

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# MATEMATIKA



Martin Brajer

## Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FOF

Praha 2020

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
0.1 Diferenciální počet . . . . .	1
0.2 Integrální počet . . . . .	1
<b>1 Úvod, základní pojmy</b>	<b>3</b>
1.1 Reálná čísla . . . . .	4
1.2 Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$ . . . . .	7
<b>2 Reálné funkce, limita a spojitost</b>	<b>12</b>

# Věty a definice

A	Lemma (Čtverec lichého čísla)	3
A	Věta (Reálná čísla)	4
A1	Definice (Algebraická struktura)	4
1.1	Příklad	5
A2	Definice (Uspořádání)	5
1.2	Příklad	6
1.1	Definice (Absolutní hodnota)	7
1.1	Lemma (Vlastnosti absolutní hodnoty)	7
1.1	Věta (Trojúhelníková nerovnost)	7
1.2	Definice (Maximum)	8
1.2	Lemma (Jednoznačnost max)	8
1.3	Definice (Supremum)	8
1.4	Definice (Infimum)	9
A3	Definice (Supremum a infimum)	9
1.5	Definice (Odmocnina)	9
B	Lemma (Čtverec dělitelný třema)	9
1.2	Věta (Iracionální čísla)	9
A4	Definice (Vlastnosti $\mathbb{N}$ )	9
1.3	Věta (Velikost intervalu)	10
2.1	Definice (Prostá funkce, injekce, monomorfismus)	12
2.2	Definice (Na funkce, surjekce, epimorfismus)	12
2.3	Definice (Vzájemně jednoznačné zobrazení, bijekce, isomorfismus)	12
2.4	Definice (Restrikce, zúžení)	13
2.1	Příklad	13
2.5	Definice (Složená funkce, superpozice)	13
2.6	Definice (Definiční obor a obor hodnot)	13
2.2	Příklad	13
2.7	Definice (Monotónost funkce)	13
2.8	Definice (Omezenost funkce)	14
2.9	Definice (Symetrie funkce)	14
2.10	Definice (Okolí)	14

2.1	Věta (Hausdorfov princip oddělení)	15
2.11	Definice (Limita)	15
B	Věta (Jednoznačnost limity)	15
2.3	Příklad	16
2.12	Definice (Jednostranné limity)	16
2.4	Příklad	16
2.2	Věta (Jednostranné vs oboustranná limita)	17
2.5	Příklad	17
C	Věta (Ekvivalentní limity)	17
2.1	Lemma (Chování funkce v okolí limity)	17
2.2	Lemma (Limita součinu)	18

# Semestry

A ..... 1

# Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/~kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

***Semestr A***

## 0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci  $f(t)$  vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost: } \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (1)$$

$$\text{okamžitá rychlost: } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \quad (2)$$

## 0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval  $[a, b]$  rozdělme na  $n$  částí délky  $\Delta_n$  v bodech  $a_n$ . Označme  $a_0 = a$ ,  $a_n = b$ .

$$\begin{aligned}
\text{přibližně: } f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + \dots + f(a_{n-1})\Delta_n = \\
= S(\Delta) = \sum_{j=1}^n f(a_{j-1})\Delta_j
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{přesně: } \lim_{\Delta \rightarrow 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

# 1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme  $A, B$  výroky:

$A$	$B$	$A \wedge B$ $A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obrázek 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace  $A \Rightarrow B$ :

1. přímý: ukážeme, že když  $A = 1$ , pak  $B = 1$
2. nepřímý: plyne z  $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že  $A = 1 \wedge B = 0$  a odvodíme spor (např.:  $1 = 2$ )

**Lemma A** (Čtverec lichého čísla). (*tvrzení*)  $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ liché} \Rightarrow n \text{ liché}$

*Důkaz 1.* Fixuj  $n \in \mathbb{N}$ . Prvočíselný rozklad:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (1.1)$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{2\alpha_k} \quad (1.2)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} : 2 \neq P_j \quad (1.3)$$

V rozvoji  $n^2$  není 2, tak v rozvoji  $n$  také není (liší se pouze mocninou). QED

*Důkaz 2.* Chci:  $\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ sudé} \Rightarrow n^2 \text{ sudé}$

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad (1.5)$$

QED

*Důkaz 3.* Předpokládejme:  $n^2$  liché a  $n$  sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \quad (1.6)$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \quad (1.7)$$

