

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

MATEMATIKA



Martin Brajer

Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FOF

Praha 2020

Obsah

Úvod	1
0.1 Diferenciální počet	1
0.2 Integrální počet	1
1 Úvod, základní pojmy	3
1.1 Reálná čísla	4
1.2 Význačné podmnožiny \mathbb{R}	7
2 Reálné funkce, limita a spojitost	12

Věty a definice

A	Lemma (Čtverec lichého čísla)	3
A	Věta (Reálná čísla)	4
A1	Definice (Algebraická struktura)	4
1.1	Příklad	5
A2	Definice (Uspořádání)	5
1.2	Příklad	6
1.1	Definice (Absolutní hodnota)	7
1.1	Lemma (Vlastnosti absolutní hodnoty)	7
1.1	Věta (Trojúhelníková nerovnost)	7
1.2	Definice (Maximum)	8
1.2	Lemma (Jednoznačnost max)	8
1.3	Definice (Supremum)	8
1.4	Definice (Infimum)	9
A3	Definice (Supremum a infimum)	9
1.5	Definice (Odmocnina)	9
B	Lemma (Čtverec dělitelný třema)	9
1.2	Věta (Iracionální čísla)	9
A4	Definice (Vlastnosti \mathbb{N})	9
1.3	Věta (Velikost intervalu)	10
2.1	Definice (Prostá funkce, injekce, monomorfismus)	12
2.2	Definice (Na funkce, surjekce, epimorfismus)	12
2.3	Definice (Vzájemně jednoznačné zobrazení, bijekce, isomorfismus)	12
2.4	Definice (Restrikce, zúžení)	13
2.1	Příklad	13
2.5	Definice (Složená funkce, superpozice)	13
2.6	Definice (Definiční obor a obor hodnot)	13
2.2	Příklad	13
2.7	Definice (Monotónost funkce)	13
2.8	Definice (Omezenost funkce)	14
2.9	Definice (Symetrie funkce)	14
2.10	Definice (Okolí)	14

2.1	Věta (Hausdorffův princip oddělení)	15
2.11	Definice (Limita)	15
B	Věta (Jednoznačnost limity)	15
2.3	Příklad	16
2.12	Definice (Jednostranné limity)	16
2.4	Příklad	16
2.2	Věta (Jednostranné vs oboustranná limita)	17
2.5	Příklad	17
C	Věta (Ekvivalentní limity)	17
2.1	Lemma (Chování funkce v okolí limity)	17
2.2	Lemma (Limita součinu)	18
2.6	Příklad	18
2.3	Věta (Aritmetika limit)	19
2.4	Věta (O strážnících)	20
2.7	Příklad	21
2.5	Věta (Limita nerovností)	21
2.6	Věta (Monotonie a limita)	22
2.13	Definice (Spojitosť)	23
2.7	Věta (Limita a spojitost)	23
2.8	Věta (Aritmetika spojitosti)	24
2.8	Příklad	24
2.14	Definice (Složená funkce)	24
2.9	Věta (Limita superpozice)	24
2.9	Příklad	25

Semestry

1	1
---	-------	---

Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/~kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

Semestr 1

0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci $f(t)$ vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost: } \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (1)$$

$$\text{okamžitá rychlost: } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \quad (2)$$

0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval $[a, b]$ rozdělme na n částí délky Δ_n v bodech a_n . Označme $a_0 = a$, $a_n = b$.

$$\begin{aligned}
 \text{přibližně: } f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + \dots + f(a_{n-1})\Delta_n = \\
 = S(\Delta) = \sum_{j=1}^n f(a_{j-1})\Delta_j
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{přesně: } \lim_{\Delta \rightarrow 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme A, B výroky:

A	B	$A \wedge B$ $A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obrázek 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace $A \Rightarrow B$:

1. přímý: ukážeme, že když $A = 1$, pak $B = 1$
2. nepřímý: plyne z $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že $A = 1 \wedge B = 0$ a odvodíme spor (např.: $1 = 2$)

Lemma A (Čtverec lichého čísla). (*tvrzení*) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ liché} \Rightarrow n \text{ liché}$

Důkaz 1. Fixuj $n \in \mathbb{N}$. Prvočíselný rozklad:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (1.1)$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{2\alpha_k} \quad (1.2)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} : 2 \neq P_j \quad (1.3)$$

V rozvoji n^2 není 2, tak v rozvoji n také není (liší se pouze mocninou). QED

Důkaz 2. Chci: $\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ sudé} \Rightarrow n^2 \text{ sudé}$

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad (1.5)$$

QED

Důkaz 3. Předpokládejme: n^2 liché a n sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \quad (1.6)$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \quad (1.7)$$

QED

O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$ x je prvkem
- $x \notin A$ $\neg(x \in A)$
- $A \subset B$ A je podmnožinou B : $\forall x \in A : x \in B$
- \emptyset prázdná množina
- množinové operace:
 - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
 - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
 - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
 - $\forall x$ pro všechna x
 - $\exists y$ existuje y
 - př.: $V(x, y)$ je vlastnost, že y je matka x . M je množina mužů, Z je množina žen.
 - * $\forall x \in M \exists y \in Z : V(x, y)$
 - * $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

1.1 Reálná čísla

Věta A (Reálná čísla). *Existuje množina \mathbb{R} s operacemi \oplus a \otimes a relací $<$ tak, že splňuje vlastnosti **D A1** až **D A4**.*

Definice A1 (Algebraická struktura).

I Komutativita: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x; x \cdot y = y \cdot x$

II Asociativita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

III Nulový prvek \oplus : $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$

Jednotka \otimes : $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$

IV Inverzní prvek: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \exists! y : x + y = z$ (právě jedno; ozn. $y = z - x$)

$\forall x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists! y \in \mathbb{R} : x \cdot y = z$ (ozn. $y = z/x$)

V Distributivita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$

VI *Násobení nulou:* $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$$

Další vlastnosti lze odvodit:

$$-(-x) = x \quad (1.8)$$

$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \quad (1.9)$$

Další značení:

$$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \text{ (} n\text{-krát)} \quad (1.10)$$

$$-x = 0 - x \quad (1.11)$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (1.12)$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (1.13)$$

I. - IV. říká $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ jsou grupy.

I. - VI. říká $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je těleso.

Ověřte, že **D A1** platí pro \mathbb{C} (komplexní čísla).

