

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

MATEMATIKA



Martin Brajer

Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FOF

Praha 2020

Obsah

Úvod	1
0.1 Diferenciální počet	1
0.2 Integrální počet	1
1 Úvod, základní pojmy	2
1.1 Reálná čísla	3

Obsah vět a definic

1.1	Lemma (Čtverec lichého čísla)	2
A	Věta (Reálná čísla)	3
A1	Vlastnost (Algebraická struktura)	3
1.1	Příklad	4
A2	Vlastnost (Uspořádání)	4

Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/~kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci $f(t)$ vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost: } \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (1)$$

$$\text{okamžitá rychlost: } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \quad (2)$$

0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval $[a, b]$ rozdělme na n částí délky Δ_n v bodech a_n . Označme $a_0 = a$, $a_n = b$.

$$\begin{aligned} \text{přibližně: } f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + \dots + f(a_{n-1})\Delta_n = \\ = S(\Delta) = \sum_{j=1}^n f(a_{j-1})\Delta_j \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{přesně: } \lim_{\Delta \rightarrow 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \quad (4)$$

1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme A, B výroky:

A	B	$A \wedge B$ $A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obrázek 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace $A \Rightarrow B$:

1. přímý: ukážeme, že když $A = 1$, pak $B = 1$
2. nepřímý: plyne z $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že $A = 1 \wedge B = 0$ a odvodíme spor (např.: $1 = 2$)

Lemma 1.1 (Čtverec lichého čísla). (*tvrzení*) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ liché} \Rightarrow n \text{ liché}$

Důkaz 1. Fixuj $n \in \mathbb{N}$. Prvočíselný rozklad:XXX

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (1.1)$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{2\alpha_k} \quad (1.2)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} : 2 \neq P_j \quad (1.3)$$

V rozvoji n^2 není 2, tak v rozvoji n také není (liší se pouze mocninou). QED

Důkaz 2. Chci: $\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ sudé} \Rightarrow n^2 \text{ sudé}$

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad (1.5)$$

QED

Důkaz 3. Předpokládejme: n^2 liché a n sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \quad (1.6)$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \quad (1.7)$$

QED

O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$ x je prvkem
- $x \notin A$ $\neg(x \in A)$
- $A \subset B$ A je podmnožinou B : $\forall x \in A : x \in B$
- \emptyset prázdná množina
- množinové operace:
 - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
 - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
 - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
 - $\forall x$ pro všechna x
 - $\exists y$ existuje y
 - př.: $V(x, y)$ je vlastnost, že y je matka x . M je množina mužů, Z je množina žen.
 - * $\forall x \in M \exists y \in Z : V(x, y)$
 - * $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

1.1 Reálná čísla

Věta A (Reálná čísla). *Existuje množina \mathbb{R} s operacemi \oplus a \otimes a relací $<$ tak, že splňuje vlastnosti A_1 až A_4 .*

Vlastnost A1 (Algebraická struktura). *Platí:*

I Komutativita: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x; x \cdot y = y \cdot x$

II Asociativita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

III Nulový prvek \oplus : $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$

Jednotka \otimes : $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$

IV Inverzní prvek: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \exists! y : x + y = z$ (právě jedno; ozn. $y = z - x$)

$\forall x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists! y \in \mathbb{R} : x \cdot y = z$ (ozn. $y = z/x$)

V Distributivita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$

VI Násobení nulou: $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$$

Další vlastnosti lze odvodit:

$$-(-x) = x \quad (1.8)$$

$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \quad (1.9)$$

Další značení:

$$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \text{ (} n\text{-krát)} \quad (1.10)$$

$$-x = 0 - x \quad (1.11)$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (1.12)$$

$$\forall x \neq 0 : x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (1.13)$$

I. - IV. říká $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ jsou grupy.

I. - VI. říká $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je těleso.

Ověřte, že Vlastnost A1 platí pro \mathbb{C} (komplexní čísla).

Příklad 1.1. Definujme $\mathbb{C} = \{z = (z_1, z_2); z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ a operace \oplus, \otimes . $\forall z, u \in \mathbb{C} :$

$$(z_1, z_2) + (u_1, u_2) = (z_1 + u_1, z_2 + u_2) \quad (1.14)$$

$$(z_1, z_2) \cdot (u_1, u_2) = (z_1 u_1 - z_2 u_2, z_1 u_2 + z_2 u_1) \quad (1.15)$$

Nulový prvek: $(0, 0)$

Jednotkový prvek: $(1, 0)$

Lze zapisovat $z \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2)$, ozn. $z = z_1 + iz_2$ pro $i^2 = -1$.

Vlastnost A2 (Uspořádání). Platí:

I Relace: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nastane právě jedna z možností:

$(x < y)$ nebo $(x > y)$ nebo $(x = y)$

II Tranzitivita: $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$

III Vztah uspořádání a sčítání: $(x < y) \Rightarrow x + z < y + z$

IV Vztah relace k násobení: $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < xy$

Značení:

- $x > y \Leftrightarrow y < x$
- $(x \leq y) \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$
- $(x \geq y) \Leftrightarrow (x > y) \vee (x = y)$

Lze odvodit další pravidla:

$$x < y \Leftrightarrow -x > -y \quad (1.16)$$

Důkaz.

$$\begin{array}{ll}
 x < y & \\
 x - x < y - x & \text{/bod III} \\
 0 < y - x & \\
 0 - y < y - y - x & \text{/bod III} \\
 -y < -x & \\
 -x > -y & \text{funguje } \Leftrightarrow
 \end{array}$$

QED