QED



O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$   $x$  je prvkem
- $x \notin A$   $\neg(x \in A)$
- $A \subset B$   $A$  je podmnožinou  $B$ :  $\forall x \in A : x \in B$
- $\emptyset$  prázdná množina
- množinové operace:
  - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
  - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
  - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
  - $\forall x$  pro všechna  $x$
  - $\exists y$  existuje  $y$
  - př.:  $V(x, y)$  je vlastnost, že  $y$  je matka  $x$ .  $M$  je množina mužů,  $Z$  je množina žen.
    - \*  $\forall x \in M \exists y \in Z : V(x, y)$
    - \*  $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

## 1.1 Reálná čísla

**Věta A** (Reálná čísla). *Existuje množina  $\mathbb{R}$  s operacemi  $\oplus$  a  $\otimes$  a relací  $<$  tak, že splňuje vlastnosti **D A1** až **D A4**.*

**Definice A1** (Algebraická struktura).

*I Komutativita:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x; x \cdot y = y \cdot x$*

*II Asociativita:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$*

*III Nulový prvek  $\oplus$ :  $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$*

*Jednotka  $\otimes$ :  $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$*

*IV Inverzní prvek:  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \exists! y : x + y = z$  (právě jedno; ozn.  $y = z - x$ )*

*$\forall x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists! y \in \mathbb{R} : x \cdot y = z$  (ozn.  $y = z/x$ )*

*V Distributivita:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$*

VI *Násobení nulou:*  $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$$

Další vlastnosti lze odvodit:

$$-(-x) = x \quad (1.8)$$

$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \quad (1.9)$$

Další značení:

$$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \text{ (} n\text{-krát)} \quad (1.10)$$

$$-x = 0 - x \quad (1.11)$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (1.12)$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (1.13)$$

I. - IV. říká  $(\mathbb{R}, +)$  a  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  jsou grupy.

I. - VI. říká  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  je těleso.

Ověřte, že **D A1** platí pro  $\mathbb{C}$  (komplexní čísla).

**Příklad 1.1.** Definujme  $\mathbb{C} = \{z = (z_1, z_2); z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$  a operace  $\oplus, \otimes$ .  $\forall z, u \in \mathbb{C} :$

$$(z_1, z_2) + (u_1, u_2) = (z_1 + u_1, z_2 + u_2) \quad (1.14)$$

$$(z_1, z_2) \cdot (u_1, u_2) = (z_1 u_1 - z_2 u_2, z_1 u_2 + z_2 u_1) \quad (1.15)$$

*Nulový prvek:*  $(0, 0)$

*Jednotkový prvek:*  $(1, 0)$

Lze zapisovat  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = (z_1, z_2)$ , ozn.  $z = z_1 + iz_2$  pro  $i^2 = -1$ .

**Definice A2** (Uspořádání).

*I Relace:*  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  nastane právě jedna z možností:

$(x < y)$  nebo  $(x > y)$  nebo  $(x = y)$

*II Tranzitivita:*  $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$

*III Vztah uspořádání a sčítání:*  $(x < y) \Rightarrow x + z < y + z$

*IV Vztah relace k násobení:*  $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < xy$

Značení:

$$\bullet \quad x > y \Leftrightarrow y < x$$

- $(x \leq y) \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$
- $(x \geq y) \Leftrightarrow (x > y) \vee (x = y)$

Lze odvodit další pravidla:

$$x < y \Leftrightarrow -x > -y \quad (1.16)$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} x &< y \\ x - x &< y - x && \text{/bod III} \\ 0 &< y - x \\ 0 - y &< y - y - x && \text{/bod III} \\ -y &< -x \\ -x &> -y && \text{funguje } \Leftrightarrow \end{aligned}$$

QED

DÚ:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \quad (1.17)$$

*Důkaz.* Sporem:

$$\begin{aligned} x &> 0 \text{ a } \frac{1}{x} < 0 \\ -\frac{1}{x} &> 0 \\ 0 &< x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \\ 1 &< 0 \end{aligned}$$

Pokud  $0 < 1$ , pak spor!  $0 < 1 < 0$ .

$$\text{Máme } 0 < -1 \xRightarrow{\text{bod IV}} 0 < (-1)(-1) = 1 \quad \text{QED}$$