Příklad 1.1. Definujme $\mathbb{C} = \{z = (z_1, z_2); z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ a operace \oplus, \otimes . $\forall z, u \in \mathbb{C} :$

$$(z_1, z_2) + (u_1, u_2) = (z_1 + u_1, z_2 + u_2) \quad (1.14)$$

$$(z_1, z_2) \cdot (u_1, u_2) = (z_1 u_1 - z_2 u_2, z_1 u_2 + z_2 u_1) \quad (1.15)$$

Nulový prvek: $(0, 0)$

Jednotkový prvek: $(1, 0)$

Lze zapisovat $z \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2)$, ozn. $z = z_1 + iz_2$ pro $i^2 = -1$.

Definice A2 (Uspořádání).

I Relace: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nastane právě jedna z možností:

$(x < y)$ nebo $(x > y)$ nebo $(x = y)$

II Tranzitivita: $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$

III Vztah uspořádání a sčítání: $(x < y) \Rightarrow x + z < y + z$

IV Vztah relace k násobení: $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < xy$

Značení:

$$\bullet \quad x > y \Leftrightarrow y < x$$

- $(x \leq y) \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$
- $(x \geq y) \Leftrightarrow (x > y) \vee (x = y)$

Lze odvodit další pravidla:

$$x < y \Leftrightarrow -x > -y \quad (1.16)$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} x &< y \\ x - x &< y - x && \text{/bod III} \\ 0 &< y - x \\ 0 - y &< y - y - x && \text{/bod III} \\ -y &< -x \\ -x &> -y && \text{funguje } \Leftrightarrow \end{aligned}$$

QED

DÚ:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \quad (1.17)$$

Důkaz. Sporem:

$$\begin{aligned} x &> 0 \text{ a } \frac{1}{x} < 0 \\ -\frac{1}{x} &> 0 \\ 0 &< x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \\ 1 &< 0 \end{aligned}$$

Pokud $0 < 1$, pak spor! $0 < 1 < 0$.

$$\text{Máme } 0 < -1 \xRightarrow{\text{bod IV}} 0 < (-1)(-1) = 1 \quad \text{QED}$$

Příklad 1.2. *Komplexní čísla nelze uspořádat podle D A2*

Důkaz. Sporem: předpokládejme, že to lze.

$$\begin{aligned} i &< 0 \\ (0, 1) &< (0, 0) \\ -i &> 0 \xRightarrow{D \text{ A2: bod IV}} 0 < (-i)(-i) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Pozn.: } i > 0 \xRightarrow{D \text{ A2: bod IV}} 0 < (i)(i) = -1 \quad \text{QED}$$

1.2 Význačné podmnožiny \mathbb{R}

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z} = \{0, -1, -2, \dots\} \cup \mathbb{N}$ celá čísla
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ racionální čísla
- $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ iracionální čísla

Poznámka: \mathbb{Q} má obě vlastnosti **D A1**, **D A2**

Intervaly:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ otevřený
- $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$ uzavřený
- $[a, b), (a, b]$ polootevřené
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ neomezený otevřený
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$ neomezený otevřený
- podobně: $[a, +\infty), (-\infty, a]$ neomezený uzavřený

Definice 1.1 (Absolutní hodnota). *Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pokud } x \geq 0 \\ -x & \text{pokud } x < 0 \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Vlastnosti absolutní hodnoty). *Nechť $a > 0$, pak $|x| < a$ právě když $-a < x < a$*

Důkaz. Podle znaménka x :

1. At' $x \geq 0$ pak $|x| = x$ a máme ukázat, že $x < a \Leftrightarrow -a < x < a$
"⇐" jasná — "⇒" víme $-a < 0 \leq x < a$
2. At' $x < 0$, pak $|x| = -x$ a máme ukázat, že $-x < a \Leftrightarrow -a < x < a$
 $x > -a$ pak pokračujeme podobně jako v **bodě 1**: $-a < x < 0 < a$

QED

Věta 1.1 (Trojúhelníková nerovnost).

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (1.18)$$

$$|x - y| \leq |x| + |y| \quad (1.19)$$

$$|x + y| \geq ||x| - |y|| \quad (1.20)$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| \quad (1.21)$$

Důkaz. Eq 1.18 a Eq 1.19 plyne z L 1.1

Eq 1.20 a Eq 1.21 plyne z předešlého řádku pomocí triku

$$x = x + y - y \quad (1.22)$$

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \quad (1.23)$$

$$|y| \leq |x + y| + |x| \quad (1.24)$$

$$|x| - |y| \leq |x + y| \quad (1.25)$$

$$|y| - |x| \leq |x + y| \quad / \cdot (-1) \quad (1.26)$$

$$|x| - |y| \geq -|x + y| \text{ plyne z Eq 1.26 a Eq 1.16} \quad (1.27)$$

QED

Definice 1.2 (Maximum). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$*

- $x \in M$ nazveme maximum M , pokud $\forall y \in M : y \leq x$
Ozn. $x = \max M$
Př.: $(0, 1)$ nemá \max
- $K \in \mathbb{R}$ nazveme horní odhad M , pokud $\forall x \in M : x \leq K$
Př.: $(0, 1)$ má horní odhad $4, 1, \dots$

Lemma 1.2 (Jednoznačnost max). *Existuje nejvýše 1 max. $M \subset \mathbb{R}$*

Důkaz. Ať existují dvě: $x_1, x_2 \in M$ maxima

$$x_1 \text{ je max; } x_2 \in M \Rightarrow x_1 \geq x_2 \quad (1.28)$$

$$x_2 \text{ je max; } x_1 \in M \Rightarrow x_2 \geq x_1 \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow x_1 \leq x_2 \leq x_1 \quad (1.30)$$

Tedy $x_1 = x_2$

QED

Pozn.: analogicky def. minimum a dolní odhad.

