

Análise de modelos politrópicos

I. Determinação do índice politrópico de duas estrelas

M. M. C. D. Carvalho

Departamento de Física e Astronomia (DFA-FCUP), Universidade do Porto, Rua do Campo Alegre, 4169-007 Porto
e-mail: up201604786@fc.up.pt

Received December 20, 2020; Accepted December 20, 2020

ABSTRACT

Context. Determinar os politropos que melhor descrevem duas estrelas e simular as suas propriedades internas, no contexto de um trabalho para unidade curricular Astronomia Computacional.

Aims. Pretende-se encontrar o índice politrópico das estrelas *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A*, ambas da sequência principal, de modo a poder simular a sua estrutura e quantidades termodinâmicas internas previstas pelo modelo politrópico. Esta análise também visa verificar a eficácia do modelo politrópico na descrição do interior de estrelas de diferentes tamanhos, nesta fase do seu ciclo de vida.

Methods. O procedimento que vamos usar para obter o índice politrópico baseia-se num método iterativo no qual se resolve a equação de Lane-Emden várias vezes para obter o politropo $(\xi, \theta, \frac{d\theta}{d\xi})$ que produz a luminosidade superficial mais próxima da observada. Estima-se a incerteza dos resultados por simulação de Monte Carlo variando os parâmetros de entrada (M, R, L) segundo uma distribuição gaussiana em torno do valor central dado e com a incerteza observacional dos parâmetros ($\Delta M, \Delta R, \Delta L$) como desvio padrão.

Results. Para as estrelas *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A*, obteve-se aproximadamente $n = 4.02$ e $n = 3.28$, respetivamente.

Key words. Main sequence stars – Polytropic model – Lane-Emden equation – Monte Carlo simulation

1. Introdução

Estrelas da sequência principal podem ser modeladas por politropos e as suas luminosidades podem ser calculadas tendo em conta apenas as contribuições da cadeia PP e do ciclo CNO para a fusão do Hidrogénio.

Neste trabalho, programaram-se métodos automáticos para facilitar a análise das estrelas de forma sistemática. No final, para obter o índice politrópico é necessário:

- resolver a equação de Lane-Emden;
- calcular a densidade ρ , pressão P e temperatura T a partir das quantidades adimensionais obtidas na solução da equação;
- obter as emissividades resultantes de ambos os processos nucleares referidos ε_{pp} e ε_{cno} ;
- calcular a luminosidade por integração da emissividade total no volume da estrela;
- iterar os passos anteriores para valores de n apropriados até obter a solução que reproduz a luminosidade observada da estrela.

A obtenção de resultados é muito demorada dado o número e complexidade de cálculos que é necessário efetuar para chegar a resultados úteis e minimamente precisos. Assim, grande parte do trabalho foi escolher os métodos mais eficazes e otimizar o código, de modo a minimizar o tempo de computação.

Devido a esta mesma complexidade, também é bastante difícil chegar a uma expressão analítica para incerteza do índice politrópico, o que queremos calcular, em função das incertezas dos parâmetros de entrada que damos, por exemplo, a massa, raio, luminosidade, entre outros. Para este efeito, vamos utilizar

uma simulação de Monte Carlo para calcular a distribuição de índices politrópicos possíveis e depois fazer uma análise estatística desta distribuição para tirar conclusões acerca da incerteza dos resultados obtidos.

2. Implementação

Nesta secção, discutem-se alguns aspetos importantes e peculiaridades que foi necessário ter em conta na montagem das funções e rotinas criadas. É de salientar que o aperfeiçoamento das técnicas foi sempre testado para o caso do *Sol*, no qual a maior parte dos resultados são conhecidos. Desta forma, foi possível avaliar a validade do trabalho feito.

2.1. Solução da eq. de Lane-Emden

A equação de Lane-Emden, de 2ª ordem, pode ser reduzida a duas de 1ª ordem, uma para a variável θ e outra para a sua derivada, $\frac{d\theta}{d\xi}$. Estas podem ser resolvidas numericamente como um sistema de equações acopladas, pelo método Runge-Kutta de 4ª ordem, com precisão relativamente elevada, em pouco tempo de execução do programa.