**Příklad 1.2.** *Komplexní čísla nelze uspořádat podle D A2*

*Důkaz.* Sporem: předpokládejme, že to lze.

$$\begin{aligned} i &< 0 \\ (0, 1) &< (0, 0) \\ -i &> 0 \xRightarrow{D \text{ A2}-\text{bod IV}} 0 < (-i)(-i) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Pozn.: } i > 0 \xRightarrow{D \text{ A2}-\text{bod IV}} 0 < (i)(i) = -1 \quad \text{QED}$$

## 1.2 Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  přirozená čísla
- $\mathbb{Z} = \{0, -1, -2, \dots\} \cup \mathbb{N}$  celá čísla
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$  racionální čísla
- $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  iracionální čísla

Poznámka:  $\mathbb{Q}$  má obě vlastnosti **D A1**, **D A2**

Intervaly:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$  otevřený
- $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$  uzavřený
- $[a, b), (a, b]$  polootevřené
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$  neomezený otevřený
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$  neomezený otevřený
- podobně:  $[a, +\infty), (-\infty, a]$  neomezený uzavřený

**Definice 1.1** (Absolutní hodnota). *Pro  $x \in \mathbb{R}$  definuji*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pokud } x \geq 0 \\ -x & \text{pokud } x < 0 \end{cases}$$

**Lemma 1.1** (Vlastnosti absolutní hodnoty). *Nechť  $a > 0$ , pak  $|x| < a$  právě když  $-a < x < a$*

*Důkaz.* Podle znaménka  $x$ :

1. At  $x \geq 0$  pak  $|x| = x$  a máme ukázat, že  $x < a \Leftrightarrow -a < x < a$   
” $\Leftarrow$ ” jasná — ” $\Rightarrow$ ” víme  $-a < 0 \leq x < a$
2. At  $x < 0$ , pak  $|x| = -x$  a máme ukázat, že  $-x < a \Leftrightarrow -a < x < a$   
 $x > -a$  pak pokračujeme podobně jako v **bodě 1.**:  $-a < x < 0 < a$

QED

**Věta 1.1** (Trojúhelníková nerovnost).

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (1.18)$$

$$|x - y| \leq |x| + |y| \quad (1.19)$$

$$|x + y| \geq ||x| - |y|| \quad (1.20)$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| \quad (1.21)$$

*Důkaz.* Eq 1.18 a Eq 1.19 plyne z L 1.1

Eq 1.20 a Eq 1.21 plyne z předešlého řádku pomocí triku

$$x = x + y - y \quad (1.22)$$

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \quad (1.23)$$

$$|y| \leq |x + y| + |x| \quad (1.24)$$

$$|x| - |y| \leq |x + y| \quad (1.25)$$

$$|y| - |x| \leq |x + y| \quad / \cdot (-1) \quad (1.26)$$

$$|x| - |y| \geq -|x + y| \text{ plyne z Eq 1.26 a Eq 1.16} \quad (1.27)$$

QED

**Definice 1.2** (Maximum). *Nechť  $M \subset \mathbb{R}$*

- $x \in M$  nazveme maximum  $M$ , pokud  $\forall y \in M : y \leq x$   
Ozn.  $x = \max M$   
Př.:  $(0, 1)$  nemá  $\max$
- $K \in \mathbb{R}$  nazveme horní odhad  $M$ , pokud  $\forall x \in M : x \leq K$   
Př.:  $(0, 1)$  má horní odhad  $4, 1, \dots$

**Lemma 1.2** (Jednoznačnost max). *Existuje nejvýše 1 max.  $M \subset \mathbb{R}$*

*Důkaz.* Ať existují dvě:  $x_1, x_2 \in M$  maxima

$$x_1 \text{ je max; } x_2 \in M \Rightarrow x_1 \geq x_2 \quad (1.28)$$

$$x_2 \text{ je max; } x_1 \in M \Rightarrow x_2 \geq x_1 \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow x_1 \leq x_2 \leq x_1 \quad (1.30)$$

Tedy  $x_1 = x_2$

QED

Pozn.: analogicky def. minimum a dolní odhad.

