Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

MATEMATIKA

Martin Brajer

Matematická analýza

bakalářské studium v letech 2009 až 2012

Přednášející:	doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	FOF

Praha 2020

Obsah

Věty a definice

Semestry

Úvod

Přednášející:

- Petr Kaplický, KMA
- kaplicky@karlin.mff.cuni.cz
- www.karlin.mff.cuni.cz/∼kaplicky

Literatura:

- J. Kopáček: Matematická analýza (nejen) pro fyziky I (II) + příklady
- J. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/soucek
- V. Jarník: Diferenciální počet I
- V. Jarník: Integrální počet I
- W. Rudin: Principles of MA
- I. Černý, M. Rokyta: Differential and integral calculus of one real variable

Semestr A

0.1 Diferenciální počet

Mějme funkci $f(t)$ vyjadřující pozici bodu v čase. Základní úloha:

$$\text{průměrná rychlost:} \quad \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{1}$$

$$\text{okamžitá rychlost:} \quad \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) \tag{2}$$

0.2 Integrální počet

Plocha pod grafem. Interval $[a,b]$ rozdělme na n částí délky Δ_n v bodech a_n. Označme $a_0 = a$, $a_n = b$.

$$\text{přibližně:} \quad f(a_0)\Delta_1 + f(a_1)\Delta_2 + ... + f(a_{n-1})\Delta_n = \tag{3}$$
$$= S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} f(a_{j-1})\Delta_j$$

$$\text{přesně:} \quad \lim_{\Delta \to 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

1. kapitola: Úvod, základní pojmy

Výrok - má pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Mějme A, B výroky:

A	B	$A \wedge B$ $A\&B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$ $A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Obrázek 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Důkaz implikace $A \Rightarrow B$:

1. přímý: ukážeme, že když $A = 1$, pak $B = 1$
2. nepřímý: plyne z $\neg B \Rightarrow \neg A$
3. sporem: předpokládáme, že $A = 1 \wedge B = 0$ a odvodíme spor (např.: $1 = 2$)

Lemma A (Čtverec lichého čísla)**.** *(tvrzení)* $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ *liché* $\Rightarrow n$ *liché*

Důkaz 1. Fixuj $n \in \mathbb{N}$. Prvočíselný rozklad:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \tag{1.1}$$

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k} \tag{1.2}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\} : 2 \neq P_j \tag{1.3}$$

V rozvoji n^2 není 2, tak v rozvoji n také není (liší se pouze mocninou). QED

Důkaz 2. Chci: $\forall n \in \mathbb{N} : n$ sudé $\Rightarrow n^2$ sudé

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \tag{1.5}$$

QED

Důkaz 3. Předpokládejme: n^2 liché a n sudé. Pak:

$$n^2 + n \text{ liché} \tag{1.6}$$

$$n(n+1) \text{ liché a sudé zároveň (spor)} \tag{1.7}$$

QED

O čem budou výroky? O definovaných pojmech:

- množina: soubor prvků (př.: množina mužů, žen)
- $x \in A$ x je prvkem
- $x \notin A$ $\neg(x \in A)$
- $A \subset B$ A je podmnožinou B: $\forall x \in A : x \in B$
- $\emptyset$ prázdná množina
- množinové operace:
  - $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
  - $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
  - $A - B = \{x; (x \in A) \vee (x \notin B)\}$
- kvantifikátory:
  - $\forall x$ pro všechna x
  - $\exists y$ existuje y
  - př.: $V(x, y)$ je vlastnost, že y je matka x. M je množina mužů, Z je množina žen.
    * $\forall x \in M\ \exists y \in Z : V(x, y)$
    * $\exists y \in Z : \forall x \in M : V(x, y)$

1.1 Reálná čísla

Věta A (Reálná čísla)**.** *Existuje množina $\mathbb{R}$ s operacemi $\oplus$ a $\otimes$ a relací $<$ tak, že splňuje vlastnosti A1 až A4.*

