

(a) Molekularfeld - Näherung

$$\hat{H}_{MF} = - \sum_i (\beta g \langle \sigma \rangle + \mu B) \sigma_i$$

Berechne die kanonische Zustandssumme:

$$Z_c = \text{tr}[W] \quad \leftarrow \text{ist } W \text{ nicht schon normiert?}$$

$$= \sum_i \exp[-\beta H_i]$$

$$= \sum_i \exp \left[-\beta \underbrace{(\beta g \langle \sigma \rangle + \mu B) \sigma_i}_{W[i]} \right]$$

$$\langle \sigma \rangle = \text{tr}[\sigma W]$$

$$= \frac{1}{Z_c} \sum_i \exp[-\beta (\beta g \langle \sigma \rangle + \mu B) \sigma_i] \sigma_i$$

tanh ist:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Dort taucht hier $1/2$ auf. Also muss das durch die Spins kommen.

σ_i kann die Werte $+1/2$ und $-1/2$ annehmen.

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_c} (\exp_{\uparrow} \cdot n_{\uparrow} - \exp_{\downarrow} \cdot n_{\downarrow})$$

wobei n_{\uparrow} die Anzahl der i ist, wo $\sigma_i = +1/2$ ist.

Z_c lässt sich so schreiben als:

$$Z_c = \sum_i \exp[\dots] = \exp_{\uparrow} n_{\uparrow} + \exp_{\downarrow} n_{\downarrow}$$

Zusammen ist dann also:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{2} \frac{\exp_{\uparrow} n_{\uparrow} - \exp_{\downarrow} n_{\downarrow}}{\exp_{\uparrow} n_{\uparrow} + \exp_{\downarrow} n_{\downarrow}}$$

und \exp_{\uparrow} ist
 $\exp\left[\frac{1}{2}(\sum q \langle \sigma \rangle + \mu B)\right]$.

score \exp_{\downarrow} ist
 $\exp\left[-\frac{1}{2}(\dots)\right]$.

Jetzt stören allerdings die n_{\uparrow} und n_{\downarrow} . Wenn diese gleich wären, könnte man ausklammern und wäre fertig. Wenn sie aber gleich sind, ist $\langle \sigma \rangle = 0$. Das ist aber nicht sonderlich interessant und keine Lösung für $B \neq 0$.

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{2N} (n_{\uparrow} - n_{\downarrow})$$

$$N = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n_{\uparrow} - n_{\downarrow}}{n_{\uparrow} + n_{\downarrow}}$$

Dies sieht auch nach tank aus.

dh. Man summiert ja gar nicht über die Teilchen, sondern die Zustände. Die Spur geht über Zustände!

$$Z_{c,i} = \exp_{\uparrow} + \exp_{\downarrow} = \exp\left[\sum_{\pm 1/2} \dots \sum_{\pm 1/2}\right] = \prod \dots \prod \exp[\dots]$$

$$Z_c = (\exp_{\uparrow} + \exp_{\downarrow})^N$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{Z_c} \sum_{\pm 1/2} \dots \sum_{\pm 1/2} \exp[\dots]$$

$$= \frac{1}{Z_{c,i}^N} \left(\sum_{\pm 1/2} \exp[\dots] \right)^N = \frac{1}{2} \frac{\exp_{\uparrow} - \exp_{\downarrow}}{\exp_{\uparrow} + \exp_{\downarrow}}$$

$$= \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{2} \beta (3q \langle \sigma \rangle + \mu B) \right]$$

