

---

# Rapport mini-projet

Modélisation – Représentations et analyse des modèles

*Sujet No. 2*

*Modélisation des non-linéarités boursières*

---

*Réalisé par le groupe no. 2F :*

Louis HORAK

Martin PUPAT

Alexis VRIELYNCK

17 janvier 2024

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte et objectif . . . . .	1
1.2	Etat de l'art . . . . .	1
1.3	Contribution . . . . .	1
1.4	Structure du rapport . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Modèle à état continu</b>	<b>2</b>
2.1	Description du modèle . . . . .	2
2.2	Réécriture du modèle . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Résultats de simulation et analyse du modèle à état continu</b>	<b>4</b>
3.1	Analyse de stabilité . . . . .	4
3.2	Résultats du modèle . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Modèle à évènements discrets</b>	<b>6</b>
4.1	Une première intuition du modèle . . . . .	6
4.2	Stratégie d'achat vente pour une banque . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>8</b>
5.1	Conclusion sur les modèles proposés . . . . .	8
5.2	Perspectives . . . . .	8
	<b>Annexes</b>	<b>8</b>
	<b>Annexe 1</b>	<b>9</b>
	<b>Annexe 2</b>	<b>12</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte et objectif

Les investissements faits par les banques sont aujourd'hui réalisés avec des modèles prédictifs des cours boursiers. La prédiction de ces cours est donc primordiale pour réaliser les meilleurs bénéfices, et la création de modèles analysés et précis est centrale pour les marchés boursiers.

L'objectif de ce rapport est de proposer deux modèles, un à états continus finement analysé et le deuxième à états discrets utilisant un automate avec conditions de garde. Ces deux modèles intègrent certaines non-linéarités existantes dans le cours boursier dans le but d'approcher au mieux de la réalité.

### 1.2 Etat de l'art

La modélisation financière, plus précisément la prédiction de l'évolution du cours boursier est un domaine actif de la recherche. L'un des modèles les plus utilisés est le modèle stochastique ARIMA-GARCH (Auto-Regressive Integrated Moving Average - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) [1]. C'est un modèle probabiliste fonctionnant avec une moyenne glissante, c'est à dire qu'il prend en compte la moyenne des  $N$  derniers jours.

Bien que les modèles stochastiques comme ARIMA-GARCH sont très efficaces, ils sont plus difficiles à interpréter en raison de leur nature non-déterministe. Au contraire, il existe des modèles déterministes moins réalistes mais s'exécutant plus rapidement comme celui développé dans l'article [2]. Ce modèle, que nous allons étudier plus en détail, est un modèle non linéaire faisant intervenir deux agents : les vendeurs et les épargnants.

D'autres modèles, s'inspirant des neurones comme le modèle Ruklov [4] permettent de décrire les marchés financiers. En effet, à l'instar des neurones, les marchés financiers ont des pics d'activité parfois chaotiques. Un modèle pouvant simuler ces périodes de crises est donc intéressant.

### 1.3 Contribution

Ce rapport s'est attaché à implémenter de manière complète et ergonomique les modèles prenant en compte les non-linéarités boursières, afin de permettre à l'utilisateur une vision claire et intuitive de l'effet des différents paramètres sur le comportement boursier. D'un autre côté, une modélisation à états discrets permet de mettre en exergue les actions des acteurs boursiers : celle-ci est voulue complète et permettant de recréer le modèle journalier du premier modèle.

Enfin, l'introduction d'un paramètre de confiance dans le modèle à états discrets permet d'obtenir des comportements plus complexes et plus intéressants des investisseurs.

### 1.4 Structure du rapport

Tout d'abord, une modélisation des non-linéarités boursières est proposée dans ce rapport au Chapitre 2.

Le modèle à état continu est ensuite affiné afin d'être plus aisée à manipuler et à comprendre. Une analyse de la stabilité et de l'existence d'une orbite stable pour certaines conditions initiales est menée au Chapitre 3.

Le Chapitre 4 propose une modélisation différente des non-linéarités boursières via un réseau de Pétri, en intégrant un paramètre indiquant la confiance des investisseurs.

Le Chapitre 5 conclut ce rapport en mettant en avant l'intérêt des modèles proposés et en les mettant en perspective.

# Chapitre 2

## Modèle à état continu

### 2.1 Description du modèle

On souhaite modéliser l'évolution de l'indice des prix d'une bourse en fonction du stock net d'épargne du fonds commun de placement. Pour ce faire, nous nous inspirons des résultats dressés dans [2].

Le modèle utilisé est un modèle discret prenant le jour comme pas de temps. L'indice des prix d'une bourse est noté  $p$  tandis que le stock net d'épargne du fonds commun de placement est noté  $s$ .

