· U C · FEUC FACULDADE DE ECONOMIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Álgebra Linear **Data**: 06/02/2021
Exame de Recurso **Duração**: 2h00

1. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vetores $u = (2, 1, -1)$ e $v = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$.
   (a) Encontre $k \in \mathbb{R}$ de forma a que o vector $w = (-13, -7, k)$ seja uma combinação linear de u e v.
   (b) Determine $z \in \mathbb{R}^3$ de modo que $\{\frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v, z\}$ seja um conjunto ortonormal.

2. Considere o sistema $AX = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & \alpha & 2 \\ 4 & 6 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ \beta \end{bmatrix}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (a) Faça a condensação da matriz completa $[A|b]$ e indique a característica da matriz A, $C(A)$, para os diferentes valores reais de α.
   (b) Discuta, para todos os valores reais de α e β, o sistema $AX = b$.
   (c) Considere $\alpha = 6$ e $\beta = -4$:
      i. Determine o núcleo da matriz A.
      ii. Mostre que o vetor $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ é uma solução particular do sistema não homogéneo $AX = b$. Usando a alínea anterior, 2.(c)i., justifique qual a solução geral do sistema $AX = b$.

3. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.
   (a) Determine os valores próprios de B e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
   (b) Determine os espaços próprios associados aos valores próprios de B e indique as multiplicidades geométricas respectivas.
   (c) Usando as alíneas anteriores, indique os valores e vetores próprios da matriz C dada por
$$C = 3 \times (B^T)^2.$$

4. Mostre que toda a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com n ímpar, que satisfaz a propriedade $A^T = -A$ (isto é, A é anti-simétrica), é uma matriz singular.

Cotação: Todas as alíneas valem 2 valores.
Respostas sem justificação não serão consideradas.