Assim, construí uma rotina que, dado um valor de n , calcula as soluções desse politropo com um passo $h = 10^{-2}$, que pode ser alterado se especificado nos argumentos passados à rotina.

Na Fig. 1, podemos ver os gráficos da ordem de grandeza dos valores de ξ e de $\frac{d\theta}{d\xi}$ obtidos à superfície para $h \in [10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}]$.

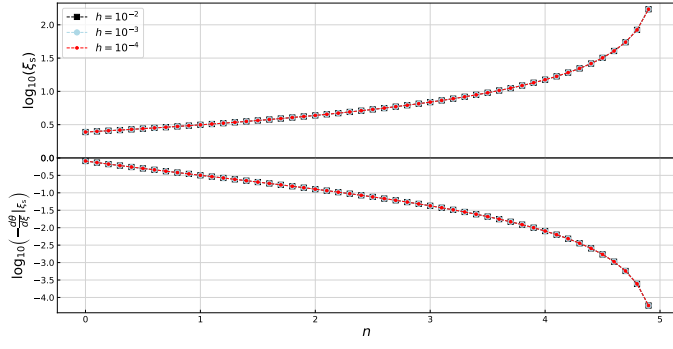


Fig. 1. Soluções de ξ_s e $\frac{d\theta}{d\xi}\big|_{\xi=\xi_s}$ em função de n .

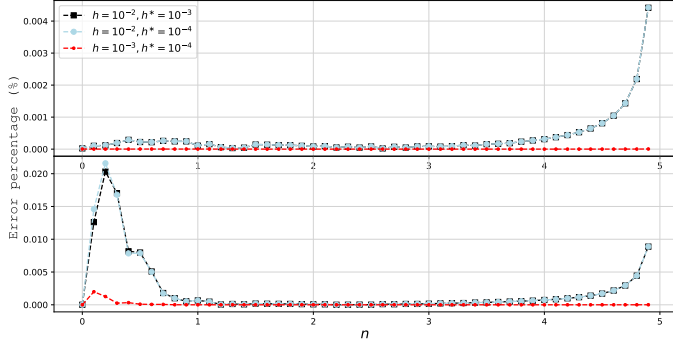


Fig. 2. Erro percentual em ξ_s (top) e $\frac{d\theta}{d\xi}\big|_{\xi=\xi_s}$ (bottom).

Já na Fig. 2, vemos o comportamento do erro percentual em ξ_s e $\frac{d\theta}{d\xi}\big|_{\xi=\xi_s}$ quando avaliados com os 3 diferentes valores de h referidos tal que:

$$\text{Error} = \frac{|\xi_s^{(h^*)} - \xi_s^{(h)}|}{\xi_s^{(h^*)}} \times 100\%, \quad h, h^* \in [10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}]. \quad (1)$$

Como poderíamos deduzir logicamente, este erro aumenta com n , pois em geral ξ_s aumenta com n , i.e. existe um erro cumulativo na aplicação do método Runge-Kutta.

No caso do *Sol*, em que $n \approx 3.19$, o erro em ξ_s seria $< 0.001\%$, ou seja, $h = 10^{-2}$ já nos garante 5 algarismos significativos em comum com $h = 10^{-4}$. Isto não parece nada mau e melhora quando comparamos $h = 10^{-3}$ com $h = 10^{-4}$, convergindo os resultados para um nível de precisão que ultrapassa o propósito deste trabalho.

O pior que obtemos é no cálculo de $d\theta/d\xi$ com $h = 10^{-2}$ para $n < 1$ e, como veremos na Sec. 3, não necessitamos de calcular nenhum valor nesta gama de n com grande precisão.

O que podemos concluir é que a diferença entre os resultados obtidos para estes valores de h é extremamente baixa e, como o cálculo demora bastante tempo usando valores menores, vamos restringir a nossa utilização do h a 10^{-2} e 10^{-3} .

