Tópicos de resolução do Exame de Recurso de Álgebra Linear (versão 1)

1. (a) O vetor w é uma combinação linear de u e v se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : w = \alpha u + \beta v$.

$$(-13,-7,k) = \alpha(2,1,-1) + \beta(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \frac{1}{3}\beta = -13 \\ \alpha + \frac{1}{3}\beta = -7 \\ -\alpha + \beta = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = -3 \\ k = 3 \end{cases}.$$

R: Para $k = 3$, w é uma combinação linear de u e v.

(b) Calcule-se um vetor $\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3)$ ortogonal aos vetores u e v, isto é, um vetor $\tilde{z}$ tal que $< \tilde{z}, u >= 0$ e $< \tilde{z}, v >= 0$. Então

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 - z_3 = 0 \\ \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + z_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 + z_2 - z_3 = 0 \\ \frac{7}{3}z_1 + \frac{4}{3}z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_3 = -\frac{1}{7}z_2 \\ z_1 = -\frac{4}{7}z_2 \end{cases}.$$

Portanto, qualquer vetor da forma $(-\frac{4}{7}z_2, z_2, -\frac{1}{7}z_2), z_2 \in \mathbb{R}$ é ortogonal aos vetores u e v. Por exemplo, para $z_2 = 7$, $\tilde{z} = (-4, 7, -1)$.

Note-se que $< u, v >= 2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} - 1 \times 1 = 0$ e portanto os vetores u e v são ortogonais. Desta forma, o conjunto $\{u, v, \tilde{z}\}$ é um conjunto ortogonal de vetores. Para encontrar um conjunto ortonormal a partir deste basta dividir os vetores pelas suas normas. Como

$$\|\tilde{z}\| = \sqrt{16 + 49 + 1} = \sqrt{66},$$

o conjunto $\{\frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v, z\}$ é um conjunto ortonormal para $z = \frac{1}{\sqrt{66}}\tilde{z} = (-\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}, -\frac{1}{\sqrt{66}})$.

2. (a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & \alpha & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \\ L_4 = L_4 - 4L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & \alpha+3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & \alpha-4 & \beta+4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 = L_3 - 3L_2 \\ L_4 = L_4 - 2L_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-6 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & \beta \end{array}\right].$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 6\}$ então $C(A) = 4$.

Se $\alpha = -2$ ou $\alpha = 6$ então $C(A) = 3$.

(b) Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 6\}$ então o sistema é possível determinado $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = -2$ e $\beta = 0 \vee \alpha = 6$ e $\beta = -4$ o sistema é possível indeterminado.

Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq 0 \vee \alpha = 6$ e $\beta \neq -4$ o sistema é impossível.

(c) i. $\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\}$.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ -y + 3z - 3t = 0 \\ 8t = 0 \\ 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5z \\ y = 3z \\ t = 0 \\ - \end{cases}.$$

$\mathcal{N}(A) = \{(-5z, 3z, z, 0), z \in \mathbb{R}\}$.

ii. Seja x_h a solução geral do sistema homogéneo $AX = 0$ e x_p uma solução particular do sistema não homogéneo $AX = b$. Então,

$$Ax_h = 0 \text{ e } Ax_p = b.$$

Desta forma,

$$Ax_h + Ax_p = 0 + b \Leftrightarrow A(x_h + x_p) = b.$$

Portanto, a solução geral do sistema $AX = b$ é $x_h + x_p$.
Assim, a solução geral do sistema $AX = b$ é $\{(-5z + \frac{1}{2}, 3z - \frac{1}{2}, z, -\frac{1}{2}), z \in \mathbb{R}\}$.

3. (a) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)[(7-\lambda)^2 - 4]$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 5 - \lambda = 0 \vee (7-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee 7 - \lambda = 2 \vee 7 - \lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = 5 \vee \lambda = 9$.

$m.a.(\lambda = 5) = 2; m.a.(\lambda = 9) = 1$.

(b) $E(9)$:

$$(A - 9I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - (-L_1)]{} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; m.g.(\lambda = 9) = 1.$$

$$\begin{cases} -2u_1 + 2u_3 = 0 \\ -4u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_3 \\ u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$E(9) = \{(u_3, 0, u_3), u_3 \in \mathbb{R}\} = \{u_3(1, 0, 1), u_3 \in \mathbb{R}\}$.

$E(5)$:

$$(A - 5I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; m.g.(\lambda = 5) = 2.$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 2u_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -u_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$E(5) = \{(-u_3, u_2, u_3), u_2, u_3 \in \mathbb{R}\} = \{u_2(0,1,0) + u_3(-1,0,1), u_2, u_3 \in \mathbb{R}\}.$

(c) Se λ é valor próprio de B, $\exists u$ não nulo tal que $Bu = \lambda u$. Então,

$Cu = 3(B^T)^2 u = 3B^T(B^T u) = 3B^T \lambda u = 3\lambda B^T u = 3\lambda\lambda u = 3\lambda^2 u.$

Logo, se λ é valor próprio de B, $3\lambda^2$ é valor próprio de C.

Portanto os valores próprios de C são $25 \times 3 = 75$ e $81 \times 3 = 243$.

Os vetores próprios de C coincidem com os vetores próprios de B.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com n ímpar, uma matriz que satisfaz $A^T = -A$.

Então, $det(A^T) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$, pois n é ímpar.

Como $det(A) = det(A^T)$ e $det(A^T) = -det(A)$ vem

$det(A) = -det(A) \Leftrightarrow 2det(A) = 0 \Leftrightarrow det(A) = 0.$

Logo A é singular.