**Definice 1.3** (Supremum). *Číslo  $s \in \mathbb{R}$  nazvu supremem množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , pokud*

$$I \quad \forall x \in M : x \leq s$$

$$II \quad \forall s' < s, s' \in \mathbb{R} : \exists x \in M : s' < x$$

*Supremum  $M$  značíme  $s = \sup M$*

Pozn.: **bod I** říká, že  $s$  je horní odhad, **bod II** říká, že  $s$  je nejmenší možný horní odhad

Pozn.: pokud supremum náleží do intervalu, je to jeho maximum

**Definice 1.4** (Infimum). *Nechť  $M \subset \mathbb{R}$ . řekneme, že  $s \in \mathbb{R}$  je infimum množiny  $M$  (ozn.  $\inf M$ ), pokud*

$$I \quad \forall x \in M : s \leq x$$

$$II \quad \forall s' > s, s' \in \mathbb{R} : \exists x < s' : x \in M$$

*Infimum  $M$  značíme  $s = \inf M$*

**Definice A3** (Supremum a infimum). *Každá neprázdná shora omezená  $M \subset \mathbb{R}$  má supremum v  $\mathbb{R}$ . Každá neprázdná zdola omezená  $M \subset \mathbb{R}$  má infimum v  $\mathbb{R}$ .*

**Definice 1.5** (Odmocnina).

1. *Nechť  $a > 0$  a  $n$  sudé,  $n \in \mathbb{N}$ , pak existuje právě jedno číslo  $b > 0 : b^n = a$*

2. *Nechť  $a > 0$  a  $n$  liché,  $n \in \mathbb{N}$ , pak existuje právě jedno číslo  $b \in \mathbb{R} : b^n = a$*

*Značení:  $b = \sqrt[n]{a}$*

**Lemma B** (Čtverec dělitelný třema).  *$k^2$  je dělitelné 3  $\Rightarrow k$  je děl. 3*

*Důkaz. Jak zapsat  $k$ ?  $\exists m \in \mathbb{Z}$  :*

$$k = 3m + 0 \quad k^2 \text{ je děl. 3} \quad (1.31)$$

$$k = 3m + 1 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 6m + 1 \quad \text{není děl. 3} \quad (1.32)$$

$$k = 3m + 2 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 12m + 4 \quad \text{není děl. 3} \quad (1.33)$$

QED

**Věta 1.2** (Iracionální čísla). *Existují iracionální čísla*

*Důkaz. Tvrdíme, že  $\sqrt{3}$  není racionální. Sporem:*

$$\text{Ať } \sqrt{3} \text{ je rac. } \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná: } \sqrt{3} = \frac{k}{l} \quad (1.34)$$

$$3 = \frac{k^2}{l^2} \Rightarrow k^2 = 3l^2 \quad (1.35)$$

$$k^2 \text{ je dělitelné 3} \xRightarrow{\text{L B}} k \text{ je děl. 3} \quad (1.36)$$

$$n \in \mathbb{Z} : (k = 3n \Rightarrow k^2 = 9n^2) \Rightarrow k^2 \text{ je děl 9} \quad (1.37)$$

$$k^2 = 9n^2 = 3l^2 \Rightarrow l^2 = 3n^2 \quad (1.38)$$

$$l^2 \text{ je děl. 3} \xRightarrow{\text{L B}} l \text{ je děl. 3} \quad (1.39)$$

Což je spor, protože  $k, l$  jsou nesoudělná.

QED

**Definice A4** (Vlastnosti  $\mathbb{N}$ ).

$$I \quad \forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$$

II Princip indukce: nechť  $M \subset \mathbb{N}$  a

$$(a) \quad 1 \in M$$

$$(b) \quad n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$$

$$\text{Pak } m = \mathbb{N}$$

Pozn.: **bod I** plyne z vlastnosti **D A3**

Pozn.: Archimédova vlastnost:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0 \text{ (tedy reálné)} \exists n \in \mathbb{N} : n\epsilon > m \quad (1.40)$$

Důkaz. Polož  $x = m/\epsilon$  v **bodě I**

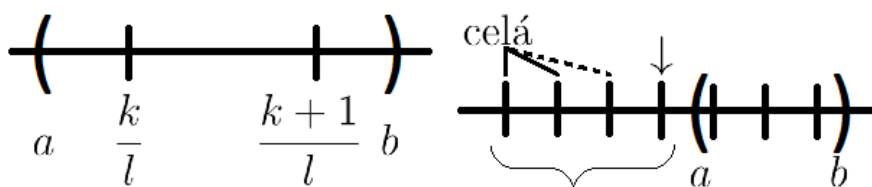
QED

**Věta 1.3** (Velikost intervalu). *Každý otevřený interval obsahuje nekonečně racionálních i nekonečně iracionálních čísel.*

Důkaz. Ve zkratce:

$$\frac{k}{l} + \frac{n}{n+1} \frac{1}{l} \quad \text{je racionální } \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.41)$$

$$\frac{k}{l} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{n}{n+1} \frac{1}{l} \quad \text{je iracionální } \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.42)$$



Mějme otevřený interval  $(a, b)$ . Stačí mít rac. č.  $k/l$  tak, aby  $k/l, (k+1)/l \in (a, b)$ .