Definice A1 (Algebraická struktura)**.**

I Komutativita: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x;\ \ x \cdot y = y \cdot x$

II Asociativita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z;\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

III Nulový prvek $\oplus : \exists\ 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$
Jednotka $\otimes : \exists\ 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$

IV Inverzní prvek: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}\ \exists! y : x + y = z$ *(právě jedno; ozn.* $y = z - x$*)*
$\forall x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists! y \in \mathbb{R} : x \cdot y = z$ *(ozn.* $y = z/x$*)*

V Distributivita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$

VI Násobení nulou: $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$
$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$

Další vlastnosti lze odvodit:

$$-(-x) = x \tag{1.8}$$
$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \tag{1.9}$$

Další značení:

$$x^n = x \cdot x \cdot ... \cdot x \ (n\text{-krát}) \tag{1.10}$$
$$-x = 0 - x \tag{1.11}$$
$$\forall x \neq 0 : x^{-1} = \frac{1}{x} \tag{1.12}$$
$$\forall x \neq 0 : x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \tag{1.13}$$

I. - IV. říká $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ jsou grupy.
I. - VI. říká $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je těleso.
Ověřte, že Vlastnost A1 platí pro $\mathbb{C}$ (komplexní čísla).

Příklad 1.1. *Definujme* $\mathbb{C} = \{z = (z_1, z_2); z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ *a operace* $\oplus, \otimes$. $\forall z, u \in \mathbb{C}$:

$$(z_1, z_2) + (u_1, u_2) = (z_1 + u_1, z_2, u_2) \tag{1.14}$$
$$(z_1, z_2) \cdot (u_1, u_2) = (z_1 u_1 - z_2 u_2, z_1 u_2 + z_2 u_1) \tag{1.15}$$

Nulový prvek: $(0, 0)$
Jednotkový prvek: $(1, 0)$
Lze zapisovat $z \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2)$, *ozn.* $z = z_1 + iz_2$ *pro* $i^2 = -1$.

Definice A2 (Uspořádání)**.**

I Relace: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *nastane právě jedna z možností:*
$(x < y)$ *nebo* $(x > y)$ *nebo* $(x = y)$

II Tranzitivita: $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$

III Vztah uspořádání a sčítání: $(x < y) \Rightarrow x + z < y + z$

IV Vztah relace k násobení: $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < xy$

Značení:

- $x > y \Leftrightarrow y < x$

- $(x \leq y) \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$
- $(x \geq y) \Leftrightarrow (x > y) \vee (x = y)$

Lze odvodit další pravidla:

$$x < y \Leftrightarrow -x > -y \tag{1.16}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
x &< y \\
x - x &< y - x && /\text{bod III} \\
0 &< y - x \\
0 - y &< y - y - x && /\text{bod III} \\
-y &< -x \\
-x &> -y && \text{funguje } \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

QED

DÚ:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \tag{1.17}$$

Důkaz. Sporem:

$$\begin{aligned}
x > 0 \text{ a } \frac{1}{x} &< 0 \\
-\frac{1}{x} &> 0 \\
0 &< x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \\
1 &< 0
\end{aligned}$$

Pokud $0 < 1$, pak spor! $0 < 1 < 0$.
Máme $0 < -1 \xRightarrow{IV} 0 < (-1)(-1) = 1$ QED

Příklad 1.2. *Komplexní čísla nelze uspořádat podle Vlastnosti A2*

Důkaz. Sporem: Předpokládejme, že to lze.

$$\begin{aligned}
i &< 0 \\
(0, 1) &< (0, 0) \\
-i > 0 &\xRightarrow{A2-IV} 0 < (-i)(-i) = -1
\end{aligned}$$

Pozn.: $i > 0 \xRightarrow{A2-IV} 0 < (i)(i) = -1$ QED

1.2 Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z} = \{0, -1, -2, \dots\} \cup \mathbb{N}$ celá čísla
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ racionální čísla
- $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ iracionální čísla

