Exercice 1

Soit m un entier de n chiffres en base 10. En stockant les chiffres de m en base 10 dans un tableau de byte, le nombre de bits utilisés est $q = 8n$, car chaque "case" du tableau utilise 8 bits. Calculons le nombre q' de bits utilisés si nous pouvions stocker l'écriture binaire de m dans la mémoire :

$$\begin{aligned} m \text{ utilises } q' \text{ bits} &\iff 2^{q'-1} \leq m < 2^{q'} \\ &\iff q' - 1 \leq \frac{\ln m}{\ln 2} < q' \\ &\iff \frac{\ln m}{\ln 2} < q' \leq \frac{\ln m}{\ln 2} + 1 \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} m \text{ a } n \text{ chiffres en base } 10 &\iff 10^{n-1} \leq m < 10^n \\ &\iff (n-1)\frac{\ln 10}{\ln 2} \leq \frac{\ln m}{\ln 2} < n\frac{\ln 10}{\ln 2} \end{aligned}$$

Donc

$$(n-1)\frac{\ln 10}{\ln 2} < q' < n\frac{\ln 10}{\ln 2} + 1$$

Posons $e = \left|\frac{q'-q}{q}\right|$. Alors

$$\begin{aligned} &\left|1 - \frac{n\frac{\ln 10}{\ln 2} - 1}{8n}\right| < e < \left|1 - \frac{(n-1)\frac{\ln 10}{\ln 2}}{8n}\right| \\ \iff &\left|1 - \frac{\ln 10}{8 \ln 2} + \frac{1}{8n}\right| < e < \left|1 - \frac{\ln 10}{8 \ln 2} + \frac{\ln 10}{8n \ln 2}\right| \end{aligned}$$

Donc à la limite on a

$$e = 1 - \frac{\ln 10}{8 \ln 2} \approx 0.5848$$

On voit alors que en stockant les chiffres de m en base 10 dans un tableau de byte, 58% de la mémoire est utilisée inutilement par rapport à l'écriture binaire classique.