Martin Zelek
Robert Knop
gr2 Aplikacje internetowe i bazy danych

Zadanie 3.3
zagadnienie: y' = y(x) – x – sin(x) + cos(x) + 1, y(0) = 1
rozwiązanie: y(x) = x + e^x + sin(x)
zadanie:

- Napisać program realizujący metodę Eulera
- Napisać program realizujący metodę Heuna
- Narysować wykres rozwiązania dokładnego oraz wyników metod numerycznych na jednym wykresie
- Narysować wykresy błędów metod numerycznych na jednym wykresie, aby porównać metody

## 1. Teoria

**Metoda Eulera** – metoda według której „kierunek” jest wyrażony przez pierwszą pochodną funkcji:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i)$$

W takim razie mamy:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

Tak więc pierwsza pochodna funkcji to znaczy prawa strona równania różniczkowego, wyznacza kierunek położenia nowego punktu rozwiązania. Jest to tzw. predyktor. Odległość między predyktorem a rozwiązaniem dokładnym stanowi błąd metody. Ze względu na swoją prostotę metoda Eulera jest łatwa do zastosowania. Dobrze oddaje charakter rozwiązania ale może być obarczona dużym błędem.

**Metoda Heuna** – W tej metodzie zamiast stałej wartości pochodnej obliczonej na początku przedziału, jak to było w przypadku metody Eulera, oblicza się pochodną również na końcu przedziału. Pierwsze oszacowanie to predyktor a następne to korektor. Metoda ta dzięki zabiegowi numerycznemu daje sporą zmiane w dokładności wyniku i jest znacznie dokładniejsza niż klasyczna metoda Eulera
Predyktor wyrażamy stosując metode Eulera:

$$\frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$$

Oznaczając przez

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^0_{i+1})$$

mamy

$$y' = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} \cdot h$$

## 2. Przykładowe rozwiązanie zadania

a) Metoda Eulera

Przykład metody Eulera

$b = 2$

$h = 0,5$

$x_0 = 0$

$x_1 = 0,5$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1,5$

$y(0) = 1$

$f(x,y) = y - x - \sin(x) + \cos(x) + 1$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

---

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$y_1 = 1 + 0.5 \cdot f(0,1) =$
$= 1 + 0,5 \cdot (1 - 0 - 0 + 1 + 1) = 2,5$

$x_1 = 0,5 \quad y_1 = 2,5$

$y_2 = 2,5 + 0,5 \cdot f(0,5\,,\,2,5) =$
$= 2,5 + 0,5 \cdot (2,5 - 0,5 - 0,4794 + 0,8776 + 1) =$
$= 4.1991$

$x_2 = 1 \quad y_2 = 4.1991$

$y_3 = 4.1991 + 0,5 \cdot (4.1991 - 1 - 0.8415 + 0,5403 + 1) =$
$= 6.1481$

$x_3 = 1,5 \quad y_3 = 6.1481$

$y_4 = 6.1481 + 0,5 \cdot (6.1481 - 1,5 - 0.9975 + 0.0707 + 1) =$
$= 8.5088$

b) Metoda Heuna

Przykład metody Heuna

$b = 1$

$h = 0,5$

$x_0 = 0$

$x_1 = 0,5$

$y(0) = 1$

$f(x,y) = y - x - \sin(x) + \cos(x) + 1$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n))\right)$$

---

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$f(x_0, y_0) = 1 - 0 - 0 + 1 + 1 = 3$

$y_1 = 1 + 0,25 \cdot (3 + f(0 + 0,5, 1 + 0,5 \cdot 3)) =$

$= 1 + 0,25 \cdot (3 + f(0,5, 2,5)) =$

$f(0,5, 2,5) = 2,5 - 0,5 - 0,4794 + 0,8776 + 1 = 3.3982$

$= 1 + 0,25 \cdot (3 + 3,3982) = 2,5996$

$x_1 = 0,5 \quad y_1 = 2,5996$

$f(x_1, y_1) = 2.5996 - 0,5 - 0,4794 + 0,8776 + 1 =$
$= 3,4978$

$y_2 = 2,5996 + 0,25(3.4978 + f(1, 4.3485)) =$

$f(1, 4.3485) = 4,3485 - 1 - 0,8415 + 0,5403 + 1 =$
$= 4.0473$

$= 2,5996 + 0,25 \cdot (3.4978 + 4.0473) = 4.4859$