Poznámka: $\mathbb{Q}$ má obě vlastnosti A1, A2
Intervaly:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ otevřený
- $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$ uzavřený
- $[a, b), (a, b]$ polootevřené
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ neomezený otevřený
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$ neomezený otevřený
- podobně: $[a, +\infty), (-\infty, a]$ neomezený uzavřený

Definice 1.1 (Absolutní hodnota)**.** *Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{pokud } x \geq 0 \\ -x & \textit{pokud } x < 0 \end{cases}$$

Lemma 1.1 (Vlastnosti absolutní hodnoty)**.** *Nechť $a > 0$, pak $|x| < a$ právě když $-a < x < a$*

Důkaz.
1. Ať $x \geq 0$ pak $|x| = x$ a máme ukázat, že $x < a \Leftrightarrow -a < x < a$
"$\Leftarrow$"jasná — "$\Rightarrow$"víme $-a < 0 \leq x < a$
2. Ať $x < 0$, pak $|x| = -x$ a máme ukázat, že $-x < a \Leftrightarrow -a < x < a$
$x > -a$ pak pokračujeme podobně jako 1.: $-a < x < 0 < a$

QED

Věta 1.1 (Trojúhelníková nerovnost)**.**

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{1.18}$$
$$|x-y| \leq |x| + |y| \tag{1.19}$$
$$|x+y| \geq ||x| - |y|| \tag{1.20}$$
$$|x-y| \geq ||x| - |y|| \tag{1.21}$$

Důkaz. 1.18 a 1.19 plyne z Lemma 1.1
1.20 a 1.21 plyne z předešlého řádku pomocí triku

$$x = x + y - y \tag{1.22}$$
$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \tag{1.23}$$
$$|y| \leq |x+y| + |x| \tag{1.24}$$
$$|x| - |y| \leq |x+y| \tag{1.25}$$
$$|y| - |x| \leq |x+y| \ / \cdot (-1) \tag{1.26}$$
$$|x| - |y| \geq -|x+y| \text{ plyne z } 1.26 \text{ a } 1.16 \tag{1.27}$$

QED

Definice 1.2 (Maximum)**.** *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$

- $x \in M$ *nazveme maximum* M*, pokud* $\forall y \in M : y \leq x$
  Ozn. $x = max\ M$
  Př.: $(0,1)$ *nemá max*
- $K \in \mathbb{R}$ *nazveme horní odhad* M*, pokud* $\forall x \in M : x \leq K$
  Př.: $(0,1)$ *má horní odhad 4, 1, . . .*

Lemma 1.2 (Jednoznačnost max)**.** *Existuje nejvýše 1 max.* $M \subset \mathbb{R}$

Důkaz. Ať existují dvě: $x_1, x_2 \in M$ maxima

$$x_1 \text{je max; } x_2 \in M \Rightarrow x_1 \geq x_2 \tag{1.28}$$
$$x_2 \text{je max; } x_1 \in M \Rightarrow x_2 \geq x_1 \tag{1.29}$$
$$\Rightarrow x_1 \leq x_2 \leq x_1 \tag{1.30}$$

Tedy $x_1 = x_2$ QED

Pozn.: analogicky def. minimum a dolní odhad.

Definice 1.3 (Supremum)**.** *Číslo* $s \in \mathbb{R}$ *nazvu supremem množiny* $M \subset \mathbb{R}$*, pokud*

I $\forall x \in M : x \leq s$

II $\forall s' < s, s' \in \mathbb{R} : \exists x \in M : s' < x$

Supremum M *značíme* $s = sup\ M$

Pozn.: I říká, že s je horní odhad, II říká, že s je nejmenší možný horní odhad
Pozn.: pokud supremum náleží do intervalu, je to jeho maximum

Definice 1.4 (Infimum)**.** *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$*. řekneme, že* $s \in \mathbb{R}$ *je infimum množiny* M *(ozn. inf* M*), pokud*

