

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

MATEMATIKA



Martin Brajer

Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FOF

Praha 2020

Obsah

Úvod	1
0.1 Diferenciální počet	1
0.2 Integrální počet	1
1 Úvod, základní pojmy	3
1.1 Reálná čísla	4
1.2 Význačné podmnožiny \mathbb{R}	7
2 Reálné funkce, limita a spojitost	12

Věty a definice

A	Lemma (Čtverec lichého čísla)	3
A	Věta (Reálná čísla)	4
A1	Definice (Algebraická struktura)	4
1.1	Příklad	5
A2	Definice (Uspořádání)	5
1.2	Příklad	6
1.1	Definice (Absolutní hodnota)	7
1.1	Lemma (Vlastnosti absolutní hodnoty)	7
1.1	Věta (Trojúhelníková nerovnost)	8
1.2	Definice (Maximum)	8
1.2	Lemma (Jednoznačnost max)	8
1.3	Definice (Supremum)	8
1.4	Definice (Infimum)	9
A3	Definice (Supremum a infimum)	9
1.5	Definice (Odmocnina)	9
B	Lemma (Čtverec dělitelný třema)	9
1.2	Věta (Iracionální čísla)	9
A4	Definice (Vlastnosti \mathbb{N})	10
1.3	Věta (Velikost intervalu)	10

Semestry

A 1

Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/~kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

Semestr A

0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci $f(t)$ vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost: } \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (1)$$

$$\text{okamžitá rychlost: } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \quad (2)$$

0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval $[a, b]$ rozdělme na n částí délky Δ_n v bodech a_n . Označme $a_0 = a$, $a_n = b$.

$$\begin{aligned}
\text{přibližně: } f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + \dots + f(a_{n-1})\Delta_n = \\
= S(\Delta) = \sum_{j=1}^n f(a_{j-1})\Delta_j
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{přesně: } \lim_{\Delta \rightarrow 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme A, B výroky:

A	B	$A \wedge B$ $A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obrázek 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace $A \Rightarrow B$:

1. přímý: ukážeme, že když $A = 1$, pak $B = 1$
2. nepřímý: plyne z $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že $A = 1 \wedge B = 0$ a odvodíme spor (např.: $1 = 2$)

Lemma A (Čtverec lichého čísla). (*tvrzení*) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ liché} \Rightarrow n \text{ liché}$

Důkaz 1. Fixuj $n \in \mathbb{N}$. Prvočíselný rozklad:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (1.1)$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{2\alpha_k} \quad (1.2)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} : 2 \neq P_j \quad (1.3)$$

V rozvoji n^2 není 2, tak v rozvoji n také není (liší se pouze mocninou). QED

Důkaz 2. Chci: $\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ sudé} \Rightarrow n^2 \text{ sudé}$

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad (1.5)$$

QED

Důkaz 3. Předpokládejme: n^2 liché a n sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \quad (1.6)$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \quad (1.7)$$

QED

O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$ x je prvkem
- $x \notin A$ $\neg(x \in A)$
- $A \subset B$ A je podmnožinou B : $\forall x \in A : x \in B$
- \emptyset prázdná množina
- množinové operace:
 - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
 - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
 - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
 - $\forall x$ pro všechna x
 - $\exists y$ existuje y
 - př.: $V(x, y)$ je vlastnost, že y je matka x . M je množina mužů, Z je množina žen.
 - * $\forall x \in M \exists y \in Z : V(x, y)$
 - * $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

1.1 Reálná čísla

Věta A (Reálná čísla). *Existuje množina \mathbb{R} s operacemi \oplus a \otimes a relací $<$ tak, že splňuje vlastnosti A1 až A4.*

Definice A1 (Algebraická struktura).

I Komutativita: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x; x \cdot y = y \cdot x$

II Asociativita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

III Nulový prvek \oplus : $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$

Jednotka \otimes : $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$

IV Inverzní prvek: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \exists! y : x + y = z$ (právě jedno; ozn. $y = z - x$)

$\forall x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists! y \in \mathbb{R} : x \cdot y = z$ (ozn. $y = z/x$)

V Distributivita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$

VI *Násobení nulou:* $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$$

Další vlastnosti lze odvodit:

$$-(-x) = x \quad (1.8)$$

$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \quad (1.9)$$

Další značení:

$$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \text{ (} n\text{-krát)} \quad (1.10)$$

$$-x = 0 - x \quad (1.11)$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (1.12)$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (1.13)$$

I. - IV. říká $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ jsou grupy.

I. - VI. říká $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je těleso.

Ověřte, že Vlastnost **A1** platí pro \mathbb{C} (komplexní čísla).