2.2. Cálculo de ρ , P , T , $\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{cno}$ e L/L_\star

É de notar que o modelo politrópico prevê uma temperatura nula à superfície, pois considera a densidade do gás nula a partir de um raio bem definido, por isso, apesar de contra-intuitivo, o resultado que vamos obter para T no limite da estrela é:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_s} T = 0.$$

Esta nota estende-se às outras quantidades termodinâmicas pelo mesmo argumento, mas, na minha opinião de forma mais intuitiva.

Logo à partida, se olharmos para as expressões das emissividades (Sebenta Astro. Comp. 2020), vemos que em várias instâncias calculamos potências negativas de T . Ou seja, em $T(\xi_s) = 0$, efetivamente estamos a dividir por 0, o que é indeterminado. Por definição e, como veremos nos gráficos da emissividade (Fig. 4), ela tenderá sempre para $\varepsilon = 0$ à superfície. Então, assumimos logo esse valor no limite e não o calculamos.

Outra questão, também referente ao cálculo da emissividade, é um erro computacional que acontece para certos valores da temperatura perto da superfície na quantidade ε_0 :

$$\rho = \rho(\xi) \quad (2)$$

$$T_6 \equiv T(\xi) \cdot 10^{-6} \quad (3)$$

$$\beta(\xi) \equiv -33.8 T_6^{-1/3} + 0.27 \rho^{1/2} T_6^{-3/2} \quad (4)$$

$$\varepsilon_0 \propto \exp(\beta(\xi)) \quad (5)$$

O argumento da exponencial dado por $\beta(\xi)$ na Eq. 4 é suposto ficar cada vez mais negativo quando $\xi \rightarrow \xi_s$, tal que $\varepsilon_0 \rightarrow 0$.

No entanto, em certos casos, para alguns politropos de $n \in [0.1, 1.1]$, ρ e T_6 ficam tão pequenos que o computador não consegue lidar com a divisão no segundo termo de β , fazendo com que os valores do argumento explodam no sentido positivo perto da superfície. Este erro resulta numa emissividade ridículamente alta e completamente errada.

A maneira como consegui corrigir isto e manter todo o programa automático foi impondo que a emissividade seja assumida como nula desde a superfície até ao primeiro ponto (do exterior para o interior da estrela) cujo argumento da exponencial seja decrescente, ou seja, numérica e discretamente temos:

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 0 & , \beta(\xi_{i-1}) < \beta(\xi_i) \\ \varepsilon_0(\xi_i) & , \beta(\xi_{i-1}) \geq \beta(\xi_i) \end{cases} \quad (6)$$

Computacionalmente, o que fazemos é definir k , tal que:

$$\beta(\xi_{i-1}) < \beta(\xi_i) \quad , \forall i - 1 \geq k \quad (7)$$

e iterar regressivamente num ciclo `while` desde $i = N - 1$, onde N é o número total de pontos no array, até a condição deixar de ser válida. O último valor de i será o k , i.e. o índice até ao qual podemos calcular o ε_0 convencionalmente.

Finalmente, o cálculo da luminosidade em cada ponto implica a integração de uma função da emissividade até ao dado ponto. Isto torna impossível a utilização correta da regra de Simpson (normalmente o meu `goto` para integrar funções bem comportadas), já que apenas garantimos o número de pontos ímpar em metade dos integrais calculados. Assim, escolhi usar a regra do Trapézio dada a facilidade de programação.

2.3. Encontrar o n correto

Na procura do n , o que fazemos é procurar o valor deste que corresponda a:

$$L_n(R) = L_\star \Leftrightarrow \frac{L_n(R)}{L_\star} = 1 \Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{L_n(R)}{L_\star}\right) = 0. \quad (8)$$

Considerei as seguintes formas de resolver a Eq. 8:

- procurar o zero da função $\log_{10}\left(\frac{L_n(R)}{L_\star}\right)$:
 - método da bisseção
 - método de Newton-Raphson

- método da secante
- 2. ou procurar o mínimo da função $\left| \log_{10} \left(\frac{L_{\eta}(R)}{L_{\star}} \right) \right|$:
 - método do golden ratio
 - método da secante

Depois de alguns testes de implementação de cada um destes, o que me pareceu mais rápido e eficaz foi o método da procura com o *Golden Ratio*.

