1 Кратка зимна диференциална поема

Хомогенни уравнения:

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

Пример:

$$y' = \frac{y}{x}(1 + ln(\frac{y}{x}))$$

Рeнение:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$=> y(x) = xz(x)$$

Линейни уравнения от 1ви ред

$$y'(x) = axy(x) + b(x)$$

Пример:

$$y' = 2xy + 2x^3$$

Решение:

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}(c + \int(b(x)e^{\int a(x)dx}dx))$$

Уравнения на Бернули

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^n(x), n \in R, n! = 0, 1$$

Решение:

$$n > 0$$

$$y(x) = 0 - e - reshenie$$

$$y(x)! = 0 :$$

$$\frac{y'}{y^n} = a(x)y^{(1-n)} + b(x)$$

Пример:

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$$

Уравнение на Рикати

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x)$$

частно решение:

$$z(x) = y(x) - c(x)$$

пример:

$$y' = y^2 - 2e^xy + e^{2x} + e^x$$

Уравнения произлизащи от първи диференциал

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Решение:
Уравнението произлиза от пълен диференциал ако $\exists\ F : dF = Fdx + Qdy$
$dF = F'_x dx + F'_y dy$
$=> F'_x = P$
$F'_y = Q$ Пример:

$$(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$$

Теорема за съществуване на единствено

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$x, y \in \Pi = \{|x - x_0| \leq Q, |y - y_0| \leq b\}$
f- непрекъсната в $\Pi => \exists M > 0 : |f(x, y)| \leq M$ за (x,y) $\in \Pi$
f - липшицова по y в П, т.е. $\exists k > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ за $\forall$ две точки $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi \exists!$ решение на задачата на коши, дефинирана поне за $|x - x_0| \leq h$, h= $min\{a, b/M\}$
пример: Намерете интервал, в който съществува единствено решение за ЗК:

$$y' = x + y^3$$

$$y(0) = 0$$

Уравнения нерешени относно производната

$$F(x, y, y') = 0$$

Уравнения нерепени относно производната

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

I.Уравнения решени относно y(x)

$$y(x) = f(x, y'(x))$$

$$P(x) = y'(x)$$

$$y(x) = f(x, p(x))$$

$$y'(x) = f'_x(x, p(x)) + f'_p(x, p(x))p'_x$$

$$=> p(x) = f'_x = (x, p(x)) + f'_p(x, p(x))p'x$$

Това е уравнение за p(x), решено относно p'(x). Решаваме го и намирама p=p(x,c)

$$y(x) = f(x, p(x, c))$$

Пример:

$$y'^2 - xy' + 5y - x^2$$

Уравнение на Клеро

$$y = xy'(x) + f(y'(x))$$

$$f \in c^2(\alpha, \beta), f''_x > 0 or f''_z < 0, z \in (\alpha, \beta)$$

$f(x) = x^{3/2}, x \in [-1, 1]$-непрекъсната
$f'(x) = 3/2x^{1/2}$-прекъсната
$f''(x)$ - прекъсната

$$p(x) = y'(x)$$

$$y = xp + f(p)|\frac{d}{dx}$$

Пример:

$$y = xy' - (y')^2$$

Уравнения на Лагранж

$$y = xf(y') + g(y'); f, g \in c(\alpha.\beta)$$

$$p(x) = y'(x)$$

$$=> y = xf(p) + g(p)|\frac{d}{dx}$$

$$p = f(p) + xf'(p)p' + g'(p)p'$$

Пример:

$$y = 2xy' - 4y'^3$$

|| Уравнениея, решени относно X

$$x = f(y(x), y'(x))$$

Пример:

$$x = y - y' + lny', y' > 0$$

Решение:

$$p(y) = y'(x)$$

$$y'' = (p(y))'_x = (p)'_y y'(x) = pp'$$

$$x = f(y, p(y))|\frac{d}{dx}$$

$$1 = f'_y(y, p)'_y + f'_p(y, p)pp'$$

$$1 = f'_y(y, p)p + f'_p(y, p)pp'$$

Това уравнение за p(y), решено относно p'(y). Решаваме го и намираме p=p(y,c)