De plus, on suppose que les variations de prix sur un jour ne dépendent que du prix  $p_n$  et de l'épargne  $s_n$  :

$$p_{n+1} - p_n = g(s_n, p_n)$$

On peut déduire du comportement des investisseurs les variations de  $g$  par rapport à chacune de ses variables :

— Plus  $s_n$  est élevé, plus  $p_{n+1} - p_n$  est grand, car le fonds commun supporte la demande concernant les actions. Cela se traduit par :

$$\frac{\partial g}{\partial s_n} > 0$$

— Plus  $p_n$  augmente, moins l'écart  $p_{n+1} - p_n$  est important. Cela s'interprète par :

$$\frac{\partial g}{\partial p_n} < 0$$

— De même, on suppose que  $s_{n+1} - s_n$  ne dépend que de  $s_n$ ,  $p_{n+1}$  et  $p_{n+1} - p_n$  :

$$s_{n+1} - s_n = f(s_n, p_{n+1}, p_{n+1} - p_n)$$

On peut de plus déterminer les variations de  $f$  grâce à des arguments boursiers :

— Plus  $s_n$  augmente, moins le fonds commun va varier car les investisseurs préfèrent diversifier leurs placements, donc :

$$\frac{\partial f}{\partial s_n} < 0$$

— Plus l'index de prix augmente, moins le fonds commun va varier car les épargnants veulent profiter des performances du marché pour faire du profit sur leurs capitaux. Cela se traduit par :

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n+1}} < 0$$

— Les épargnants considèrent qu'une bonne tendance va continuer sur quelques jours, donc :

$$\frac{\partial f}{\partial (p_{n+1} - p_n)} > 0$$

### 2.2 Réécriture du modèle

On peut montrer qu'un tel modèle admet un seul point d'équilibre  $(\bar{s}, \bar{p})$ , donc nous pouvons réécrire le modèle :

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = F(S_n, P_{n+1}, P_{n+1} - P_n) \\ P_{n+1} - P_n = G(S_n, P_n) \end{cases}$$

avec  $S_n = s_n - \bar{s}$ ,  $P_n = p_n - \bar{p}$ , et  $F(0, 0, 0) = G(0, 0) = 0$ .

Afin d'hériter de la propriété de symétrie axiale dans le diagramme de phase P-S, on suppose en plus  $F$  et  $G$  impaires. Un développement limité à l'ordre 3 mène donc à :

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = -AP_{n+1} + E(P_{n+1} - P_n) - BS_n^3 \\ P_{n+1} - P_n = CS_n - DP_n^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{n+1} = (1 + (E - A)C)S_n - AP_n - BS_n^3 - (E - A)DP_n^3 \\ P_{n+1} = CS_n + P_n - DP_n^3 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $A, B, C, D, E > 0$  d'après les propriétés de croissance sur  $F$  et  $G$ .

Le modèle ainsi proposé est centré autour de son point d'équilibre et dépend de 5 paramètres  $A, B, C, D$  et  $E$  dotés de sens physique :

- $(-A)$  représente le taux d'évolution de la variation du fonds commun de placement par rapport à l'indice boursier.
- $(-B)$  représente le taux d'évolution de la variation du fonds commun de placement par rapport au fonds commun de placement.
- $C$  représente le taux d'évolution de la variation de l'indice boursier par rapport au prix de l'indice boursier.
- $(-D)$  représente le taux d'évolution de la variation de l'indice boursier par rapport au fonds commun de placement.
- $E$  représente le taux d'évolution de la variation du fonds commun de placement par rapport à l'évolution du prix de l'indice boursier.

De plus, le développement limité à l'ordre 3 permet de faire converger le système loin du point d'équilibre  $(0,0)$ , là où proche de l'origine ils influent moins sur le système.

Le modèle ainsi décrit permet de calculer l'évolution du prix de l'indice boursier ( $P$ ), et de la quantité d'épargne du fonds commun de placement ( $S$ ) au cours du temps, étant donné  $P(0)$ ,  $S(0)$  et les constantes réelles et positives  $A, B, C, D$  et  $E$ .

## Chapitre 3

# Résultats de simulation et analyse du modèle à état continu

### 3.1 Analyse de stabilité

Recherchons les points d'équilibres :

$$P_{n+1} = CS_n + P_n - DP_n^3 \text{ donc } \bar{S} = \frac{D}{C}\bar{P}^3$$

En réinjectant dans la ligne 1 de l'équation 2.1 :

$$\bar{P}(A + \frac{BD^3}{C^3}\bar{P}^8) = 0$$

Puisque A,B,C,D sont positifs, le seul point d'équilibre est (0,0).