Definice 1.3 (Supremum). *Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazvu supremem množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud*

$$I \quad \forall x \in M : x \leq s$$

$$II \quad \forall s' < s, s' \in \mathbb{R} : \exists x \in M : s' < x$$

Supremum M značíme $s = \sup M$

Pozn.: **bod I** říká, že s je horní odhad, **bod II** říká, že s je nejmenší možný horní odhad

Pozn.: pokud supremum náleží do intervalu, je to jeho maximum

Definice 1.4 (Infimum). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$. řekneme, že $s \in \mathbb{R}$ je infimum množiny M (ozn. $\inf M$), pokud*

$$I \quad \forall x \in M : s \leq x$$

$$II \quad \forall s' > s, s' \in \mathbb{R} : \exists x < s' : x \in M$$

Infimum M značíme $s = \inf M$

Definice A3 (Supremum a infimum). *Každá neprázdná shora omezená $M \subset \mathbb{R}$ má supremum v \mathbb{R} . Každá neprázdná zdola omezená $M \subset \mathbb{R}$ má infimum v \mathbb{R} .*

Definice 1.5 (Odmocnina).

1. *Nechť $a > 0$ a n sudé, $n \in \mathbb{N}$, pak existuje právě jedno číslo $b > 0 : b^n = a$*

2. *Nechť $a > 0$ a n liché, $n \in \mathbb{N}$, pak existuje právě jedno číslo $b \in \mathbb{R} : b^n = a$*

Značení: $b = \sqrt[n]{a}$

Lemma B (Čtverec dělitelný třema). *k^2 je dělitelné 3 $\Rightarrow k$ je děl. 3*

Důkaz. Jak zapsat k ? $\exists m \in \mathbb{Z}$:

$$k = 3m + 0 \quad k^2 \text{ je děl. 3} \quad (1.31)$$

$$k = 3m + 1 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 6m + 1 \quad \text{není děl. 3} \quad (1.32)$$

$$k = 3m + 2 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 12m + 4 \quad \text{není děl. 3} \quad (1.33)$$

QED

Věta 1.2 (Iracionální čísla). *Existují iracionální čísla*

Důkaz. Tvrdíme, že $\sqrt{3}$ není racionální. Sporem:

$$\text{Ať } \sqrt{3} \text{ je rac. } \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná: } \sqrt{3} = \frac{k}{l} \quad (1.34)$$

$$3 = \frac{k^2}{l^2} \Rightarrow k^2 = 3l^2 \quad (1.35)$$

$$k^2 \text{ je dělitelné 3} \xRightarrow{\text{L B}} k \text{ je děl. 3} \quad (1.36)$$

$$n \in \mathbb{Z} : (k = 3n \Rightarrow k^2 = 9n^2) \Rightarrow k^2 \text{ je děl 9} \quad (1.37)$$

$$k^2 = 9n^2 = 3l^2 \Rightarrow l^2 = 3n^2 \quad (1.38)$$

$$l^2 \text{ je děl. 3} \xRightarrow{\text{L B}} l \text{ je děl. 3} \quad (1.39)$$

Což je spor, protože k, l jsou nesoudělná.

QED

Definice A4 (Vlastnosti \mathbb{N}).

$$I \quad \forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$$

II Princip indukce: nechť $M \subset \mathbb{N}$ a

$$(a) \quad 1 \in M$$

$$(b) \quad n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$$

$$\text{Pak } m = \mathbb{N}$$

Pozn.: **bod I** plyne z vlastnosti **D A3**

Pozn.: Archimédova vlastnost:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0 \text{ (tedy reálné)} \quad \exists n \in \mathbb{N} : n\epsilon > m \quad (1.40)$$

Důkaz. Polož $x = m/\epsilon$ v **bodě I**

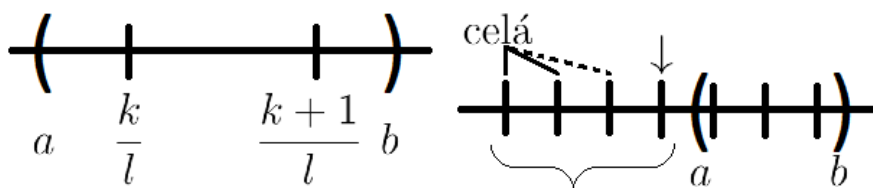
QED

Věta 1.3 (Velikost intervalu). *Každý otevřený interval obsahuje nekonečně racionálních i nekonečně iracionálních čísel.*

Důkaz. Ve zkratce:

$$\frac{k}{l} + \frac{n}{n+1} \frac{1}{l} \quad \text{je racionální } \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.41)$$

$$\frac{k}{l} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{n}{n+1} \frac{1}{l} \quad \text{je iracionální } \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.42)$$



Obrázek 1.2: Vizualizace hledání l a k .

Mějme otevřený interval (a, b) . Stačí mít rac. č. k/l tak, aby $k/l, (k+1)/l \in (a, b)$.

Jak hledám l ? Z **D A4**: **bod I** pomocí $l > 2/(b-a)$ plyne

$$\frac{1}{l} < \frac{b-a}{2} \quad (1.43)$$

Jak hledám k ? Definujme

$$M = \left\{ n \in \mathbb{Z}; \frac{n}{l} < a \right\} \quad (1.44)$$

Potom podle **D A3** $\exists s \in \mathbb{R} : s = \sup M$

Tvrdíme: $s \in M$:

Podle D 1.3:**bod II**: $\forall s' < s \exists n \in M : s' < n$

Volme $s' \in (s - \frac{1}{2}, s)$, pak $\exists n' \in M : s' < n'$. Zafixujme n' a tvrdíme:

$$\forall s' \in (s - \frac{1}{2}, s) : s' < n' \leq s \quad (1.45)$$

A tedy $s \leq n' \leq s$. Definujme

$$k := s + 1 \Rightarrow \frac{k}{l} \in (a, b) \quad (1.46)$$

$$k + 1 := s + 2 \Rightarrow \frac{k + 1}{l} \in (a, b) \quad (1.47)$$

Potom:

$$a < \frac{k}{l} < \frac{k + s}{l} = \frac{s + 2}{l} < a + \frac{2}{l} < a + b - 1 = b \quad (1.48)$$