Příklad 1.1. Definujme $\mathbb{C} = \{z = (z_1, z_2); z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ a operace \oplus, \otimes . $\forall z, u \in \mathbb{C} :$

$$(z_1, z_2) + (u_1, u_2) = (z_1 + u_1, z_2 + u_2) \quad (1.14)$$

$$(z_1, z_2) \cdot (u_1, u_2) = (z_1 u_1 - z_2 u_2, z_1 u_2 + z_2 u_1) \quad (1.15)$$

Nulový prvek: $(0, 0)$

Jednotkový prvek: $(1, 0)$

Lze zapisovat $z \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2)$, ozn. $z = z_1 + iz_2$ pro $i^2 = -1$.

Definice A2 (Uspořádání).

I Relace: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nastane právě jedna z možností:

$(x < y)$ nebo $(x > y)$ nebo $(x = y)$

II Tranzitivita: $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$

III Vztah uspořádání a sčítání: $(x < y) \Rightarrow x + z < y + z$

IV Vztah relace k násobení: $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < xy$

Značení:

$$\bullet \quad x > y \Leftrightarrow y < x$$

- $(x \leq y) \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$
- $(x \geq y) \Leftrightarrow (x > y) \vee (x = y)$

Lze odvodit další pravidla:

$$x < y \Leftrightarrow -x > -y \quad (1.16)$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} x &< y \\ x - x &< y - x && \text{/bod III} \\ 0 &< y - x \\ 0 - y &< y - y - x && \text{/bod III} \\ -y &< -x \\ -x &> -y && \text{funguje } \Leftrightarrow \end{aligned}$$

QED

DÚ:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \quad (1.17)$$

Důkaz. Sporem:

$$\begin{aligned} x &> 0 \text{ a } \frac{1}{x} < 0 \\ -\frac{1}{x} &> 0 \\ 0 &< x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \\ 1 &< 0 \end{aligned}$$

Pokud $0 < 1$, pak spor! $0 < 1 < 0$.

Máme $0 < -1 \xRightarrow{\text{IV}} 0 < (-1)(-1) = 1$ QED

Příklad 1.2. *Komplexní čísla nelze uspořádat podle Vlastnosti A2*

Důkaz. Sporem: Předpokládejme, že to lze.

$$\begin{aligned} i &< 0 \\ (0, 1) &< (0, 0) \\ -i &> 0 \xRightarrow{A_2IV} 0 < (-i)(-i) = -1 \end{aligned}$$

Note: $i > 0 \xrightarrow{A_2 IV} 0 < (i)(i) = -1$

QED

1.2 Význačné podmnožiny \mathbb{R}

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z} = \{0, -1, -2, \dots\} \cup \mathbb{N}$ celá čísla
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ racionální čísla
- $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ iracionální čísla

Poznámka: \mathbb{Q} má obě vlastnosti **A1**, **A2**

Intervaly:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ otevřený
- $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$ uzavřený
- $[a, b), (a, b]$ polootevřené
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ neomezený otevřený
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$ neomezený otevřený
- podobně: $[a, +\infty), (-\infty, a]$ neomezený uzavřený

Definice 1.1 (Absolutní hodnota). *Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pokud } x \geq 0 \\ -x & \text{pokud } x < 0 \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Vlastnosti absolutní hodnoty). *Nechť $a > 0$, pak $|x| < a$ právě když $-a < x < a$*

Důkaz. 1. At $x \geq 0$ pak $|x| = x$ a máme ukázat, že $x < a \Leftrightarrow -a < x < a$
" \Leftarrow " jasná — " \Rightarrow " víme $-a < 0 \leq x < a$

2. At $x < 0$, pak $|x| = -x$ a máme ukázat, že $-x < a \Leftrightarrow -a < x < a$
 $x > -a$ pak pokračujeme podobně jako **1.**: $-a < x < 0 < a$

QED

Věta 1.1 (Trojúhelníková nerovnost).