I $\forall x \in M : s \leq x$

II $\forall s' > s, s' \in \mathbb{R} : \exists x < s' : x \in M$

Infimum M *značíme* $s = inf\ M$

Definice A3 (Supremum a infimum)**.** *Každá neprázdná shora omezená* $M \subset \mathbb{R}$ *má supremum v* $\mathbb{R}$*. Každá neprázdná zdola omezená* $M \subset \mathbb{R}$ *má infimum v* $\mathbb{R}$*.*

Definice 1.5 (Odmocnina)**.**

1. *Nechť* $a > 0$ *a* n *sudé,* $n \in \mathbb{N}$*, pak existuje právě jedno číslo* $b > 0 : b^n = a$

2. *Nechť* $a > 0$ *a* n *liché,* $n \in \mathbb{N}$*, pak existuje právě jedno číslo* $b \in \mathbb{R} : b^n = a$

Značení: $b = \sqrt[n]{a}$

Lemma B (Čtverec dělitelný třema)**.** k^2 *je dělitelné* $3 \Rightarrow k$ *je děl.* 3

Důkaz. Jak zapsat k? $\exists m \in \mathbb{Z}$:

$$k = 3m + 0 \qquad k^2 \text{ je děl. } 3 \tag{1.31}$$

$$k = 3m + 1 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 6m + 1 \qquad \text{není děl. } 3 \tag{1.32}$$

$$k = 3m + 2 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 12m + 4 \qquad \text{není děl. } 3 \tag{1.33}$$

QED

Věta 1.2 (Iracionální čísla)**.** *Existují iracionální čísla*

Důkaz. Tvrdíme, že $\sqrt{3}$ není racionální. Sporem:

$$\text{Ať } \sqrt{3} \text{ je rac.} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná: } \sqrt{3} = \frac{k}{l} \tag{1.34}$$

$$3 = \frac{k^2}{l^2} \Rightarrow k^2 = 3l^2 \tag{1.35}$$

$$k^2 \text{ je dělitelné } 3 \xRightarrow{LB} k \text{ je děl. } 3 \tag{1.36}$$

$$n \in \mathbb{Z} : \left(k = 3n \Rightarrow k^2 = 9n^2\right) \Rightarrow k^2 \text{ je děl } 9 \tag{1.37}$$

$$k^2 = 9n^2 = 3l^2 \Rightarrow l^2 = 3n^2 \tag{1.38}$$

$$l^2 \text{ je děl. } 3 \xRightarrow{LB} l \text{ je děl. } 3 \tag{1.39}$$

Což je spor, protože k, l jsou nesoudělná. QED

Definice A4 (Vlastnosti $\mathbb{N}$)**.**

I $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

II Princip indukce: nechť $M \subset \mathbb{N}$ *a*

(a) $1 \in M$

(b) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

Pak $m = \mathbb{N}$

Pozn.:Vlastnost I plyne z vlastnosti A3
Pozn.: Archimédova vlastnost:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0 \text{ (tedy reálné) } \exists n \in \mathbb{N} : n\epsilon > m \tag{1.40}$$

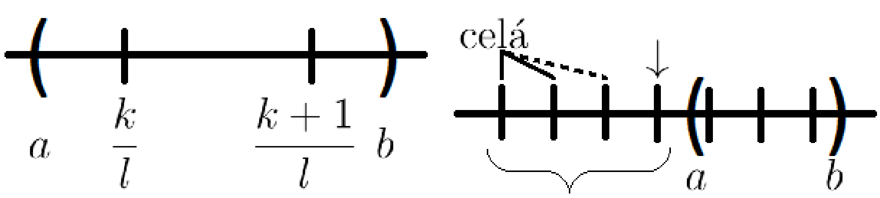
Důkaz. Polož $x = m/\epsilon$ v I QED

Věta 1.3 (Velikost intervalu)**.** *Každý otevřený interval obsahuje nekonečně racionálních i nekonečně iracionálních čísel.*

Důkaz. Ve zkratce:

$$\frac{k}{l} + \frac{n}{n+1}\frac{1}{l} \quad \text{je racionální } \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.41}$$

$$\frac{k}{l} + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{n}{n+1}\frac{1}{l} \quad \text{je iracionální } \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.42}$$



Mějme otevřený interval (a, b). Stačí mít rac. č. k/l tak, aby $k/l,\ (k+1)/l \in (a, b)$.