QED

Důkaz. **Eq 1.45** Vol. $s'' \in (s - \frac{1}{2}, s)$ pak $\exists n'' \in M : s'' < n''$

$$s - \frac{1}{2} < s' < n' \leq s \quad (1.49)$$

$$s - \frac{1}{2} < s'' < n'' \leq s \quad (1.50)$$

Tedy:

$$n', n'' \in \left(s - \frac{1}{2}, s\right] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow n' = n'' \quad (1.51)$$

QED

2. kapitola: Reálné funkce, limita a spojitost

Funkce z M do N je předpis, který každému prvku M přiřadí nejvýše jeden prvek z N

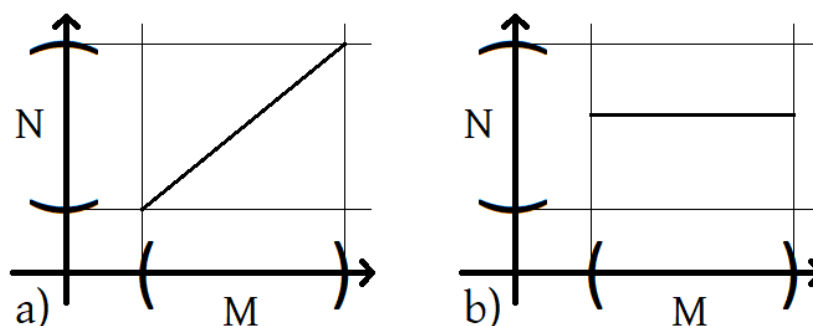
- $A \subset M : f(A) = \{f(x); x \in A\} \subset N$
- $B \subset N : f^{-1}(B) = \{x \in M : f(x) \in B\} \subset M$

Definice 2.1 (Prostá funkce, injekce, monomorfismus). *Funkce je **prostá**, pokud*

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad (2.1)$$

Definice 2.2 (Na funkce, surjekce, epimorfismus). *Funkce $f : M \rightarrow N$ je **na** (zobrazuje M na N), pokud*

$$\forall n \in N \exists m \in M : f(m) = n \quad (2.2)$$



Obrázek 2.1: Funkce a) je na, funkce b) není.

Př.: φ není prostá, zobrazuje \mathbb{R} na $[0, +\infty)$

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3)$$

$$x \rightarrow x^2 \quad (2.4)$$

$$\varphi((-1, 1)) = [0, 1] \quad (2.5)$$

$$\varphi^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2] \quad (2.6)$$

Definice 2.3 (Vzájemně jednoznačné zobrazení, bijekce, isomorfismus). *Je-li $f : M \rightarrow N$ **prostá** a **na** říkáme, že je vzájemně jednoznačná*

Pro **vzájemně jednoznačnou funkci** lze definovat inverzní funkci:

$$f_{-1} : N \rightarrow M; y \in N \rightarrow \text{jediné } x \in M : f(x) = y \quad (2.7)$$

$$\textbf{Pozor!} \begin{cases} f^{-1} & \text{pro každou hodnotu zvlášť, je to množina} \\ f_{-1} & \text{inverzní funkce} \end{cases}$$

Definice 2.4 (Restrikce, zúžení). Je-li $f : M \rightarrow N$ a $A \subset M$: $f|_A$ nazvu restrikce (zúžení) f na A

Příklad 2.1. $\varphi(x) = x^2 : \varphi|_{[0,+\infty)}$ zobrazuje $[0, +\infty)$ na $[0, +\infty)$ vzájemně jednoznačně. Lze tedy definovat $\varphi_{-1} = (\varphi|_{[0,+\infty)})_{-1}(x) = \sqrt{x}$

Definice 2.5 (Složená funkce, superpozice). Pro M, N, K množiny a $f : M \rightarrow N; g : N \rightarrow K$ funkce definujeme složenou funkci

$$g \circ f : M \rightarrow K \quad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \quad (2.8)$$

$$x \in M \rightarrow (g(f(x))) \quad x \rightarrow f(x) \rightarrow (g(f(x))) \quad (2.9)$$

Budeme psát: $\varphi : M \rightarrow N$ i když $\varphi(x)$ není definované $\forall x \in M$

Definice 2.6 (Definiční obor a obor hodnot).

$$D(\varphi) = \{x \in M : \varphi(x) \text{ je definovaná}\} \quad (2.10)$$

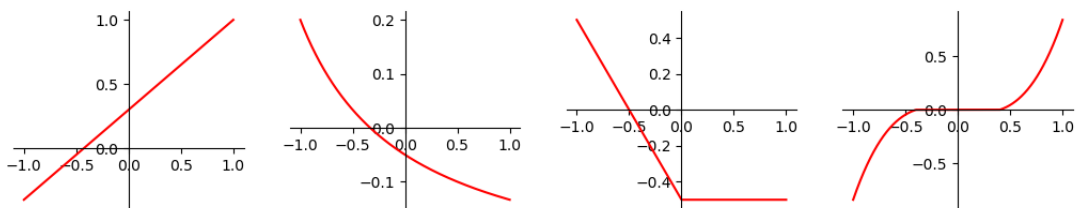
$$H(\varphi) = \varphi \{D(\varphi)\} \quad (2.11)$$

Příklad 2.2.

$$x^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad D(x^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\} \quad H(x^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Definice 2.7 (Monotónost funkce). Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; M \subset D(f)$. Řeknu, že f

$$\text{je} \begin{cases} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{neklesající} \end{cases} \text{ na } M, \text{ pokud } \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \begin{cases} < \\ > \\ \geq \\ \leq \end{cases} f(x_2)$$



Obrázek 2.2: Ilustrace.

