritmos foram implementados e avaliados no contexto do Tipo Abstrato de Dados (TAD) GRAPH.

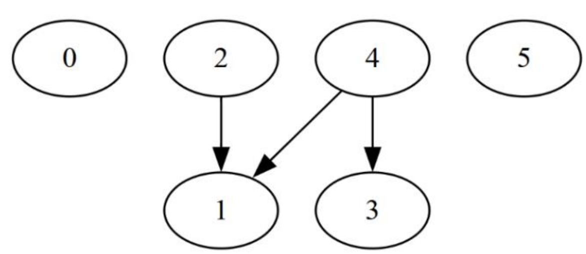
O algoritmo de Bellman-Ford foi utilizado para determinar a árvore de caminhos mais curtos a partir de um vértice inicial até todos os vértices alcançáveis, enquanto o algoritmo de fecho transitivo foi responsável por gerar um grafo no qual todos os pares de vértices conectados por caminhos direcionados no grafo original são explicitamente representados.

Além disso, o relatório apresenta as métricas adotadas para medir a complexidade algorítmica, como o número de iterações e o tempo de execução, ilustradas por meio de tabelas e gráficos baseados nos resultados dos testes efetuados em grafos de diferentes tamanhos e estruturas.

TAD Graph



Grafo Transposto



Bellman-Ford

Path Trees (Árvores de Caminhos) por Vértice Raiz:

- Vértice 0

  Não existem arestas que partem do vértice 0.

- Vértice 1

  Arestas que partem do vértice

  1 → 2

  1 → 4

- Vértice 2

  Não existem arestas que partem do vértice 2.

- Vértice 3

  Aresta que parte do vértice 3:

  3 → 4

- Vértice 4

  Não existem arestas que partem do vértice 4.

- Vértice 5

  Não existem arestas que partem do vértice 5.

De forma a analisar a complexidade do algoritmo, fizemos uma tabela com as comparações e iterações dos vértices e arestas:

Graph Root	Vertices	Arestas	Comparações	Iterações
0	6	0	0	5
1	6	2	10	5
2	6	0	0	5
3	6	1	5	5
4	6	0	0	5
5	6	0	0	5

Número de Iterações

- Para todos os graph roots, o número de iterações é **5**, que corresponde a $V - 1$ (número de vértices menos 1).
- Isso reflete o funcionamento do Bellman-Ford, que faz $V - 1$ passos para calcular as menores distâncias.

Número de Comparações

As comparações dependem diretamente do número de arestas processadas:

- Para o graph root 1 (2 arestas): 10 comparações (5×2).
- Para o graph root 3 (1 aresta): 5 comparações (5×1)

Para outros graph roots sem arestas conectadas, não há comparações realizadas (0).

O algoritmo de Bellman-Ford apresenta uma complexidade de tempo de O(V·E)O(V·E), onde VV representa o número de vértices e EE, o número de arestas no grafo. No pior caso, o algoritmo percorre todas as arestas para cada vértice, o que resulta nessa complexidade temporal.

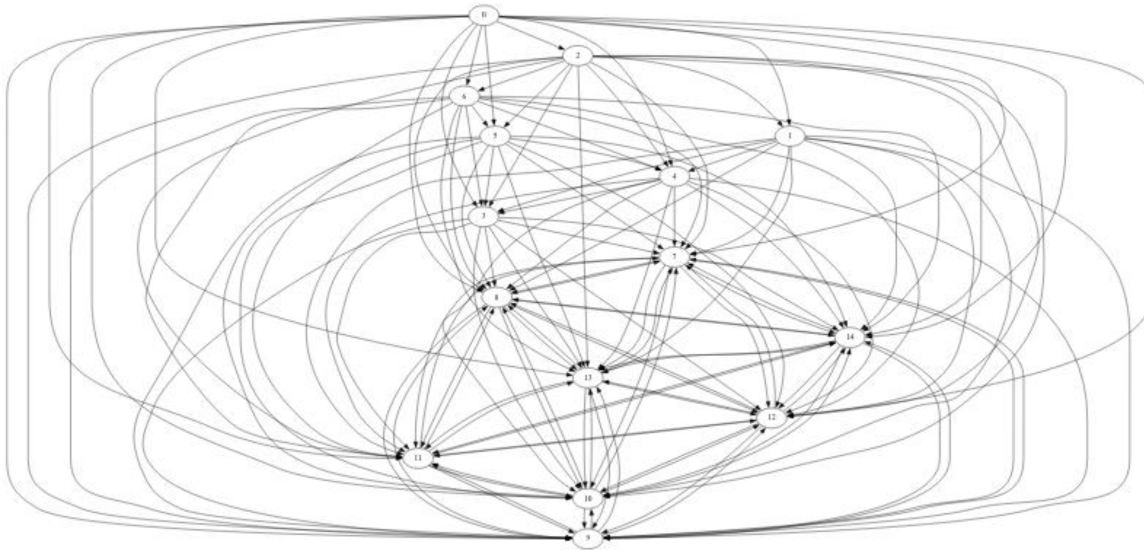
Já a complexidade espacial do algoritmo é O(V)O(V), uma vez que é necessário armazenar as distâncias entre o vértice de origem e todos os outros vértices do grafo. Esse armazenamento é o principal fator que determina o uso de memória pelo algoritmo.

No melhor caso, o algoritmo de Bellman-Ford possui uma complexidade de tempo de O(E). Nesse cenário, as distâncias iniciais já representam os caminhos mais curtos, e o algoritmo faz apenas uma passagem eficiente por todas as arestas para verificar sua validade. Essa eficiência é particularmente vantajosa em grafos onde o número de arestas é reduzido.

No caso médio, a complexidade de tempo do algoritmo de Bellman-Ford é O(V·E). Esta complexidade aplica-se a diversas estruturas e densidades de grafos, já que o desempenho do algoritmo é influenciado principalmente pelo número de vértices e arestas. Em situações práticas, o comportamento do caso médio geralmente assemelha-se ao pior caso, especialmente em grafos densos com um grande número de arestas. (editado)

No pior caso, o algoritmo de Bellman-Ford apresenta uma complexidade de tempo de O(V·E). Isso acontece quando o algoritmo realiza ∣V∣−1∣ iterações completas sobre todas as arestas e vértices, além de uma iteração adicional para verificar a existência de ciclos de peso negativo.

Transitive Closure



No cálculo do fecho transitivo de um grafo, as comparações ocorrem em dois momentos principais: durante a execução do algoritmo de Bellman-Ford, para determinar se ocorreram relaxamentos, e na construção do grafo transitivo, para verificar a existência de caminhos entre os vértices. O número de iterações é diretamente proporcional ao número de vértices (V).

A complexidade do algoritmo de Bellman-Ford é $O(V \cdot E)$, onde E representa o número de arestas. No cálculo do fecho transitivo, esse algoritmo é executado V vezes, resultando numa complexidade global de $O(V \cdot (V \cdot E)) = O(V^2 \cdot E)$.

No melhor caso, o número de arestas é reduzido, o que minimiza as operações realizadas. Embora o Bellman-Ford precise ser executado V vezes, o tempo de execução é reduzido devido ao baixo número de arestas por vértice. Nesse caso, a complexidade pode ser expressa como $O(V^2 \cdot X)$, onde X é o número médio de arestas por vértice.

No pior caso, o grafo possui o número máximo de arestas, ou seja, é denso, com $E \approx V^2$. Como cada vértice está conectado a praticamente todos os outros, a complexidade do algoritmo torna-se $O(V^2 \cdot V^2) = O(V^4)$.