La stabilité du système peut s'étudier près du point d'équilibre par linéarisation du système d'équations. Le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{cases} S_{n+1} = (1 + (E - A)C)S_n - AP_n \\ P_{n+1} = CS_n + P_n - DP_n^3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} S_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (E - A)C & -A \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - (2 + (E - A)C)\lambda + (1 + EC)$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si :

$$\begin{cases} \chi(1) > 0 \\ \chi(-1) > 0 \\ \chi(0) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC > 0 \\ C(2E - A) + 4 > 0 \\ CE < 0 \end{cases}$$

Or E et C sont positifs donc le système est instable, ce qui est cohérent avec la réalité.

Etudions l'existence d'une bifurcation de Neimark. Plaçons-nous dans le cas où  $0 < AC < 4$ . Pour E suffisamment proche de 0, toutes les racines de  $\chi$  sont complexes, de module  $\sqrt{1 + EC}$  (calculs réalisés dans l'Annexe 2). Le système arrive à une bifurcation de Neimark qui garantit l'existence d'une orbite stable.

### 3.2 Résultats du modèle

On remarque que bien que il n'existe pas pas de points fixes stables, il y a une orbite stable. Cette orbite est une conséquence de la bifurcation de Neimark [3].

Concrètement, le prix oscille presque périodiquement autour du prix moyen (qui vaut ici 0). Le paramètre E agit sur l'amplitude de la variation. A et C agissent sur la vitesse de convergence pour un point de départ proche de l'origine, tandis que B et D agissent sur la vitesse de convergence pour un point de départ loin de l'origine.

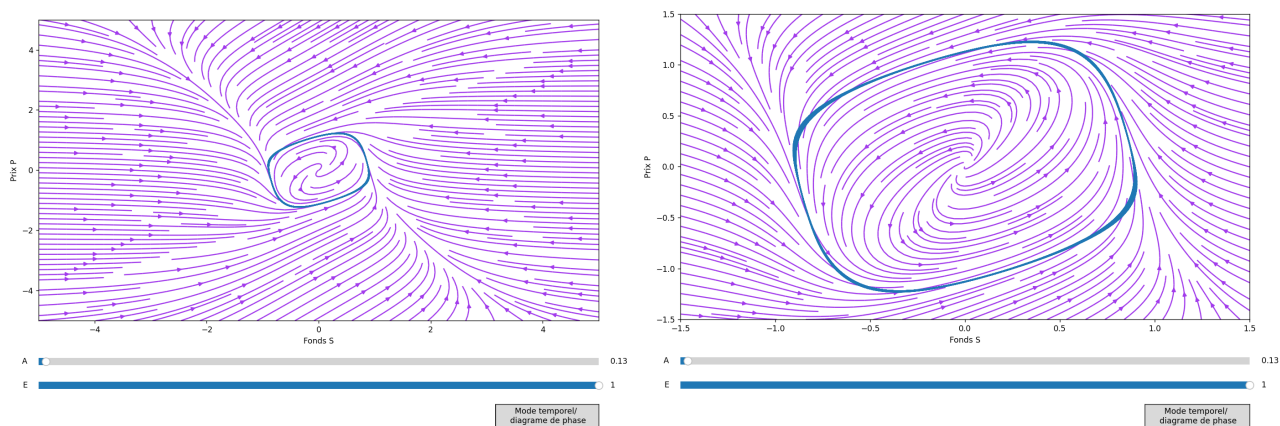


FIGURE 3.1 – Évolution des prix et des fonds dans le diagramme de phase  $(P, S)$ .