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (1.18)$$

$$|x - y| \leq |x| + |y| \quad (1.19)$$

$$|x + y| \geq ||x| - |y|| \quad (1.20)$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| \quad (1.21)$$

Důkaz. 1.18 a 1.19 plyne z Lemma 1.1

1.20 a 1.21 plyne z předešlého řádku pomocí triku

$$x = x + y - y \quad (1.22)$$

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \quad (1.23)$$

$$|y| \leq |x + y| + |x| \quad (1.24)$$

$$|x| - |y| \leq |x + y| \quad (1.25)$$

$$|y| - |x| \leq |x + y| \quad (1.26)$$

$$|x| - |y| \geq -|x + y| \text{ plyne z 1.26 a 1.16} \quad (1.27)$$

QED

Definice 1.2 (Maximum). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$*

- $x \in M$ nazveme maximum M , pokud $\forall y \in M : y \leq x$
Ozn. $x = \max M$
Př.: $(0, 1)$ nemá max
- $K \in \mathbb{R}$ nazveme horní odhad M , pokud $\forall x \in M : x \leq K$
Př.: $(0, 1)$ má horní odhad 4, 1, ...

Lemma 1.2 (Jednoznačnost max). *Existuje nejvýše 1 max. $M \subset \mathbb{R}$*

Důkaz. Ať existují dvě: $x_1, x_2 \in M$ maxima

$$x_1 \text{ je max; } x_2 \in M \Rightarrow x_1 \geq x_2 \quad (1.28)$$

$$x_2 \text{ je max; } x_1 \in M \Rightarrow x_2 \geq x_1 \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow x_1 \leq x_2 \leq x_1 \quad (1.30)$$

Tedy $x_1 = x_2$

QED

Pozn.: analogicky def. minimum a dolní odhad.

Definice 1.3 (Supremum). *Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazvu supremem množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud*

$$\forall x \in M : x \leq s$$

$$II \quad \forall s' < s, s' \in \mathbb{R} : \exists x \in M : s' < x$$

Supremum M značíme $s = \sup M$

Pozn.: **I** říká, že s je horní odhad, **II** říká, že s je nejmenší možný horní odhad

Pozn.: pokud supremum náleží do intervalu, je to jeho maximum

Definice 1.4 (Infimum). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$. řekneme, že $s \in \mathbb{R}$ je infimum množiny M (ozn. $\inf M$), pokud*

$$I \quad \forall x \in M : s \leq x$$

$$II \quad \forall s' > s, s' \in \mathbb{R} : \exists x < s' : x \in M$$

Infimum M značíme $s = \inf M$

Definice A3 (Supremum a infimum). *Každá neprázdná shora omezená $M \subset \mathbb{R}$ má supremum v \mathbb{R} . Každá neprázdná zdola omezená $M \subset \mathbb{R}$ má infimum v \mathbb{R} .*

Definice 1.5 (Odmocnina).

1. *Nechť $a > 0$ a n sudé, $n \in \mathbb{N}$, pak existuje právě jedno číslo $b > 0 : b^n = a$*

2. *Nechť $a > 0$ a n liché, $n \in \mathbb{N}$, pak existuje právě jedno číslo $b \in \mathbb{R} : b^n = a$*

Značení: $b = \sqrt[n]{a}$

Lemma B (Čtverec dělitelný třema). *k^2 je dělitelné 3 $\Rightarrow k$ je děl. 3*

Důkaz. Jak zapsat k ? $\exists m \in \mathbb{Z} :$

$$k = 3m + 0 \quad k^2 \text{ je děl. 3} \quad (1.31)$$

$$k = 3m + 1 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 6m + 1 \quad \text{není děl. 3} \quad (1.32)$$

$$k = 3m + 2 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 12m + 4 \quad \text{není děl. 3} \quad (1.33)$$

QED

Věta 1.2 (Iracionální čísla). *Existují iracionální čísla*

Důkaz. Tvrdíme, že $\sqrt{3}$ není racionální. Sporem:

$$\text{Ať } \sqrt{3} \text{ je rac. } \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná: } \sqrt{3} = \frac{k}{l} \quad (1.34)$$

$$3 = \frac{k^2}{l^2} \Rightarrow k^2 = 3l^2 \quad (1.35)$$

$$k^2 \text{ je dělitelné 3} \xRightarrow{B} k \text{ je děl. 3} \quad (1.36)$$

$$n \in \mathbb{Z} : (k = 3n \Rightarrow k^2 = 9n^2) \Rightarrow k^2 \text{ je děl. 9} \quad (1.37)$$

$$k^2 = 9n^2 = 3l^2 \Rightarrow l^2 = 3n^2 \quad (1.38)$$

$$l^2 \text{ je děl. 3} \xRightarrow{B} l \text{ je děl. 3} \quad (1.39)$$

Což je spor, protože k, l jsou nesoudělná.

