

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# MATEMATIKA



Martin Brajer

## Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FOF

Praha 2020

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
0.1 Diferenciální počet . . . . .	1
0.2 Integrální počet . . . . .	1
<b>1 Úvod, základní pojmy</b>	<b>2</b>
1.1 Reálná čísla . . . . .	3

# Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/~kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

## 0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci  $f(t)$  vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost: } \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (1)$$

$$\text{okamžitá rychlost: } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \quad (2)$$

## 0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval  $[a, b]$  rozdělme na  $n$  částí délky  $\Delta_n$  v bodech  $a_n$ . Označme  $a_0 = a$ ,  $a_n = b$ .

$$\begin{aligned} \text{přibližně: } f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + \dots + f(a_{n-1})\Delta_n = \\ = S(\Delta) = \sum_{j=1}^n f(a_{j-1})\Delta_j \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{přesně: } \lim_{\Delta \rightarrow 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \quad (4)$$

# 1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme A, B výroky:

A	B	$A \wedge B$ $A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obrázek 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace  $A \Rightarrow B$ :

1. přímý: ukážeme, že když  $A = 1$ , pak  $B = 1$
2. nepřímý: plyne z  $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že  $A = 1 \wedge B = 0$  a odvodíme spor (např.:  $1 = 2$ )

**Lemma 1.1.** (*tvrzení*)  $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ liché} \Rightarrow n \text{ liché}$

*Důkaz 1.* Fixuj  $n \in \mathbb{N}$ . Prvočíselný rozklad:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (1.1)$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{2\alpha_k} \quad (1.2)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} : 2 \neq P_j \quad (1.3)$$

V rozvoji  $n^2$  není 2, tak v rozvoji  $n$  také není (liší se pouze mocninou). QED

*Důkaz 2.* Chci:  $\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ sudé} \Rightarrow n^2 \text{ sudé}$

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad (1.5)$$

QED

*Důkaz 3.* Předpokládejme:  $n^2$  liché a  $n$  sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \quad (1.6)$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \quad (1.7)$$

QED

O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$      $x$  je prvkem
- $x \notin A$      $\neg(x \in A)$
- $A \subset B$      $A$  je podmnožinou  $B$ :  $\forall x \in A : x \in B$
- $\emptyset$     prázdná množina
- množinové operace:
  - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
  - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
  - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
  - $\forall x$     pro všechna  $x$
  - $\exists y$     existuje  $y$
  - př.:  $V(x, y)$  je vlastnost, že  $y$  je matka  $x$ .  $M$  je množina mužů,  $Z$  je množina žen.
    - \*  $\forall x \in M \exists y \in Z : V(x, y)$
    - \*  $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

## 1.1 Reálná čísla

**Věta A.** *Existuje množina  $\mathbb{R}$  s operacemi  $\oplus$  a  $\otimes$  a relací  $<$  tak, že splňuje vlastnosti  $A_1$  až  $A_4$ .*

**Věta 1.1.** *Existuje množina  $\mathbb{R}$  s operacemi  $\oplus$  a  $\otimes$  a relací  $<$  tak, že splňuje vlastnosti  $A_1$  až  $A_4$ .*