Jak hledám  $l$ ? Z **D A4-bod I** pomocí  $l > 2/(b-a)$  plyne

$$\frac{1}{l} < \frac{b-a}{2} \quad (1.43)$$

Jak hledám  $k$ ? Definujme

$$M = \left\{ n \in \mathbb{Z}; \frac{n}{l} < a \right\} \quad (1.44)$$

Potom podle **D A3**  $\exists s \in \mathbb{R} : s = \sup M$

Tvrdíme:  $s \in M$ :

Podle D 1.3-**bod II**:  $\forall s' < s \exists n \in M : s' < n$

Volím  $s' \in (s - \frac{1}{2}, s)$ , pak  $\exists n' \in M : s' < n'$ . Zafixuji  $n'$  a tvrdím:

$$\forall s' \in (s - \frac{1}{2}, s) : s' < n' \leq s \quad (1.45)$$

A tedy  $s \leq n' \leq s$ . Definujme

$$k := s + 1 \Rightarrow \frac{k}{l} \in (a, b) \quad (1.46)$$

$$k + 1 := s + 2 \Rightarrow \frac{k + 1}{l} \in (a, b) \quad (1.47)$$

Potom:

$$a < \frac{k}{l} < \frac{k + s}{l} = \frac{s + 2}{l} < a + \frac{2}{l} < a + b - 1 = b \quad (1.48)$$

QED

*Důkaz.* **Eq 1.45** Vol.  $s'' \in (s - \frac{1}{2}, s)$  pak  $\exists n'' \in M : s'' < n''$

$$s - \frac{1}{2} < s' < n' \leq s \quad (1.49)$$

$$s - \frac{1}{2} < s'' < n'' \leq s \quad (1.50)$$

Tedy:

$$n', n'' \in \left(s - \frac{1}{2}, s\right] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow n' = n'' \quad (1.51)$$

QED



## 2. kapitola: Reálné funkce, limita a spojitost

Funkce z  $M$  do  $N$  je předpis, který každému prvku  $M$  přiřadí nejvýše jeden prvek z  $N$

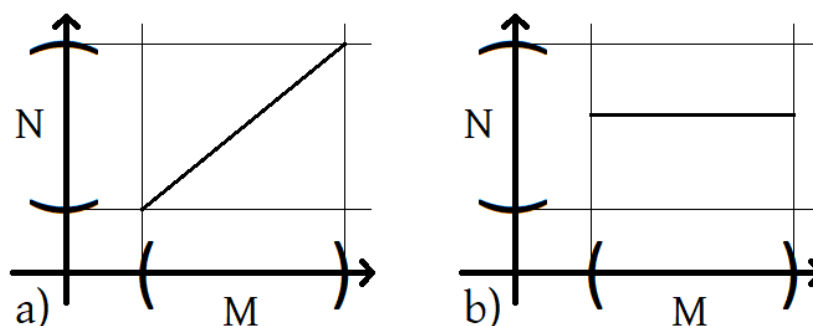
- $A \subset M : f(A) = \{f(x); x \in A\} \subset N$
- $B \subset N : f^{-1}(B) = \{x \in M : f(x) \in B\} \subset M$

**Definice 2.1** (Prostá funkce, injekce, monomorfismus). *Funkce je **prostá**, pokud*

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad (2.1)$$

**Definice 2.2** (Na funkce, surjekce, epimorfismus). *Funkce  $f : M \rightarrow N$  je **na** (zobrazuje  $M$  na  $N$ ), pokud*

$$\forall n \in N \exists m \in M : f(m) = n \quad (2.2)$$



Obrázek 2.1: Funkce a) je na, funkce b) není.