Definice 2.8 (Omezenost funkce). Řekněme, že f

$$\text{je } \left\{ \begin{array}{l} \text{omezená shora} \\ \text{omezená zdola} \\ \text{omezená} \end{array} \right\} \text{ na } M, \text{ pokud } \exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in M : \left\{ \begin{array}{l} f(x) < K \\ f(x) > K \\ |f(x)| < K \end{array} \right\}$$

Definice 2.9 (Symetrie funkce). Řekněme, že f

$$\text{je } \left\{ \begin{array}{l} \text{lichá,} \\ \text{sudá,} \\ \text{periodická,} \end{array} \right\} \text{ pokud } \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D(f) \\ \forall x \in D(f) \\ \exists p \in \mathbb{R} : \forall x \in D(f) \end{array} \right\} \text{ platí } \left\{ \begin{array}{l} -x \in D(f) \quad \& \quad f(x) = -f(-x) \\ -x \in D(f) \quad \& \quad f(x) = f(-x) \\ x+p \in D(f) \quad \& \quad f(x) = f(x+p) \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

Budeme zkoumat: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nebo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Druhou variantu chápeme jako:

$$f = f_1 + if_2; \quad f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Definice 2.10 (Okolí). Necht' $x_0 \in \mathbb{R}, \delta \in (0, \infty)$

- *kruhové okolí* $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$
(v aj B : ball)
- *prstencové okolí* $P(x_0, \delta) := U(x_0, \delta) - \{x_0\}$
- *pravé kruhové okolí* $U_+(x_0, \delta) := [x_0, x_0 + \delta)$
- obdobně definujeme **levé kruhové okolí**, **pravé prstencové okolí**
a **levé prstencové okolí**

Poznámky:

- Pro $0 < \delta_1 < \delta_2 \Rightarrow U(x_0, \delta_1) \subset U(x_0, \delta_2)$
- Budeme psát: „na jistém $U(x_0)$ platí ...“, což znamená
 $\exists \delta > 0 : \forall x \in U(x_0, \delta)$ platí ...

Věta 2.1 (Hausdorffův princip oddělení). *Nechť $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $x_1 \neq x_2$, pak $\exists \delta > 0$ tak, že $U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta) = \emptyset$
Speciálně: $x_1 \notin U(x_2, \delta)$; $x_2 \notin U(x_1, \delta)$*

Důkaz. Volme $\delta = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$. Tvrdím, že $U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta) = \emptyset$
Sporem: ať $\exists y \in U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta)$, pak

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |x_1 - y + y - x_2| \stackrel{\text{V 1.1}}{\leq} \\ &= |x_1 - y| + |y - x_2| < 2\delta = |x_1 - x_2| \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tedy $|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$, což je spor.

QED

Definice 2.11 (Limita). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f je fce def na jistém $P(x_0)$
Číslo $A \in \mathbb{R}$ nazvu limitou f v x_0 , pokud*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.15)$$

Značení:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$
- $f(x) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0$

Terminologie: pokud existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ říkáme, že f má vlastní limitu ve vlastním bodě

Poznámky:

- Limita závisí na f v okolí x_0
- Jiné zápisy **Eq 2.15**

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(P(x_0, \delta)) \subset U(A, \epsilon) \quad (2.16)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon] \quad (2.17)$$

Věta B (Jednoznačnost limity). *Bud' $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$
Pak $A = B$*

Důkaz. Sporem: ať $A \neq B$

$$\text{V 2.1} \quad \exists \epsilon > 0 : U(A, \epsilon) \cap U(B, \epsilon) = \emptyset \quad (2.18)$$

$$\text{Eq 2.15 pro } A \quad \exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.19)$$

$$\text{Eq 2.15 pro } B \quad \exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0, \delta_2) \Rightarrow f(x) \in U(B, \epsilon) \quad (2.20)$$

$$\text{Definujme} \quad \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \quad (2.21)$$

$$\text{Odvodíme spor} \quad \forall x \in U(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon) \cap U(B, \epsilon) = \emptyset \quad (2.22)$$

QED

Příklad 2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \quad (2.23)$$

$$\text{cíl:} \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(2, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(4, \epsilon) \quad (2.24)$$

$$\text{f} \quad x \in U(4, \epsilon) \quad \text{hledám } \delta > 0 \quad (2.25)$$

$$\text{chci:} \quad 4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon \quad (2.26)$$

$$\text{lze předpokládat, že } \epsilon < 1, \text{ protože pokud } \epsilon \geq 1, \text{ pak } U(4, \frac{1}{2}) \subset U(4, \epsilon) \quad (2.27)$$

$$\text{vidíme:} \quad \sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon} \quad (2.28)$$

$$\text{volme:} \quad \delta = \min(2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2) \quad (2.29)$$

$$\text{volme:} \quad x \in P(2, \delta) \quad (2.30)$$

$$\text{chci dokázat, že platí cíl: } f(x) \in U(4, \epsilon) \quad (2.31)$$

$$\text{odhad shora:} \quad x^2 - 4 \leq (2 + \delta)^2 - 4 = 4 + 4\delta + \delta^2 - 4 = (4 + \delta)\delta \quad (2.32)$$

$$\leq (4 + \sqrt{4 + \epsilon} - 2)(\sqrt{4 + \epsilon} - 2) \quad (2.33)$$

$$= (\sqrt{4 + \epsilon} + 2)(\sqrt{4 + \epsilon} - 2) = 4 + \epsilon - 4 = \epsilon \quad (2.34)$$

$$\text{odhad odspodu:} \quad x^2 - 4 \geq (2 - \delta)^2 - 4 = 4 - 4\delta + \delta^2 - 4 = \delta(\delta - 4) \quad (2.35)$$

$$\dots \text{zbytek obdobně} \quad (2.36)$$

Definice 2.12 (Jednostranné limity). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, f definovaná na jistém $P_+(x_0)$ (resp. $P_-(x_0)$). Pak číslo A nazvu limitou f v bodě x_0 zprava (zleva), pokud:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P_{+(-)}(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.37)$$

Značení (zleva obdobně):

- $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$
- $f(x) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0+$

Příklad 2.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \quad (2.38)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \quad (2.39)$$

Věta 2.2 (Jednostranné vs oboustranná limita). *Bud' $x_0 \in \mathbb{R}$, f definovaná na jistém $P(x_0, \delta)$, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad (2.40)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A \quad (2.41)$$

Důkaz. Eq 2.40 \Rightarrow Eq 2.41 triviální

Eq 2.41 \Rightarrow Eq 2.40 volme $\epsilon > 0$, podle Eq 2.41

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in P_+(x_0, \delta_1) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.42)$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in P_-(x_0, \delta_1) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.43)$$

volme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ (protože $P(x_0, \delta) \subset P(x_0, \delta_1) \cup P(x_0, \delta_2)$)

Potom $P(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon)$ QED

Příklad 2.5. *Neexistuje $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$*

Věta C (Ekvivalentní limity). *Bud' $x_0 \in \mathbb{R}$, f definovaná na jistém $P(x_0)$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - A = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - A| = 0 \quad (2.44)$$

Důkaz.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x) - A| < \epsilon \quad (2.45)$$

$$|f(x) - A| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.46)$$

QED

Lemma 2.1 (Chování funkce v okolí limity).