Lino, hast du dich amüsiert? 😊

Graphische Diskussion

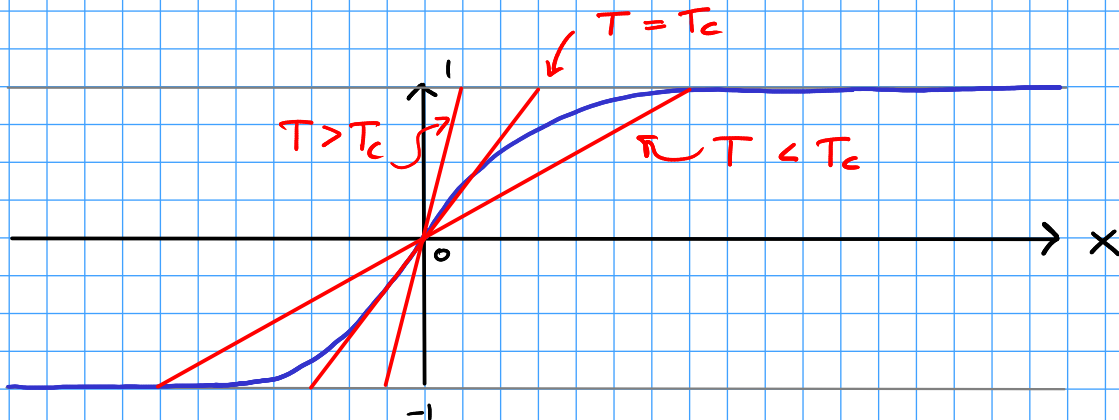
Für $B=0$ gilt

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{1}{2} \beta 3q \langle \sigma \rangle \right]$$

Umstellen: $x := \frac{1}{2} \beta 3q \langle \sigma \rangle$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{2}{3q} \frac{k_B T}{x}$$

$$\frac{4 k_B T}{3q} x = \tanh(x)$$



Wenn $\frac{4 k_B T}{3q} = 1$ ist, ist dies die kritische Temperatur.

$$T_c = \frac{3q}{4 k_B}$$

(b) Bethe - Näherung

Es gibt einen neuen Hamiltonoperator, also muss eine neue Zustandssumme her.

$$Z_c = \sum_{\sigma_1 = \pm \frac{1}{2}} \dots \sum_{\sigma_N = \pm \frac{1}{2}} \exp \left[-\beta \hat{H}_{\text{Bethe}} \left[\{ \sigma_i \} \right] \right]$$
$$= \sum_{\sigma_1 = \pm \frac{1}{2}} \dots \sum_{\sigma_N = \pm \frac{1}{2}} \exp \left[-\beta \left(-\mu B \sigma_0 - \mu (B + B') \sum_{j=1}^q \sigma_j - J \sum_{j=1}^q \sigma_0 \sigma_j \right) \right]$$

Der Hamiltonoperator hängt von mehreren σ_j ab. Für die Zustandssumme muss ich über alle möglichen Zustände summieren.

Bei $\sum_{j=1}^q \sigma_j$ gibt es alle Möglichkeiten von $-\frac{q}{2}, \dots, \frac{q}{2}$

Im letzten Summand kann man σ_0 vorziehen und erhält $\sum_{j=0}^q \sigma_j$, wobei es mit $\pm \frac{1}{2}$ multipliziert wird.

Daher kann ich an dieser Stelle die α_{\pm} einführen, die später auch gebraucht werden.

$$\alpha_{\pm} := \beta \left(\frac{\mu (B + B')}{2} \pm \frac{J}{4} \right)$$

$$= \sum_{\sigma_1 = \pm \frac{1}{2}} \dots \sum_{\sigma_N = \pm \frac{1}{2}} \exp \left[\beta \mu B \sigma_0 + 2\alpha_{\text{sgn}(\sigma_0)} \sum_{j=1}^q \sigma_j \right]$$

Das ist jetzt deutlich kompakter und führt wahrscheinlich einfacher weiter. Ich muss wahrscheinlich auch noch über $\sigma_0 = \pm \frac{1}{2}$ rechnen. Vielleicht mache ich das erst gleich, und summiere erstmal über alle anderen $j = 1, \dots, q$.

$$= \sum_{\sigma_0, \sigma_j} \exp[\beta \mu B \sigma_0] \exp\left[2 \alpha_{\text{sgn}(\sigma_0)} \sum_{j=1}^q \sigma_j\right]$$