Уравнения от по-висок ред

$$F(x, y(x), y'(x).....y^{(n)}(x)) = 0, n \in N, n >= 2$$

$$z(x) = y^{(k)}(x)$$
$$=> F(x, z(x), z^{(1)}(x), ..., z^{(z-k)}(x)) = 0$$

Пример:

$$y' = xy'' + (y'')^2$$

Други Уравнения от по-висок ред

$$f(x, y(x), y'(x)...y^{(n)}(x)) = \frac{d}{dx} \in (x, y(x), y'(x)....y^{(n-1)}(x)) = 0$$

$$= G(x, y, y', ...y^{(n-1)}) = c$$

Пример:

$$xy'' = 2yy' - y'$$

Други Уравнения от по-висок ред

$$F(y(x), y'(x), .., y^{(n)}(x)) = 0$$

Пример:

$$2yy'' = y'^2 + 1$$

Решение:

$$p(y) = y'$$
$$F(y, p(y), p'(y)..., p^{(n)}(y)) = 0$$

Други Уравнения от по-висок ред

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Пример:

$$x(1 + 2y') - y'^2 = 2y$$

Решение:

$$\exists \in R : \forall \lambda \in R$$
$$F(x, \lambda y, \lambda y', .., \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', .., y^{(n)})$$

Линейни хомогенни Уравнения с постоянни коефициенти

$$L[y] = y^{(n)} + a1y^{(n-1)} + .. + a_{n-1}y' + a_n y = 0, a_j \in R$$

Пример:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Решение:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + .. + a_{(n-1)}\lambda + an$$

λ са корените на уравнението $P(\lambda)$, Ако λ е реален корен на уравнението имаме $e^{\lambda x}$,ако има n-кратни корени $=>$ $e^{\lambda x} + te^{\lambda x} + ... + e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}..$$

Ако λ е комплексен корен имаме, $e^{\alpha x}(sin\beta x + cos\beta x)$, където α е реалната част от корена, а β е комплексната част на корена, за кратни корени аналогично от предното условие. Линейни нехомогенни уравнения с постоянни коефициенти:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)}.. + a_{(n-1)}y' + a_n y = f(x)$$

Пример:

$$y'' - 5y' + 4y = xe^x$$

Намиране на частно решение с метода на Лагранж (Метод на варираме на производни константи)

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Пример:

$$y'' - 5y' + 4y = xe^x$$

Уравнения на Ойлер

$$(x-a)^n y^{(n)} + a_1(x-a)^{(n-1)}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x-a)y' + a_n y = f(x)$$

Пример:

$$x^2y'' + xy' + py = 10x$$

Решение:

$$x > a, x = a + e^t, t = ln(x-a)$$

$$t'_x = \frac{1}{x-a} = \frac{1}{e^t} = e^{(-t)}$$

$$z(t) = y(a + e^t), y(x) = z(ln(x-a))$$

$$y' = (z(t(x)))'_x = z'_t t'_x = e^{-t}z'$$

$$y'' = e^{-2t}(z'' - z')$$

$$y''' = e^{-3t}(z''' - 3z'' + 2z')$$

Линейни нормални системи с постоянни коефициенти от 1ви ред
Пример:

$$x' = 2x - y + z$$

$$y' = 2x + 2y$$

$$z' = 2z^2$$

Нехомогенни линейни системи
Пример:

$$x' = 2x - y + z - e^t$$

$$y' = 2x + 2y$$

$$z' = 2z^2 + e^{-t}$$

Фазови портрети на линейни автономни системи в равнината:

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

Устойчивост в смисъл на Ляпунов и асимитрична устойчивост

Нека (a,b) е равновесна точка, точка (a,b) е устойчева по Ляпунов, ако за всяка околност у, съществува нейна околност v=u, такава че за всяка точка $(x_0, y_0) \in v$, решението (x(t),y(t)) на системата,което при b=0 минава през точка (a,b)

1)системата е дефинирана за т >=0

2)(x(t),y(t)) $\in u$ за t >= 0

В противен случай (a,b) е неустойчева

точка (a,b) е асимитрично устойчева ако е уст по Ляпунов , т.е. са изпълнени горните 2 условия

Нелинейни автономни системи

Устойчивост по 1во приближение:

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

Нека (a,b) е равновесна т => f(a,b)=0,g(a,b)=0=>f(a,b)=g(a,b)=0

Развиваме f и g в ред на Тейлър в околност на точка (a,b)

$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$+нелинейна част

$g(x, y) = g(a, b) + g'_x(a, b)(x - a)g'_y(a, b)(y - b)$+нелинейна част.

Системата:

$$x' = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$
$$y' = g'_x(a, b)(x - a) + g'_y(a, b)(y - b)$$

се нарича първо приближена система в околността на (a,b)

Нека L е Якобианата:

$$\begin{bmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ g'_x(x, y) & g'_y(x, y) \end{bmatrix}$$

Системата се записва по следния начин:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = L(a, b) \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

Ако всички собствени стойности на L(a,b) са с отрицателна реална част => точка (a,b) е асимптотично устойчева за нелинейната система

ако съществува сосбствена стойност на L(a,b) с положителна реална част, то точка (a,b) е неустойчева за нелинейната система

Първи интеграл

Жорката

Частни диферениални уравнения от първи ред

Жорката