Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

MATEMATIKA

Martin Brajer

Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející:	doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	FOF

Praha 2020

Obsah

Věty a definice

Semestry

Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/∼kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

Semestr A

0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci $f(t)$ vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost:} \quad \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{1}$$

$$\text{okamžitá rychlost:} \quad \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) \tag{2}$$

0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval $[a,b]$ rozdělme na n částí délky Δ_n v bodech a_n. Označme $a_0 = a$, $a_n = b$.

$$\begin{aligned} \text{přibližně:}\quad & f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + ... + f(a_{n-1})\Delta_n = \\ & = \ S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} f(a_{j-1})\Delta_j \qquad (3) \\ \text{přesně:}\quad & \lim_{\Delta\to 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \qquad (4) \end{aligned}$$

1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme A, B výroky:

A	B	$A \wedge B$ $A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obrázek 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace $A \Rightarrow B$:

1. přímý: ukážeme, že když $A = 1$, pak $B = 1$
2. nepřímý: plyne z $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že $A = 1 \wedge B = 0$ a odvodíme spor (např.: $1 = 2$)

Lemma A (Čtverec lichého čísla)**.** *(tvrzení)* $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ *liché* $\Rightarrow n$ *liché*

Důkaz 1. Fixuj $n \in \mathbb{N}$. Prvočíselný rozklad:XXX

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \tag{1.1}$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k} \tag{1.2}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\} : 2 \neq P_j \tag{1.3}$$

V rozvoji n^2 není 2, tak v rozvoji n také není (liší se pouze mocninou). QED

Důkaz 2. Chci: $\forall n \in \mathbb{N} : n$ sudé $\Rightarrow n^2$ sudé

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \tag{1.5}$$

QED

Důkaz 3. Předpokládejme: n^2 liché a n sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \tag{1.6}$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \tag{1.7}$$

QED

O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$ $\quad x$ je prvkem
- $x \notin A$ $\quad \neg(x \in A)$
- $A \subset B$ $\quad A$ je podmnožinou B: $\forall x \in A : x \in B$
- $\emptyset$ $\quad$ prázdná množina
- množinové operace:
  - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
  - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
  - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
  - $\forall x$ $\quad$ pro všechna x
  - $\exists y$ $\quad$ existuje y
  - př.: $V(x, y)$ je vlastnost, že y je matka x. M je množina mužů, Z je množina žen.
    - $\forall x \in M \; \exists y \in Z : V(x, y)$
    - $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

1.1 Reálná čísla

Věta A (Reálná čísla)**.** *Existuje množina $\mathbb{R}$ s operacemi $\oplus$ a $\otimes$ a relací $<$ tak, že splňuje vlastnosti A1 až A_4.*

Vlastnost A1 (Algebraická struktura)**.**

I *Komutativita:* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x; \;\; x \cdot y = y \cdot x$

II *Asociativita:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z; \;\; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

III *Nulový prvek* $\oplus : \exists\, 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$
Jednotka $\otimes : \exists\, 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$

IV *Inverzní prvek:* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \; \exists! y : x + y = z$ *(právě jedno; ozn.* $y = z - x$*)*
$\forall x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0 \; \exists! y \in \mathbb{R} : x \cdot y = z$ *(ozn.* $y = z/x$*)*

V *Distributivita:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$

VI Násobení nulou: $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$
$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$

Další vlastnosti lze odvodit:

$$-(-x) = x \tag{1.8}$$
$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \tag{1.9}$$

Další značení:

$$x^n = x \cdot x \cdot ... \cdot x \ (n\text{-krát}) \tag{1.10}$$
$$-x = 0 - x \tag{1.11}$$
$$\forall x \neq 0 : x^{-1} = \frac{1}{x} \tag{1.12}$$
$$\forall x \neq 0 : x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \tag{1.13}$$

I. - IV. říká $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ jsou grupy.
I. - VI. říká $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je těleso.
Ověřte, že Vlastnost A1 platí pro $\mathbb{C}$ (komplexní čísla).

Příklad 1.1. *Definujme* $\mathbb{C} = \{z = (z_1, z_2); z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ *a operace* $\oplus, \otimes$. $\forall z, u \in \mathbb{C}$:

$$(z_1, z_2) + (u_1, u_2) = (z_1 + u_1, z_2, u_2) \tag{1.14}$$
$$(z_1, z_2) \cdot (u_1, u_2) = (z_1 u_1 - z_2 u_2, z_1 u_2 + z_2 u_1) \tag{1.15}$$

Nulový prvek: $(0, 0)$
Jednotkový prvek: $(1, 0)$
Lze zapisovat $z \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2)$, *ozn.* $z = z_1 + iz_2$ *pro* $i^2 = -1$.

Vlastnost A2 (Uspořádání)**.**

I Relace: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *nastane právě jedna z možností:*
$(x < y)$ *nebo* $(x > y)$ *nebo* $(x = y)$

II Tranzitivita: $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$

III Vztah uspořádání a sčítání: $(x < y) \Rightarrow x + z < y + z$

IV Vztah relace k násobení: $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < xy$

Značení:

- $x > y \Leftrightarrow y < x$

- $(x \leq y) \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$
- $(x \geq y) \Leftrightarrow (x > y) \vee (x = y)$

Lze odvodit další pravidla:

$$x < y \Leftrightarrow -x > -y \tag{1.16}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
x &< y \\
x - x &< y - x && \text{/bod III} \\
0 &< y - x \\
0 - y &< y - y - x && \text{/bod III} \\
-y &< -x \\
-x &> -y && \text{funguje } \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

QED

DÚ:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \tag{1.17}$$

Důkaz. Sporem:

$$\begin{aligned}
x > 0 \text{ a } \frac{1}{x} &< 0 \\
-\frac{1}{x} &> 0 \\
0 &< x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \\
1 &< 0
\end{aligned}$$

