IB102 – úkol 4 **Odevzdání: 26. 10. 2009**

Vypracoval(a): Martin Vavrušák UČO: 325408

Skupina: 14

1. [**2 body**] Nechť $\Sigma = \{a, b\}$ je abeceda. Rozhodněte, zda jsou relace $\sim_1, \sim_2$ na Σ^* pravé kongruence. Své tvrzení dokažte.

$$u \sim_1 v \iff u = v \text{ nebo } (|u| \cdot |v|) \bmod 2 = 0$$

$$u \sim_2 v \iff (\#_b(u) + \#_b(v)) \bmod 2 = 0$$

$u \sim_1 v \Leftrightarrow u = v$ nebo $(|u| \cdot |v|) \bmod 2 = 0$

~ je relace ekvivalence tz. Musí být reflexivní, symetrická, tranzitivní

tranzitivita: $u \sim v$ a $v \sim w \Rightarrow u \sim w$

mějme $u = a$
$v = bb$
$w = bbb$

potom: $u \sim v \Leftrightarrow a = bb$ nebo $(|a| \cdot |bb|) \bmod 2 = 0$ tedy $u \sim v$ podle 2 podmínky
$v \sim w \Leftrightarrow bb = bbb$ nebo $(|bb| \cdot |bbb|) \bmod 2 = 0$ tedy $v \sim w$ podle 2 podmínky

z tranzitivity tedy musí platit:

$u \sim w \Leftrightarrow a = bbb$ nebo $(|a| \cdot |bbb|) \bmod 2 = 0$

spor! $a \neq bb$ a $(|a| \cdot |bbb|) \bmod 2 = 1$

Relace tedy není tranzitivní a tedy to není ani relace ekvivalence. Proto $\sim_1$ není pravá kongruence.

$u \sim_2 v \Leftrightarrow (\#_b(u) + \#_b(v)) \bmod 2 = 0$
neboli součet délek prvního a druhého slova je sudý.
~ je relace ekvivalence tz. Musí být reflexivní, symetrická, tranzitivní

Pro všechny $u,v,w \in \Sigma^*$
Reflexivní: $u \sim u \Leftrightarrow (\#_b(u) + \#_b(u)) \bmod 2 = 0$ součtem 2 lichých (sudých) čísel vždy dostaneme sudé číslo. Je tedy reflexivní.

Symetrická: $u \sim v$ a $v \sim u$ $\Leftrightarrow (\#_b(u) + \#_b(v)) \bmod 2 = 0$ a $(\#_b(v) + \#_b(u)) \bmod 2 = 0$
Obrácením relace se délka slov nemění a proto součet stále bude sudý.

Tranzitivní: $u \sim v$ a $v \sim w \Rightarrow u \sim w$

1. $u \sim v \Rightarrow \#_b(u)$ a $\#_b(v)$ je lichý $\Rightarrow \#_b(w)$ je lichý $\Rightarrow (\#_b(u) + \#_b(w)) \bmod 2 = 0$
2. $u \sim v \Rightarrow \#_b(u)$ a $\#_b(v)$ je sudý $\Rightarrow \#_b(w)$ je sudý $\Rightarrow (\#_b(u) + \#_b(w)) \bmod 2 = 0$

~ je tedy relace ekvivalence.

$u,v,w \in \Sigma^*$: $u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$
$u \sim v$ pokud
1. $\#_b(u)$ a zároveň $\#_b(v)$ je lichý
2. $\#_b(u)$ a zároveň $\#_b(v)$ je sudý

a)
$w = a^k$ $k \in N$ Přiřazením libovolného počtu „a“ se počet „b“ nezmění
proto $uw \sim vw \Rightarrow (\#_b(a^k v) + \#_b(a^k u)) \bmod 2 = 0$

b)
$w = b^l$ $l \in N$ Přiřazením stejného počtu „b“ se nezmění parita součtu
proto $uw \sim vw \Rightarrow (\#_b(b^l v) + \#_b(b^l u)) \bmod 2 = 0$

$\sim_2$ je tedy pravá kongruence.

IB102 – úkol 4 Odevzdání: 26. 10. 2009

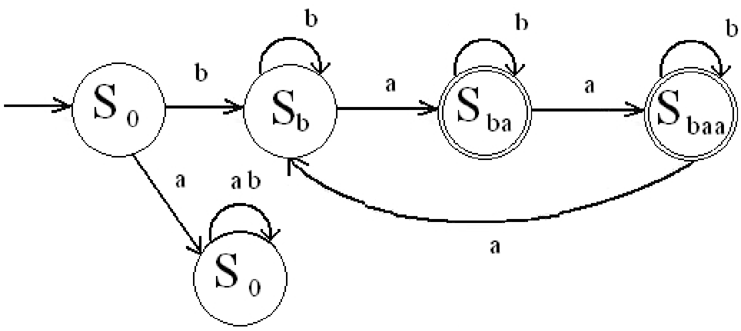
Vypracoval(a): Martin Vavrušák UČO: 325408
Skupina: 14

2. [**2 body**] Nechť $\Sigma = \{a, b\}$ je abeceda a

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ začíná písmenem } b \text{ a } \#_a(w) \text{ není dělitelný třemi}\}$$

je jazyk nad touto abecedou.

- Popište třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$ a určete index $\sim_L$.
- Najděte relaci $\sim$ na Σ^* takovou, že $\sim \neq \sim_L$, $\sim$ je pravou kongruencí s konečným indexem a L je sjednocením některých tříd $\Sigma^*/\sim$.



$u \sim_L v \Leftrightarrow$
- slova začínající na „a“ tz. $\{a\}.\{a,b\}^*$
- slova obsahující pouze „b“ tz. $\{b\}^*$
- slova začínající „b“ kde #a(w) mod 3 = 0
- slova začínající „b“ kde #a(w) mod 3 = 1
- slova začínající „b“ kde #a(w) mod 3 = 2

$u \sim v \Leftrightarrow$ $\underline{u}$ začíná na „b“ a $\#_a(u) \bmod 4 \neq 0$ a $\underline{v}$ začíná na „b“ a $\#_a(u) \bmod 4 \neq 0$