10. Rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky. Turingovy stroje. Pojem nerozhodnutelnosti a částečné rozhodnutelnosti.

Turingovy stroje

Turingův stroj byl navržen dlouho předtím, než se objevil první počítač. Motivací pro jeho definici byla snaha přesně rozlišit co je a co není vyčíslitelné, tj. co lze a co nelze efektivně vypočítat. Z toho vyplynuly základní požadavky: zaprvé, každý výpočet se musí dát reprezentovat konečným způsobem. Zadruhé, výpočet se má skládat z diskrétních kroků, přičemž každý z nich je mechanicky realizovatelný.

Turingov stroj má konečnú množinu stavov *Q*, pásku, ktorá je rozdelená na jednotlivé políčka, a hlavu, ktorá sa môže po páske pohybovať doľava a doprava, čítať a zapisovať symboly. Na každom políčku pásky je zapísaný práve jeden z konečne mnoho páskových (pracovných) symbolov.
Páska je jednosmerne nekonečná. Na najľavejšom políčku je zapísaný symbol ľavého konca pásky $\triangleright$. Na začiatku výpočtu je na prvom až *n*-tom ($n \geq 0$) políčku pásky zapísaný vstupný reťazec. Ostatných nekonečne mnoho políčok napravo od vstupu je prázdnych (znak $\sqcup$).
Výpočet začína v počiatočnom stave q_0, pričom hlava sníma nulté políčko obsahujúce značku $\triangleright$. Krok výpočtu spočína v tom, že stroj v závislosti na momentálnom stave a symbolu snímaného hlavou:

1. zmení svoj stav (resp. ho môže zmeniť)
2. zapíše symbol na políčko snímané hlavou (čím prepíše symbol, ktorý tam bol predtým)
3. posunie hlavu o jedno políčko doprava alebo doľava

Spôsob, akým sa má zmeniť stav, prepísať symbol a posunúť hlava, predpisuje prechodová funkcia δ. $\delta(q, a) = (p, X, R)$ teda znamená, že ak stroj v stave *q* sníma symbol *a*, tak prejde do stavu *p*, symbol *a* prepíše symbolom *X* a hlavu posunie o jedno políčko doprava (R - right, L - left). Stroj akceptuje vstupný reťazec, ak prejde do stavu q_{accept}, zamieta, ak prejde do stavu q_{reject}.
Na niektorých vstupoch môže stroj bežať nekonečne dlho bez toho, aby vstupné slovo akceptoval alebo zamietol - v tom prípade stroj *cyklí*. Turingov stroj sa nazýva ***úplný*** práve vtedy, keď pre každý vstup zastaví.

Jazyk akceptovaný Turingovým strojom *M* definujeme ako množinu reťazcov, ktoré *M* akceptuje:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M\ akceptuje\ w\}$$

Ak je *M* úpný, hovoríme, že jazyk *L(M)* je *rozhodovaný* strojom *M* alebo že stroj *M rozhoduje jazyk L(M)*.

<u>Vzťah TS ku gramatikám Chomského hierarchie</u>

Triedy jazykov, ktoré sa dajú generovať gramatikami typu 0, resp. akceptovať Turingovými strojmi sú si rovné a tvoria práve triedu rekurzívne spočetných jazykov

Formálně, Turingův stroj (TM) je 9-tice $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \triangleright, \sqcup, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ kde:

- Q je konečná množina *stavů*;
- Σ je konečná množina *vstupních symbolů*;
- Γ je konečná množina *páskových (pracovních) symbolů*, obsahující jakou svou podmnožinu abecedu Σ;
- $\triangleright \in \Gamma \setminus \Sigma$ je *levá koncová značka*;
- $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$ je symbol označující *prázdné políčko*;
- $\delta : (Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ je *totální přechodová funkce*;
- $q_0 \in Q$ je *počáteční stav*;
- $q_{accept} \in Q$ je *akceptující stav*;
- $q_{reject} \in Q$ je *zamítající stav*;

Navíc požadujeme, aby Turingův stroj nikdy nepřepsal levou koncovou značku jiným symbolem a aby nikdy neposunul svou hlavu vlevo od políčka obsahujícího levou koncovou značku. Formálně, požadujeme aby pro každé $q \in Q$ existoval stav $p \in Q$ takový, že

$$\delta(q, \triangleright) = (p, \triangleright, R).$$

Množina stavů spolu s přechodovou funkcí se někdy souhrnně označuje jako *řídicí jednotka* Turingova stroje.