Für jedes σ_j gibt es dann zwei Summanden. Ich fange bei $j=1$ an und ziehe das somit aus der inneren Summe.

$$\exp\left[2 \alpha_{\text{sgn}(\sigma_0)} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=2}^q \sigma_j\right)\right] + \exp\left[2 \alpha_{\text{sgn}(\sigma_0)} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{j=2}^q \sigma_j\right)\right]$$

Die Summen in den Exponenten kann man in Produkte überführen. Den Rest ausklammern.

$$\exp\left[2 \alpha_{\text{sgn}(\sigma_0)} \sum_{j=2}^q \sigma_j\right] \left(\exp[\alpha_{\text{sgn}[\sigma_0]}] + \exp[-\alpha_{\text{sgn}[\sigma_0]}]\right)$$

Die letzte Klammer kann man als $2 \cosh[\alpha_{\text{sgn}[\sigma_0]}]$ schreiben

Das ganze mache ich also q mal. Damit ist die Summe über die restlichen σ_j außen und die Summe über die restlichen j innen weg. Es bleibt:

$$= \sum_{\sigma_0 = \pm \frac{1}{2}} \exp[\beta \mu B \sigma_0] 2^q \cosh^q[\alpha_{\text{sgn}[\sigma_0]}]$$

Also noch die letzte Summe ausführen.

$$= 2^q \left(\exp\left[\frac{1}{2} \beta \mu B\right] \cosh^q[\alpha_+] + \exp\left[-\frac{1}{2} \beta \mu B\right] \cosh^q[\alpha_-] \right)$$

Hoffentlich stimmt das jetzt so. Nun den Erwartungswert des Spins, $\langle \sigma_j \rangle$, ausrechnen.

Warum steht auf dem Aufgabenzettel folgendes?

$$\langle \sigma_j \rangle = \left\langle \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \sigma_j \right\rangle$$

Erwartungswert
für Spin j .

Erwartungswert für den Mittelwert
der Nachbarn von Spin 0.

Wenn man links den Index j weglässt, ist es
etwas sinnvoller.

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{Z_c} \sum_{\sigma_0 = \pm \frac{1}{2}} \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_j} \exp(-\beta H) \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \sigma_j$$

\tilde{Z}_c ist $Z_c / 2^q$. Wahrscheinlich werde ich gleich 2^q im
Zähler erzeugen. Mal schauen.

$$\frac{1}{Z_c} \sum_{\sigma_0, \dots, \sigma_q} \exp \left[\beta \mu B \sigma_0 + 2\alpha \operatorname{sgn}[\sigma_0] \sum_{k=1}^q \sigma_k \right] \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \sigma_j$$

Jetzt kann man wieder Summe in Produkt umwandeln

$$= \frac{1}{q Z_c} \sum_{\sigma_0} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_q} \exp[\beta \mu B \sigma_0] \prod_{k=1}^q \exp[\alpha \operatorname{sgn}[\sigma_0] \operatorname{sgn}[\sigma_k]] \sum_{j=1}^q \sigma_j$$

Bringt es etwas, die Operatoren zu tauschen?

$$= \frac{1}{q Z_c} \sum_{\sigma_0} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_q} \exp[\beta \mu B \sigma_0] \sum_{j=1}^q \prod_{k=1}^q \exp[\alpha \operatorname{sgn}[\sigma_0] \operatorname{sgn}[\sigma_k]] \sigma_j$$

Vorher war es einfacher, oder?

$$= \frac{1}{q Z_c} \sum_{\sigma_0} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_q} \exp[\beta \mu B \sigma_0] \exp \left[2\alpha \operatorname{sgn}[\sigma_0] \sum_{k=1}^q \sigma_k \right] \sum_{j=1}^q \sigma_j$$

Jetzt gibt es diese Summe der Spins doppelt.

Die geht von $-\frac{q}{2}$ bis $\frac{q}{2}$, wobei die Anzahl der möglichen Realisierungen für eine gewisse Spinsumme in der Mitte größer ist.

