

# Movimento dos Projéteis

Universidade de Aveiro

Fernando Ferreira, Martim Gomes, Rafael Marques, Tiago Rocha



# Movimento dos Projéteis

Dept. de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro

Fernando Ferreira, Martin Gomes, Rafael Marques, Tiago Rocha  
faf2@ua.pt, martimperalta7@ua.pt, rafaelfmarques@ua.pt, tqrocha@ua.pt

24 de outubro de 2024

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Resumo</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Detalhes experimentais relevantes</b>	<b>3</b>
3.1	Material Utilizado . . . . .	3
3.2	Procedimento e Precauções Experimentais . . . . .	3
3.2.1	Parte A - Determinação da velocidade inicial . . . . .	4
3.2.2	Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo . . . . .	4
3.2.3	Parte C - Pêndulo Balístico: Método alternativo para determinação da velocidade inicial de um projétil . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Análise e discussão</b>	<b>6</b>
4.1	Parte A - Determinação da velocidade inicial . . . . .	6
4.2	Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo . . . . .	6
4.3	Parte C - O Pêndulo Balístico . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Anexos</b>	<b>10</b>
6.1	Anexos . . . . .	10

# Lista de Figuras

3.1	Diferentes fases da atividade experimental . . . . .	3
3.2	Esquema da montagem da parte A . . . . .	4
3.3	Esquema da montagem da parte B . . . . .	4
3.4	Esquema da montagem da parte C . . . . .	5
6.1	Tabela referente à parte B . . . . .	10
6.2	Variação da altura em função do ângulo . . . . .	10
6.3	Tabela parte C . . . . .	11

# Capítulo 1

## Resumo

Este relatório visa abordar a atividade laboratorial realizada na última aula laboratorial de Mecânica e Campo Eletromagnético. Esta atividade foi dividida em 3 partes com o objetivo de estudar diferentes lançamentos, e obter diferentes resultados. Nestas atividades, procedemos ao lançamento de um projétil. Na primeira parte com o objetivo de estudar a sua velocidade inicial, a segunda parte visava observar a variação da distância alcançada variando o ângulo de lançamento e por fim na última parte lançamos o projétil em direção a um pêndulo com o intuito de observar o ângulo que o pêndulo faz ao deslocar-se, conseguindo assim calcular a velocidade inicial do projétil.

## Capítulo 2

# Introdução

O trabalho laboratorial que nós realizamos insere-se nos conteúdos teóricos sobre o movimento de projéteis abordados nas aulas teóricas. O estudo deste movimento, dividido em duas componentes (horizontal e vertical), permite aplicar as leis de Newton e as equações da cinemática com o objetivo de calcular parâmetros tais como a altura máxima, o tempo de voo e o alcance.

# Capítulo 3

## Detalhes experimentais relevantes

Ao longo deste capítulo abordamos os detalhes experimentais relevantes, entre os quais, o material utilizado durante o recorrer da atividade experimental, como também, o procedimento e algumas das preocupações ao longo da atividade.

### 3.1 Material Utilizado

Para realizar esta atividade experimental foi utilizado o seguinte material:

- Caneta
- Lançador de projéteis
- Sensores de passagem
- Sensor de impacto
- Esfera metálica
- Fita métrica
- Papel milimétrico
- Papel químico
- Tubo de plástico

### 3.2 Procedimento e Precauções Experimentais

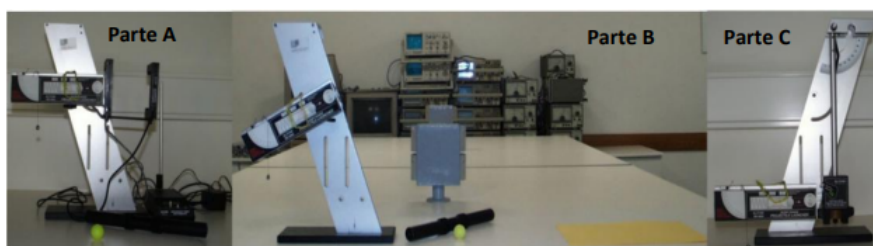


Figura 3.1: Diferentes fases da atividade experimental

Nesta atividade laboratorial foram realizados 3 procedimentos diferentes. Começamos por determinar a velocidade inicial do projétil. De seguida, analisamos de que forma o alcance variava consoante a alteração dos ângulos de disparo, e, finalmente, determinamos a velocidade inicial do mesmo projétil, mas, com recurso ao pêndulo balístico.