Jak hledám l? $\frac{1}{l} < \frac{b-a}{2}$ plyne z A4-I pomocí $l > \frac{2}{b-a}$

Jak hledám k? def. $M = \left\{n \in \mathbb{Z}; \frac{n}{l} < a\right\}$ podle A3 $\exists s \in \mathbb{R} : s = sup\ M$

Tvrdíme: $s \in M$:

Podle druhé vlastnosti suprema: $\forall s' < s \ \exists n \in M : s' < n$
Volím $s' \in \left(s - \frac{1}{2}, s\right)$, pak $\exists n' \in M : s' < n'$. Zafixuji n' a tvrdím:

$$\forall s' \in (s - \frac{1}{2}, s) : s' < n' \leq s \tag{1.43}$$

A tedy $s \leq n' \leq s$. Definujme

$$k := s + 1 \Rightarrow \frac{k}{l} \in (a, b) \tag{1.44}$$

$$k + 1 := s + 2 \Rightarrow \frac{k+1}{l} \in (a, b) \tag{1.45}$$

Potom:

$$a < \frac{k}{l} < \frac{k+s}{l} = \frac{s+2}{l} < a + \frac{2}{l} < a + b - 1 = b \tag{1.46}$$

QED

Důkaz. 1.43 Vol. $s'' \in (s - \frac{1}{2}, s)$ pak $\exists n'' \in M : s'' < n''$

$$s - \frac{1}{2} < s' < n' \leq s \tag{1.47}$$

$$s - \frac{1}{2} < s'' < n'' \leq s \tag{1.48}$$

Tedy:

$$n', n'' \in (s - \frac{1}{2}, s] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow n' = n'' \tag{1.49}$$

QED

2. kapitola: Reálné funkce, limita a spojitost

Funkce z M do N je předpis, který každému prvku M přiřadí nejvýše jeden prvek z N

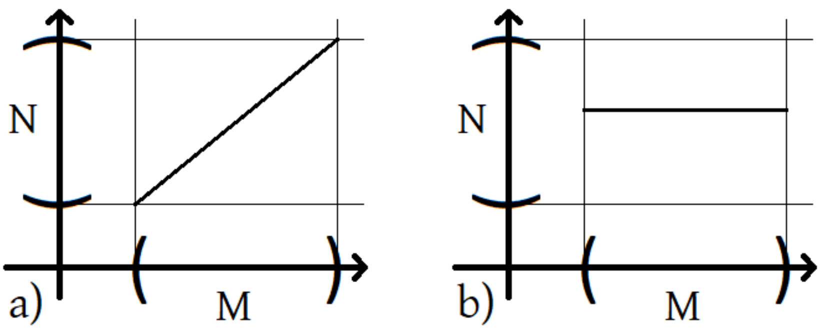
- $A \subset M : f(A) = \{f(x); x \in A\} \subset N$
- $B \subset M : f^{-1}(B) = \{x \in M : f(x) \in B\} \subset M$

Definice 2.1 (Prostá funkce, injekce, monomorfismus)**.** *Funkce je* ***prostá****, pokud*

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \tag{2.1}$$

Definice 2.2 (Na funkce, surjekce, epimorfismus)**.** *Funkce* $f : M \to N$ *je* ***na*** *(zobrazuje* M *na* N*), pokud*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in M : f(m) = n \tag{2.2}$$



Obrázek 2.1: Funkce a) je na, funkce b) není.