Die Anzahl dieser Möglichkeiten sehe ich aber im Ergebnis nicht. Vielleicht berechne ich erst mal $\langle \sigma_0 \rangle$, um die Art der Rechnung zu sehen.

$$\langle \sigma_0 \rangle = \frac{1}{Z_c} \sum_{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_q} \exp[-\beta H(\{\sigma_k: k=0, \dots, q\})] \sigma_0$$

$$= \frac{1}{Z_c} \sum_{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_q} \exp \left[\beta \mu B \sigma_0 + 2 \alpha_{\text{sgn}[\sigma_0]} \sum_{j=1}^q \sigma_j \right] \sigma_0$$

$$= \frac{1}{Z_c} \sum_{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_q} \exp \left[\beta \mu B \sigma_0 \right] \exp \left[2 \alpha_{\text{sgn}[\sigma_0]} \sum_{j=1}^q \sigma_j \right] \sigma_0$$

Jetzt kann ich die ganzen Summanden σ_j wieder als Produkte aus der Exponentialfunktion ziehen. Somit erhalte ich wieder jeweils $2 \cosh$.

$$= \frac{1}{Z_c} \sum_{\sigma_0} \exp \left[\beta \mu B \sigma_0 \right] 2^q \cosh^q \left[\alpha_{\text{sgn}[\sigma_0]} \right] \sigma_0$$

Nun noch die Summe über σ_0 .

$$= \frac{2^q}{2 Z_c} \left(\exp \left[\frac{\beta \mu B}{2} \right] \cosh^q [\alpha_+] - \exp \left[-\frac{\beta \mu B}{2} \right] \cosh^q [\alpha_-] \right)$$

Wenn ich jetzt noch das \tilde{Z}_c einsetze, passt es.

Wie bekomme ich jetzt das \sinh ausstelle der
einen \cosh bei $\langle \sigma_j \rangle$ hin?

Gleichheit der Gitterplätze

Es soll $\langle \sigma_0 \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ gelten. Also setze ich das gleich.

$$\exp\left[\frac{\beta \mu B}{2}\right] \cosh^{q-1}[\alpha_+] \sinh[\alpha_+]$$

$$+ \exp\left[-\frac{\beta \mu B}{2}\right] \cosh^{q-1}[\alpha_-] \sinh[\alpha_-]$$

$$= \exp\left[\frac{\beta \mu B}{2}\right] \cosh^q[\alpha_+] + \exp\left[-\frac{\beta \mu B}{2}\right] \cosh^q[\alpha_-]$$

Setze $B=0$

$$\cosh^{q-1}[\alpha_+] \sinh[\alpha_+] + \cosh^{q-1}[\alpha_-] \sinh[\alpha_-]$$

$$= \cosh^q[\alpha_+] + \cosh^q[\alpha_-]$$

Dies kann man noch zusammenfassen.

$$\cosh^{q-1}[\alpha_+] \left(\sinh[\alpha_+] - \cosh[\alpha_+] \right)$$

$$+ \cosh^{q-1}[\alpha_-] \left(\sinh[\alpha_-] - \cosh[\alpha_-] \right) = 0$$

$$\sinh[x] - \cosh[x] = \frac{1}{2} \left((e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \right) = -e^{-x}$$

Ich fordere jetzt, dass die runden Klammern jeweils 0 sind.

$$e^{-\alpha_+} \stackrel{!}{=} 0 \quad \wedge \quad e^{-\alpha_-} \stackrel{!}{=} 0$$

Das ist aber so nicht zu erfüllen, außer im Grenzwert $\alpha_{\pm} \rightarrow \infty$.

$$\alpha_{\pm} \Big|_{B=0} = \frac{\beta \mu B'}{2} + \frac{\beta J}{4}$$

Sollte dies gegen ∞ gehen, geht $T \rightarrow 0$. Wohl nicht sinnvoll.

$\cosh[x]$ wird aber minimal 1. Das hilft auch nicht.