Note-se que é possível encontrar um mínimo do módulo da função (alternativamente ao zero da função normal), pois ela é monótona e possui apenas um zero, ou seja o seu módulo apenas tem um mínimo absoluto, não havendo necessidade de nos preocuparmos com possíveis ambiguidades. Estes métodos são uma boa escolha, porque implicam a avaliação apenas em pontos estritamente necessários e convergem rapidamente.

3. Aplicação e resultados

Nesta secção, apresento brevemente as estrelas escolhidas e os resultados da análise.

3.1. Dados e politropos obtidos

As estrelas *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A* foram escolhidas dos artigos Bruntt et al. (2010) e Boyajian et al. (2012a), respetivamente.

No caso da primeira, o artigo refere para cada uma das grandezas M , R e L dois conjuntos de valores, resultantes de medições diretas e indiretas. Os valores escolhidos foram os medidos diretamente, por apresentarem menor incerteza.

A tabela 1 mostra os dados retirados dos artigos e usados na análise, bem como o n e as quantidades termodinâmicas obtidas após aplicar todo o método.

Table 1. Dados *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A*

	Procyon A	11 Leonis Minoris A
M_{\star}/M_{\odot}	1.461 ± 0.025^a	0.910 ± 0.020^b
R_{\star}/R_{\odot}	2.059 ± 0.015^a	1.003 ± 0.016^b
L_{\star}/L_{\odot}	6.77 ± 0.20^a	0.784 ± 0.007^b
Y	0.2580^c	0.27^d
Z/X	0.0218^c	0.02857^d
n	$4.0246 \pm 0.0163^*$	$3.2820 \pm 0.0407^*$
ρ_c	$160.622 \pm 5.598^*$	$119.764 \pm 5.359^*$
$P_c/10^{17}$	$3.7178 \pm 0.1250^*$	$2.0402 \pm 0.0815^*$
$T_c/10^7$	$1.68343 \pm 0.00657^*$	$1.25560 \pm 0.00638^*$

^a Bruntt et al. (2010)

^b Boyajian et al. (2012a)

^c Kervella et al. (2003)

^d not given, used *Sun*'s parameters

^{*} calculated, see Sec. 4

3.2. Termodinâmica interna e emissividade

Na Fig. 3, podemos ver a comparação direta das quantidades termodinâmicas previstas pelo modelo com os índices politrópicos encontrados, nas 3 estrelas.