*Př.:  $\varphi$  není prostá, zobrazuje  $\mathbb{R}$  na  $[0, +\infty)$*

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3)$$

$$x \rightarrow x^2 \quad (2.4)$$

$$\varphi((-1, 1)) = [0, 1] \quad (2.5)$$

$$\varphi^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2] \quad (2.6)$$

**Definice 2.3** (Vzájemně jednoznačné zobrazení, bijekce, isomorfismus). *Je-li  $f : M \rightarrow N$  **prostá** a **na** říkáme, že je vzájemně jednoznačná*

Pro **vzájemně jednoznačnou funkci** lze definovat inverzní funkci:

$$f_{-1} : N \rightarrow M; y \in N \rightarrow \text{jediné } x \in M : f(x) = y \quad (2.7)$$

$$\textbf{Pozor!} \begin{cases} f^{-1} & \text{pro každou hodnotu zvlášť, je to množina} \\ f_{-1} & \text{inverzní funkce} \end{cases}$$

**Definice 2.4** (Restrikce, zúžení). Je-li  $f : M \rightarrow N$  a  $A \subset M$ :  $f|_A$  nazvu restrikce (zúžení)  $f$  na  $A$

**Příklad 2.1.**  $\varphi(x) = x^2 : \varphi|_{[0,+\infty)}$  zobrazuje  $[0, +\infty)$  na  $[0, +\infty)$  vzájemně jednoznačně. Lze tedy definovat  $\varphi_{-1} = (\varphi|_{[0,+\infty)})_{-1}(x) = \sqrt{x}$

**Definice 2.5** (Složená funkce, superpozice). Pro  $M, N, K$  množiny a  $f : M \rightarrow N; g : N \rightarrow K$  funkce definujeme složenou funkci

$$g \circ f : M \rightarrow K \quad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \quad (2.8)$$

$$x \in M \rightarrow (g(f(x))) \quad x \rightarrow f(x) \rightarrow (g(f(x))) \quad (2.9)$$

Budeme psát:  $\varphi : M \rightarrow N$  i když  $\varphi(x)$  není definované  $\forall x \in M$

**Definice 2.6** (Definiční obor a obor hodnot).

$$D(\varphi) = \{x \in M : \varphi(x) \text{ je definovaná}\} \quad (2.10)$$

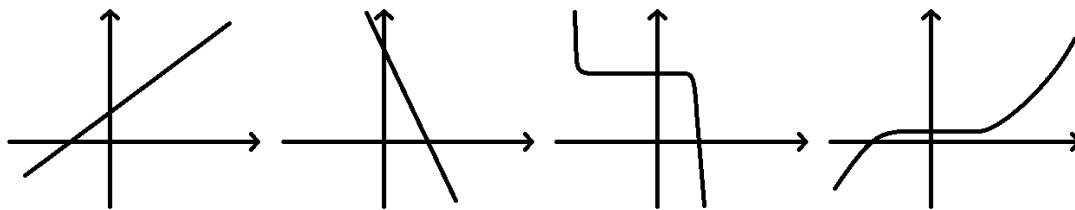
$$H(\varphi) = \varphi \{D(\varphi)\} \quad (2.11)$$

**Příklad 2.2.**

$$x^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad D(x^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\} \quad H(x^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$$

**Definice 2.7** (Monotónost funkce). Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; M \subset D(f)$ . Řeknu, že  $f$

$$\text{je} \begin{cases} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{neklesající} \end{cases} \text{ na } M, \text{ pokud } \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \begin{cases} < \\ > \\ \geq \\ \leq \end{cases} f(x_2)$$



Obrázek 2.2: Ilustrace.

**Definice 2.8** (Omezenost funkce). Řekněme, že  $f$

$$\text{je } \left\{ \begin{array}{l} \text{omezená shora} \\ \text{omezená zdola} \\ \text{omezená} \end{array} \right\} \text{ na } M, \text{ pokud } \exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in M : \left\{ \begin{array}{l} f(x) < K \\ f(x) > K \\ |f(x)| < K \end{array} \right\}$$

**Definice 2.9** (Symetrie funkce). Řekněme, že  $f$

$$\text{je } \left\{ \begin{array}{l} \text{lichá,} \\ \text{sudá,} \\ \text{periodická,} \end{array} \right\} \text{ pokud } \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D(f) \\ \forall x \in D(f) \\ \exists p \in \mathbb{R} : \forall x \in D(f) \end{array} \right\} \text{ platí } \left\{ \begin{array}{l} -x \in D(f) \quad \& \quad f(x) = -f(-x) \\ -x \in D(f) \quad \& \quad f(x) = f(-x) \\ x+p \in D(f) \quad \& \quad f(x) = f(x+p) \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

