UC · FEUC FACULDADE DE ECONOMIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Exame Final de Álgebra Linear

Ano letivo: 2020/2021 Sem.: 1º Época: Normal Data: 15/01/2021

Curso: Licenciatura em Economia Duração: 2h 00m

A integridade académica é um valor fundamental da FEUC. O Regulamento Pedagógico da UC proíbe e sanciona as várias formas de fraude académica. Durante a realização das provas escritas é exigido que: **Não usem materiais de consulta, máquinas calculadoras gráficas ou quaisquer outros equipamentos eletrónicos, exceto se tal for explicitamente permitido pelo responsável da unidade curricular em causa; não transmitam as questões da prova a outras pessoas; mantenham desligados quaisquer equipamentos de comunicação; usem exclusivamente as folhas de exame fornecidas pelos vigilantes da prova.**
A comprovada fraude académica determina a anulação da prova, a impossibilidade de o/a Estudante concluir a unidade curricular com aproveitamento, a comunicação ao Diretor da FEUC e, eventualmente, a comunicação ao Reitor, para aplicação de sanções disciplinares.

1. Considere, em $\Re^3$, os vetores u_1=(4,4,2), u_2=(4,-2,-4) e u_3=(2,-4,4).
   a. Verifique que u_1 não é combinação linear dos vectores u_2 e u_3.
   b. Verifique que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto ortogonal e, a partir deste, escreva um conjunto ortonormal.
   c. Considere agora matriz U$\in \Re^{3\times3}$, cujas colunas são dadas pelos vectores u_1, u_2 e u_3 respectivamente. Calcule a matriz U^2. Use, agora, os cálculos realizados para justificar que U^2 é uma matriz escalar, e para obter a matriz inversa de U (ou seja, U^{-1}).

2. Considere o sistema com três (3) equações a três (3) incógnitas, dado por:

$$\begin{cases} x+y-z=\beta \\ x+z=4 \\ \alpha x+2y+(4-\beta)z=12 \end{cases}, \qquad \alpha,\beta \in \Re.$$

   a. Com base na condensação da matriz ampliada do sistema, determine para que valores de $\alpha, \beta \in \Re$, o sistema é:
      i. Possível e determinado; ii. Possível e indeterminado; iii. Impossível.
   b. Determine o conjunto solução para o caso em que $\alpha = 2$ e $\beta = 6$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
   a. Determine a inversa de A pelo algoritmo de Gauss–Jordan.
   b. Calcule o determinante da matriz A, e a sua matriz adjunta, $adj(A)$.
   c. Calcule/identifique os valores próprios e determine os espaços próprios associados aos valores próprios da matriz A.
   d. Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável, e, em caso afirmativo, encontre S e Λ tal que A=SΛS^{-1}.

4. Mostre que toda a matriz $B \in \Re^{3\times3}$ que satisfaz a propriedade $B^T = -B$ (isto é, B é anti−simétrica), é uma matriz singular.

Comece a resolver os exercícios na segunda página de prova, deixando a primeira em branco.
Cotação: Todas as alíneas valem 2 valores.
Respostas sem justificação não serão consideradas.