1. *Nechť f má v $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$. Pak existuje $P(x_0)$ takové, že f je na $P(x_0)$ omezená. Tj.*

$$\exists \delta > 0 \exists K > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x)| < K \quad (2.47)$$

2. *Nechť f má v $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $A \neq 0$, pak*

$$\exists \Delta > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x)| > \Delta \quad (2.48)$$

Důkaz.

1. Volme $\epsilon = 1$ v definici limity. Pak

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : A - 1 < f(x) < A + 1 \quad (2.49)$$

tj. $f(x) \in U(x_0, \delta)$. Stačí volit $K = \max(|A - 1|, |A + 1|)$. pak

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : -K < f(x) - A < A + 1 \leq K \quad (2.50)$$

2. $A \neq 0$, předpokládejme $A > 0$ ($A < 0$ podobně)

$$\text{dle V 2.1} \quad \exists \epsilon > 0 : U(A, \epsilon) \cap U(0, \epsilon) = \emptyset \quad (2.51)$$

$$\text{z D 2.11} \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.52)$$

$$\text{máme } \delta > 0 \text{ a volíme } \Delta = \epsilon/2 \quad (2.53)$$

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.54)$$

$$U(A, \epsilon) \cap U(0, \epsilon) = \emptyset \quad (2.55)$$

$$|f(x) - 0| \geq \epsilon > \Delta \quad (2.56)$$

QED

Lemma 2.2 (Limita součinu). *Bud'te f, g definované na jistém $P(x_0)$, f omezená na $P(x_0)$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0 \quad (2.57)$$

Důkaz. Volme $\epsilon > 0$ libovolné. Víme

$$\exists \delta_1 > 0, K > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta_1) : |f(x)| < K \quad (2.58)$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta_2) : |g(x)| < \epsilon/K \quad (2.59)$$

Chci součin odhadnout epsilonem

$$|f(x)g(x)| < K|g(x)| < \epsilon \quad (2.60)$$

Volme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom platí

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x)g(x)| \stackrel{\text{Eq 2.58}}{<} K|g(x)| \stackrel{\text{Eq 2.59}}{<} K \frac{\epsilon}{K} = \epsilon \quad (2.61)$$

Tzn. $f(x)g(x) \in U(0, \epsilon)$

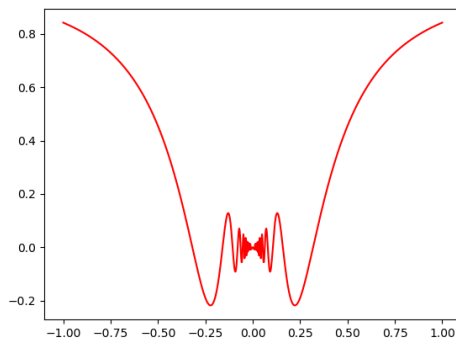
QED

Příklad 2.6.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)x^2 = 0$, protože $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ (z definice) a $|\operatorname{sgn}(x)| \leq 1$.

Pozor: $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje!

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$



Obrázek 2.3: Graf funkce $x \sin(1/x)$.

Věta 2.3 (Aritmetika limit). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Pak platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B \quad (2.62)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB \quad (2.63)$$

$$\text{je-li navíc } B \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B} \quad (2.64)$$

Důkaz.

1. [Eq 2.62](#) pro \oplus (\ominus obdobně).

Chceme

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) + g(x) \in U(A + B, \epsilon) \quad (2.65)$$

Víme

$$\forall \epsilon' > 0 \exists \delta' > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta') : f(x) \in U(A, \epsilon') \quad (2.66)$$

$$\forall \epsilon'' > 0 \exists \delta'' > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta'') : g(x) \in U(B, \epsilon'') \quad (2.67)$$

Předběžně

$$|f(x) + g(x) - A - B| \stackrel{\text{V 1.1}}{\leq} |f(x) - A| + |g(x) - B| \quad (2.68)$$

Fix $\epsilon > 0$ libovolné.

Z [Eq 2.66](#) s $\epsilon' = \epsilon/2$ dostanu $\delta' > 0$ (takové, že platí zbytek [Eq 2.66](#))

Z [Eq 2.67](#) s $\epsilon'' = \epsilon/2$ dostanu $\delta'' > 0$

Definujme $\delta = \min(\delta', \delta'')$ (aby pro δ platily obe rovnice). Pak

$$\forall x \in P(x_0, \delta) \subset P(x_0, \delta') \cap P(x_0, \delta'') : f(x) + g(x) \in U(A + B, \epsilon) \quad (2.69)$$

2. Chci $f(x)g(x) - AB \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0$

$$f(x)g(x) \pm f(x)B - AB = f(x)(g(x) - B) + (f(x) - A)B \quad (2.70)$$

- $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$ podle [L 2.1](#)
- $(g(x) - B) \rightarrow 0$ podle [V C](#)
- $f(x)(g(x) - B) \rightarrow 0$ podle [L 2.2](#) a prvních dvou bodů
- obdobně $(f(x) - A)B \rightarrow 0$ (konstanta B je omezená funkce)
- a tedy celá pravá strana $\rightarrow 0$ podle [V 2.3:Eq 2.62](#)

3. Ukážu $1/g(x) \rightarrow 1/B$ pro $x \rightarrow x_0$, respektive

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \rightarrow 0 \text{ pro } x \rightarrow x_0 \quad (2.71)$$