### 3.2.1 Parte A - Determinação da velocidade inicial

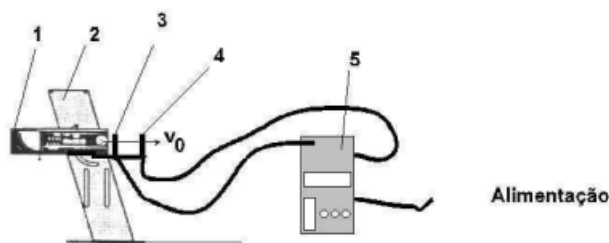


Figura 3.2: Esquema da montagem da parte A

Inicialmente fizemos a montagem de acordo com a figura, fixando a base (2) à mesa com um grampo adequado e colocamos o LP (1) na posição horizontal. Também garantimos que o sistema de controle (5) estava ligado à fonte de alimentação e que se encontrava na posição de desligado (OFF). Por fim, garantimos que o sensor (3) estava colocado imediatamente à saída do LP (1) e que o sensor (4) estava ligado ao sistema de controle. Tomando todas estas precauções, medimos a distância entre os dois sensores e colocamos o LP na posição "SHORT RANGE". Após termos o LP carregado na posição "SHORT RANGE", colocamos a esfera no LP, empurrando-a cada vez mais para o interior até o indicador amarelo se encontrasse na posição desejada. Isto foi feito com o auxílio de um tubo de plástico. Após termos a certeza que estava tudo conforme planeado, posicionamos o sistema de controle na configuração "TWO GATES" e carregamos em START/STOP, tendo a certeza que a horizontalidade do LP estava bem. Depois uma pessoa do grupo ficou responsável pelo disparo e as restantes registaram o tempo que estava indicado no sistema de controle. Obtivemos assim 3 medidas, visto que repetimos todo o procedimento 3 vezes.

### 3.2.2 Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo

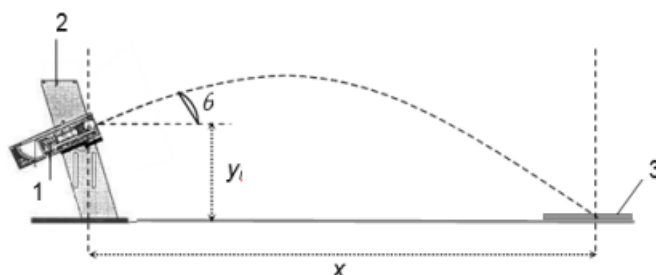


Figura 3.3: Esquema da montagem da parte B

Nesta fase, realizamos a montagem de acordo com a figura, prendendo firmemente a base (2) à mesa utilizando um grampo adequado e ajustando o LP de forma a que ficasse inclinado e formasse um ângulo de  $30^\circ$  em relação à linha horizontal.

Começamos então por ajustar a distância a que o papel químico e o milimétrico iriam ficar através de sucessivas tentativas para assegurar que a esfera fosse cair na superfície. Após isso, definimos o ângulo inicial de  $30^\circ$ , como era proposto, e carregamos o LP na posição "SHORT RANGE". Com tudo a funcionar como o esperado, uma das pessoas ficou responsável por disparar o LP e averiguar se o ângulo de lançamento se mantinha sempre constante, enquanto que as outras duas pessoas registaram o alcance obtido. Após os primeiros 3 lançamentos para o ângulo de  $30^\circ$ , mudamos o valor do ângulo sucessivamente para  $34^\circ$ ,  $38^\circ$ ,  $40^\circ$  e  $43^\circ$  e fizemos mais 3 lançamentos em cada destes ângulos. Finalmente, também medimos a altura ( $y_i$ ) a que a esfera plástica foi lançada, como pedido no enunciado.



