Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

MATEMATIKA

Martin Brajer

Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející:	doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	FOF

Praha 2020

Obsah

Obsah vět a definic

Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/∼kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci $f(t)$ vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost:} \quad \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{1}$$

$$\text{okamžitá rychlost:} \quad \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) \tag{2}$$

0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval $[a,b]$ rozdělme na n částí délky Δ_n v bodech a_n. Označme $a_0 = a$, $a_n = b$.

$$\text{přibližně:} \quad f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + ... + f(a_{n-1})\Delta_n =$$

$$= S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} f(a_{j-1})\Delta_j \tag{3}$$

$$\text{přesně:} \quad \lim_{\Delta\to 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme A, B výroky:

A	B	$A \wedge B$ $A\&B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obrázek 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace $A \Rightarrow B$:

1. přímý: ukážeme, že když $A = 1$, pak $B = 1$
2. nepřímý: plyne z $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že $A = 1 \wedge B = 0$ a odvodíme spor (např.: $1 = 2$)

Lemma 1.1 (Čtverec lichého čísla). *(tvrzení)* $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ *liché* $\Rightarrow n$ *liché*

Důkaz 1. Fixuj $n \in \mathbb{N}$. Prvočíselný rozklad:XXX

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \tag{1.1}$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k} \tag{1.2}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\} : 2 \neq P_j \tag{1.3}$$

V rozvoji n^2 není 2, tak v rozvoji n také není (liší se pouze mocninou). QED

Důkaz 2. Chci: $\forall n \in \mathbb{N} : n$ sudé $\Rightarrow n^2$ sudé

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \tag{1.5}$$

QED

Důkaz 3. Předpokládejme: n^2 liché a n sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \tag{1.6}$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \tag{1.7}$$

QED

O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$ $\quad x$ je prvkem
- $x \notin A$ $\quad \neg(x \in A)$
- $A \subset B$ $\quad A$ je podmnožinou B: $\forall x \in A : x \in B$
- $\emptyset$ $\quad$ prázdná množina
- množinové operace:
  - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
  - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
  - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
  - $\forall x$ $\quad$ pro všechna x
  - $\exists y$ $\quad$ existuje y
  - př.: $V(x, y)$ je vlastnost, že y je matka x. M je množina mužů, Z je množina žen.
    - * $\forall x \in M\ \exists y \in Z : V(x, y)$
    - * $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

1.1 Reálná čísla

Věta A (Reálná čísla)**.** *Existuje množina* $\mathbb{R}$ *s operacemi* $\oplus$ *a* $\otimes$ *a relací* $<$ *tak, že splňuje vlastnosti* A_1 *až* A_4*.*

Vlastnost A1 (Algebraická struktura)**.** *Vlastnosti:*

I *Komutativita:* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x;\ \ x \cdot y = y \cdot x$

II *Asociativita:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z;\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

III *Nulový prvek* $\oplus$*, jednotka* $\otimes$*:* $\exists\ 0 \in \mathbb{R}, \exists\ 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x; 1 \cdot x = x$

IV *Inverzní prvek:* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}\ \exists! y : x + y = z$ *(právě jedno; ozn.* $y = z - x$*)*
$\forall x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists! y \in \mathbb{R} : x \cdot y = z$ *(ozn.* $y = z/x$*)*

V *Distributivita:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$

VI Násobení nulou: $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$

Další vlastnosti lze odvodit:

$$-(-x) = x \tag{1.8}$$

$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \tag{1.9}$$

Další značení:

$$x^n = x \cdot x \cdot ... \cdot x (n\text{-krát}) \tag{1.10}$$

$$-x = 0 - x \tag{1.11}$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-1} = \frac{1}{x} \tag{1.12}$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \tag{1.13}$$

I. - IV. říká $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ jsou grupy.

I. - VI. říká $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je těleso.

Ověřte, že *Vlastnost A1* platí pro $\mathbb{C}$ (komplexní čísla).