

1 Mathematischer Übungssatz

1.1 Gleichungsumformungen

1.1.1 Erstes Beispiel (Einfache Gleichung)

$$4x^2 + 2xv + v^2 = (2x + v)^2 - 2xv \quad (1)$$

1.1.2 Zweites Beispiel (Gleichung über mehrere Zeilen)

$$\begin{aligned} (2x + 1)(2x - 1) &= 7 \\ 4x^2 - 1 &= 7 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned} \quad (2)$$

1.1.3 Drittes Beispiel (Hochstellung, Wurzeln)

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{rq} &= \left(\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right)^r \\ &= (a^p)^r = a^{rp} \end{aligned} \quad (3)$$

1.1.4 Viertes Beispiel (Brüche)

$$\frac{1 - x^4}{(x^3)^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1 - 2x^4}{x^6} \quad (4)$$

1.1.5 Fünftes Beispiel (Mathe im Fliesstext)

$$M = \frac{v^2 r}{G} \quad (5)$$

Mit $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $v = 29,77 \text{ km/s}$ und $r = 1,49570 \cdot 10^8 \text{ km}$ ergibt sich für die Masse M der Sonne:

$$M = \frac{(29,77 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 \cdot 1,49570 \cdot 10^{11} \text{ m}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2} = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}. \quad (6)$$

1.1.6 Sechstes Beispiel (Klammerausdruck, Array)

$$\begin{aligned} \ln(1 + |u|) &= x - c \\ 1 + |u| &= e^{x-c} \\ |u| &= e^{x-c} - 1 \\ u(x) &= \begin{cases} e^{x-c} - 1 & \text{für } x > c \\ 0 & \text{für } x = c \\ -e^{x-c} + 1 & \text{für } x < c \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

1.1.7 Siebtes Beispiel (Funktionen, verschachtelte Brüche)

Aus der l'Hospitalschen Regel folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin(\pi x)}{\ln \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan(x)}{\tan(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi / \cos^2(x)}{\pi / \cos^2(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(\pi x)}{\cos^2(x)} = 1$$

1.2 Die Lösung von Integralen (Integrale)

$$f(x) = \int_a^b \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx \quad (8)$$

Exkurs:

$$\begin{aligned} u &:= x^3 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 3x^2 \\ dx &= \frac{du}{3x^2} \\ \int \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx &= \int \frac{1}{u} du \\ f(x) &= \ln(|u|) + c \end{aligned} \quad \begin{matrix} (9) \\ (10) \end{matrix}$$

Es folgt damit:

$$f(x) = [\ln(x^3 - 1)]_a^b.$$

1.2.1 Die Integral - Multiplikationsregel

Es gilt:

$$\int_a^b g'(x)f(x) dx = [g(x)f(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx$$

Berechnen wir damit als Beispiel das Integral $\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$!

Führen Sie die Berechnung des Integrals in diesem Dokument zu Ende!

1.3 Vektoren und Matrizen (Vektoren, Arrays, Fortsetzungspunkte)

Der Winkel α zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist gegeben durch:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$, wobei $A = (a_{ij})_{n \times n}$ eine $n \times n$ Matrix und $x = (x_i)_n$ und $b = (b_i)_n$ Vektoren mit n Elementen sind, sieht

ausgeschrieben so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Die Summenschreibweise für die i -te Zeile dieser Matrix ist dann:

$$\sum_{m=1}^n a_{im} \cdot x_m = b_i.$$