### 3.2.3 Parte C - Pêndulo Balístico: Método alternativo para determinação da velocidade inicial de um projétil

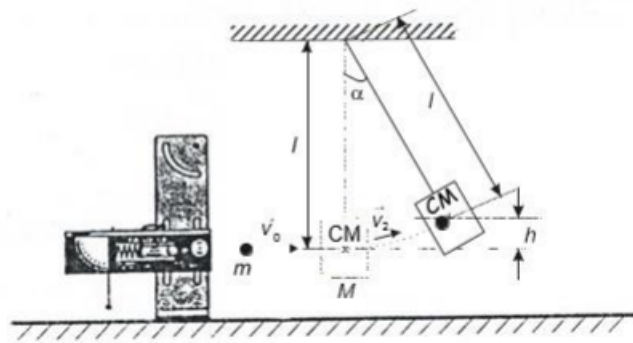


Figura 3.4: Esquema da montagem da parte C

Esta fase da atividade visa também determinar a velocidade inicial do projétil, mas desta vez com um pêndulo balístico. Procedemos então à montagem de acordo com a figura e asseguramos que a base estava bem presa à mesa. Começamos por medir a massa do projétil ( $m$ ) e do pêndulo ( $M$ ). Fizemos ainda a medição do comprimento do pêndulo ( $l$ ). Carregamos o LP em “SHORT RANGE” e fizemos 5 disparos, medindo em cada um deles o ângulo máximo,  $\alpha$ , descrito pelo pêndulo.

# Capítulo 4

## Análise e discussão

Neste capítulo apresentamos todos os cálculos realizados ao longo de cada procedimento mencionado no capítulo anterior. Para além disso, debatemos e interpretamos cada um dos resultados obtidos, assim como, comparamos, os mesmos, com os resultados teóricos.

### 4.1 Parte A - Determinação da velocidade inicial

Primeiramente começamos por medir o tempo que a bola demorava a passar entre as duas células, fazendo assim cinco medições e calculando a média dessas mesmas medições. O erro destas cinco medições é 0,0001s.

Posteriormente, calculamos a distância entre as duas células (10cm = 0.1m) e substituímos essa mesma distância na fórmula da velocidade inicial. Substituímos também a média do tempo calculada anteriormente na fórmula, levando a que a velocidade inicial fosse aproximadamente 2.2422 m/s.

Média dos tempos obtidos:

$$\Delta t = \frac{0.0439 + 0.0457 + 0.0444 + 0.439 + 0.453}{5} \approx 0.0446$$

$$v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Velocidade inicial:

$$v_0 = \frac{0.1 \text{ m}}{0.0446 \text{ s}}$$

$$v_0 \approx 2.2422 \text{ m/s}$$

### 4.2 Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo

Para o início da parte B fizemos uma média das medidas que realizamos para o alcance obtido em cada um dos ângulos.

1. 30°

$$\theta = \frac{76.7 + 75.3 + 76.5}{3} \approx 76.17 \text{ cm}$$

2. 34°

$$\theta = \frac{74.1 + 73.1 + 76.4}{3} \approx 74.53 \text{ cm}$$

3. 38°

$$\theta = \frac{77.1 + 76.5 + 75.9}{3} \approx 76.50 \text{ cm}$$

4. 40°

$$\theta = \frac{76.0 + 76.4 + 76.4}{3} \approx 76.27 \text{ cm}$$

5.  $43^\circ$

$$\theta = \frac{75.4 + 75.1 + 75.3}{3} \approx 75.27 \text{ cm}$$

Como nesta atividade experimental, era expectável obtermos uma função contínua, e o mesmo não acontecia ao usarmos o ângulo de  $34^\circ$ . Com isto, decidimos remover o mesmo, dado que poderá ter ocorrido um erro aleatório, que influenciava na exatidão dos resultados.