Budeme zkoumat:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nebo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Druhou variantu chápeme jako:

$$f = f_1 + if_2; \quad f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.13)$$

**Definice 2.10** (Okolí). Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}, \delta \in (0, \infty)$

- *kruhové okolí*  $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$   
(v aj  $B$ : ball)
- *prstencové okolí*  $P(x_0, \delta) := U(x_0, \delta) - \{x_0\}$
- *pravé kruhové okolí*  $U_+(x_0, \delta) := [x_0, x_0 + \delta)$
- obdobně definujeme **levé kruhové okolí**, **pravé prstencové okolí**  
a **levé prstencové okolí**

Poznámky:

- Pro  $0 < \delta_1 < \delta_2 \Rightarrow U(x_0, \delta_1) \subset U(x_0, \delta_2)$

- Budeme psát: „na jistém  $U(x_0)$  platí...“, což znamená  $\exists \delta > 0 : \forall x \in U(x_0, \delta)$  platí...

**Věta 2.1** (Hausdorffův princip oddělení). *Nechť  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ;  $x_1 \neq x_2$ , pak  $\exists \delta > 0$  tak, že  $U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta) = \emptyset$   
Speciálně:  $x_1 \notin U(x_2, \delta)$ ;  $x_2 \notin U(x_1, \delta)$*

*Důkaz.* Volím  $\delta = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$ . Tvrdím, že  $U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta) = \emptyset$

Sporem: ať  $\exists y \in U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta)$ , pak

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |x_1 - y + y - x_2| \stackrel{\text{V 1.1}}{\leq} \\ |x_1 - y| + |y - x_2| &< 2\delta = |x_1 - x_2| \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tedy  $|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$ , což je spor.

QED

**Definice 2.11** (Limita). *Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}$  a  $f$  je fce def na jistém  $P(x_0)$   
Číslo  $A \in \mathbb{R}$  nazvu limitou  $f$  v  $x_0$ , pokud*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.15)$$

*Značení:*

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$
- $f(x) \rightarrow A$  pro  $x \rightarrow x_0$

Terminologie: pokud existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$  říkáme, že  $f$  má vlastní limitu ve vlastním bodě

Poznámky:

- Limita závisí na  $f$  v okolí  $x_0$
- Jiné zápisy [Eq 2.15](#)

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(P(x_0, \delta)) \subset U(A, \epsilon) \quad (2.16)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon] \quad (2.17)$$

**Věta B** (Jednoznačnost limity). *Bud'  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$   
Pak  $A = B$*

Důkaz. Sporem: ať  $A \neq B$

$$\text{V 2.1} \quad \exists \epsilon > 0 : U(A, \epsilon) \cap U(B, \epsilon) = \emptyset \quad (2.18)$$

$$\text{Eq 2.15 pro } A \quad \exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.19)$$

$$\text{Eq 2.15 pro } B \quad \exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0, \delta_2) \Rightarrow f(x) \in U(B, \epsilon) \quad (2.20)$$

$$\text{Definujme} \quad \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \quad (2.21)$$

$$\text{Odvodíme spor} \quad \forall x \in U(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon) \cap U(B, \epsilon) = \emptyset \quad (2.22)$$

QED

### Příklad 2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \quad (2.23)$$

$$\text{cíl:} \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(2, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(4, \epsilon) \quad (2.24)$$

$$\text{f} \quad x \in U(4, \epsilon) \quad \text{hledám } \delta > 0 \quad (2.25)$$

$$\text{chci:} \quad 4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon \quad (2.26)$$

$$\text{lze předpokládat, že } \epsilon < 1, \text{ protože pokud } \epsilon \geq 1, \text{ pak } U(4, \frac{1}{2}) \subset U(4, \epsilon) \quad (2.27)$$

$$\text{vidíme:} \quad \sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon} \quad (2.28)$$

$$\text{volme:} \quad \delta = \min(2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2) \quad (2.29)$$

