Departamento de Física
Universidade de Aveiro

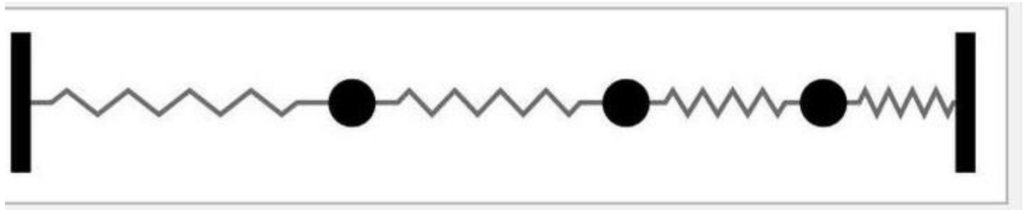
Modelação de Sistemas Físicos

13ª aula Prática

Sumário:
Realização e resolução de problemas sobre:
- Cap. 6 Osciladores acoplados.

Exercício 1: Modos normais de 3 osciladores acoplados

Três massas iguais, A, B e C, são acoplados como ilustrada no diagrama. Os constantes elásticas das molas de esquerda para a direita são *k*, *k'*, *k'* e *k*.



Pergunta 1:
As padrões de movimento nos modos normais seriam diferentes se mudamos o valor de k'?

O movimento das massas obedece o seguinte sistema de equações:

$$m\,\frac{d^2u_A}{dt^2} = -k\,u_A - k'(u_A - u_B)$$

$$m\,\frac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C)$$

$$m\,\frac{d^2u_{CA}}{dt^2} = -k\,u_C - k'(u_C - u_B)$$

Onde u_A , u_B e u_C são as posições das massas A, B e C respetivemente, relativo às suas posições de equilíbrio.

Dados: $k = 1$ N/m, $k' = 0.5$ N/m, $m = 1$ kg.

a) Calcule numericamente as frequências angulares dos 3 modos normais de oscilação deste sistema, usando as funções de análise de vetores próprios e valores próprios.

b) Faça o gráfico do movimento das massas em cada um dos modos normais, resolvendo as equações pelo método de Euler-Cromer. Descreve cada um dos modos em termos do movimento relativo das massas.

Exercício 2: *N* osciladores acoplados

Agora vamos simular N massas iguais, acopladas por molas idênticas com constantes elásticas k.
O movimento das massas obedece o seguinte sistema de equações:

$$m\,\frac{d^2u_0}{dt^2} = -k\,u_0 \; - k(u_0 - u_1)$$

$$m\,\frac{d^2u_i}{dt^2} = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1}) \qquad 1 \le i \le N-2$$

$$m\,\frac{d^2u_{N-1}}{dt^2} = \; -k\,u_{N-1} - k(u_{N-1} - u_{N-2})$$

Pergunta 2:
O que acontece se tentamos usar $l = N + 1$ ou $N + 2$?
Consegues explicar?

Dados: $k = 1$ N/m, $m = 1$ kg.

a) Simule o movimento de N=5 massas, resolvendo as equações pelo método de Euler-Cromer. Escolhe condições inicias com só uma massa com u_i diferente de 0, e todas as velocidades nulas.

Sem analisar os valores e vetores próprios do sistema, podemos provocar movimento nos modos normais se as massas começam com posições sinusoidais:

$$u_i(0) = \mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi\, i}{N+1}\,l\right)$$

onde $l = 1{,}2, \ldots, \mathrm{N}$ é o número do modo desejado, e A um amplitude qualquer.

b) Usando a fórmula sinusoidal para as posições iniciais, confirme que isso resulte num movimento sinusoidal em todas as massas.