Após a análise destas médias, concluímos que a média dos alcances dos ângulos não teve grandes oscilações. No entanto, esta aumentou 33 cm entre o ângulo de  $30^\circ$  e o ângulo de  $38^\circ$  (estamos a omitir comparações com o ângulo de  $34^\circ$  visto que obtivemos um erro experimental na medição deste ângulo). Depois no ângulo de  $40^\circ$  o alcance apenas foi aproximadamente 10 cm maior do que no ângulo inicial de  $30^\circ$  e no ângulo de  $43^\circ$  também aconteceu o mesmo. Após esta breve análise determinamos o max que estava associado ao maior alcance.

De seguida passamos à determinação do  $\theta_{\max}$  correspondente ao maior alcance da seguinte forma (para todos os casos assumimos  $g = 9.8$ ):

$$\begin{aligned}\theta_{\max} &= \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2.2422}{v^2} \right)}} \right) \\ &= \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2.9.8 \cdot 0.262}{(2.2422)^2} \right)}} \right) \\ &\approx 35,12^\circ\end{aligned}$$

Analisando o ângulo máximo obtido, retiramos que o mesmo é superior ao ângulo teórico ( $31.65^\circ$ ).

## 4.3 Parte C - O Pêndulo Balístico

Na etapa final da atividade laboratorial, começamos por calcular a média dos ângulos obtidos a partir dos cinco lançamentos realizados.

**Nota:** A incerteza das medidas da massa é  $\pm 0.5$  (medida apresentada na balança).

$$\alpha = \frac{16.5 + 17.0 + 17.0 + 16.5 + 17.0}{5} \approx 16.8^\circ$$

Passando ao cálculo do valor da altura  $h$ , temos que:

$$\begin{aligned}h &= L(1 - \cos \alpha) \\ h &= 0.262(1 - \cos (16.8^\circ)) \\ &\approx 0.01280412 \text{ m} \\ &= 1.28 \text{ cm}\end{aligned}$$

O seu erro  $\Delta h$  é assim calculado:

$$\begin{aligned}\Delta h &= \left| \frac{dh}{dL} \right| \Delta L + \left| \frac{dh}{d\alpha} \right| \Delta \alpha \\ \Delta h &= (1 - \cos(\alpha)) \Delta L + (L \cdot \sin(\alpha)) \Delta \alpha \\ \Delta h &= (1 - \cos(16.8^\circ)) \cdot 0.0005 + (0.282 \cdot \sin(16.8^\circ)) \cdot 0.0087 \\ \Delta h &= 0,000730 \text{ m}\end{aligned}$$

Após obtermos a altura, deduzimos a expressão da velocidade, e substituímos o seu valor nessa mesma expressão:

$$\frac{1}{2}v^2 = g \cdot h$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{m}{m+M} \right)^2 v_0^2 = g \cdot h$$

$$v_0 = \left( \frac{m+M}{m} \right) \sqrt{2gh}$$

$$v_0 = \left( \frac{0.065 + 0.265}{0.065} \right) \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.0128}$$

$$v_0 = 2,54 \text{ m/s}$$

O seu erro  $\Delta v$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Delta v = \left| \frac{dv}{dm} \right| \Delta m + \left| \frac{dv}{dM} \right| \Delta M + \left| \frac{dv}{dh} \right| \Delta h$$

$$\Delta v = \left( M \frac{\sqrt{2gh}}{m^2} \right) \times \Delta m + \left( \frac{\sqrt{2gh}}{m} \right) \times \Delta M + \left( \left( 1 + \frac{M}{m} \right) \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}} \right) \times \Delta h$$

$$\Delta v = 0,255 \text{ m/s}$$

Por fim, verificamos, a diferença entre a velocidade inicial  $v_0$  da Parte A com a velocidade calculada no último procedimento da parte C (pêndulo balístico):

$$\text{Diferença (\%)} = \left( \frac{v_{\text{Maior}} - v_{\text{Menor}}}{v_{\text{Menor}}} \right) \times 100$$

$$\text{Diferença (\%)} = \left( \frac{2.54 - 2.2422}{2.2422} \right) \times 100$$

$$\text{Diferença (\%)} = 13.28\%$$

Assim sendo, podemos concluir que  $v_0$  da Parte C é 13.28% maior que  $v_0$  da Parte A.