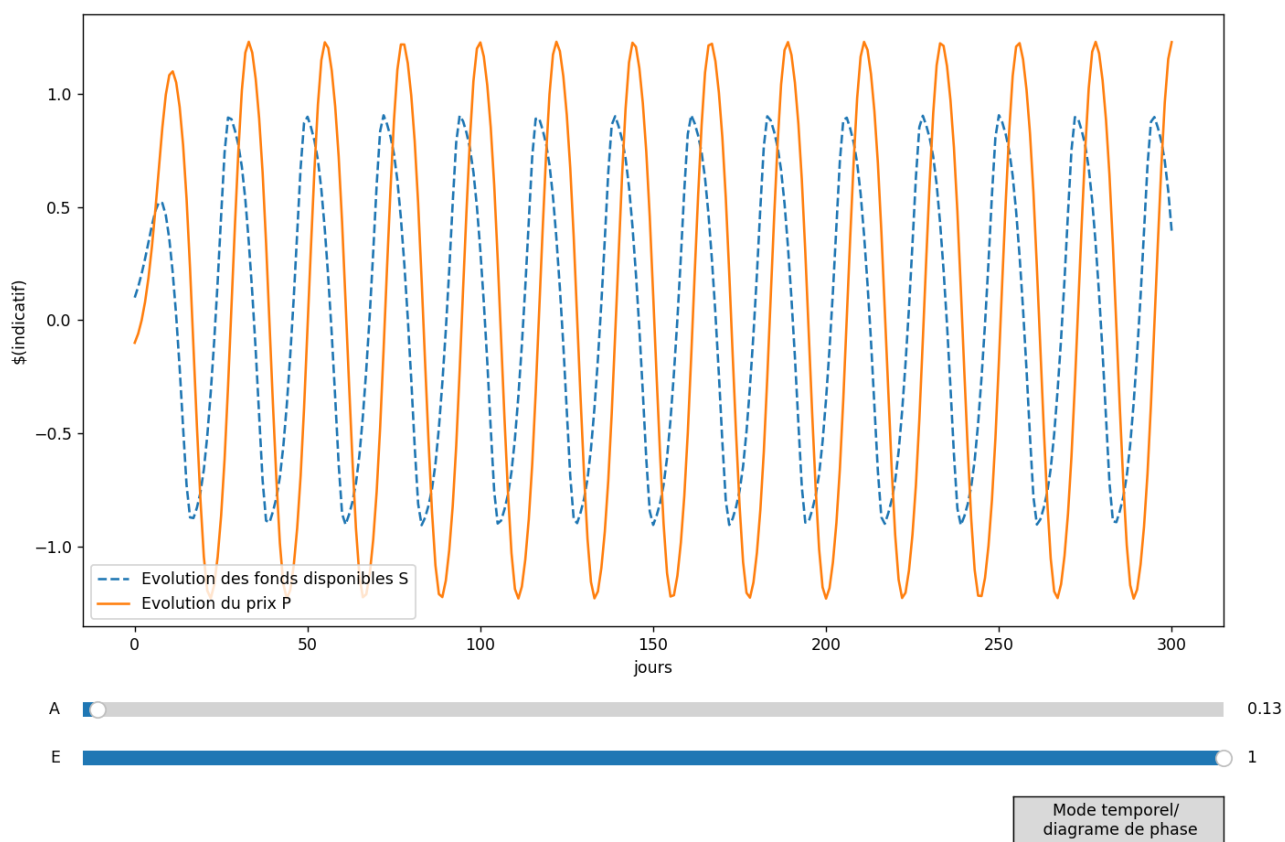


FIGURE 3.2 – Évolution de  $S$  et  $P$  par rapport au point d'équilibre, en fonction du temps.

## Chapitre 4

# Modèle à événements discrets

### 4.1 Une première intuition du modèle

Un acheteur lambda peut avoir un comportement représenté par le réseau de Pétri 4.1.