Oh, man soll das gar nicht direkt analytisch lösen. Also nochmal die Gleichung so:

$$\cosh^{q-1}[\alpha_+] \exp[-\alpha_+] + \cosh^{q-1}[\alpha_-] \exp[-\alpha_-] = 0$$

Wenn $B' \rightarrow 0$ betrachtet werden soll, und zur ersten Ordnung in B' entwickelt werden soll, werde ich die beiden Summanden um $B'=0$ entwickeln.

Man betrachtet $B' \rightarrow 0$, da am Phasenübergang das System nicht geordnet ist und daher $B' \rightarrow 0$ gilt.

Nullte Ordnung, $B'=0$ einsetzen. Es bleibt der $\pm \frac{\beta J}{4}$ Term bestehen:

$$\cosh^{q-1} \left[\frac{\beta J}{4} \right] \exp \left[-\frac{\beta J}{4} \right] + \cosh^{q-1} \left[-\frac{\beta J}{4} \right] \exp \left[\frac{\beta J}{4} \right] = 0$$

Wenn ich jetzt nach B' ableite, wird es wahrscheinlich hässlich. Mal schauen.

$$\cosh^{q-1}[\alpha_+] \exp[-\alpha_+] + \cosh^{q-1}[\alpha_-] \exp[-\alpha_-] = 0$$

$$\begin{aligned} & (q-1) \cosh^{q-2}[\alpha_+] \sinh[\alpha_+] \alpha'_+ \exp[-\alpha_+] \\ & - \cosh^{q-1}[\alpha_+] \exp[-\alpha_+] \alpha'_+ \\ & + (q-1) \cosh^{q-2}[\alpha_-] \sinh[\alpha_-] \alpha'_- \exp[-\alpha_-] \\ & - \cosh^{q-1}[\alpha_-] \exp[-\alpha_-] \alpha'_- = 0 \end{aligned}$$

Das jetzt bei $B' = 0$ auswerlen und hinter jeden Faktor ein B' setzen.

$$\begin{aligned} & (q-1) \cosh^{q-2}\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \sinh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_3 \mu}{2} \exp\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] B' \\ & - \cosh^{q-1}\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_3 \mu}{2} B' \\ & + (q-1) \cosh^{q-2}\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \sinh\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_3 \mu}{2} \exp\left[\frac{\beta_3}{4}\right] B' \\ & - \cosh^{q-1}\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_3 \mu}{2} B' = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} & \cosh^{q-1}\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] + \cosh^{q-1}\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \\ & + (q-1) \cosh^{q-2}\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \sinh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_3 \mu}{2} \exp\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] B' \\ & - \cosh^{q-1}\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_3 \mu}{2} B' \\ & + (q-1) \cosh^{q-2}\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \sinh\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_3 \mu}{2} \exp\left[\frac{\beta_3}{4}\right] B' \\ & - \cosh^{q-1}\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_3 \mu}{2} B' = 0 \end{aligned}$$

\cosh ist eine gerade Funktion. Also kann man da viel kürzen.

$$\begin{aligned}
 & \cosh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] + \cosh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \\
 & + (q-1) \sinh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_\mu}{2} \exp\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] B' \\
 & - \cosh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[-\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_\mu}{2} B' \\
 & - (q-1) \sinh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_\mu}{2} \exp\left[\frac{\beta_3}{4}\right] B' \\
 & - \cosh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \exp\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \frac{\beta_\mu}{2} B' = 0
 \end{aligned}$$

$$-(q-1) \sinh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \beta_\mu \sinh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] B'$$

$$- \cosh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \cosh\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \beta_\mu B'$$

$$\cosh^2\left[\frac{\beta_3}{4}\right]$$

$$\cosh^2\left[\frac{\beta_3}{4}\right] - (q-1) \sinh^2\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \beta_\mu B' - \cosh^2\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \beta_\mu B' = 0$$

Benutze $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$. $\sinh^2 - \cosh^2 = -1$

$$\cosh^2\left[\frac{\beta_3}{4}\right] - q \sinh^2\left[\frac{\beta_3}{4}\right] \beta_\mu B' = 1$$

Angenommen, ich darf jetzt noch mal $B' = 0$ machen.

