Álgebra Linear e Geometria Analítica

Modelo input-output de Leontief

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Modelo Económico de Leontief

- Suponhamos que a economia de uma nação está dividida em n setores que produz bens e serviços não só para si mas também para os outros setores.
- seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor produção que lista o output de cada setor por ano.
- Existe outra parte da economia (chamada setor aberto) que não produz bens e serviços mas que apenas consome.
- Cada setor precisa de demanda intermédia (ou demanda interna-input) para produzir os seus próprios produtos.
- Seja d um vetor de demanda final (ou demanda externa) que lista os valores dos bens e serviços que são solicitados pelos vários setores que não produzem e que fazem parte da economia.

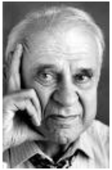

Figure: Wassily Leontief (prémio Nobel em 1973).

Estes vários setores produzem bens para satisfazer as necessidades do consumidor final mas, cada um deles precisa de input para a sua própria produção. Leontief mostrou que as saídas de um setor são as entradas de outro, mostrando uma interrelação entre eles, ou seja, o seguinte equilíbrio é válido para o nível de produção x:

$$x = A + d \tag{1}$$

onde

- $A=$ demanda interna (input) necessária para a sua própria produção.
- d = demanda externa final

A hipótese básica do model input-output de Leontief é que, para cada setor existe um vetor de consumo (por unidade) em $\mathbb{R}^n$ que lista os inputs necessários (por unidade) dos outputs de cada setor. Todos os inputs e outputs são medidos em unidade monetária e não em quantidades.

Example

Suponhamos que a economia é constituída por três setores: Manufaturação, Agricultura e Serviços com vetores de consumo por unidade c_1, c_2, c_3 como mostra a tabela.

Comprado de:		input consumido por unidade de output	
	Manufaturação	Agricultura	Serviços
Manufaturação:	0.50	0.40	0.20
Agricultura:	0.20	0.30	0.10
Serviços:	0.10	0.10	0.30
	c_1	c_2	c_3

Que quantidade será consumida pelo setor da Manufaturação se este decidir produzir 100 unidades de produto?

Note-se que c_1 é o vetor de consumo por unidade.

$$100c_1 = 100 \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.20 \\ 0.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Assim, para produzir 100 unidades de output o setor da Manufaturação consome 50 unidades de outras partes da Manufaturação, 20 unidades da agricultura e 10 unidades dos serviços.

Se a manufaturação decide produzir x_1 unidades de output, então $x_1 c_1$ representa a demanda interna da Manufaturação, porque as quantidades em $x_1 c_1$ serão consumidas no processo de x_1 unidades de output. Da mesma forma, se x_2 e x_3 denotam o output planeado para os setores da Agricultura e Serviços, então $x_2 c_2$ e $x_3 c_3$ são os vetores que correspondem à sua demanda interna (input).

O total das necessidades intermédias é dado por:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 = Cx, \tag{2}$$

onde C é a matriz de consumo

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

As equações (1) e (2) ilustram o modelo de Leontief.

Modelo de Leontief ou equação de produção

$$x = Cx + d$$

onde

- x é o vetor de produção
- C é chamada matriz da produção
- Cx é o vetor de demanda interna
- d demanda externa final

A matriz de produção é construída a partir dos vetores de consumo. A sua j- ésima coluna é o j-ésimo vetor de consumo e contém o input necessário de cada um dos setores para o setor j produzir uma unidade de output.
A equação anterior pode ser escrita na forma

$$Ix - Cx = d \Leftrightarrow (I - C)x = d. \tag{4}$$

Exemplo

Considere a economia cuja matriz de consumo é dada por (5). Suponhamos que a demanda final é produzir 50 unidades da manufaturação, 30 unidades para a agricultura, e 20 unidades para os serviços. Encontre o vetor de produção x que satisfaz esta necessidade.
Solução:

$$I - C = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 20 \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

Ora

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 & |50 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 & |30 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 & |20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 & |500 \\ -2 & 7 & 1 & |300 \\ -1 & -1 & 7 & |200 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & |226 \\ 0 & 1 & 0 & |119 \\ 0 & 0 & 1 & |78 \end{bmatrix}$$

A última coluna foi arredondada à unidade mais próxima. A Manufaturação deve produzir 226 unidades, a agricultura 119 unidades e os serviços 78 unidades de produto.

Se $I - C$ é invertível então

$$x = (I - C)^{-1} d.$$

O terema seguinte mostra que na maior parte dos casos $I - C$ é invertível e o vetor de produção é economicamente viável no sentido em que as entradas em x são não negativas.

Teorema

Seja C a matriz de consumo para uma economia e d o vetor de demanda final. Se C e d têm entradas não negativas e se cada soma das colunas de C é menor do que 1 então $(I - C)^{-1}$ existe e o vetor de produção $x = (I - C)^{-1} d$ tem entradas não negativas e é a única solução para $x = Cx + d$.

Exemplo

Suponhamos que uma economia tem 2 setores: bens e serviços. Uma unidade de output de bens requer 0.2 unidades de bens e 0.5 unidades de serviços. Uma unidade de output de serviços requer 0.4 unidades de bens e 0.3 unidades de serviços. A demanda final é de 20 unidades de bens e de 30 unidades de serviços. Escreva o modelo económico de Leontief para esta situação.

Solução:

Comprado de:		input consumido por unidade de output	
	bens	serviços	demanda final
bens:	0.2	0.4	20
Serviços:	0.5	0.3	30

O modelo económico de Leontief é então:

$x = Cx + d$ onde

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$