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} = (B - g(x)) \frac{1}{Bg(x)} \quad (2.72)$$

- $(B - g(x)) \rightarrow 0$ podle [V C](#)
- $\exists \Delta > 0 : |g(x)| > \Delta$ na jistém $P(x_0)$ podle [L 2.1:bod 2](#), protože $B \neq 0$
- tedy $1/Bg(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$, protože $|1/Bg(x)| < 1/B\Delta$ (dá se odhadnout)
- tedy celý výraz na pravé straně $\rightarrow 0$ podle [L 2.2](#)

QED

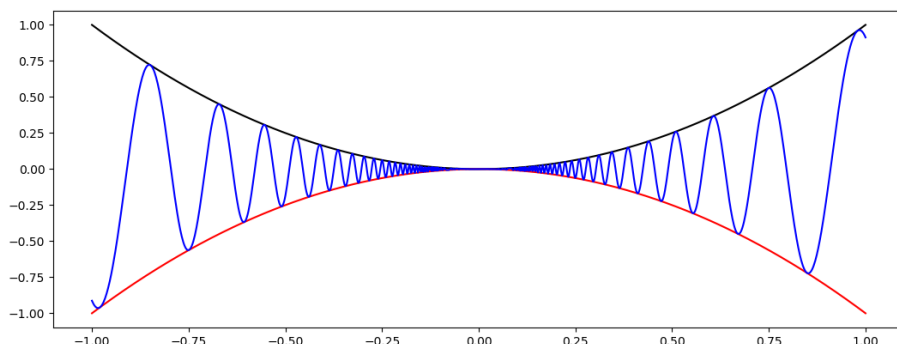
Pozn.: platí jednostranné verze [V 2.3](#)

Věta 2.4 (O strážnících). *Bud' $x_0, A \in \mathbb{R}$, (tiše předpokládám, že f, g, h jsou definované na jistém $P(x_0)$)*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad (2.73)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \quad (2.74)$$

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad (2.75)$$



Obrázek 2.4: Graf strážníků (černá a červená křivka) a sevřené funkce (modrá).

Důkaz. Z definice (zkusit také podle L 2.2). Chci

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta_1) : h(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.76)$$

Fixujme $\epsilon > 0$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta_2) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad \text{speciálně } f(x) > A - \epsilon \quad (2.77)$$

$$\exists \delta_3 > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta_3) : g(x) \in U(A, \epsilon) \quad \text{speciálně } g(x) < A + \epsilon \quad (2.78)$$

$$\text{navíc } \exists \delta > 0 \forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad (2.79)$$

Volím $\delta_1 = \min(\delta, \delta_2, \delta_3)$. Potom

$$\forall x \in P(x_0, \delta_1) : A - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \epsilon \quad (2.80)$$

neboli $h(x) \in U(A, \epsilon)$

QED

Příklad 2.7. Pro $h(x) = x^2 \sin(1/x)$, $g(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$ spočítejte $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. Tato limita se rovná nule, protože f i g se v nule blíží nule a zároveň $f \leq h \leq g$.

Věta 2.5 (Limita nerovností). Nechť $x_0, A, B \in \mathbb{R}$,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ Nechť

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : f \leq g \quad (2.81)$$

Pak $A \leq B$

Varování! Neplatí $f < g \implies A < B$. Například pro $x^2 < x^4$ pro $x \in P(0, 1)$

Důkaz. Obměnou. Bud' $A > B$. Dle **V 2.1**

$$\exists \epsilon > 0 : U(A, \epsilon) \cap U(B, \epsilon) = \emptyset \quad (2.82)$$

$$\text{speciálně } B < B + \epsilon < A - \epsilon < A \quad (2.83)$$

Z definice limity **D 2.11**

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta_1) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad \text{speciálně } f(x) > A - \epsilon \quad (2.84)$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta_2) : g(x) \in U(B, \epsilon) \quad \text{speciálně } g(x) < B + \epsilon \quad (2.85)$$

$$(2.86)$$

Definujme $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pak

$$\forall x \in P(x_0, \delta_3) : g(x) < B + \epsilon \leq A - \epsilon < f(x) \quad (2.87)$$

QED

Věta 2.6 (Monotonie a limita). *Je-li f monotónní a omezená v intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, potom existují $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$*

Důkaz. Pouze pro neklesající f , $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Ostatní d.ú.

Hlavní idea důkazu

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x) = s \quad (2.88)$$

Toto supremum existuje, podle **D A3** ($\{f(x), x \in (a, b)\}$ je omezená). Chceme

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P_-(b, \delta) : s - \epsilon < f(x) < s + \epsilon \quad (2.89)$$

Fixujme ϵ . Pozorování (podle **D 1.3: bod I**)

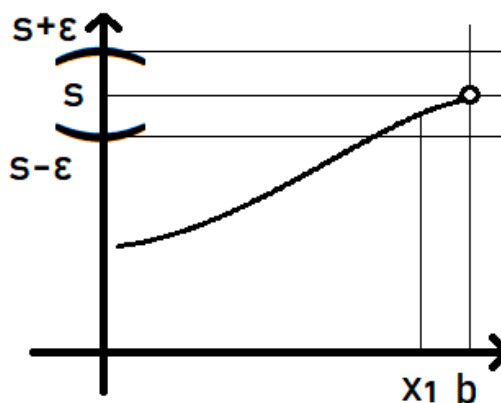
$$\forall x \in (a, b) : f(x) \leq s < s + \epsilon \quad (2.90)$$

Podle **D 1.3: bod II** $\exists x_1 \in (a, b) : f(x_1) \geq s - \epsilon$

Definujme $\delta = |x_1 - b| = b - x_1$. Pak díky monotónnosti (f je neklesající)

$$\forall x \in P_-(b, \delta) : f(x) \geq f(x_1) > s - \epsilon \quad (2.91)$$

protože $x > b - \delta = x_1$



Obrázek 2.5: Grafické znázornění důkazu.

QED

Poznámka: monotónní je i každý podinterval (a, b) , tedy každý bod z (a, b) má \lim_+ a \lim_- . Neříká nic o obecné limitě.