<u>Príklad na TM</u>

Zadanie: Navrhnete Turingov stroj rozhodujúci jazyk $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, ktorý nie je bezkontextový.
Idea riešenia: Stroj najskôr posúva svoju hlavu až na koniec vstupného reťazca a kontroluje, či je zapísaný na páske v tvare $a^* b^* c^*$. Pritom nemení obsah pásky (zapíše prečítaný symbol). Keď hlava prečíta prvé prázdne políčko, začne sa posúvať doľava až na ľavý koniec pásky. Nasleduje cyklus, v ktorom hlava „vymaže“ (prepíše symbolom X) jeden symbol *a*, jeden *b* a jeden *c* a vráti sa na ľavý koniec pásky. Ak vstupný reťazec patrí do jazyka *L*, stroj nakoniec vymaže na vstupnej páske všetky symboly *a, b, c* a akceptuje. V opačnom prípade zamietne.

Rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky

Jazyk *L* z množiny *Σ** se nazývá:

- **rekurzivně spočetný (RE, třída L_0)** – právě tehdy, když $L = L(M)$ pro nějaký Turingův stroj *M*.
- **rekurzivní (REC)** – právě tehdy když $L = L(M)$ pro nějaký *úplný* Turingův stroj *M*. (každé slovo nad vstupní abecedou buď akceptuje nebo zamítá)

Ke každému rekurzivnímu jazyku *L* existuje Turingův stroj, který jej rozhoduje tj. výpočet je na každém vstupním slovu konečný.

Rekurzivně spočetný jazyk splňuje pouze slabší podmínku, musí pro něj existovat TS, který slova z jazyka akceptuje, ale slova, která z jazyka nejsou, buď zamítá nebo na nich cyklí (nekonečný výpočet).

Vlastnosti rekurzivních a rekurzivně spočetných jazyků

Třídy rekurzivních a rekurzivně spočetných jazyků jsou uzavřeny na operace **sjednocení**, **průnik**, **zřetězení** a **iteraci**.

Třída rekurzivních jazyků je navíc uzavřena proti **doplňku**.
Ak L je jazyk akceptovaný *úplným* TM, stroj akceptujúci *co-L* zosrojíme jednoducho tak, že v definícii prechodovej funkcie δ zameníme navzájom akceptujúci stav q_{accept} a zamietajúci stav q_{reject}.

Postova věta: Pokud jsou jazyk L a jeho komplement $co - L$ rekurzivně spočetné, pak jsou rekurzivní. Postova veta je známa aj ako tvrdenie: *L je rekurzívny* ⇔ *L a co-L sú rekurzívne*
Dôsledkom Postovej vety je, že *trieda rekurzívne spočetných jazykov nie je uzavretá na komplement*. Ak by platil opak, triedy rekurzívnych a rekurzívne spočetných jazykov by sa rovnali.

Pojem nerozhodnutelnosti

Problém určení, zda daný řetězec má vlastnost *P* je (lze ztotožnit s množinou slov, která mají vlastnost P):

- **rozhodnutelný** – právě, když množina řetězců majících vlastnost *P* je rekurzivní, tj. existuje TS *M*, který každý řetězec s vlastností *P*, akceptuje a každý řetězec, který vlastnost *P* nemá, zamítá. (*M* rozhoduje jazyk obsahující prve všetchna ta slova, která mají vlastnost *P*)
- **nerozhodnutelný** – právě když není rozhodnutelný
- **částečně rozhodnutelný** – právě když množina všech řetězců majících vlastnost *P,* je rekurzivně spočetná, tj. existuje TS *M*, který akceptuje každý řetězec mající vlastnost *P,* ale zamítá nebo cyklí na řetězci, který tuto vlastnost nemá.

Namísto „problém určit, zda řetěz w má vlastnost P je rozhodnutelný (částečně rozhodnutelný)“ zkráceně říkáme, že *vlastnost P je rozhodnutelná* resp. že *problém P je rozhodnutelný* (částečně rozhodnutelný).
Ačkoli vlastnost rekursivní resp. rekursivně spočetný vypovídá o množinách, zatímco rozhodnutelnost resp. semirozhodnutelnost je vlastnost problémů, jsou oba pojmy úzce spjaty. Platí mezi nimi tato ekvivalence:

$$\begin{array}{rcl}
P \text{ je rozhodnutelný} & \Longleftrightarrow & \text{jazyk } \{w \mid w \text{ má vlastnost } P\} \text{ je rekursivní} \\
L \text{ je rekursivní} & \Longleftrightarrow & \text{problém „}w \overset{?}{\in} L\text{“ je rozhodnutelný} \\
P \text{ je semirozhodnutelný} & \Longleftrightarrow & \text{jazyk } \{w \mid w \text{ má vlastnost } P\} \text{ je rekursivně spočetný} \\
L \text{ je rekursivně spočetný} & \Longleftrightarrow & \text{problém „}w \overset{?}{\in} L\text{“ je semirozhodnutelný}
\end{array}$$