## Capítulo 5

# Conclusões

Ao realizarmos esta atividade laboratorial conseguimos passar aquilo que foi lecionado e interiorizado nas nossas aulas teóricas sobre o tema do lançamento dos projéteis para a parte prática, ou seja, foi possível verificar as diferenças que existiam aquando da mudança dos valores da velocidade na trajetória do projétil e dos ângulos de lançamento. Obtivemos também um erro relativamente significativo numa das partes do trabalho, o que iria alterar por completo o nosso gráfico de da parte C. Através deste erro, foi possível averiguar a grande importância da precisão nas medições de modo a assegurar resultados precisos.

# Capítulo 6

## Anexos

### 6.1 Anexos

Ângulo	1º Lançamento	2º Lançamento	3º Lançamento	Média
30º	76,7 cm	75,3 cm	76,5 cm	76,17 cm = 0,7617 m
34º	74,1 cm	73,1 cm	76,4 cm	74,53 cm = 0,7453 m
38º	77,1 cm	76,5 cm	75,9 cm	76,50 cm = 0,7650 m
40º	76 cm	76,4 cm	76,4 cm	76,27 cm = 0,7627 m
43º	75,4 cm	75,1 cm	75,3 cm	75,27 cm = 0,7527 m

Figura 6.1: Tabela referente à parte B

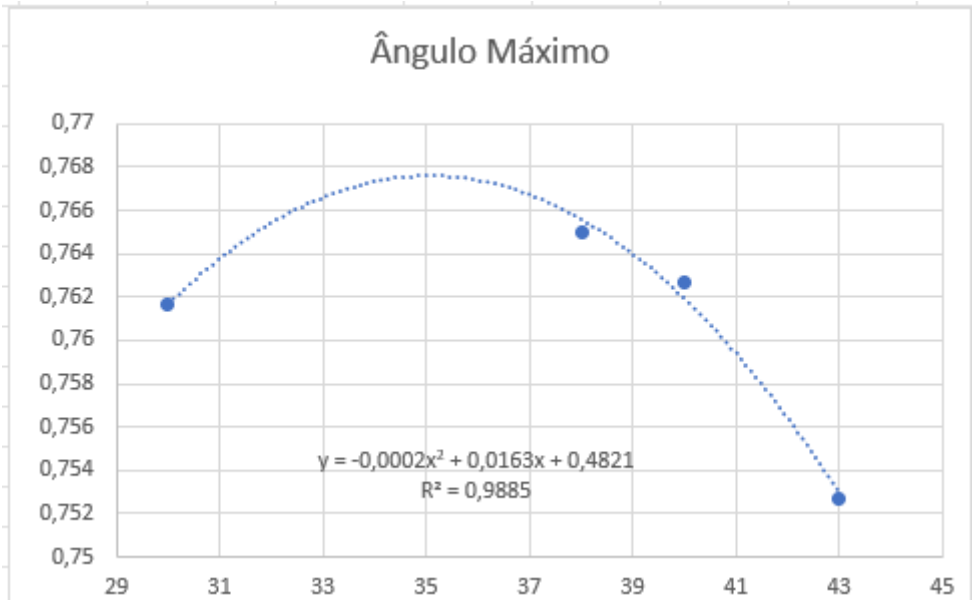


Figura 6.2: Variação da altura em função do ângulo

PARTE C					
	Massas	Incerteza Balança	Comprimento		
Pêndulo	265 g		28,2 cm = 0,282 m		
Bola	65 g		x		
1º Lançamento	2º Lançamento	3º Lançamento	4º Lançamento	5º Lançamento	Média
16,5º	17º	17º	16,5º	17º	16,8º / 0.293215 radianos
Altura (h)					
0,01280412					
$\Delta$ ângulo graus/radianos		$\Delta$ altura			
0,5/0,0087		0,00073			

Figura 6.3: Tabela parte C