· U C · FEUC FACULDADE DE ECONOMIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

2ª Frequência de Álgebra Linear

Ano letivo: 2019/2020 Sem.: 1º Época: Normal Data: 15/01/2020

Curso: Licenciatura em Economia Duração: 2h 00m

A integridade académica é um valor fundamental da FEUC. O Regulamento Pedagógico da UC proíbe e sanciona as várias formas de fraude académica. Durante a realização das provas escritas é exigido que: **Não usem materiais de consulta, máquinas calculadoras gráficas ou quaisquer outros equipamentos eletrónicos, exceto se tal for explicitamente permitido pelo responsável da unidade curricular em causa; não transmitam as questões da prova a outras pessoas; mantenham desligados quaisquer equipamentos de comunicação; usem exclusivamente as folhas de exame fornecidas pelos vigilantes da prova.**
A comprovada fraude académica determina a anulação da prova, a impossibilidade de o/a Estudante concluir a unidade curricular com aproveitamento, a comunicação ao Diretor da FEUC e, eventualmente, a comunicação ao Reitor, para aplicação de sanções disciplinares.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e os vetores $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e b = (2,2,0,0).
   a. Calcule o determinante de A, referindo o método/propriedades que utilizar.
   b. Calcule os elementos da 3ª linha da matriz inversa de A, utilizando determinantes.
   c. Utilizando a alínea anterior, calcule x_3, solução parcial do sistema Ax=b.
   d. Caso seja possível, utilize a regra de Cramer para calcular a solução do sistema Ax=b.

2. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
   a. Utilizando a definição de vetor próprio, verifique se o vetor $v = (1,2,2,1)$ é vetor próprio de B.
   b. Calcule os valores próprios da matriz B e as respetivas multiplicidades algébricas.
   c. Defina os espaços próprios associados ao valor próprio de menor valor absoluto.
   d. Diga, justificando, se a matriz B é diagonalizável e, em caso afirmativo, escreva as matrizes S e Λ, tal que $B = S\Lambda S^{-1}$.

3. Considere a matriz C∈ $R^{3\times 3}$ tal que $C = C^T$ e cujos espaços próprios associados são:

   $E(1) = \{\alpha(1,1,0);\ \alpha \in R\}$ e

   $E(3) = \{\beta(-1,1,0) + \gamma(-1,1,1);\ \beta, \gamma \in R\}$.

   Encontre a matriz C utilizando a respetiva decomposição espectral.

4. Demonstre que para qualquer matriz D ∈ $R^{n\times n}$, vetores próprios associados a valores próprios diferentes são linearmente independentes entre si.

Comece a resolver os exercícios na segunda página de prova, deixando a primeira em branco.
Cotação: Todas as alíneas valem 2 valores.
Respostas sem justificação não serão consideradas.