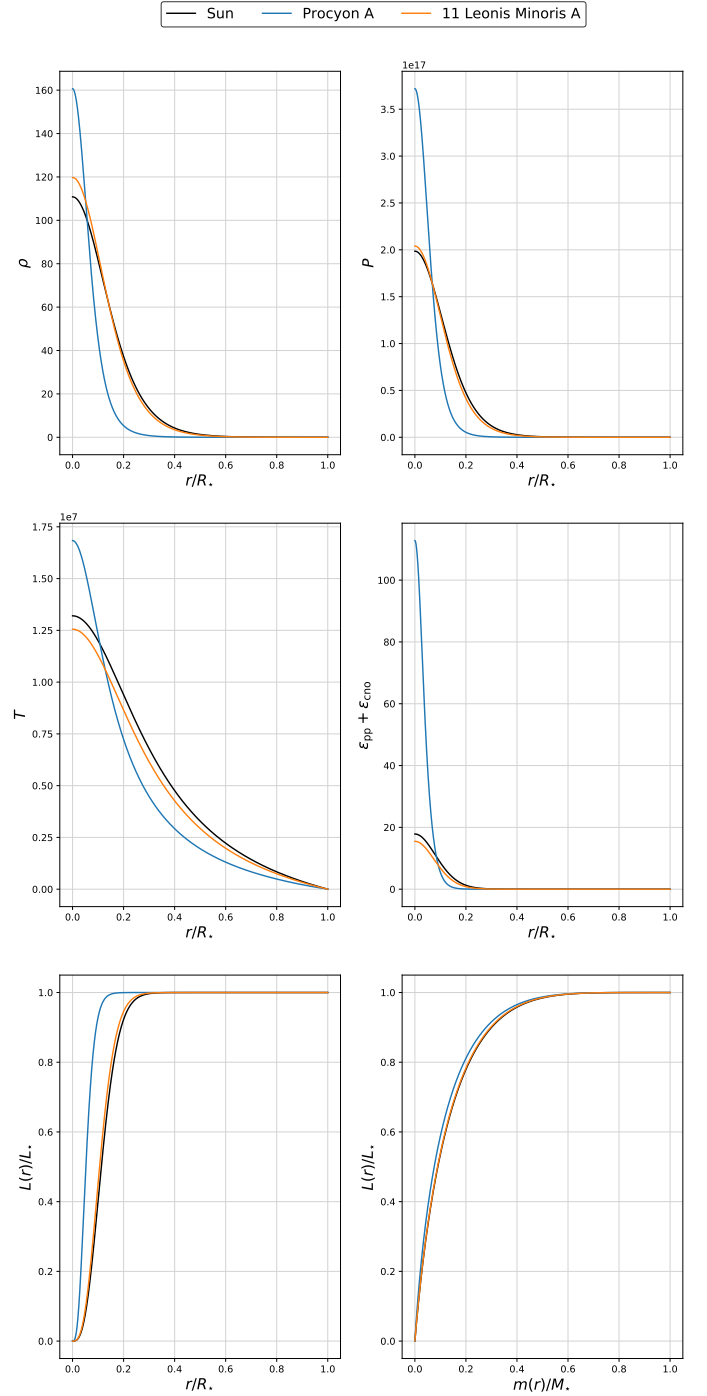


Fig. 3. Termodinâmica interna e luminosidades do *Sol*, *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A*.

A primeira coisa a notar é a correspondência entre os valores obtidos para o *Sol* e os conhecidos (Sebenta Astro. Comp. 2020), o que permite, novamente, validar o método utilizado e a implementação.

Um fator importante para verificar a solução da Eq. 8 é obtermos uma luminosidade relativa unitária à superfície, $L(R)/L_{\star} = 1$, o que se verificou para todas as estrelas, como podemos ver nos gráficos inferiores da Fig. 3.

A Fig. 4 permite ver a contribuição de cada um dos fenómenos nucleares considerados para a emissividade total de cada estrela.

A influência significativa do ciclo CNO na *Procyon A* é corroborada pelo facto de a prevalência desta reação estar associada a temperaturas centrais de $T > 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ (Wiescher et al. 2010). No caso de estrelas pouco massivas, como qualquer uma das analisadas, isto verifica-se quando elas se aproximam do fim do seu percurso pela sequência principal, pois a contração gravitacional, resultante da redução da ocorrência da fusão por cadeia PP, gera condições nas quais pode ser mais viável a produção de energia pelo ciclo CNO (Wiescher et al. 2010).

Esta ideia relativamente à idade "avançada" de *Procyon A* também está presente na análise realizada por Kervella et al. (2003), onde outros fatores fora do foco deste trabalho levam a concluir precisamente isso.

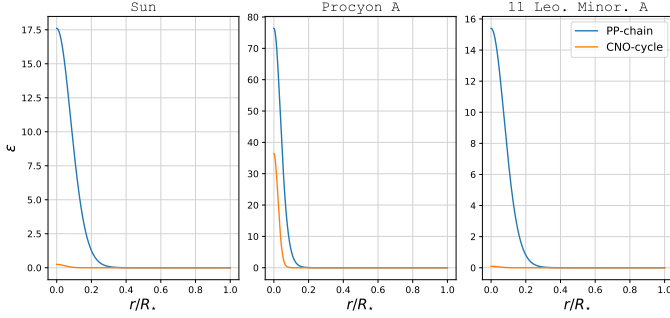


Fig. 4. Emissividades do Sol, *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A*.

A pressão e densidade no centro da estrela *11 Leonis Minoris A* são ligeiramente mais elevadas do que no *Sol* e a sua temperatura mais baixa, indicando que a estrela tem uma produção de radiação mais fraca, o que é visível nos gráficos da emissividade. Assim, vemos que a pressão resulta de uma suscetibilidade maior à contração causada pela própria gravidade.