$$\text{volme:} \quad x \in P(2, \delta) \quad (2.30)$$

$$\text{chci dokázat, že platí cíl: } f(x) \in U(4, \epsilon) \quad (2.31)$$

$$\text{odhad shora:} \quad x^2 - 4 \leq (2 + \delta)^2 - 4 = 4 + 4\delta + \delta^2 - 4 = (4 + \delta)\delta \quad (2.32)$$

$$\leq (4 + \sqrt{4 + \epsilon} - 2)(\sqrt{4 + \epsilon} - 2) \quad (2.33)$$

$$= (\sqrt{4 + \epsilon} + 2)(\sqrt{4 + \epsilon} - 2) = 4 + \epsilon - 4 = \epsilon \quad (2.34)$$

$$\text{odhad odspodu:} \quad x^2 - 4 \geq (2 - \delta)^2 - 4 = 4 - 4\delta + \delta^2 - 4 = \delta(\delta - 4) \quad (2.35)$$

$$\dots \text{zbytek obdobně} \quad (2.36)$$

**Definice 2.12** (Jednostranné limity). Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  definovaná na jistém  $P_+(x_0)$  (resp.  $P_-(x_0)$ ). Pak číslo  $A$  nazvu limitou  $f$  v bodě  $x_0$  zprava (zleva), pokud:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P_{+(-)}(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.37)$$

Značení (zleva obdobně):

- $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$
- $f(x) \rightarrow A$  pro  $x \rightarrow x_0+$

**Příklad 2.4.**

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \quad (2.38)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \quad (2.39)$$

**Věta 2.2** (Jednostranné vs oboustranná limita). *Bud'  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  definovaná na jistém  $P(x_0, \delta)$ , pak následující tvrzení jsou ekvivalentní*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad (2.40)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A \quad (2.41)$$

*Důkaz.* Eq 2.40  $\Rightarrow$  Eq 2.41 triviální

Eq 2.41  $\Rightarrow$  Eq 2.40 volím  $\epsilon > 0$ , podle Eq 2.41

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in P_+(x_0, \delta_1) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.42)$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in P_-(x_0, \delta_1) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.43)$$

volím  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  (protože  $P(x_0, \delta) \subset P(x_0, \delta_1) \cup P(x_0, \delta_2)$ )

Potom  $P(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon)$  QED

**Příklad 2.5.** *Neexistuje  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$*

**Věta C** (Ekvivalentní limity). *Bud'  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  definovaná na jistém  $P(x_0)$ . Pak*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - A = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - A| = 0 \quad (2.44)$$

*Důkaz.*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x) - A| < \epsilon \quad (2.45)$$

$$|f(x) - A| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.46)$$

QED

**Lemma 2.1** (Chování funkce v okolí limity).

1. *Nechť  $f$  má v  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $A \in \mathbb{R}$ . Pak existuje  $P(x_0)$  takové, že  $f$  je na  $P(x_0)$  omezená. Tj.*

$$\exists \delta > 0 \exists K > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x)| < K \quad (2.47)$$

2. *Nechť  $f$  má v  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $A \neq 0$ , pak*

$$\exists \Delta > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x)| > \Delta \quad (2.48)$$

*Důkaz.*

1. Volím  $\epsilon = 1$  v definici limity. Pak

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : A - 1 < f(x) < A + 1 \quad (2.49)$$

tj.  $f(x) \in U(x_0, \delta)$ . Stačí volit  $K = \max(|A - 1|, |A + 1|)$ . pak

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : -K < f(x) - A < K \quad (2.50)$$

2.  $A \neq 0$ , předpokládejme  $A > 0$  ( $A < 0$  podobně)

$$\text{dle \textcolor{red}{V 2.1}} \quad \exists \epsilon > 0 : U(A, \epsilon) \cap U(0, \epsilon) = \emptyset \quad (2.51)$$

$$\text{z \textcolor{red}{D 2.11}} \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.52)$$

$$\text{mám } \delta > 0 \text{ a volím } \Delta = \epsilon/2 \quad (2.53)$$

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : f(x) \in U(A, \epsilon) \quad (2.54)$$

$$U(A, \epsilon) \cap U(0, \epsilon) = \emptyset \quad (2.55)$$

$$|f(x) - 0| \geq \epsilon > \Delta \quad (2.56)$$

QED

**Lemma 2.2** (Limita součinu). *Bud'te  $f, g$  definované na jistém  $P(x_0)$ ,  $f$  omezená na  $P(x_0)$  a*