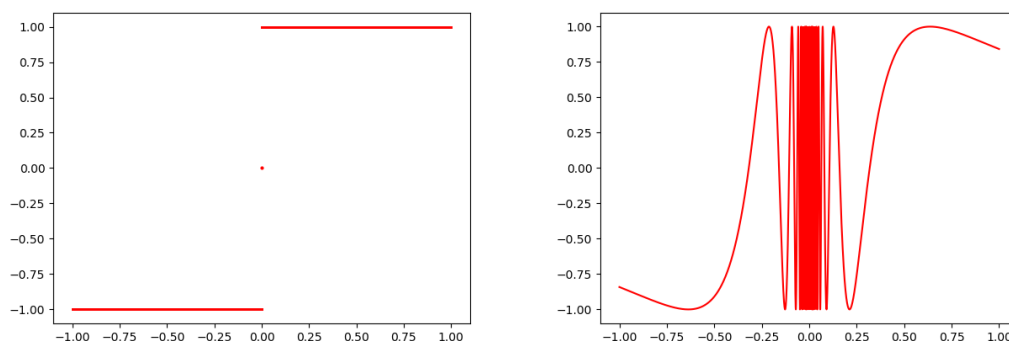
Definice 2.13 (Spojitost). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, f je definovaná na jistém $U(x_0)$. Řekneme, že f je v x_0 spojitá, pokud*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \epsilon) \quad (2.92)$$

Věta 2.7 (Limita a spojitost). *Funkce je v x_0 spojitá, právě když*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (2.93)$$

Varování! Existuje více typů nespojitosti: 1. druhu (jen limity zprava a zleva) a 2. druhu (limita neexistuje). Viz [Figure 2.6](#).



Obrázek 2.6: Limita 1. druhu (vlevo, znaménková funkce) a 2. druhu (vpravo, $\sin(1/x)$).

Důkaz. Pozorování: $U(x_0, \delta) = P(x_0, \delta) \cup \{x_0\}$

„ \Rightarrow “ je triviální: $U() \supset P()$

„ \Leftarrow “ víme:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) \in U(f(x_0), \epsilon) \quad (2.94)$$

Stačí přidat x_0 podle **pozorování**. Navíc $f(x_0) \in U(f(x_0), \epsilon)$. Tedy

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U(x_0, \delta) : f(x) \in U(f(x_0), \epsilon) \quad (2.95)$$

QED

Heslo! Limitu spojitě funkce lze počítat dosazením.

Věta 2.8 (Aritmetika spojitosti). *Bud' f, g spojité v $x_0 \in \mathbb{R}$ (Nevysloveně f, g jsou definované na jistém $P(x_0)$). Pak $f + g, f - g, fg$ jsou spojité v x_0 . Pokud $g(x_0) \neq 0$, pak f/g je spojitá v x_0 .*

Důkaz. Důsledek **V 2.3** a **V 2.8**.

QED

Příklad 2.8.

1. $f(x) = x$ je spojitá $\forall x \in \mathbb{R}$ Fix $\epsilon > 0$, volím $\delta = \epsilon$. Pak

$$\forall x \in U(x_0, \delta) : |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon \quad (2.96)$$

2. Polynom $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, kde $n \in \mathbb{R}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (ukáž, že konstanty jsou spojité funkce). Potom polynomy jsou spojité $\forall x \in \mathbb{R}$. Plyne z **bod 1** a **V 2.8**.

3. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy. Potom $R(x)$ je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$, pokud $Q(x_0) \neq 0$.

4. $\sin(x), \cos(x), e^x, \ln(x), \sqrt[n]{x}$ jsou spojité ve svých definičních oborech.

Důkaz. Později!

QED

Definice 2.14 (Složená funkce). *Složenou funkci h definujeme*

$$h = g \circ f : \quad \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Věta 2.9 (Limita superpozice). *Bud'*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad (2.97)$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A \quad (2.98)$$

navíc at' platí alespoň jedno z následujících

$$1. \exists \tilde{\delta} > 0 : \forall x \in P(x_0, \tilde{\delta}) : f(x) \neq y_0$$

$$2. g \text{ je spojitá v } y_0$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = A \quad (2.99)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & P(x_0, \delta) & \longrightarrow & U(A, \epsilon) \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ P(x_0) & & U(y_0) & & U(A) \end{array} \quad (2.100)$$

Důkaz. Chceme

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : g(f(x)) \in U(A, \epsilon) \quad (2.101)$$

Fixuji $\epsilon > 0$, hledám δ . Víím

$$\text{I z limity } g: \exists \delta_1 > 0 : \forall y \in P(y_0, \delta_1) : g(y) \in U(A, \epsilon)$$

$$\text{II z limity } f: \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta_2) : f(x) \in U(y_0, \delta_1)$$

Problém! Chci volit $\delta = \delta_2$, ale co s $g(y_0)$? Podle **bod II** je možné, že všechny hodnoty $f(x) = y_0$ a tedy $P(f(x)) = \emptyset$. Řešíme podle extra podmíněk:

bod 1 Volíme $\delta = \min(\delta_2, \tilde{\delta})$. Pak

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) \in U(y_0, \delta_1) - \{y_0\} = P(x_0, \delta_1) \quad (2.102)$$

a tedy podle **bod II** $g(f(x)) \in U(A, \epsilon)$

bod 2 $g(y_0) = A \in U(A, \epsilon)$ Stačí volit $\delta = \delta_2$. Potom

$$(a) \text{ buď } f(x) = y_0 \rightarrow \text{bod II}$$

$$(b) \text{ nebo } f(x) \neq y_0 \rightarrow \text{bod I}$$

QED

Příklad 2.9.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^3 - 3x + 1} = \sqrt{3}$$

- vnitřní funkce $= x^3 - 3x + 1$ konverguje ke své hodnotě (polynom) $= 3$
- vnější $\sqrt{y} \rightarrow \sqrt{3}$ pro $y \rightarrow 3$ odmocnina je spojitá

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2 + x \sin(1/x)} = \sqrt{2}$

- *vnitřní* $\rightarrow 2$
- *vnější je spojitá*
- *platí podmínka bod 2, ale ne bod 1*