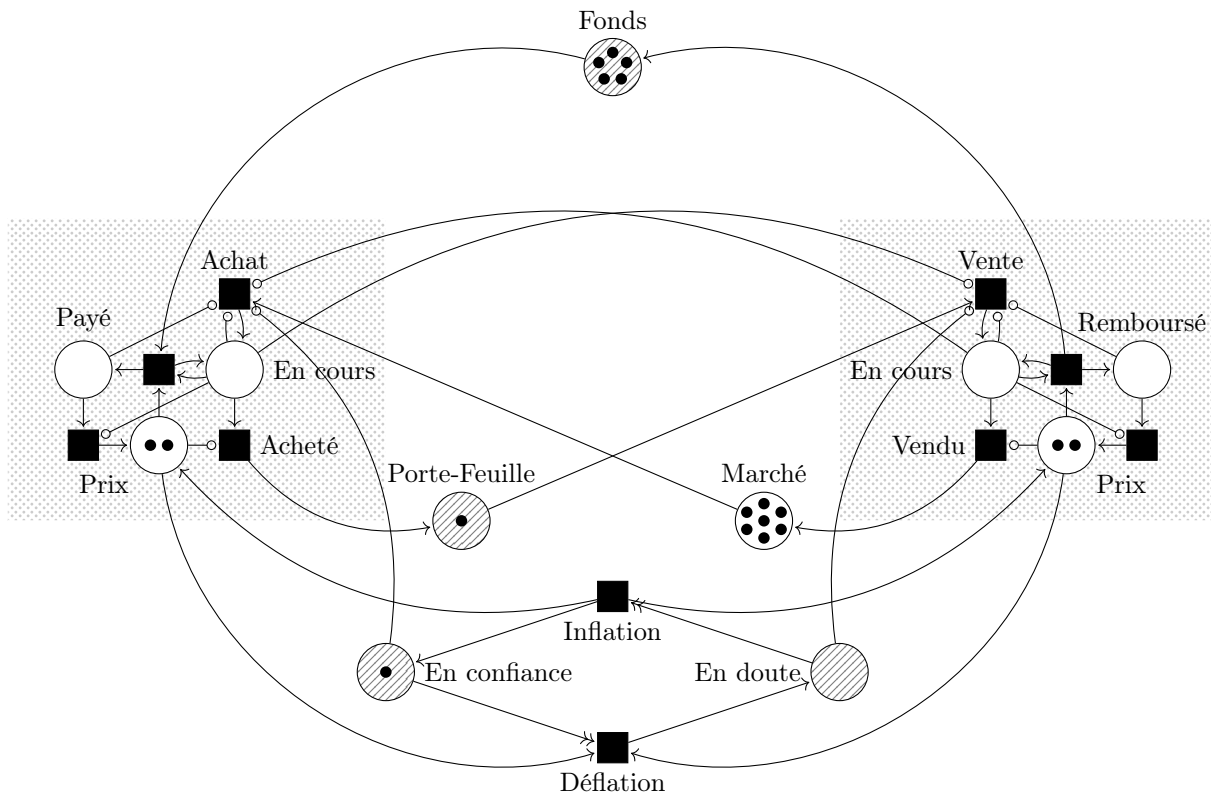


FIGURE 4.1 – Réseau de Pétri représentant une stratégie d'achat/vente.

Les zones hachurées sont les attributs de la personne. Celui-ci possède une certaine quantité d'unités d'argent, représenté par les « Fonds », une certaine quantité d'actions, représenté par le « Porte-Feuille », et un état de confiance ou de doute, modélisé par un ou plusieurs jetons dans la case correspondante (on peut noter qu'il ne peut y avoir de position avec des jetons dans les deux états à la fois). Les quantités des Fonds et du Porte-Feuille sont réglables au préalable.

Le marché comporte un nombre fini d'actions, représenté par l'état « Marché ». Celles-ci ont un prix égal à la valeur de « Prix » (qui doit donc être la même dans les deux états de ce nom). Par ailleurs, deux transitions « Inflation » et « Déflation » permettent d'augmenter ou de réduire le prix des actions. Notons qu'en pratique, ces deux transitions sont exogènes.

Pour ce qui est des actions endogènes, l'automate peut soit décider d'acheter une action (s'il a les fonds suffisants), soit d'en vendre une (s'il a des actions dans son portefeuille). Chacune des chaînes d'actions est représentée par les zones grisées. Une fois que la transition d'achat ou de vente a été activée, une action se déplace depuis le marché (resp. depuis le porte-feuille) vers la zone « En cours », et l'action doit être payée (resp. remboursée) en utilisant les deux dernières transitions avant d'être libérée vers le porte-feuille (resp. le



marché). En pratique, l'intégralité des transitions effectuées à l'intérieur des rectangles grisés se fait en temps négligeable.

L'état de confiance ou de doute est une représentation simpliste de ce que ferait un actionnaire lambda : attendre que les prix montent pour vendre (confiance) et que les prix baissent pour acheter (doute).

## 4.2 Stratégie d'achat vente pour une banque

Plaçons-nous maintenant dans le rôle d'une banque. Le but de la banque est d'être la plus rentable possible, et ainsi elle devra tirer profit de la périodicité des prix mise en exergue par la section 3.2 pour acheter au plus bas et vendre au plus haut de  $P$ .

On suppose que l'on est hors du point de stabilité  $(0, 0)$  et que  $E \ll 1$ . Le système va donc converger vers une orbite stable et ensuite présenter une périodicité. Comme on peut voir en figure 3.1, la périodicité se décompose en 4 parties (lues dans le sens trigonométrique) :

- $\{1\}$  :  $S$  décroissant,  $P$  très croissant. Mieux vaut ne rien faire.
- $\{2\}$  :  $S$  très décroissant,  $P$  décroissant. Mieux vaut vendre puisqu'on sait que  $P$  vient d'atteindre un maximum local.
- $\{3\}$  :  $S$  croissant,  $P$  très décroissant. Mieux vaut ne rien faire.
- $\{4\}$  :  $S$  très croissant,  $P$  croissant. Mieux vaut acheter puisqu'on sait que  $P$  vient d'atteindre un minimum local.

On remarque par ailleurs que tant que le système n'est pas proche de l'orbite,  $P$  et  $S$  changent au plus une seule fois de monotonie (quand la courbe  $(S, P)$  croise la première bissectrice ou sa perpendiculaire). Notons donc  $q$  le nombre de fois où  $S$  ou  $P$  change de monotonie. Ainsi, on peut représenter cette stratégie par un automate hybride, avec  $\{0\}$  l'état initial :