4. Incertezas e simulação de Monte Carlo

No sentido de determinar a incerteza associada ao método de calcular os valores de n , realizou-se uma simulação de Monte Carlo com 1000 pontos para cada estrela, variando os parâmetros de entrada (M, R, L) numa distribuição Gaussiana em torno do seu valor central e com desvio padrão igual à sua incerteza. Os resultados desta análise foram apresentados na tabela 1 e podem ser visualizados na Fig. 5.

No total, esta simulação leva cerca de 13 minutos a completar, o que não é muito tempo, e deu resultados com uma precisão máxima de uma casa decimal em n .

No entanto, se olharmos para as incertezas relativas da *Procyon A*, por exemplo, vemos que $\Delta M/M \approx 1.71\%$, $\Delta R/R \approx 0.71\%$ e $\Delta L/L \approx 2.95\%$, quando $\Delta n/n \approx 0.41\%$. Isto significa que a incerteza dos parâmetros se propaga de forma "controlada", não criando muito caos no resultado final.

Claro que, no caso da estrela *11 Leonis Minoris A*, esta incerteza não é tão baixa e, reproduzindo o mesmo cálculo, vemos que $\Delta M/M \approx 2.20\%$, $\Delta R/R \approx 1.60\%$, $\Delta L/L \approx 0.89\%$ e $\Delta n/n \approx 1.24\%$. Este resultado era previsível dadas as incertezas mais elevadas nos parâmetros desta estrela.

Nos gráficos da Fig. 6, vemos os resultados da simulação de Monte Carlo realizada aplicada às densidades, pressões e temperaturas centrais das estrelas, de modo a também termos uma estimativa da incerteza dos resultados exibidos na Sec. 3.

A tabela 1 já contém explicitamente os resultados referidos com as incertezas calculadas a partir das distribuições obtidas pelo método apresentado nesta secção.

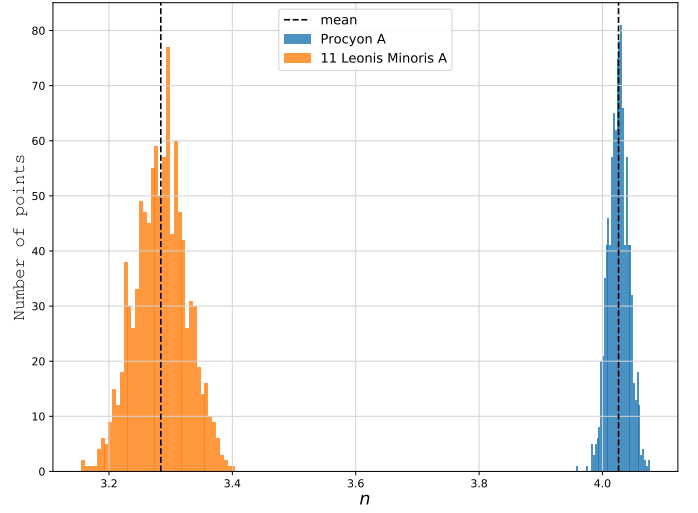


Fig. 5. Distribuição de n por simulação de Monte Carlo com 1000, para *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A*.

