· U C · FEUC FACULDADE DE ECONOMIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Exame recurso de Álgebra Linear

Ano letivo: 2019/2020 Sem.: 1º Época: Recurso Data: 7/02/2020

Curso: Licenciatura em Economia Duração: 2h 00m

A integridade académica é um valor fundamental da FEUC. O Regulamento Pedagógico da UC proíbe e sanciona as várias formas de fraude académica. Durante a realização das provas escritas é exigido que: **Não usem materiais de consulta, máquinas calculadoras gráficas ou quaisquer outros equipamentos eletrónicos, exceto se tal for explicitamente permitido pelo responsável da unidade curricular em causa; não transmitam as questões da prova a outras pessoas; mantenham desligados quaisquer equipamentos de comunicação; usem exclusivamente as folhas de exame fornecidas pelos vigilantes da prova.** A comprovada fraude académica determina a anulação da prova, a impossibilidade de o/a Estudante concluir a unidade curricular com aproveitamento, a comunicação ao Diretor da FEUC e, eventualmente, a comunicação ao Reitor, para aplicação de sanções disciplinares.

1. Considere, em $\Re^3$, os vetores $u = (-2,2,2)$, $v = (-1, 1,0)$ e $z = (1,1,0)$, e a matriz $A \epsilon\ \Re^{3\times3}$, tal que, Au=u, Av=v e Az=2z:
   a. Encontre o vetor w de $\Re^3$ que seja combinação linear de de u e v e ortogonal a u.
   b. Verifique que o conjunto $\{u,w,z\}$ é um conjunto ortogonal e a partir deste escreva um conjunto ortonormal com três elementos.
   c. Calcule a matriz $A \epsilon\ \Re^{3\times3}$ a partir da sua decomposição espetral. Justifique.

2. Considere as matrizes B e C $\epsilon\ \Re^{4\times4}$ e os vetores x e b $\epsilon\ \Re^4$, tais que:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \propto & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\ e\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}; \propto e\ \beta \epsilon\ \Re$$

   a. Calcule B^{-1} pelo método de Gauss-Jordan.
   b. Discuta o sistema $C^T x = B^{-1} b$ para todo $\propto, \beta \in \Re$.
   c. No caso em que o sistema da alínea anterior é indeterminado apresente o conjunto solução (caso não tenha resolvido a alínea anterior faça $\propto = 0\ e\ \beta = 1/2$).

3. Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:
   a. Calcule os valores próprios da matriz D.
   b. Apresente o espaço próprio associado ao valor próprio de maior multiplicidade algébrica.
   c. Diga se a matriz D é diagonalizável e, se sim, construa as matrizes S e Λ tal que $D = S \Lambda S^{-1}$.

4. Demonstre que o produto dos valores próprios de qualquer matriz é igual ao seu determinante.

Cotação: Todas as alíneas valem 2 valores.
Respostas sem justificação não serão consideradas.