Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

MATEMATIKA

Martin Brajer

Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Studijní program: Fyzika
Studijní obor: FOF

Praha 2020

Obsah

Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/∼kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci $f(t)$ vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost:} \quad \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{1}$$

$$\text{okamžitá rychlost:} \quad \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) \tag{2}$$

0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval $[a,b]$ rozdělme na n částí délky Δ_n v bodech a_n. Označme $a_0 = a$, $a_n = b$.

$$\begin{aligned}\text{přibližně:} \quad & f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + ... + f(a_{n-1})\Delta_n = \\ & = S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} f(a_{j-1})\Delta_j \qquad (3)\\ \text{přesně:} \quad & \lim_{\Delta\to 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \qquad (4)\end{aligned}$$

1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme A, B výroky:

A	B	$A \wedge B$ $A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obr. 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace $A \Rightarrow B$:

1. přímý: ukážeme, že když $A = 1$, pak $B = 1$
2. nepřímý: plyne z $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že $A = 1 \wedge B = 0$ a odvodíme spor (např.: $1 = 2$)

Lemma 1.1. *(tvrzení)* $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ *liché* $\Rightarrow n$ *liché*

Důkaz 1. Fixuj $n \in \mathbb{N}$. Prvočíselný rozklad:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \tag{1.1}$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k} \tag{1.2}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\} : 2 \neq P_j \tag{1.3}$$

V rozvoji n^2 není 2, tak v rozvoji n také není (liší se pouze mocninou). QED

Důkaz 2. Chci: $\forall n \in \mathbb{N} : n$ sudé $\Rightarrow n^2$ sudé

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \tag{1.5}$$

QED

Důkaz 3. Předpokládejme: n^2 liché a n sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \tag{1.6}$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \tag{1.7}$$

QED

O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$ x je prvkem
- $x \notin A$ $\neg(x \in A)$
- $A \subset B$ A je podmnožinou B: $\forall x \in A : x \in B$
- $\emptyset$ prázdná množina
- množinové operace:
  - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
  - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
  - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
  - $\forall x$ pro všechna x
  - $\exists y$ existuje y
  - př.: $V(x, y)$ je vlastnost, že y je matka x. M je množina mužů, Z je množina žen.
    - $\forall x \in M\ \exists y \in Z : V(x, y)$
    - $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

1.1 Reálná čísla

Věta A. *Existuje množina* $\mathbb{R}$ *s operacemi* $\oplus$ *a* $\otimes$ *a relací* $<$ *tak, že splňuje vlastnosti* A_1 *až* A_4.