Př.: φ není prostá, zobrazuje $\mathbb{R}$ na $[0, +\infty)$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{2.3}$$

$$x \to x^2 \tag{2.4}$$

$$\varphi((-1, 1)) = [0, 1)] \tag{2.5}$$

$$\varphi^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2] \tag{2.6}$$

Definice 2.3 (Vzájemně jednoznačné zobrazení, bijekce , isomorfismus)**.** *Je-li* $f : M \to N$ *prostá a na říkáme, že je vzájemně jednoznačná*

Pro vzájemně jednoznačnou funkci lze definovat inverzní funkci:

$$f_{-1} : N \to M; y \in N \to \text{jediné } x \in M : f(x) = y \tag{2.7}$$

$$\textbf{Pozor!} \begin{cases} f^{-1} & \text{pro každou hodnotu zvlášť, je to množina} \\ f_{-1} & \text{inverzní funkce} \end{cases}$$

Definice 2.4 (Restrikce, zúžení)**.** *Je-li $f : M \to N$ a $A \subset M$: $f|_A$ nazvu restrikce (zúžení) f na A*

Příklad 2.1. *$\varphi(x) = x^2 : \varphi|_{[0,+\infty)}$ zobrazuje $[0, +\infty)$ na $[0, +\infty)$ vzájemně jednoznačně. Lze tedy definovat $\varphi_{-1} = (\varphi|_{[0,+\infty)})_{-1}(x) = \sqrt{x}$*

Definice 2.5 (Složená funkce, superpozice)**.** *Pro M, N, K množiny a $f : M \to N; g : N \to K$ funkce definujeme složenou funkci*

$$g \circ f : M \to K \qquad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \tag{2.8}$$

$$x \in M \to (g(f(x))) \quad x \to f(x) \to (g(f(x))) \tag{2.9}$$

Budeme psát: $\varphi : M \to N$ i když $\varphi(x)$ není definované $\forall x \in M$

Definice 2.6 (Definiční obor a obor hodnot)**.**

$$D(\varphi) = \{x \in M : f(x) \text{ je definovaná}\} \tag{2.10}$$

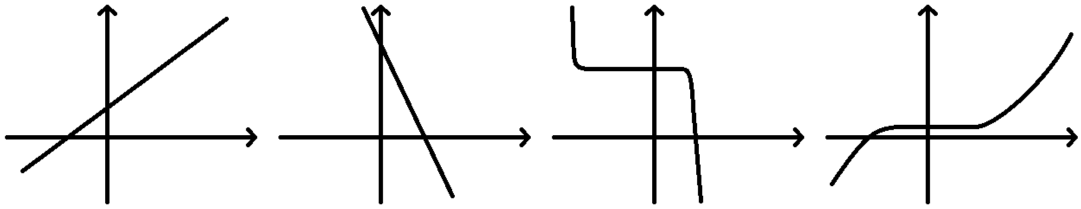
$$H(\varphi) = f\,\{D(\varphi)\} \tag{2.11}$$

Příklad 2.2.

$$x^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad D\left(x^{-1}\right) = \mathbb{R} - \{0\} \quad H\left(x^{-1}\right) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Definice 2.7 (Monotónost funkce)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $M \subset D(f)$. Řeknu, že f*

$$je \left\{ \begin{array}{l} rostoucí \\ klesající \\ nerostoucí \\ neklesající \end{array} \right\} na\ M,\ pokud\ \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \\ \geq \\ \leq \end{array} \right\} f(X_2)$$



Obrázek 2.2: Ilustrace.

