Zadanie 3.3
zagadnienie: y' = y(x) – x – sin(x) + cos(x) + 1, y(0) = 1
rozwiązanie: y(x) = x + e^x + sin(x)
zadanie:

- Napisać program realizujący metodę Eulera
- Napisać program realizujący metodę Heuna
- Narysować wykres rozwiązania dokładnego oraz wyników metod numerycznych na jednym wykresie
- Narysować wykresy błędów metod numerycznych na jednym wykresie, aby porównać metody

1. Teoria

Metoda Eulera – metoda według której „kierunek” jest wyrażony przez pierwszą pochodną funkcji:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i)$$

W takim razie mamy:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

Tak więc pierwsza pochodna funkcji to znaczy prawa strona równania różniczkowego, wyznacza kierunek położenia nowego punktu rozwiązania. Jest to tzw. predyktor. Odległość między predyktorem a rozwiązaniem dokładnym stanowi błąd metody. Ze względu na swoją prostotę metoda Eulera jest łatwa do zastosowania. Dobrze oddaje charakter rozwiązania ale może być obarczona dużym błędem.

Metoda Heuna – W tej metodzie zamiast stałej wartości pochodnej obliczonej na początku przedziału, jak to było w przypadku metody Eulera, oblicza się pochodną również na końcu przedziału. Pierwsze oszacowanie to predyktor a następne to korektor. Metoda ta dzięki zabiegowi numerycznemu daje sporą zmiane w dokładności wyniku i jest znacznie dokładniejsza niż klasyczna metoda Eulera
Predyktor wyrażamy stosując metode Eulera:

$$\frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$$

Oznaczając przez

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^0_{i+1})$$

mamy

$$y' = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} \cdot h$$