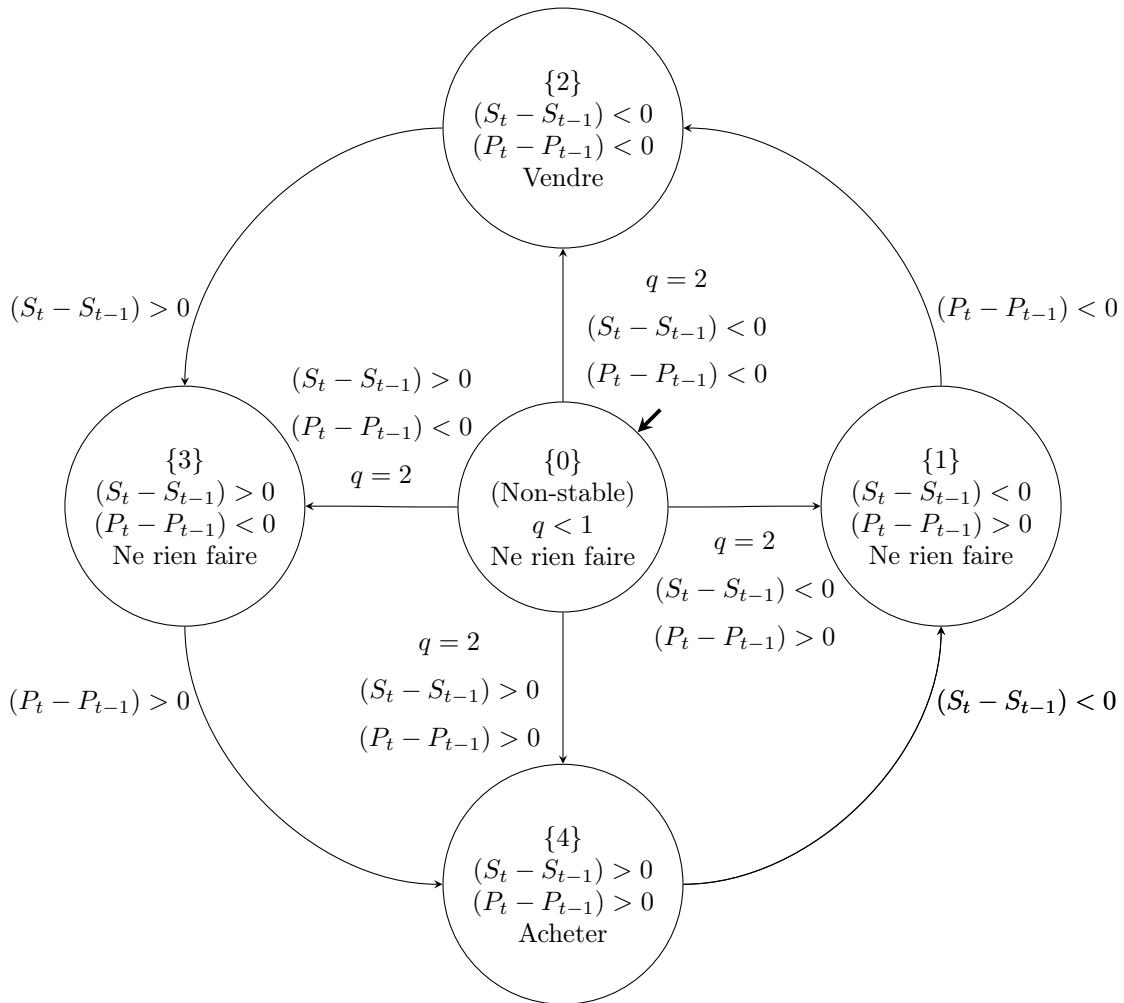


FIGURE 4.2 – Automate représentant une stratégie d'achat possible pour une banque.

# Chapitre 5

## Conclusion

### 5.1 Conclusion sur les modèles proposés

Ce rapport présente donc une modélisation à état continu des non-linéarités dans les cours boursiers via deux équations couplées, une agissant sur la variation de l'indice boursier et l'autre agissant sur la variation des économies du fonds de placement. Ce modèle a été réécrit afin de ramener l'unique point d'équilibre en  $(0,0)$ , et ainsi faciliter son analyse. Une analyse de stabilité montre que le modèle obtenu est localement instable mais est doté d'une orbite stable, obtenue grâce aux termes non-linéaires de la modélisation. L'implémentation de cette modélisation permet une vision claire de son comportement (grâce à l'évolution temporelle des variables et au diagramme de phase), et souple puisque les paramètres sont modifiables en cours de simulation.

En revanche, elle n'est pas assez complexe pour représenter de réels cours boursiers puisqu'elle produit des cycles de courtes périodes. De plus, elle ne permet pas de prendre en compte les cas où les valeurs augmentent en moyenne, contrairement au modèles à moyenne mobile, alors que c'est le cas pour toutes les cours boursiers réels.

Le réseau de Pétri présenté dans la deuxième partie du rapport permet de comprendre plus en détail la chaîne d'actions suivie par le cours boursier. L'intégration du facteur de confiance permet d'affiner le modèle tout en justifiant le signe des constantes utilisées par le modèle à état continu.