Definice 2.8 (Omezenost funkce)**.** *Řekněme, že f*

$$\text{je} \begin{cases} \textit{omezená shora} \\ \textit{omezená zdola} \\ \textit{omezená} \end{cases} \textit{na } M\textit{, pokud } \exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in M : \begin{cases} f(x) < K \\ f(x) > K \\ |f(x)| < K \end{cases}$$

Definice 2.9 (Symetrie funkce)**.** *Řekněme, že f*

$$\text{je} \begin{cases} \textit{lichá,} \\ \textit{sudá,} \\ \textit{periodická,} \end{cases} \textit{pokud} \begin{cases} \forall x \in D(f) \\ \forall x \in D(f) \\ \exists p \in \mathbb{R} : \forall x \in D(f) \end{cases} \textit{platí}$$

$$\begin{cases} -x \in D(f) & \& \ f(x) = -f(-x) \\ -x \in D(f) & \& \ f(x) = f(-x) \\ x + p \in D(f) & \& \ f(x) = f(x+p) \end{cases} \tag{2.12}$$

Budeme zkoumat: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Druhou variantu chápeme jako:

$$f = f_1 + if_2;\ f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{2.13}$$

Definice 2.10 (Okolí)**.** *Nechť* $x_0\mathbb{R}, \delta \in (0, \infty)$

- *kruhové okolí* $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$ *(v aj B: ball)*
- *prstencové okolí* $P(x_0, \delta) := U(x_0, \delta) - \{x_0\}$
- *pravé kruhové okolí* $U_+(x_0, \delta) := [x_0, x_0 + \delta)$
- *obdobně definujeme* ***levé kruhové okolí****,* ***pravé prstencové okolí*** *a* ***levé prstencové okolí***

Poznámky:

- Pro $0 < \delta_1 < \delta_2 \Rightarrow U(x_0, \delta_1) \subset U(x_0, \delta_2)$

- Budeme psát: „na jistém $U(x_0)$ platí…“, což znamená $\exists\delta > 0 : \forall x \in U(x_0, \delta)$ platí…

Věta 2.1 (Hausedorfův princip oddělení)**.** *Nechť* $x_1, x_2 \in \mathbb{R};\ x_1 \neq x_2,$ *pak* $\exists\delta > 0$ *tak, že* $U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta) = \emptyset$
Speciálně: $x_1 \notin U(x_2, \delta);\ x_2 \notin U(x_1, \delta)$

Důkaz. Volím $\delta = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$. Tvrdím, že $U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta) = \emptyset$
Sporem: ať $\exists y \in U(x_1, \delta) \cap U(x_2, \delta)$, pak

$$|x_1 - x_2| = |x_1 - y + y - x_2| \overset{\triangle nerovnost}{\leq} |x_1 - y| + |y - x_2| < 2\delta = |x_1 - x_2| \tag{2.14}$$

Tedy $|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$, což je spor. QED

Definice 2.11 (Limita)**.** *Nechť* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* f *je fce def na jistém* $P(x_0)$
Číslo $A \in \mathbb{R}$ *nazvu limitou* f *v* x_0*, pokud*

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon) \tag{2.15}$$

Terminologie: pokud existuje $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ říkáme, že f má vlastní limitu ve vlastním bodě
Značení:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$
- $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$

Poznámky:

- Limita závisí na f v okolí x_0
- Jiné zápisy 2.15

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f(P(x_0, \delta)) \subset U(A, \epsilon) \tag{2.16}$$
$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon] \tag{2.17}$$

Věta B (Jednoznačnost limity)**.** *Buď* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x) = B$
Pak $A = B$

Důkaz. Sporem: ať $A \neq B$

$$\begin{aligned}
&\text{Věta 2.1} && \exists\epsilon > 0 : U(A,\epsilon) \cap U(B,\epsilon) = \emptyset && (2.18)\\
&\text{2.15 pro } A && \exists\delta_1 > 0 : x \in P(x_0,\delta_1) \Rightarrow f(x) \in U(A,\epsilon) && (2.19)\\
&\text{2.15 pro } B && \exists\delta_2 > 0 : x \in P(x_0,\delta_2) \Rightarrow f(x) \in U(B,\epsilon) && (2.20)\\
&\text{Definujme} && \delta = min(\delta_1,\delta_1) && (2.21)\\
&\text{Odvodíme spor} && \forall x \in U(x_0,\delta) : f(x) \in U(A,\epsilon) \cap U(B,\epsilon) = \emptyset && (2.22)
\end{aligned}$$

QED