Dann muss $\frac{\beta_3}{4} = 0$ sein. Also $T \rightarrow \infty$. Das kann es schlecht sein.

Beim Setzen ist mir noch ein Fehler aufgefallen.

Noch mal neu entwickeln.

$$-\cosh\left[\frac{\beta\mu B'}{2} + \frac{\beta J}{4}\right]^{q-1} \exp\left[-\frac{\beta\mu B'}{2}\right] + \cosh\left[\frac{\beta\mu B'}{2} - \frac{\beta J}{4}\right]^{q-1} \exp\left[\frac{\beta\mu B'}{4}\right] = 0$$

Dies jetzt entwickeln um $B' = 0$

$B' = 0$ einsetzen:

$$-\cosh\left[\frac{\beta J}{4}\right]^{q-1} + \cosh\left[-\frac{\beta J}{4}\right]^{q-1} = 0$$

Da \cosh gerade ist, ist dies immer erfüllt.

Erste Ableitung:

$$\begin{aligned} & \left(-(q-1) \cosh[\dots]^{q-2} \sinh[\dots] \left(\frac{\beta\mu}{2}\right) - \cosh[\dots]^{q-1} \left(-\frac{\beta\mu}{2}\right) \right) \exp[\dots] \\ & + \left((q-1) \cosh[\dots]^{q-2} \sinh[\dots] \left(\frac{\beta\mu}{2}\right) + \cosh[\dots]^{q-1} \exp[\dots] \frac{\beta\mu}{2} \right) \end{aligned}$$

$B' = 0$ einsetzen

$$\begin{aligned} & \left(-(q-1) \cosh\left[\frac{\beta J}{4}\right]^{q-2} \sinh\left[\frac{\beta J}{4}\right] + \cosh\left[\frac{\beta J}{4}\right]^{q-1} \right) \frac{\beta\mu}{2} \\ & + \left((q-1) \cosh\left[-\frac{\beta J}{4}\right]^{q-2} \sinh\left[-\frac{\beta J}{4}\right] + \cosh\left[-\frac{\beta J}{4}\right]^{q-1} \right) \frac{\beta\mu}{2} = 0 \end{aligned}$$

$\beta = 0$ ist eine Lösung, da unrealistisch.

$$\begin{aligned} & \left(-(q-1) \cosh\left[\frac{\beta J}{4}\right]^{q-2} \sinh\left[\frac{\beta J}{4}\right] + \cosh\left[\frac{\beta J}{4}\right]^{q-1} \right) \\ & + \left(-(q-1) \cosh\left[+\frac{\beta J}{4}\right]^{q-2} \sinh\left[+\frac{\beta J}{4}\right] + \cosh\left[+\frac{\beta J}{4}\right]^{q-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$-(q-1) \cosh \left[\frac{\beta \beta}{4} \right]^{q-2} \sinh \left[\frac{\beta \beta}{4} \right] + \cosh \left[\frac{\beta \beta}{4} \right]^{q-1} = 0$$

$$\cosh \left[\frac{\beta \beta}{4} \right]^{q-2} \left(-(q-1) \sinh \left[\frac{\beta \beta}{4} \right] + \cosh \left[\frac{\beta \beta}{4} \right] \right) = 0$$

↑
wird nie 0.

↑
also muss das = 0

$$(q-1) \sinh \left[\frac{\beta \beta}{4} \right] = \cosh \left[\frac{\beta \beta}{4} \right]$$

$$\frac{1}{q-1} = \tanh \frac{\beta \beta}{4}$$

$$\frac{4}{\beta} \operatorname{arccoth} [q-1] = \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$k_B \frac{3}{4} \operatorname{arccoth} [q-1] = T_c$$

$$\frac{1}{\operatorname{arccoth} [x]}$$