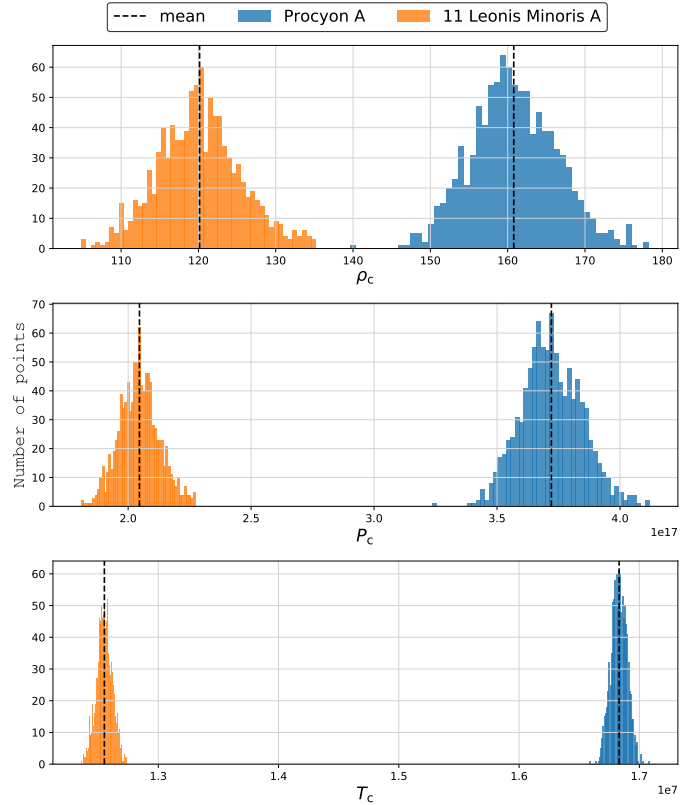


Fig. 6. Distribuição dos valores de (ρ_c, P_c, T_c) por simulação de Monte Carlo com 1000, para *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A*.

Na tabela 2, podemos ver a incerteza relativa calculada para as quantidades termodinâmicas no centro. Desta tabela concluímos que os resultados para a temperatura são bastante concisos, contrariamente aos resultados obtidos para a densidade e pressão no centro.

5. Conclusões

Este trabalho permitiu demonstrar a eficácia do modelo politrópico na descrição da termodinâmica no interior de estre-

Table 2. Incerteza relativa em n , ρ , P e T , para *Procyon A* e *11 Leonis Minoris A*.

	Procyon A	11 Leonis Minoris A
$\Delta n/n$	0.41%	1.24%
$\Delta \rho_c/\rho_c$	3.49%	4.47%
$\Delta P_c/P_c$	3.36%	3.99%
$\Delta T_c/T_c$	0.39%	0.51%

las não massivas da sequência principal, mesmo assumindo um comportamento hidrostático, sem efeitos de convecção.

No que toca à computabilidade dos métodos utilizados para determinar o índice politrópico das estrelas, ficou claro que é possível obter uma rápida convergência da precisão da solução da equação de Lane-Emden. Isto verificou-se com a utilização de poucos passos na integração desta através do método Runge-Kutta de 4^a ordem.

Seria possível melhorar a precisão dos resultados utilizando um maior número de pontos, mas como referido estes resultados rapidamente se tornam quase indistinguíveis e necessitaríamos de ter outros fenómenos físicos em conta, para melhorar o nosso conhecimento do interior destes corpos.

Infelizmente, a literatura relativa à estrela *11 Leonis Minoris A* é bastante limitada, não permitindo obter valores muito fiáveis, nem termos de comparação para além da sua massa, raio e luminosidade.

Pelo contrário, para a estrela *Procyon A* foi possível fazer a associação entre os resultados da emissividade previstos pelo modelo politrópico neste trabalho, com a análise detalhada presente na literatura, concluindo qualitativamente que esta estrela se encontra numa fase do seu ciclo de vida na qual o ciclo CNO constitui uma forte componente da fusão de Hidrogénio no seu interior.

References

- Monteiro, M. J. P. F. G. 2020, *Astronomia Computacional* (sebenta)
- Bruntt H., Bedding T. R., Quirion P.-O., Lo Curto G., Carrier F., Smalley B., Dall T. H., Aren- toft T., Bazot M., Butler R. P., 2010, Accurate fundamental parameters for 23 bright solar- type stars, *MNRAS* 405, 1907
- Boyajian, T. S., McAlister, H. A., van Belle, G., et al., 2012a, *Stellar Diameters and Temperatures. I. Main-sequence A, F, and G Stars*, *ApJ*, 746, 101
- Kervella, P., Thévenin, F., Morel, P., Berthomieu, G., Bordé, P. and Provost, J., 2003, The diameter and evolutionary state of Procyon A, *A&A* 413, 251-256
- Wiescher, M., Görres, J., Uberseder, E., G. Imbriani, G. & Pignatari, M., 2010, The Cold and Hot CNO Cycles, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2010. 60:381-404