La modélisation à état discret est complétée par un automate hybride permettant de schématiser le lien entre le réseau de Pétri et la modélisation à état continu. En effet, celui-ci fait le lien entre les actions d'achat et de vente représentées à la figure 4.1 et leurs conséquences sur le prix ( $P$ ) et les fonds restants ( $S$ ) des investisseurs ou de la banque.

### 5.2 Perspectives

Les modèles proposés se basent sur des comportements humains simples, même en intégrant un taux de confiance des investisseurs. La recherche de modèles plus complexes pouvant prendre en compte des comportements complexes voire irrationnels des investisseurs permettrait de prévoir plus efficacement les évolutions des cours boursiers. De plus, elle pourrait également de tester la robustesse des marchés à des crises de grande ampleur comme la crise des subprimes de 2007.

Pour développer de tels modèles, l'utilisation de l'intelligence artificielle pourrait être utile afin de prendre en compte dans leur individualité les différents acteurs boursiers.

# Annexe 1 : Code Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.widgets import Slider, Button
4
5
6 class Simulation:
7     def __init__(self, A=6, B=0.5, C=0.4, D=0.1, E=0, temporel=False):
8         """
9         Entrees : A, B, C, D, E sont les parametres du modele. Temporel est un booleen pour le
10            mode d'affichage.
11         Cette fonction initialise l'affichage. """
12         # initialisation
13         self.A, self.B, self.C, self.D, self.E, self.temporel = (
14             A,
15             B,
16             C,
17             D,
18             E,
19             temporel,
20         ) # On stock nos entrees
21
22         self.fig, self.ax = plt.subplots()
23         plt.subplots_adjust(left=0.25, bottom=0.25)
24         # self.ax.axis("equal")
25         # Ajouts de sliders et de boutons
26         a_slider_ax = plt.axes([0.25, 0.15, 0.65, 0.03])
27         e_slider_ax = plt.axes([0.25, 0.1, 0.65, 0.03])
28         bouton = plt.axes([0.78, 0.025, 0.12, 0.05])
29         self.bouton = Button(
30             bouton, "Mode temporel/ \n diagramme de phase", hovercolor="0.975"
31         )
32         self.bouton.on_clicked(self.change_mode) # On change de mode d'affichage
33
34         self.a_slider = Slider(a_slider_ax, "A", 0, 4 / C, valinit=self.A)
35         self.e_slider = Slider(e_slider_ax, "E", -1, 1, valinit=self.E)
36
37         self.a_slider.on_changed(self.update) # On appelle update des que l'on change a
38         self.e_slider.on_changed(self.update) # On appelle update des que l'on change e
39
40         # Meshgrid
41         self.x, self.y = np.meshgrid(np.linspace(-1.5, 1.5, 100), np.linspace(-1.5, 1.5, 100))
42
43         # Fin de l'initialisation
44         if self.temporel: # Si on est en mode "temporel"
45             self.ax.set_xlabel("jours")
46             self.ax.set_ylabel("$ (indicatif)")
47             self.fig.suptitle("Evolution du prix et des fonds en fonction du temps")
48             Temporel(self.A, self.B, self.C, self.D, self.E, self.ax)
49         else: # Champ de vecteurs
50             self.ax.set_xlabel("Fonds S")
51             self.ax.set_ylabel("Prix P")
52             self.fig.suptitle(
53                 "Evolution du prix et des fonds dans le diagramme de phase P-S"
54             )
55             u, v = T(self.x, self.y, self.A, self.B, self.C, self.D, self.E)
56             self.ax.streamplot(
57                 self.x, self.y, u, v, density=2, linewidth=None, color="#A23BEC"
58             )
59             line(self.A, self.B, self.C, self.D, self.E, self.ax)
60         self.fig.canvas.draw_idle()
61         # affichage
62         plt.grid()
```