QED

Definice A4 (Vlastnosti \mathbb{N}).

$$I \quad \forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$$

II *Princip indukce*: nechť $M \subset \mathbb{N}$ a

$$(a) \quad 1 \in M$$

$$(b) \quad n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$$

$$\text{Pak } m = \mathbb{N}$$

Pozn.: Vlastnost **I** plyne z vlastnosti **A3**

Pozn.: Archimédova vlastnost:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0 \text{ (tedy reálné)} \exists n \in \mathbb{N} : n\epsilon > m \quad (1.40)$$

Důkaz. Polož $x = m/\epsilon$ v **I**

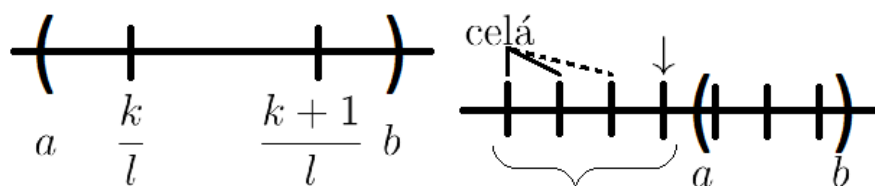
QED

Věta 1.3 (Velikost intervalu). *Každý otevřený interval obsahuje nekonečně racionálních i nekonečně iracionálních čísel.*

Důkaz. Ve zkratce:

$$\frac{k}{l} + \frac{n}{n+1} \frac{1}{l} \quad \text{je racionální } \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.41)$$

$$\frac{k}{l} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{n}{n+1} \frac{1}{l} \quad \text{je iracionální } \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.42)$$



Mějme otevřený interval (a, b) . Stačí mít rac. č. k/l tak, aby $k/l, (k+1)/l \in (a, b)$.

$$\text{Jak hledám } l? \quad \frac{1}{l} < \frac{b-a}{2} \quad \text{plyne z } \mathbf{I} \text{ pomocí } l > \frac{2}{b-a}$$

$$\text{Jak hledám } k? \quad \text{def. } M = \left\{ n \in \mathbb{Z}; \frac{n}{l} < a \right\} \quad \text{podle } \mathbf{A3} \exists s \in \mathbb{R} : s = \sup M$$

Tvrdíme: $s \in M$:

Podle **druhé vlastnosti suprema**: $\forall s' < s \exists n \in M : s' < n$

Volím $s' \in (s - \frac{1}{2}, s)$, pak $\exists n' \in M : s' < n'$. Zafixuji n' a tvrdím:

$$\forall s' \in (s - \frac{1}{2}, s) : s' < n' \leq s \quad (1.43)$$

A tedy $s \leq n' \leq s$. Definujme

$$k := s + 1 \Rightarrow \frac{k}{l} \in (a, b) \quad (1.44)$$

$$k + 1 := s + 2 \Rightarrow \frac{k + 1}{l} \in (a, b) \quad (1.45)$$

Potom:

$$a < \frac{k}{l} < \frac{k + s}{l} = \frac{s + 2}{l} < a + \frac{2}{l} < a + b - 1 = b \quad (1.46)$$

QED

Důkaz. 1.43 Vol. $s'' \in (s - \frac{1}{2}, s)$ pak $\exists n'' \in M : s'' < n''$

$$s - \frac{1}{2} < s' < n' \leq s \quad (1.47)$$

$$s - \frac{1}{2} < s'' < n'' \leq s \quad (1.48)$$

Tedy:

$$n', n'' \in (s - \frac{1}{2}, s] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow n' = n'' \quad (1.49)$$

QED

2. kapitola: Reálne funkce, limita a spojitost