Pokud $0 < 1$, pak spor! $0 < 1 < 0$.
Máme $0 < -1 \xRightarrow{IV} 0 < (-1)(-1) = 1$ QED

Příklad 1.2. *Komplexní čísla nelze uspořádat podle Vlastnosti A2*

Důkaz. Sporem: Předpokládejme, že to lze.

$$\begin{aligned}
i &< 0 \\
(0, 1) &< (0, 0) \\
-i > 0 &\xRightarrow{A_2 IV} 0 < (-i)(-i) = -1
\end{aligned}$$

Note: $i > 0 \xRightarrow{A_2 IV} 0 < (i)(i) = -1$ QED

1.2 Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z} = \{0, -1, -2, \dots\} \cup \mathbb{N}$ celá čísla
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ racionální čísla
- $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ iracionální čísla

Poznámka: $\mathbb{Q}$ má obě vlastnosti A1, A2
Intervaly:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ otevřený
- $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$ uzavřený
- $[a, b), (a, b]$ polootevřené
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ neomezený otevřený
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$ neomezený otevřený
- podobně: $[a, +\infty), (-\infty, a]$ neomezený uzavřený

Definice 1.1 (Absolutní hodnota). *Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{pokud } x \geq 0 \\ -x & \textit{pokud } x < 0 \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Vlastnosti absolutní hodnoty). *Nechť $a > 0$, pak $|x| < a$ právě když $-a < x < a$*

Důkaz.

1. Ať $x \geq 0$ pak $|x| = x$ a máme ukázat, že $x < a \Leftrightarrow -a < x < a$
   "$\Leftarrow$"jasná — "$\Rightarrow$"víme $-a < 0 \leq x < a$

2. Ať $x < 0$, pak $|x| = -x$ a máme ukázat, že $-x < a \Leftrightarrow -a < x < a$
   $x > -a$ pak pokračujeme podobně jako 1.: $-a < x < 0 < a$

QED

Věta 1.1 (Trojúhelníková nerovnost).

$$|x+y| \le |x| + |y| \tag{1.18}$$
$$|x-y| \le |x| + |y| \tag{1.19}$$
$$|x+y| \ge ||x| - |y|| \tag{1.20}$$
$$|x-y| \ge ||x| - |y|| \tag{1.21}$$

Důkaz. 1.18 a 1.19 plyne z Lemma 1.1
1.20 a 1.21 plyne z předešlého řádku pomocí triku

$$x = x + y - y \tag{1.22}$$
$$|x| = |x + y - y| \le |x+y| + |y| \tag{1.23}$$
$$|y| \le |x+y| + |x| \tag{1.24}$$
$$|x| - |y| \le |x+y| \tag{1.25}$$
$$|y| - |x| \le |x+y| \; / \cdot (-1) \tag{1.26}$$
$$|x| - |y| \ge -|x+y| \text{ plyne z 1.26 a 1.16} \tag{1.27}$$

QED

Definice 1.2 (Maximum). *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$

- $x \in M$ *nazveme maximum* M*, pokud* $\forall y \in M : y \le x$
  Ozn. $x = max\ M$
  Př.: $(0,1)$ *nemá max*
- $K \in \mathbb{R}$ *nazveme horní odhad* M*, pokud* $\forall x \in M : x \le K$
  Př.: $(0,1)$ *má horní odhad 4, 1, ...*

Lemma 1.2 (Jednoznačnost max). *Existuje nejvýše 1 max.* $M \subset \mathbb{R}$

Důkaz. Ať existují dvě: $x_1, x_2 \in M$ maxima

$$x_1 \text{je max; } x_2 \in M \Rightarrow x_1 \ge x_2 \tag{1.28}$$
$$x_2 \text{je max; } x_1 \in M \Rightarrow x_2 \ge x_1 \tag{1.29}$$
$$\Rightarrow x_1 \le x_2 \le x_1 \tag{1.30}$$
$$\tag{1.31}$$

Tedy $x_1 = x_2$ QED

Pozn.: analogicky def. minimum a dolní odhad.

Definice 1.3 (Supremum). *Číslo* $s \in \mathbb{R}$ *nazvu supremem množiny* $M \subset \mathbb{R}$*, pokud*

I $\forall x \in M : x \leq s$

II $\forall s' < s, s' \in \mathbb{R} : \exists x \in M : s' < x$

Supremum M *značíme* $s = sup\ M$

Pozn.: I říká, že s je horní odhad, II říká, že s je nejmenší možný horní odhad
Pozn.: pokud supremum náleží do intervalu, je to jeho maximum

Definice 1.4 (Infimum)**.** *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$. *řekneme, že* $s \in \mathbb{R}$ *je infimum množiny* M *(ozn.* $inf\ M$*), pokud*

I $\forall x \in M : s \leq x$

II $\forall s' > s, s' \in \mathbb{R} : \exists x < s' : x \in M$

Infimum M *značíme* $s = inf\ M$

Vlastnost A3 (Supremum a infimum)**.** *Každá neprázdná shora omezená* $M \subset \mathbb{R}$ *má supremum v* $\mathbb{R}$. *Každá neprázdná zdola omezená* $M \subset \mathbb{R}$ *má infimum v* $\mathbb{R}$.

Definice 1.5 (Věta B Odmocnina)**.**

1. Nechť $a > 0$ *a* n *sudé,* $n \in \mathbb{N}$, *pak existuje právě jedno číslo* $b > 0 : b^n = a$

2. Nechť $a > 0$ *a* n *liché,* $n \in \mathbb{N}$, *pak existuje právě jedno číslo* $b \in \mathbb{R} : b^n = a$
Značení: $b = \sqrt[n]{a}$