```

62         plt.show()
63
64     def update(self, val):
65         """
66         Cette fonction met a jour les plots avec les nouvelles valeurs de a et de e.
67         """
68         self.ax.cla() # On efface
69         self.A, self.E = self.a_slider.val, self.e_slider.val # Update des valeurs
70
71         if self.temporel: # Si on est en mode "temporel"
72             self.ax.set_xlabel("jours")
73             self.ax.set_ylabel("$ (indicatif)")
74             self.fig.suptitle("Evolution du prix et des fonds en fonction du temps")
75             Temporel(self.A, self.B, self.C, self.D, self.E, self.ax)
76         else: # Champ de vecteur
77             self.ax.set_xlabel("Fonds S")
78             self.ax.set_ylabel("Prix P")
79             self.fig.suptitle(
80                 "Evolution du prix et des fonds dans le diagramme de phase P-S"
81             )
82             u, v = T(self.x, self.y, self.A, self.B, self.C, self.D, self.E)
83             self.ax.streamplot(
84                 self.x, self.y, u, v, density=2, linewidth=None, color="#A23BEC"
85             )
86             line(self.A, self.B, self.C, self.D, self.E, self.ax)
87             self.fig.canvas.draw_idle()
88
89     def change_mode(self, event):
90         """
91         Cette fonction met a jour les plots quand on change de mode d'affichage"""
92         self.ax.cla() # On efface
93         self.temporel = not self.temporel # On change de mode
94
95         if self.temporel: # Si on est en mode "temporel"
96             self.ax.set_xlabel("jours")
97             self.ax.set_ylabel("$ (indicatif)")
98             self.fig.suptitle(
99                 "Evolution du prix et des fonds en fonction du temps par rapport au point d'
100                 equilibre"
101             )
102             Temporel(self.A, self.B, self.C, self.D, self.E, self.ax)
103         else: # Champ de vecteurs
104             self.ax.set_xlabel("Fonds S")
105             self.ax.set_ylabel("Prix P")
106             self.fig.suptitle(
107                 "Evolution du prix et des fonds dans le diagramme de phase P-S "
108             )
109             u, v = T(self.x, self.y, self.A, self.B, self.C, self.D, self.E)
110             self.ax.streamplot(
111                 self.x, self.y, u, v, density=2, linewidth=None, color="#A23BEC"
112             )
113             line(self.A, self.B, self.C, self.D, self.E, self.ax)
114             self.fig.canvas.draw_idle()
115
116     def T(S, P, A, B, C, D, E):
117         """
118         Entrees: (S, P) est la coordonnee du point d'entree.
119         A, B, sont les parametres du modele.
120         La fonction permet de calculer le vecteur de déplacement."""
121         S2 = (1 + (E - A) * C) * S - A * P - B * S**3 - (E - A) * D * P**3
122         P2 = C * S + P - D * P**3
123         return (S2 - S, P2 - P)
124
125
126     def Temporel(A, B, C, D, E, ax):
127         """
128         A, B, C, D, E sont les parametres du modele. ax permet de dessiner au bon endroit.
129         Cette fonction retourne les courbes de S et de P en fonction du temps."""
130         n = 300 # Nombre d'iterations
131         x, y = [0.1], [-0.1]
132         for _ in range(n):
133             s, p = T(x[-1], y[-1], A, B, C, D, E)
134             x.append(s + x[-1]), y.append(p + y[-1]) # On ajoute le nouveau point
135         ax.plot(range(n + 1), x, "-", label="Evolution des fonds disponibles S")
136         ax.plot(range(n + 1), y, "-", label="Evolution du prix P")

```

```

137     ax.legend()
138
139
140 def line(A, B, C, D, E, ax):
141     """
142     A, B, C, D, E sont les parametres du modele. ax permet de dessiner au bon endroit.
143     Cette fonction permet de retourner la trajectoire sur le diagramme de phase S-P. """
144     n = 1000 # Nombre d'iterations
145     x, y = [-0.5], [0.5]
146     for _ in range(n):
147         s, p = T(x[-1], y[-1], A, B, C, D, E)
148         x.append(s + x[-1]), y.append(p + y[-1]) # On ajoute le nouveau point
149     ax.plot(x[100:], y[100:])
150
151
152 def main():
153     Simulation(A=0.13, E=1)
154
155
156 main()

```

## Annexe 2 : Bifurcation de Neumark

Précisons l'étude de la bifurcation de Neimark.

Pour  $E = 0$ , le discriminant vaut :

$$\Delta = (2 - AC)^2 - 4 = AC(4 - AC)$$

$$\text{Donc } \Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < AC < 4$$

Puisque le determinant dépend continuellement de  $E$  (car polynomial en ce dernier), on a que les racines sont complexes conjuguées pour  $E$  suffisamment proche de 0. De plus, elles sont de module  $\sqrt{1 + EC}$ .

# Bibliographie

- [1] C. Francq and J.-M. Zakoian. Garch models : Structure, statistical interference and financial applications. *John Wiley and Sons*, 2019.
- [2] V. Valori G. Italo Bischi. Nonlinear effects in a discrete-time dynamic model of a stock market, 1999.
- [3] Harmonic compensation by limit cycle model predictive control. [https://www.researchgate.net/publication/351863126\\_Harmonic\\_Compensation\\_by\\_Limit\\_Cycle\\_Model\\_Predictive\\_Control#fullTextFileContent](https://www.researchgate.net/publication/351863126_Harmonic_Compensation_by_Limit_Cycle_Model_Predictive_Control#fullTextFileContent).
- [4] G. Orlando. Bursts and regularization in financial markets : Deterministic or stochastic?, 2021.